

INSTITUTO SUPERIOR PEDAGÓGICO
"FRANK PAÍS GARCÍA"
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA-COMPUTACIÓN

**UNA VARIANTE PARA LA ESTRUCTURACIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA
APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA, A PARTIR DE UNA NUEVA FORMA DE
ORGANIZAR EL CONTENIDO, EN LA ESCUELA
MEDIA CUBANA.**

**Tesis presentada en opción del grado científico de Doctor en
Ciencias Pedagógicas.**

AUTOR: Lic. ALFREDO REBOLLAR MOROTE

TUTORA: Dra. CELIA RIZO CABRERA

Julio, 2000

INDICE

INTRODUCCIÓN	3
CAPÍTULO I: LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA BASADA EN PROBLEMAS.	9
INTRODUCCIÓN.....	9
1.1. CORRIENTES ACTUALES EN LA MATEMÁTICA EDUCATIVA.....	9
1.1.1. El objeto de la Matemática como ciencia.....	9
1.1.2. El objeto de la Matemática Educativa.	12
1.1.3. La resolución de problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje.....	16
1.1.4. El Conocimiento Matemático según Ed Dubinsky.....	24
1.2. LA ESTRUCTURACIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE.....	26
1.3. LA ESTRUCTURACIÓN DEL CONTENIDO DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.....	30
1.4. LA GLOBALIZACIÓN DEL APRENDIZAJE.....	31
1.5. EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO.....	37
1.6. CONSIDERACIONES SOBRE LA SELECCIÓN Y ORDENAMIENTO DEL CONTENIDO DE LA ASIGNATURA.....	39
CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.....	44
CAPITULO II: VARIANTE PARA LA ESTRUCTURACIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE Y DEL CONTENIDO DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.	46
INTRODUCCIÓN.....	46
2.1. ESENCIA DE LA VARIANTE PROPUESTA.....	46
2.2. LOS PROBLEMAS ESENCIALES O GENERADORES DEL CONTENIDO DE LA ASIGNATURA.....	49
2.3. FUNCIONES DE LOS PROBLEMAS ESENCIALES.....	51
2.4. LOS PROBLEMAS ESENCIALES, LOS OBJETIVOS Y EL CONTENIDO DE LA ASIGNATURA.....	53
2.6. LOS PROBLEMAS ESENCIALES EN LA UNIDAD TEMÁTICA.....	59
2.7. LOS MOMENTOS ESENCIALES EN LA ESTRUCTURACIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA— APRENDIZAJE.....	61
2.8. LA CLASE DE MATEMÁTICA.....	63
CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.....	71
CAPITULO III: LA DETERMINACIÓN DE LOS PROBLEMAS ESENCIALES EN EL CONTENIDO DE LA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA MEDIA.....	72
INTRODUCCIÓN.....	72
3.1. LOS PROBLEMAS ESENCIALES EN EL CONTENIDO DE LA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA MEDIA.....	72
3.1.1. Perfeccionamiento del procedimiento de cálculo.....	73
3.1.2. Perfeccionamiento del traslado y reproducción de polígonos.....	76
3.1.3. Perfeccionamiento de la reproducción de cuerpos geométricos.....	79
3.1.4. Perfeccionamiento de la ubicación sucesiva de puntos.....	81
3.1.5. Perfeccionamiento de los pronósticos a partir de datos numéricos.....	83
3.2. EJEMPLO DE SISTEMA DE ACTIVIDADES Y PROBLEMAS PARA DESARROLLAR LA VARIANTE PROPUESTA PARA CIERTOS TÓPICOS.....	85
CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.....	94
CONCLUSIONES.....	95
RECOMENDACIONES.....	96
BIBLIOGRAFÍA.....	97
ANEXO 1. SISTEMA DE PLANTILLAS.....	107
ANEXO 2. SISTEMA DE PLANTILLAS.....	1108
ANEXO 3. SISTEMA DE CIRCUNFERENCIAS.....	11109
ANEXO 4. MODELO DE EJERCICIO PARA LA EJERCITACIÓN DE LA ACCIÓN DE COMPARAR SEGMENTOS.....	1120
ANEXO 5. SISTEMA DE PLANTILLAS.....	1142
ANEXO 6. SISTEMA DE DATOS PARA CONSTRUIR TRIÁNGULOS.....	1153

ANEXO 7. PARA LA ROTACIÓN.	1164
ANEXO 8. OPERACIONES CON ÁNGULOS.	1175
ANEXO 9. SISTEMA DE PLANTILLAS.	1197
ANEXO 10. SISTEMA DE PLANTILLAS.	1208
ANEXO 11. TABLA DE DATOS.	1219
ANEXO 12. SISTEMA DE FIGURAS.	1220
ANEXO 13. SISTEMA DE PLANTILLAS.	1231
ANEXO 14. SISTEMA DE PLANTILLAS.	1242
ANEXO 15. ESTUDIO DE LOS CUADRILÁTEROS.	1253

INTRODUCCIÓN

Una de las dificultades más significativas en la formación matemática de los alumnos de la enseñanza general, politécnica y laboral de la provincia Santiago de Cuba y del país, es su pobre preparación para enfrentar la resolución de ejercicios de aplicación, particularmente aquellos que constituyen problemas.

La constatación realizada, a través de diferentes comprobaciones realizadas a los alumnos de la enseñanza media, ha servido para corroborar la dificultad señalada, detectándose las serias limitaciones para la búsqueda de una vía de solución de cualquier tipo de ejercicio y principalmente la pobre preparación para argumentar y llegar a conclusiones como resultado de la idea de la solución escogida, unido al hecho de que el desarrollo de las habilidades matemáticas no alcanzan el nivel de fijación y sistematización que satisfaga los objetivos de los programas de enseñanza.

El estudio de las dificultades detectadas ha promovido la necesidad de valorar la naturaleza de las causas de que tanto los profesores como los alumnos no alcancen resultados favorables en su nivel de formación para la resolución de problemas.

El estudio de la Metodología de la enseñanza de la Matemática en lo que se refiere al tratamiento de los ejercicios, ha arrojado como conclusión: las grandes posibilidades para la estructuración del proceso de solución según las concepciones de Werner Jungk, Wolfgang Zillmer y George Polya, que son las más difundidas en el país; en ellas se describen de una manera muy práctica los procesos heurísticos que transcurren durante la búsqueda de la idea de la solución y la solución en sí, pero con la característica de que conciben el tratamiento de cada tipo de ejercicio, según el esquema heurístico propuesto.

Esto significa que el profesor planifica para cada tipo de ejercicio cómo proceder en el tratamiento de su solución, teniendo en cuenta si es un ejercicio formal o con texto, de demostración, de cálculo, construcción u otro.

Por otra parte, la Metodología no se ocupa plenamente de cómo estructurar los diferentes niveles de organización de un curso (unidades temáticas, sistemas de clases y clases) que garantice un tratamiento sistemático y con una adecuada integración de los modos de actuación que deben asimilar los alumnos, es decir, estructurar los sistemas de clases, unidades temáticas y cursos a partir de la determinación de los modos de actuar, los métodos o estrategias de trabajo (habilidades más generales) y los procedimientos matemáticos en los que el profesor y los alumnos deben concentrar la mayor atención.

En tal sentido, el estudio de complejos de materia ayuda en la comprensión de las líneas directrices del programa, pero no concretan la labor de planificación y dirección que realiza el profesor en la escuela y que se corresponden con los documentos de la planificación (programas, libros de textos y orientaciones metodológicas) que precisan la información en estos niveles de organización.

Un rasgo de la planificación y dosificación es que la resolución de problemas y de los ejercicios integradores del contenido estudiado aparecen, generalmente, al finalizar los sistemas de clases y unidades temáticas. De esta forma, el tiempo de que el alumno dispone para entrenarse en esta actividad de forma independiente tiende a ser mínimo, lo que conduce a pensar que no tiene suficiente oportunidad para su fijación y aplicación.

Para la resolución de ejercicios matemáticos hace falta un sistema de conocimientos activos, integrados, utilizables; sin embargo, la forma en que se planifican y dosifican los contenidos, según se señala, puede ser una causa de que no se logre una adecuada asimilación de su sistema de conocimientos y habilidades, teniendo en cuenta que una posición consciente hacia la solución de los ejercicios depende en alto grado de la capacidad del alumno para seleccionar y reestructurar los conocimientos y métodos necesarios.

Las insuficiencias en la preparación de los alumnos para resolver problemas matemáticos y la influencia que en esto tiene la estructuración del contenido y el lugar que ocupan las actividades de aprendizaje dirigidas a la comprensión, análisis y resolución de los problemas es el **problema científico de esta investigación**.

En este sentido existen experiencias de pedagogos como el belga O. Decroly, el suizo Jean Piaget, la italiana María Montessori y el ucraniano V. F. Shatalov, los estadounidenses Alan Schoenfeld y Ed Dubinski; que se han orientado de una u otra forma a la búsqueda de vías para formar en los alumnos los sistemas de conocimientos con una adecuada estructuración e integración con un resultado significativo en la preparación para la resolución de problemas con un mayor nivel de independencia.

El objeto de la investigación es el proceso de enseñanza de la Matemática en la escuela media y el campo de acción es el contenido de la enseñanza de la Matemática en la escuela media.

Como paso inicial de la investigación partimos de caracterizar ***la estructuración del contenido de la enseñanza como la acción encaminada a establecer un modelo o esquema que exprese la secuencia lógica, interrelación, agrupación o distribución de los conceptos, relaciones y procedimientos y los modos de actuación para su***

construcción y asimilación en función de la resolución de problemas en su movimiento por los eslabones didácticos del proceso docente educativo.

Esto significa que no se reduce a seleccionar o disponer sólo los conocimientos, también incluye los procesos que garantizan el modo de actuar con los conocimientos y las cualidades de la personalidad que en estos procesos se desarrollan con el propósito de que el alumno se apropie de ese conocimiento.

El objetivo de la investigación es:

Diseño de una variante para la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática con una nueva forma para el tratamiento didáctico del contenido a partir de problemas, que permitan generar las ideas esenciales, se construyan los conceptos, relaciones y procedimientos básicos de una manera integrada y significativa para el alumno.

Para el cumplimiento del objetivo se plantearon las siguientes preguntas científicas:

- ❖ **¿Cómo estructurar la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática a partir del planteamiento y solución de problemas que estimulen la comprensión y posibilidades de aplicación?**
- ❖ **¿Cómo estructurar el contenido para desarrollar tal proceso?**
- ❖ **¿Qué criterios pueden servir al profesor para la selección de los problemas en la enseñanza del contenido de cada unidad temática?**
- ❖ **¿Es posible determinar esos problemas para todos los contenidos del programa de la Matemática en la escuela media?**
- ❖ **¿Cómo orientar la actividad metodológica de los profesores para la aplicación de una variante de enseñanza basada en la resolución de problemas?**

Las tareas científicas realizadas son:

- ❖ Estudiar las fuentes de información para la fundamentación de la variante propuesta, antecedentes del problema de investigación y situación actual.
- ❖ Elaborar la variante que constituye el modelo teórico para la estructuración de la enseñanza de la Matemática en la escuela media.
- ❖ Elaborar ejemplos para la demostración de la aplicabilidad de la variante en un contenido seleccionado de la Matemática en la Secundaria Básica.
- ❖ Validación de las propuestas en la práctica.

El resultado a defender es:

Fundamentar que la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática y su contenido, en la escuela media, puede realizarse a partir del planteamiento y solución de problemas.

Los métodos de investigación aplicados son esencialmente teóricos aunque se aplicaron algunos de tipo empírico.

Los métodos teóricos son:

- ❖ Método de análisis y síntesis: para el estudio de los componentes del proceso de enseñanza, su estructura y el proceso de resolución de problema como proceso analítico-sintético.
- ❖ Método hipotético-deductivo: para deducir de las diferentes teorías psicológicas y pedagógicas, tendencias actuales y otros trabajos de investigación, los fundamentos para la estructuración del proceso de enseñanza, en particular de la Matemática.
- ❖ Método de análisis histórico y lógico: para analizar el comportamiento del problema de la investigación en las diferentes posiciones estudiadas y la evolución de las soluciones propuestas.
- ❖ Método de modelación: para ofrecer una variante para la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje y el contenido de la enseñanza, como modelo teórico, así como sugerencias metodológicas para su aplicación en la escuela media.
- ❖ Método de enfoque sistémico: para argumentar, en la estructura del proceso de enseñanza, cómo se forman los sistemas de conocimientos y habilidades.
- ❖ Análisis de las fuentes de información: para el estudio de la situación actual de la enseñanza de la Matemática, la concepción de los programas e indicaciones para la estructuración del contenido en los documentos de la planificación.

Los métodos empíricos son:

- ❖ Entrevistas: para someter a valoración la variante elaborada y la valoración de su aplicabilidad en las condiciones actuales de la escuela media.

Los métodos estadísticos son:

- ❖ Aplicación del método de escalas, para asignar una escala en la que se establezca la influencia que tiene cada aspecto a evaluar en la valoración de las partes o componentes de la variante propuesta y los resultados de su aplicación en la práctica.

El aporte de la investigación, desde el punto de vista teórico, está en la propuesta y fundamentación de una variante para estructurar el proceso de enseñanza aprendizaje de la

Matemática y su contenido a partir del planteamiento y solución de problemas, las funciones de esos problemas y consideraciones metodológicas generales para la aplicación

Desde el punto de vista práctico la investigación aporta sugerencias al profesor para la aplicación de la variante propuesta y además una muestra de la determinación de problemas para la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje en la escuela media, que sirva para la comprensión más profunda de los programas actuales de la asignatura.

La tesis está estructurada en una introducción, tres capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos.

En el capítulo 1, que se ha titulado “La enseñanza de la Matemática basada en problemas”, se hace un amplio análisis sobre la resolución de problemas, desde su papel en el desarrollo de la Ciencia Matemática y, sobre esa base, cómo las posiciones epistemológicas y filosóficas han penetrado en los diversos modelos educativos en la educación matemática contemporánea. Las funciones de la resolución de problemas, en relación con la estructura del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, se debaten partiendo de las concepciones que aportan el aprendizaje significativo, las líneas directrices, los estándares curriculares y los programas de la asignatura, vigentes en la escuela media.

En el capítulo 2, que se titula “Variante para la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática”, se presenta un principio estructurador, se da la caracterización de los problemas esenciales para la Matemática en la escuela media, sus funciones y la relación con los objetivos y el contenido como categorías didácticas así como una propuesta para la organización del proceso de enseñanza aprendizaje en una unidad temática y sistemas de clases a partir del trabajo con sistemas de problemas, en el que se toma en cuenta la formulación de preguntas como recursos heurísticos necesarios en la actividad del alumno.

En el capítulo 3, denominado “La determinación de los problemas esenciales en el contenido de la enseñanza de la Matemática en la escuela media”. se plantean cinco problemas esenciales y se ejemplifican subproblemas a partir de los cuales puede darse tratamiento al contenido siguiendo la variante propuesta; además se propone un ejemplo, en el complejo de materia sobre Geometría Plana, de cómo aplicar la variante y, finalmente, se describe la valoración como nivel de constatación de los resultados.

En los anexos, se completa la información sobre la ejemplificación que se realiza en el contenido de la Geometría Plana y aparecen las tablas con los datos y el procesamiento estadístico de la evaluación de los aspectos de la variante y la experiencia realizada, que son objeto de análisis en el capítulo 3.

CAPÍTULO I: LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA BASADA EN PROBLEMAS.

INTRODUCCIÓN.

La escuela constituye la institución que, de forma ineludible, tiene la tarea de preparar a niños y jóvenes para enfrentar la resolución de problemas como un objetivo instructivo y formativo, en el afán de alcanzar una formación integral para el desempeño en su vida laboral.

El reconocimiento, por investigadores de diferentes tendencias y en diferentes sistemas educativos, de que la escuela no logra de forma óptima satisfacer tales exigencias, ocupa hoy el centro de interés en la mayoría de los eventos y foros internacionales en la discusión de la temática, lo que ha conducido al estudio y la búsqueda de alternativas para estructurar el proceso de enseñanza aprendizaje de tal forma que resolver problemas sea objeto de enseñanza y objeto de aprendizaje.

En este capítulo, se exponen ideas, concepciones y valoraciones, que proporcionan la fundamentación del lugar que ha ocupado la resolución de problemas, en la construcción de la Ciencia Matemática con sus particularidades y su influencia en la Educación Matemática, que ha marcado en los últimos 30 años las diferentes tendencias o modelos para diseñar los cursos de esta disciplina en la escuela.

El estudio del papel de la resolución de problemas en la estructura del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática es el principal fundamento a partir del cual se analizarán esas tendencias y se propondrá la variante para enseñar y aprender el contenido en la escuela media cubana.

1.1. Corrientes actuales en la Matemática Educativa.

1.1.1. El objeto de la Matemática como ciencia.

La Matemática es una de las ciencias más antiguas cuyo desarrollo se ha estimulado por la actividad productiva de los hombres que, como ciencia particular, con su propio objeto de estudio, ha recibido la mayor influencia de las ciencias naturales para la formación de los nuevos conceptos y métodos matemáticos desde su surgimiento.

En el decursar histórico de la Matemática son muchos los ejemplos que muestran cómo los problemas de las ciencias naturales constituyeron la génesis de importantes teorías como el cálculo diferencial e integral, que surgió como el método de resolución más general de los problemas mecánicos, la teoría de los polinomios en relación con la investigación de

la máquina de vapor y así muchos otros casos pueden ser citados, que demuestran que las matemáticas son el resultado de la actividad productiva de los hombres y que los nuevos conceptos y métodos que conforman sus teorías han tenido sus raíces, en lo fundamental, en problemas concretos de otras ciencias.

La peculiaridad de la relación de la Matemática con otras ciencias, a partir de la aplicación de los métodos matemáticos en las ciencias naturales, en los diferentes períodos de su desarrollo se ha enmarcado en dos facetas, según señala K. Ribnikov en su libro sobre la Historia de la Matemática:

- ❖ La elección del problema matemático, que corresponde aproximadamente al fenómeno o proceso, o sea, del modelo, y el hallazgo del método de su solución;
- ❖ La elaboración de nuevas formas matemáticas, ya que inevitablemente resulta imperfecta la aproximación del modelo matemático construido.¹

Esta peculiaridad en la aplicación de los métodos matemáticos hasta la actualidad se evidencia en el desarrollo de la cibernética, la técnica de cómputo, la matemática discreta, el creciente papel en las ciencias económicas, sociales y otras y el progreso en ello depende de la posibilidad de abstracción en el objeto de estudio y la elección del esquema lógico de los conceptos abstractos que representan el contenido de los procesos y fenómenos considerados.

Casi hasta la mitad del siglo pasado, la Matemática realmente tenía por objeto principal de investigación las propiedades métricas y las relaciones entre distintos tipos de magnitudes, estudiaba las propiedades y relaciones de naturaleza matemática, haciendo abstracción de su contenido cualitativo, por lo que se calificaba como una ciencia cuantitativa.

Estudiosos de la Historia de la Matemática, como A. Aleksandrov, en el afán de diferenciar la Matemática contemporánea de la precedente, destacan su carácter cualitativo, fundamentado en la ampliación de su objeto y la profundización del grado de conocimiento de esos objetos.

Importantes resultados como la geometría hiperbólica no euclidiana por N. Y. Lobachevski y Bolyai y de la geometría elíptica por Riemann, condujeron a una nueva concepción sobre la esencia del espacio matemático y su diferencia del espacio físico. A la

¹ Ríbnikov, K.: Historia de las Matemáticas. Primera edición en Español. Editorial MIR. Moscú. 1987.

geometría contemporánea le interesa analizar las propiedades generales y formales de los objetos, no como objetos idealizados del mundo circundante según Euclides, sino como cualquier sistema de cosas cuyas propiedades y relaciones satisfagan sus axiomas.

El paso a la Matemática Moderna, por la amplia utilización del método axiomático, se produjo después del descubrimiento de las geometrías no euclidianas y la aparición, a finales del siglo XIX, de la teoría abstracta de los conjuntos creada por G. Cantor. La síntesis de las ideas teóricas sobre la teoría de conjuntos con el método axiomático condujo al concepto de **estructura matemática abstracta** que ha sido fundamental para toda la matemática moderna y que sirvió de premisas a un grupo de matemáticos franceses (grupo de N. Bourbaki) para emprender la tarea de construir la matemática existente sobre la base del concepto de estructura, al considerar esta ciencia, en su forma axiomática, como la acumulación de formas abstractas que son aplicables a un conjunto de elementos cuya naturaleza no está definida.

Este paso a la matemática moderna, caracterizado por un mayor crecimiento en los niveles de abstracción de los objetos matemáticos y sus relaciones, constituye un peldaño cualitativamente nuevo en el desarrollo del conocimiento matemático, lo que marca una diferencia cualitativa y radical de la matemática actual con toda la precedente.

El estudio de las estructuras matemáticas contribuyó, en gran medida, a la ampliación del campo de aplicación de modernos métodos matemáticos, algunos de ellos como la teoría de grupos y de las estructuras algebraicas o análisis funcional que son expresiones del desarrollo y generalización de conceptos e ideas de la matemática clásica y otros como la teoría de los juegos y la toma de decisiones que responden a necesidades de las ciencias sociales. La matematización de la ciencia es considerado como un proceso de doble crecimiento de las ciencias concretas y de la matemática, lo que se manifestó en el surgimiento y exitoso desarrollo de ciencias como la física de las partículas elementales, la química cuántica, la biología molecular y muchas otras.

Como rasgo característico de la revolución científico técnica contemporánea, la creciente aplicación de los métodos matemáticos en los más diversos campos de la ciencia y la técnica hace necesario la nueva comprensión del objeto y métodos de la matemática contemporánea. El contenido del objeto de las matemáticas se ha enriquecido en tal forma, que esto ha llevado a una reestructuración y cambio en la totalidad de sus problemas importantes.

Asumimos que el objeto de la Matemática se enriquece en relación indisoluble con las exigencias de la técnica y las ciencias naturales lo que es condición necesaria para comprender el lugar de esta ciencia en la actividad productiva y social de los hombres, que no la reduce sólo a la ciencia abstracta que estudia las relaciones cuantitativas y formas espaciales alejada de la realidad.

La comprensión del objeto de la Matemática contemporánea, de su papel en el desarrollo científico técnico, conduce, a continuación, al análisis de cuál es la Matemática que debe ser aprendida, qué es lo que necesita un hombre de estos tiempos para enfrentar la investigación matemática, pero, esencialmente, para enfrentar la amplia diversidad de otros problemas que precisan de los métodos matemáticos para su solución, desde los problemas domésticos hasta los más complejos problemas científicos.

1.1.2. El objeto de la Matemática Educativa.

La Matemática Educativa comprende aquellos factores que intervienen y hacen posible que la Matemática se enseñe y se aprenda, por lo que en la última década se ha reconocido por diversos autores la influencia determinante que sobre ello ejercen las posiciones filosóficas y las teorías epistemológicas relativas al conocimiento matemático.

En su sentido amplio, no se restringe a la interacción profesor - alumno durante la clase, va más allá a otros factores que intervienen en el proceso de enseñanza aprendizaje como: "el diseño y desarrollo de los planes y programas de estudio, los libros de texto, las metodologías de la enseñanza, las teorías del aprendizaje y la construcción de marcos teóricos para la investigación educativa, que se ponen en práctica a partir de las concepciones filosóficas y epistemológicas que tienen el profesor y los alumnos acerca de las matemáticas".²

La concepción filosófica dominante sobre la Matemática (formalista, realista, constructivista, etc.) ha generado un tipo de actividad matemática en cada etapa de desarrollo de esta ciencia y sobre su base se ha producido una determinada práctica educativa.

En la concepción formalista de la Matemática, por ejemplo, que prevaleció en la primera mitad de este siglo, esta disciplina aparece como un cuerpo estructurado de formas, ajeno al significado de los objetos. Por su parte, en la concepción epistemológica que comprende los objetos de la Matemática en una realidad, que reconoce su existencia

² Moreno, L. Y G. Waldegg: Constructivismo y Educación Matemática. En Educación Matemática. Vol 4 (2). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Agosto, 1992. P. 7

independiente del sujeto, basado en el realismo epistemológico de Platón y Aristóteles, se plantea como consecuencia que conocer Matemática es reconocer los objetos matemáticos mediante procesos de abstracción y generalización en los objetos corpóreos de la naturaleza y bajo esta concepción la actividad matemática se acerca al proceso de descubrimiento del matemático.

Las epistemologías constructivistas han pretendido dar respuestas a esta problemática a partir de la tesis kantiana que postula que cuando el sujeto cognoscente se acerca al objeto de conocimiento (sea material o ideal) lo hace a partir de ciertos supuestos teóricos, de tal manera que el conocimiento es el resultado de un proceso dialéctico entre el sujeto y el objeto, en donde ambos se modifican sucesivamente.

L.M. Santos señala, en este sentido, que en el aprendizaje de la Matemática es importante el proceso y el sentido que los estudiantes muestren en el desarrollo o construcción de las ideas matemáticas señalando además, que aprender los conceptos acerca de los números, resolver ecuaciones, graficar funciones, etc., no es desarrollar matemáticas. "Hacer o desarrollar matemáticas incluye el resolver problemas, abstraer, inventar, probar y encontrar el sentido a las ideas matemáticas".³

Como se indica, el conocimiento, desde la perspectiva constructivista, es siempre contextual y nunca se separa del sujeto, que es el que le asigna al objeto una serie de significaciones que determinan conceptualmente al objeto. La Matemática, de esta forma, no es vista como un cuerpo codificado de conocimientos, sino esencialmente como una actividad.⁴

Quiere decir, que los constructivistas identifican los resultados de esta actividad que es una imagen del mundo, con el mundo existente, porque niegan la posibilidad de su conocimiento al considerar que a la realidad objetiva se le contraponen múltiples realidades **construidas** socialmente. Evidentemente, en los fundamentos de esta concepción de la actividad matemática no parecen tener importancia los contextos sociales, culturales e históricos concretos, al limitar la construcción a un acto individual porque para los kantianos el ser humano al interactuar con la realidad solo puede conocer las manifestaciones fenomenológicas de la misma en una *construcción* que surge de las interacciones entre el sujeto y el objeto.

³ Santos Trigo, Manuel: ¿Qué significa el Aprender Matemáticas?. Una Experiencia con estudiantes de Cálculo. En Educación Matemática. Vol. 7 (1). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Abril, 1995. P.47.

⁴ Ibid. P. 11.

Los cambios en el contenido y las formas de enseñar la Matemática, en las últimas décadas, han sido consecuencias de diversos movimientos que han puesto su énfasis en uno u otro aspecto que caracterizan los objetos matemáticos y la investigación matemática.

Desde los años 60, la Matemática Moderna se ocupó de resaltar la estructura y el lenguaje formal de las matemáticas y de poner en primer plano el estudio de la teoría de conjuntos y las estructuras abstractas de la Matemática, así como enfatizar el trabajo con las demostraciones.

El movimiento de “regreso a lo básico”, que le otorgó el mayor énfasis al manejo de las operaciones y procedimientos fundamentales, pretendió dar solución a las deficiencias derivadas de la introducción de la Matemática Moderna en los cursos de Matemática desde los niveles elementales.

En los análisis de los resultados de la introducción de estos movimientos, se reconoce que no mejoraron la formación matemática de los alumnos, especialmente, en la comprensión del significado de los objetos matemáticos, al concentrar el aprendizaje en las formas y estructuras, así como en el dominio de los procedimientos básicos y no en las condiciones para interpretar y evaluar soluciones a los problemas, construir ideas matemáticas sobre situaciones de la práctica cotidiana.

Al caracterizar la Matemática contemporánea, en el marco de las críticas a los movimientos anteriores, E. Wenzelburger (1992) concluye que esta ciencia ha adoptado ciertas metodologías de trabajo de las ciencias experimentales y son cada vez más importantes actividades como: observar, explorar, hacer predicciones, probar hipótesis, controlar variables, simular situaciones reales, sin dejar a un lado actividades como demostrar, generalizar o abstraer; sin que la Matemática sea considerada como una ciencia experimental los contenidos matemáticos han cambiado y también las formas de hacer matemáticas con el uso de equipos de cómputo y calculadoras, resaltando favorablemente la idea de que para el alumno se puede quedar a veces en lo experimental e intuitivo, no así el investigador y en la actualización de los profesores de la asignatura.

Aprender matemáticas ha dejado de ser comprendido como la simple acumulación de conceptos, teoremas o procedimientos en un determinado orden o relación, lo que ha conducido a que esta ciencia se comprenda como algo estático, como un complejo de términos y símbolos que el alumno tiene que dominar.

El cuestionamiento de estas posiciones se hace partiendo de la idea de que aprender matemáticas es una actividad en la que el sujeto desarrolla o construye ideas,

recopila información, descubre o crea relaciones, discute ideas, plantea conjeturas, valora resultados, pero que se realiza dentro de un contexto social que le aporta una significación que se va acercando al objeto.

En el análisis de las nuevas tendencias de la enseñanza de la Matemática en el nivel medio, autores como Panizza y Sadoski, opinan que “hacer matemáticas es elaborar definiciones, más que repetir definiciones dadas por otros, es buscar ejemplos más que solicitarlos, es proponer contraejemplos cuando se quiere demostrar que una propiedad no es válida, es encontrar sentido a las hipótesis de un teorema, es hacerse preguntas además de responderlas”⁵.

Es importante, en esta posición, reconocer también la necesidad de tener en cuenta los procesos o actividades de tipo deductivo que aportan los modos de producción y de validación de la Matemática como ciencia formal, lo que puede ser válido a partir del nivel medio de enseñanza, pero es cuestionable el lugar que deben ocupar aquellos procesos de interacción que aportan las experiencias necesarias para reconocer no solo el significado de esos conceptos y ejemplos, sino también su aplicabilidad y existencia en la realidad objetiva.

Finalmente, para hacer referencia a las tendencias contemporáneas de la educación matemática es imprescindible citar a Miguel de Guzmán (1992), quién a partir del análisis de los principales movimientos, transformaciones y resultados en las últimas décadas, concluye que en el panorama educativo actual de la Matemática esas tendencias generales parten de la interrogante acerca del objeto de la actividad matemática y a partir del esclarecimiento de lo que es el quehacer matemático y su influencia en lo que debe ser la enseñanza de esta asignatura asume que la actividad matemática se enfrenta con un cierto tipo de estructuras que se prestan a unos modos peculiares de tratamiento que incluyen: una simbolización adecuada, una manipulación racional rigurosa y un dominio efectivo de la realidad a la que se dirige.

Tendencias generales actuales, señaladas por De Guzmán, son: la educación matemática como un proceso de “inculturación”, el continuo apoyo en la intuición directa de lo concreto o apoyo permanente en lo real, los procesos del pensamiento matemático en el centro de la educación matemática, los impactos de la nueva tecnología y la conciencia de la importancia de la motivación. En estas tendencias se explica la educación matemática como

⁵ Panizza, M. y P. Sadoski: Las nuevas tendencias de la enseñanza en el nivel medio. Universidad de Buenos Aires. 1994.

un proceso en el que es medular la relación entre la realidad y la matemática, la matemática vista como la ciencia en la que el método predomina sobre el contenido y, por tanto, los mayores esfuerzos se encaminan a transmitir estrategias heurísticas adecuadas para la resolución de problemas más que a la transmisión de recetas ya elaboradas.

En esta tesis, se considera, que el objeto de enseñanza de la Matemática no se restringe a los conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos que caracterizan su aparato teórico como ciencia formal, comprende especialmente los problemas de la Matemática, de otras ciencias y de la práctica social, en general, que justifican y posibilitan el desarrollo y crecimiento teórico y práctico, conjuntamente con los modos de actuación que preparan al sujeto en un contexto social para plantearse y resolver los problemas.

Desde estos puntos de vista es posible inferir para el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática qué aspectos deben recibir un mayor énfasis en la actualidad y proponer una variante de llevarlo a cabo en correspondencia con las exigencias que nuestro sistema educativo tiene planteadas.

1.1.3. La resolución de problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje.

El estudio del papel de los problemas en la lógica y estructura del proceso docente constituye un aspecto de cardinal importancia en los fundamentos sobre el aprendizaje de la Matemática en los trabajos de A. Schoenfeld (1985), Miguel De Guzmán (1992), Luz Manuel Santos (1995), Josep Gascón (1994), Jeremy Kilpatrick (1990), Marie Lise Peltier (1993) y otros, que no sólo se restringen al estudio de los procesos heurísticos que transcurren en la solución del problema propiamente, como en las concepciones de G. Polya, sino que ofrecen discusiones sobre sus aspectos epistemológicos y ontológicos como base para las sugerencias pedagógicas.

En particular, en el aprendizaje de las Matemáticas son significativos los trabajos de A. H. Schoenfeld (1985) sobre la preparación de los alumnos para resolver problemas, donde determina diversos factores que intervienen en la realización exitosa de esta actividad: **los recursos** (cuerpo de conocimientos que un individuo es capaz de aplicar en una situación matemática en particular), **la heurística** (reglas de razonamientos para la resolución efectiva de problemas), **el control** (es la revisión y reestructuración de los intentos que se realizan en la resolución de problemas) y el **sistema de creencias** (las ideas que se tienen acerca de la matemática y cómo resolver problemas).⁶

⁶. Schoenfeld, A. H.: Mathematical Problem Solving; Academic Press.1985. p .44

Lo más importante para esta investigación es que este autor introduce elementos como las creencias y las actitudes en las condiciones imprescindibles para la resolución de problemas y de los resultados de una amplia experiencia en el entrenamiento de los alumnos para resolver problemas matemáticos e insiste en la necesidad de que el aprendizaje, en clases, se acerque lo más posible al modo de actuar del matemático, es decir, poder discutir ideas, negociar, especular sobre los posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o a desaprobar sus ideas, lo que es muy importante tener en cuenta en la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática.

Por su parte Marie Lise Peltier, al estudiar la Didáctica de la Matemática en Francia, subraya los fenómenos que intervienen en el aprendizaje del alumno, en el que su actividad supone la dialéctica pensamiento - acción, que no se concibe como una simple manipulación guiada por el profesor, sino que atiende a la **concepción del sujeto que aprende**, entendida ésta en el sentido siguiente:

- ❖ "la clase de problemas que dan sentido a un concepto para el alumno;
- ❖ el conjunto de significantes que es capaz de asociar (imagen mental, expresión simbólica);
- ❖ los instrumentos, teoremas, algoritmos, que es capaz de poner en marcha".⁷

En las posiciones de esta autora el conocimiento no se acumula progresivamente, sino que se reorganiza permanentemente, se integra al saber anterior y a veces lo modifica.

Al estudiar el papel de los problemas en las estrategias empleadas por los profesores para dirigir el proceso, esta autora reconoce que:

- ❖ Los problemas son presentados al final del tema, con fines de evaluación;
- ❖ El problema es presentado como móvil del aprendizaje, es concreto, ocasional;
- ❖ El problema es presentado como medio del aprendizaje.

Estas precisiones sobre el lugar del problema en la estructura del proceso de enseñanza aprendizaje nos ha permitido destacar la tendencia que se manifiesta actualmente en nuestra escuela, a seguir la primera y la segunda, apareciendo los problemas en la etapa final de estudio de los diferentes contenidos o de forma ocasional para motivar la introducción de un concepto, teorema o procedimiento y en pocos casos motivar el estudio del tema, aunque en ningún caso constituye el medio para el aprendizaje de toda la teoría objeto de estudio. En este sentido, consideramos importante tener en cuenta que los proble-

⁷ Peltier, Marie Lise: Una Visión General de la Didáctica de Las Matemáticas en Francia. En Educación Matemática. Vol. 5 (2). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Agosto, 1993. P.7.

mas satisfagan las tres posiciones indicadas en la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje.

En las tendencias contemporáneas de la enseñanza de la Matemática, las epistemologías constructivistas sustentan la enseñanza por resolución de problemas que pone énfasis en los procesos de pensamiento que tienen como eje principal la actividad del alumno colocándolo en la situación de participar en el descubrimiento del nuevo conocimiento. Como afirma Miguel de Guzmán (1992), en el método de enseñanza por resolución de problemas se trata de armonizar adecuadamente la componente heurística (atención a los procesos de pensamiento) y los contenidos específicos del pensamiento matemático; sin embargo, en este sentido critica la falta de modelos adecuados que orienten al profesor en la integración de los contenidos y los procesos en un todo armonioso en la dirección del aprendizaje.

Entre los enfoques seguidos, sobre la resolución de problemas, se destacan en los Estados Unidos los que sintetiza A. H. Schoenfeld que son: los autores que hacen hincapié en los problemas presentados de forma escrita de tipo algorítmico o de fórmulas, el uso de modelos matemáticos para tratar los problemas aplicados a situaciones reales, los intentos de psicólogos e investigadores de procesos cognitivos en intentar explorar aspectos del pensamiento matemático relacionados la mayoría de las veces con problemas sencillos y los intentos en el sentido de entender y enseñar los tipos de habilidades requeridas para resolver problemas complejos de matemáticas a partir de la obra de G. Polya.

Estos enfoques, relacionados entre sí, son abordados en los trabajos de diferentes tendencias y son necesarios para la comprensión de esta actividad matemática y las vías que posibilitan que el alumno aprenda a resolver problemas.

En los trabajos de Yves Chevallard y Josep Gascón (1994) se exponen diferentes formas de entender y utilizar la resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática, que denominan “paradigmas”, tales son los casos de los paradigmas teorista, tecnicista, modernista, constructivista, procedimental y el de la modelización; en los que se identifica aprender matemáticas con el aprendizaje de teorías acabadas, o de técnicas matemáticas especialmente las algorítmicas, o con la exploración de problemas no triviales, o la construcción de nuevos conocimientos, o la construcción de sistemas estructurados de procedimientos o modelos matemáticos, respectivamente.

La presentación, por J. Gascón, de los fundamentos del paradigma de los “momentos didácticos”, que se resume a continuación, deja planteadas posiciones como las siguientes:

- ❖ Se considera que todo problema de matemáticas es el punto de partida de un (virtual) campo de problemas. Los problemas se agrupan en función de las técnicas matemáticas que se pueden utilizar para estudiarlos. No son los problemas concretos, aislados, los que tienen sentido o interés matemático.
- ❖ El estudio de campos de problemas se lleva a cabo mediante la utilización y, sobre todo, la producción de técnicas de estudio.
- ❖ Se considera que toda actividad matemática puede ser interpretada como un proceso de estudio de campos de problemas.
- ❖ Se pone de manifiesto una interrelación dialéctica entre el desarrollo de las técnicas matemáticas, la evolución de los campos de problemas y la construcción recursiva de las teorías matemáticas asociadas.

Del análisis de este paradigma se infiere un significado de la actividad matemática en relación con el estudio de campos de problemas y cómo este es generado por un problema matemático, lo que conduce a una concepción diferente acerca de la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, sin embargo, limita su visión a un campo de problemas que se agrupan en función de las técnicas matemáticas propiamente y la producción de teorías matemáticas, en ningún modo hacen referencia a los problemas relacionados con la práctica social que dejen clara cuál es la fuente fundamental de desarrollo de esta ciencia, lo que debe tener un evidente reflejo en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Aunque coincidimos con la forma de entender la resolución de problemas que se expone en el paradigma de los “momentos didácticos”, éste no ofrece las características de los problemas y los campos de problemas que orienten en el diseño de la asignatura y la labor docente metodológica de los maestros y profesores, que deje precisión acerca de cuál es el contenido de enseñanza de la Matemática a partir de los propósitos de cada sistema educativo.

Es bueno destacar que este paradigma se separa un poco de la secuencia que se utiliza, de forma general, por el profesor, para la enseñanza de la Matemática, que está dada por los siguientes pasos: selección de los objetivos, selección de los contenidos, selección de los métodos para la elaboración del nuevo contenido de acuerdo a la

estructuración vigente de la enseñanza de la Matemática y luego cómo se procederá con el contenido seleccionado para su asimilación, por el alumno, teniendo en cuenta como factor central la ejercitación, más que la resolución de problemas.

Como se observa cada paradigma toma como base un principio para la estructuración del contenido, en dependencia de la interpretación del papel de la resolución de problemas y qué considera cada uno como núcleo de la actividad matemática y, por tanto, con qué se identifica el aprendizaje de la Matemática.

Aunque se asume en este caso como una importante propuesta acerca del papel de la resolución de problemas, se tendrán en cuenta la reflexión hecha en el párrafo anterior en el interés de fundamentar una variante para estructurar el proceso de enseñanza aprendizaje y el propio contenido a partir de problemas.

Con relación al papel de la resolución de problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje, en nuestro país, se han realizado investigaciones entre las que se destacan los trabajos del psicólogo Alberto Labarrere, el pedagogo Carlos M. Alvarez de Zayas y en la Metodología de la enseñanza de la Matemática de Luis Campistrous y Celia Rizo.

Resulta un importante antecedente en esta investigación el estudio realizado por A. Labarrere sobre la solución de problemas y el aprendizaje del escolar que se fundamenta en la doble función que realizan los problemas en la enseñanza de cualquier asignatura: la función de asimilación de conocimientos, de fortalecimiento y comprobación de los mismos por un lado, y la función educativa y de desarrollo por otro.⁸

En los resultados de estas investigaciones en nuestro país se concluye que las dificultades para la solución independiente de problemas están relacionadas con algunas deficiencias que aún subsisten en la estructuración de la enseñanza y, en particular, en la enseñanza de la solución de problemas. Se valoran los avances significativos en la función del problema como medio para la asimilación de los conocimientos de las asignaturas y, por el contrario, los pocos avances en la función de desarrollo del pensamiento del escolar, lo que consideramos está relacionado con las concepciones en que se fundamenta la lógica y estructura del proceso docente en nuestra escuela.

Esto lo corrobora A. Labarrere cuando plantea: “para que la enseñanza de la solución de problemas permita a la vez asimilar conocimientos, formar hábitos y habilidades y desarrollar el pensamiento del alumno, es necesario concebirla y estructurarla de una

⁸ Labarrere, A.: Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1988. P. 16.

forma determinada, especialmente planificada, con objetivos de desarrollo claramente formulados”⁹ En esta posición queda claro que lo esencial se concentra en la organización y conducción de la enseñanza para que el alumno asimile y forme procedimientos de enfoque y transformación de los problemas.

C. Alvarez (1984) al referirse a la organización del proceso docente para la Educación Superior lo concibe de modo tal que el estudiante esté permanentemente motivado en adquirir nuevos conocimientos y que para lograrlo debe estar consciente de que el nuevo contenido le es imprescindible para enfrentar las futuras tareas de la profesión.

El procedimiento docente que, en su criterio, más se adecua a este proceso docente es el planteamiento de problemas, que el nuevo contenido se ofrezca como resultado de la selección de una situación problémica.

La organización de este proceso docente la fundamenta a partir del modo en que la humanidad se ha desarrollado, es decir, "el hombre se enfrenta a un problema y se percató que el nivel de conocimiento que poseía le es insuficiente para resolverlo y, mediante complejos procesos de la actividad práctica y mental, enriquece el conocimiento de su objeto de trabajo a la vez que soluciona el problema", concluyendo con la idea de que los objetivos que el profesor plantea a los estudiantes implican la resolución del problema.¹⁰

Sobre la comprensión del contenido de la enseñanza, Carlos M. Alvarez destaca que el contenido que se escoge es el que como sistema permite cumplir los objetivos y satisfacer el problema planteado, priorizando el núcleo en el que se ubican los elementos esenciales que constituyen las invariantes de las habilidades con la ayuda de las cuales se va desarrollando el sistema de conocimientos.

El núcleo de la teoría es conformado por los conceptos, leyes, regularidades y modelos que constituyen la esencia del sistema de conocimientos y son la base de la formación de convicciones.¹¹

De la teoría de este pedagogo cubano resaltamos el papel asignado a la motivación asociado al planteamiento y solución de problemas; la estructuración del sistema de conocimientos sobre la base de un núcleo, que constituyen las invariantes de las habilidades; la organización del proceso docente la concibe siguiendo la lógica de la ciencia y la reafirmación de que el conocimiento se adquiere en la actividad.

⁹ Ibid (8). P. 18.

¹⁰ Alvarez de Zayas, C.: Fundamentos teóricos de la dirección del proceso de formación del profesional de perfil ancho. Ciudad de la Habana. 1984. p. 130.

Destacamos, en este caso, cómo se sitúa en un primer plano determinar qué va a hacer el estudiante con el concepto, la ley, la regularidad o el modelo; es decir, comprender los elementos esenciales del contenido, el sistema de acciones y operaciones que le permiten resolver problemas y adquirir, desarrollar y perfeccionar ese sistema de conocimientos.

En los fundamentos del proceso docente que se expone, el problema se sitúa como medio funcional para desarrollar toda la teoría y en cierto modo colocar al estudiante en el papel del descubrimiento, es decir, para resolver ese problema es necesario desarrollar toda la teoría y que al final esté en condiciones de enfrentar el proceso de solución o comprenderlo. Coincidimos con esta posición y la comprensión que este autor demuestra sobre los problemas que nos sugiere una secuencia que tendría variación en relación con el paradigma de los momentos didácticos sobre el papel del encargo social, a la hora de introducir algún tipo de variante por las propias necesidades de mejorar el proceso docente.

En las investigaciones realizadas por los Doctores L. Campistrous y C. Rizo sobre el aprendizaje de la resolución de problemas destacan algunas barreras que existen, para la resolución de los problemas aritméticos, que consideramos deben ser tenidas en cuenta de modo general. Dichas barreras se concentran en: la excesiva actuación del maestro, el alumno no logra formas de actuación generalizadas, los problemas se utilizan en función del desarrollo de habilidades y no como objeto de enseñanza en sí mismos, no se enseñan técnicas de trabajo, los parámetros de dificultad para los problemas son pocos precisos y no se trabajan los significados prácticos.¹²

Si bien el estudio se basa en los problemas aritméticos, en esas barreras se expresan importantes limitaciones que consideramos afectan el objetivo de la formación matemática general que es preparar a los alumnos para resolver problemas lo que se atiende, por un lado, con la propuesta de técnicas que guíen la actividad de aprendizaje y, por otro lado, continuar la búsqueda de variantes para estructurar el proceso de enseñanza y el contenido que posibilite que la resolución de problemas sea objeto de enseñanza y objeto de aprendizaje. En esta investigación, se asume el análisis crítico de cada uno de los

¹¹ Ibid(10). p. 131

¹² Campistrous, L. Y C. Rizo: Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1996. P. X-XI.

enfoques o tendencias más importantes de la enseñanza por problemas realizado por estos autores.¹³

- ⇒ **Enseñanza problémica** consiste en problematizar el contenido de enseñanza, de tal forma que la adquisición del conocimiento se convierte en la resolución de un problema en el curso de la cuál se elaboran los conceptos, algoritmos o procedimientos requeridos. Está muy elaborada desde el punto de vista didáctico y tiene un cuerpo categorial muy estructurado. En esta forma de enseñanza poco se deja a la improvisación, a mí se me parece más a la mayeútica socrática que a la heurística de Polya aunque tome la forma de heurística en algunas presentaciones. Se supone la forma en que debe proceder el alumno y es como si el hilo conductor del pensamiento del maestro determinara la actividad del alumno.
- ⇒ **La enseñanza por problemas** que consiste en el planteamiento de problemas complejos en el curso de cuya solución se requieren conceptos y procedimientos matemáticos que deben ser elaborados. Este procedimiento se asemeja a la enseñanza por proyectos y resulta complejo de realizar, en la mayor parte de las veces los problemas se limitan a una función motivacional y a aportar un contexto en el que adquiere sentido los conceptos y procedimientos matemáticos que se pretende estudiar.
- ⇒ **La enseñanza basada en problemas** que consiste en el planteo y resolución de problemas en cuya resolución se produce el aprendizaje. En este caso no se trata de problematizar el objeto de enseñanza ni de plantear problemas complejos que requieran de nuevos conocimientos matemáticos, más bien se trata de resolver problemas matemáticos relacionados con el objeto de enseñanza, sin confundirse con él, y que van conformando hitos en el nuevo aprendizaje. Este tipo de enseñanza no está didácticamente estructurado, no se dispone de categorías y formas de acción previstas y queda mucho a la creatividad del docente y a la independencia y capacidad de los alumnos. En este caso es una tarea de la didáctica la conformación de una teoría y procedimientos generales que apoyen la labor del maestro y contribuyan a la generalización de este método en aquellos casos en que es posible utilizarlo.

¹³ Campistrous Pérez, Luis y C. Rizo. Algunas técnicas de resolución de problemas aritméticos. Curso Pre - reunión Pedagogía '99.

- ≡ **La enseñanza de la resolución de problemas** es otra de las formas que adopta el Problem solving en los EEUU, que debe ser bien diferenciada de las anteriores, y que se ha difundido mucho mediante los textos que enuncian y practican "estrategias" para resolver problemas y después plantean problemas para aplicarlas. Esta nueva forma es otra tarea urgente, independiente de las anteriores y que, en rigor, debe precederlas. Incluso se han elaborado textos sobre "estrategias" con este enfoque, que a veces resulta bien alejado del espíritu de lo que Polya preconizaba, aunque supuestamente se basan en él.

Esta investigación se ubica en el problema abierto que se plantea en la tendencia de **la enseñanza basada en problemas** al encaminarse en el sentido de una propuesta para la estructuración didáctica del proceso de enseñanza aprendizaje, así como dejar establecidas categorías y formas de acción que guíen la actividad de maestros y alumnos.

1.1.4. El Conocimiento Matemático según Ed Dubinsky.

Comenzaremos directamente por lo que Ed Dubinsky comprende o denomina conocimiento matemático:

“El conocimiento matemático de un sujeto es su tendencia a responder a situaciones matemáticas problémicas mediante la reflexión sobre problemas y sus soluciones dentro de un contexto social y la construcción o reconstrucción de acciones, procesos y objetos organizándolos en esquemas para tratar con dicha situación”.¹⁴

En primer lugar, debemos señalar que, aunque en esta definición se indican aspectos muy importantes de la actividad matemática, que se precisan de un modo muy útil para la práctica pedagógica, se omite o al menos no se distingue, de modo claro, la base objetiva de la actividad matemática. Cabe preguntarse cuáles son las situaciones matemáticas problémicas a las cuales se hace referencia en la definición. En nuestra opinión éstas no están vinculadas con la realidad objetiva. Por otro lado, la noción de contexto social queda subordinada a la reflexión individual lo que, en nuestra opinión, constituye una fase decisiva del proceso de conocimiento.

¹⁴ Dubinsky, Ed: El aprendizaje cooperativo de las Matemáticas en una sociedad no cooperativa. En Revista Cubana de Educación Superior No 2-3. CEPES. Universidad de La Habana. 1996. P.156.

Las nociones fundamentales, que aparecen en definición, se derivan de la concepción de J.Piaget sobre el aprendizaje en la que se indica que cuando un sujeto enfrenta una situación problemática se produce un desequilibrio, el sujeto trata de equilibrar elaborando o haciendo construcciones que le permitan resolver dicha situación y lograr el equilibrio. Este autor, define cuatro tipos de objetos cognitivos, que son: acciones, procesos, objetos y esquemas. Señala que éstos se organizan a su vez en estructuras a las cuales denomina *esquemas*.

Estos conceptos son puntualizados por Ed Dubinsky en el campo de la Matemática precisando que una acción es cualquier transformación física o mental de un objeto para obtener otro objeto. Esto ocurre como reacción a un estímulo el cual es percibido como externo. Este puede ser una respuesta parcial, tal como un reflejo físico o un acto de recordar cierto hecho de la memoria que tiene la característica de que cada paso es provocado por el que le antecede, antes que por un control consciente del sujeto de la transformación. En este caso, los resultados de varios pasos de una respuesta son parcialmente controlados por el sujeto, que es, en este sentido, parte de la transformación.

Continúa precisando que, cuando el sujeto reflexiona sobre una acción, él puede comenzar a establecer un control consciente sobre ésta. Entonces pudiéramos decir que la acción es interiorizada y ésta se convierte en un proceso, señalando finalmente que un proceso es una transformación de un objeto (u objetos) la cual tiene una característica importante; el sujeto está en control de dicha transformación en el sentido que él o ella puede describir o reflexionar sobre todos los pasos de la transformación sin realizarlos en realidad. Una vez que un sujeto tiene construido un proceso éste puede ser transformado de varias formas. Un proceso puede ser invertido o puede ser coordinado con otros procesos. En algunos casos esta coordinación conduce a un nuevo proceso (como en la composición de funciones), en otros, los procesos se ligan para formar un esquema.

También define que un objeto está construido mediante un proceso que él denomina compactación. Esta compactación es obtenida cuando éste se convierte en una necesidad como totalidad y el sujeto siente que puede actuar sobre ésta y puede construir tal transformación. Un objeto puede ser descompactado para obtener un proceso del cual surgió y, es muy importante para un sujeto en Matemáticas poder moverse de un lado a otro, entre un objeto y un proceso de una idea matemática.

Finalmente, señala que un esquema es una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, los cuales están enlazados de alguna forma y pueden esclarecer una situación problemática. Como en los procesos, un sujeto puede reflexionar sobre un esquema y transformarlo. Esto puede traer como consecuencia, en el esquema, el

surgimiento de un nuevo objeto. Así, vemos que existen al menos dos formas de construcción de objetos, de procesos y de esquemas. Los objetos pueden ser transformados por acciones de orden superior, conduciendo a nuevos procesos, objetos y esquemas. De aquí tenemos un mecanismo, el cual puede ser observado como acción en espiral, en cuyo interior se desarrollan los objetos.

Como se observa, en estas definiciones lo social no interviene de modo claro, las acciones del sujeto se explican un tanto deshumanizadas, sin embargo, se introduce la noción de descomposición genética de conceptos que, aunque lo social está subordinado, puede facilitar la creación de situaciones de aprendizaje además de servir de instrumento para el análisis del esfuerzo cognitivo que debe realizar un sujeto o grupo de ellos para construir un concepto. La descomposición genética de los conceptos introducida por E. Dubinski sugiere la posibilidad de aplicarlas al proceso de resolución de problemas para diseñar las tareas y las formas de organización del proceso de enseñanza aprendizaje (individual y grupal), lo cual se tiene en cuenta en este trabajo.

1.2. La estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje.

Hasta el momento, se han planteado reflexiones sobre la estructura del proceso de enseñanza, cuando se expone la secuencia de pasos para introducir una variante de enseñanza siendo conveniente ahora precisar qué se entiende por el término *estructura* del proceso docente y su lógica.

Para estudiar los fundamentos lógicos de este proceso es necesario analizar los puntos de vista de algunos autores sobre la lógica del proceso de enseñanza y el papel que en esto desempeña la lógica de la ciencia y la lógica de la asignatura, así como la psicología de la asimilación (la teoría del aprendizaje correspondiente).

Según M.A. Danilov, la lógica del proceso docente es una combinación de la asignatura docente y la psicología de la asimilación o teoría del aprendizaje.¹⁵ Pero, por su parte, M.I. Majmutov lo comprende como la combinación (la unidad) de la lógica formal contemporánea con la lógica dialéctica. Esto significa que sus posiciones se basan en elementos totalmente distintos.

¹⁵ Danilov, M. A. y M. N. Skatkin: Didáctica de la escuela media. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1978. p. 186.

Como planteamos anteriormente M.I. Majmutov identifica la lógica del proceso docente con la lógica formal contemporánea y la lógica dialéctica y de esta forma se deja a un lado la peculiaridades psicológicas del proceso de asimilación.¹⁶

En esta teoría se comprende la lógica de la investigación científica y la del aprendizaje en el sentido de que en ambos procesos el sujeto (el científico y el alumno, respectivamente) se relacionan con un problema y una hipótesis que condicionan una estructura rígidamente determinada para la actividad cognoscitiva que ejecutan, por tanto, aparece nuevamente el conocimiento sistematizado como base de esta identificación.

Esto se explica por el hecho de que la enseñanza problémica se concibe a partir de una situación problémica donde los conocimientos que posee el alumno son insuficientes para enfrentarla y se propone el problema docente como expresión de lo que hay que buscar y para ello se estructura la enseñanza de acuerdo a una secuencia lógica similar a otras formas, lo que sí se aumenta la motivación por encontrar la solución al problema inicialmente planteado.

Aunque es evidente la diversidad de criterios acerca de la lógica del proceso docente que conduce a actuaciones totalmente distintas en su dirección, todas descansan en la estructuración de la enseñanza sobre la base del conocimiento sistematizado y no en la lógica de la ciencia como señala I. Andreiev en la lógica del proceso de formación del conocimiento científico.¹⁷

En la práctica, la lógica del proceso de enseñanza determina su estructura. Esta estructura expresa la secuencia e interrelación de sus fases o eslabones, es decir, refleja los momentos por los que debe transitar el alumno durante la apropiación del contenido (sistema de conocimientos y habilidades, normas de conducta, convicciones, etc.) bajo la dirección del profesor.

La estructura del proceso de enseñanza la observamos, en esta investigación, en los niveles que establecen períodos de ejecución a corto, mediano y a largo plazos; en los que se presentan los eslabones para una clase, para sistemas de clases, unidades temáticas, cursos, que tienen como intención describir aspectos del proceso tan importantes como:

- ❖ el carácter de la actividad cognoscitiva del alumno;
- ❖ el papel de dirección del profesor;
- ❖ las formas de presentación de las tareas a los alumnos;

¹⁶ Majmutov, M. I.: La enseñanza problémica. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1983. p. 74.

¹⁷ Andreiev, I.: Problemas lógicos del conocimiento científico. Editorial Progreso. Moscú. 1984. p. 305.

❖ el nivel de profundidad de las tareas.

Actualmente, en nuestro país, se asume como estructura del proceso de enseñanza la de los pedagogos M. A. Danilov, M. N. Skatkin, L. Klingberg y otros que distinguen los siguientes eslabones, como los presenta G. Labarrere y G. Valdivia en su libro Pedagogía:

- ◆ Planteamiento del problema y toma de conciencia de las tareas cognoscitivas;
- ◆ Percepción de los objetos y fenómenos, formación de conceptos y desarrollo de la capacidad de observación, de imaginación y de razonamiento de los alumnos;
- ◆ Fijación y perfeccionamiento de los conocimientos y desarrollo de habilidades y hábitos;
- ◆ Aplicación de los conocimientos, habilidades y hábitos;
- ◆ Análisis de los logros de los educandos, comprobación y evaluación de sus conocimientos y revelación del nivel de desarrollo intelectual.

Esta estructura es la que se aplica en la enseñanza de todas las asignaturas, en particular de la Matemática, además es la base para la elaboración de los libros de textos en todos los niveles de enseñanza. No obstante, consideramos que existe cierto grado de espontaneidad en el surgimiento de los distintos niveles del proceso de aprendizaje ya que cada uno de los mismos está condicionado por el grado de significatividad que tenga el nuevo contenido o problemática que se vaya a tratar en la clase.

Concluimos entonces que, esta vía para la estructuración de la enseñanza aporta, desde el punto de vista didáctico, lógico y psicológico una secuencia de pasos interrelacionados para la dirección de actividad cognoscitiva del alumno, por el maestro, que le asegure la apropiación, fijación y aplicación del sistema de conocimientos y habilidades.

No obstante, el criterio para el planteamiento del problema y toma de conciencia de las tareas cognoscitivas, así como la percepción de los objetos y fenómenos se refieren a una o varias clases, es decir, a la elaboración de uno o varios conceptos, teoremas o procedimientos, estableciendo relaciones con aquellos que sirven de condiciones previas necesarias y, en menor medida, se proyecta hacia los contenidos siguientes, lo que limita totalmente una orientación perspectiva sobre la materia de estudio, siendo ésta una de las causas que consideramos no favorecen el logro de una visión más completa acerca de la utilidad del contenido.

La lógica del proceso docente debe tener en cuenta que el alumno pueda asimilar los problemas que son resueltos con el contenido que aprenden y que, por tanto, la enseñanza debe estructurarse de forma tal que cada uno de sus eslabones dé respuesta a esta necesidad teniendo presente, en primer lugar, el grado de significatividad.

El acercamiento al pensamiento del científico debe comprenderse a partir de la posibilidad de que el alumno transite por un proceso de enseñanza que lo enfrente a la comprensión, planteamiento y solución de problemas de la magnitud que la vida práctica le plantea y que vea que la teoría matemática no se aplica de forma fraccionada, sino que resuelve problemas de forma integrada. Como se ha observado en las tendencias actuales en la enseñanza de la Matemática, fundamentalmente en las que toman como punto de partida la resolución de problemas, estas ideas comienzan a introducirse en el proceso.

En Cuba, se han realizado investigaciones que se han ocupado de estudiar vías para el desarrollo intelectual de los alumnos a partir del problema de que predomina el aprendizaje reproductivo y no se estimula la búsqueda de la esencia de los conceptos, relaciones y procedimientos para realmente interpretar, sistematizar y luego aplicar los mismos.

En este sentido, se presenta el trabajo "Metodología y técnicas que contribuyen a estimular el desarrollo intelectual" de la Doctora Margarita Silvestre Oramas (1993) que argumenta como causa de la dificultad señalada el que el profesor abandona la lógica del proceso de pensamiento y se limita a enseñar un contenido según la lógica que ve en éste, que consideramos corresponde a la del conocimiento sistematizado que se estructura en los libros de textos.

La metodología propuesta parte de principios teóricos en los que se destacan: la estructura del proceso de enseñanza - aprendizaje con un carácter de búsqueda por el alumno, que se conciba un sistema de habilidades que posibilite el desarrollo de los procesos lógicos del pensamiento dialéctico y de la independencia cognoscitiva y además que el alumno valore para qué aprende el nuevo contenido en lo natural, en lo social e individual.

Los aspectos que comprende esta metodología (búsqueda de la definición, determinación de las características del objeto de estudio, búsqueda del por qué, la determinación de la utilidad del contenido y el conocimiento de para qué es necesario su estudio y su consolidación) se corresponden, en gran medida, con los aspectos metodológicos que pretende resolver nuestro tema de investigación, siendo un punto de partida importante para el cumplimiento de los fines previstos.

Lo analizado hasta aquí sugiere que el alumno tenga desde el inicio una visión global del contenido que va a estudiar entendida ésta en el sentido de que pueda interactuar con ese contenido.

1.3. La estructuración del contenido de enseñanza de la Matemática.

Como ya se ha señalado entendemos por estructuración del contenido ***la acción encaminada a establecer un modelo o esquema que exprese la secuencia lógica, interrelación, agrupación o distribución de los conceptos, relaciones y procedimientos y los modos de actuación asociados a su construcción y asimilación en función de la resolución de problemas, teniendo en cuenta su movimiento por los eslabones didácticos del proceso docente educativo.***

De aquí se desprende la necesidad de un análisis de la lógica y estructura del proceso docente indicando nuestra posición al respecto y mostrar distintas posiciones señalando las ventajas y desventajas.

Es importante distinguir las diferencias entre la lógica de la ciencia y la forma en que se expone el conocimiento científico.

La lógica de la ciencia es el movimiento que parte del conocimiento de los hechos, leyes y problemas hasta el descubrimiento de nuevos hechos, nuevas leyes y nuevas relaciones, es decir, cuando se habla de lógica de la ciencia se refiere a cómo el hombre se conduce en el tránsito de lo conocido a lo desconocido utilizando los métodos científicos establecidos en un momento histórico dado.

Cuando se analiza la forma en que se expone el conocimiento obtenido de forma comprensible, se brinda primeramente los elementos necesarios para que se asimile el nuevo concepto, hecho o relación; lo que refleja el proceso inverso al movimiento natural de la lógica de la ciencia.

Generalmente, se ha tomado como fuente para definir y estructurar el contenido de la asignatura el conocimiento sistematizado, o sea, la forma de exponer los conocimientos que, como ya se ha explicado, no refleja la lógica de la ciencia. Esto ha traído como consecuencia que, al estructurar el proceso docente, no siempre ha ocupado una posición relevante el proceso de búsqueda del conocimiento científico a partir del planteamiento y solución de los problemas que lo originaron.

Pero, el contenido de enseñanza, no es el conocimiento científico con la lógica de la ciencia, el concepto de contenido de enseñanza tiene en cuenta además de los conocimientos, otros componentes, tales como: "el ideológico, el político y cultural, las habilidades, los hábitos y métodos de trabajo que posibilitan la formación multilateral de la personalidad de los alumnos".¹⁸

¹⁸ Labarrere G. y G. Valdivia: Pedagogía. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1988. P.87.

Por tanto, al análisis de esta categoría del proceso docente educativo, como coinciden muchos pedagogos, refuerza el hecho de que en su enfoque considera la formación integral del individuo, sus necesidades sociales, no restringe su desarrollo a lo intelectual. De ahí que, la estructuración de contenido no puede concebirse solamente en el ordenamiento de conceptos, teoremas o procedimientos, comprende también el aspecto ideológico que en nuestra sociedad se concreta en la unidad de la Filosofía Marxista - Leninista y de los conocimientos científicos que posibilitan la interpretación de los hechos y fenómenos que se dan en la naturaleza, la sociedad y el pensamiento del hombre.

La estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje con esta concepción del contenido de enseñanza, reclama de formas en las que las tareas docentes estén impregnadas de los componentes señalados para la formación del alumno.

La Metodología de la enseñanza de la Matemática fundamenta el tratamiento de los conceptos, teoremas, demostraciones y resolución de ejercicios sobre la estrategia del trabajo con problemas. Esta concepción en el proceso de enseñanza de la Matemática permite estructurar cada situación típica a partir del análisis de situaciones intra o extramatemática y en su enfoque se incorporan los componentes ideológicos a partir de los objetivos de la asignatura.

Sin embargo, el planteamiento de los problemas (como base de motivación) se concibe clase a clase en el tratamiento de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática y no se sitúa como una tarea el proceso de solución del problema matemático o extramatemático, que se resuelve con la teoría y práctica del contenido que se enseña, en una unidad temática o sistema de clases, lo que sí lo acercaría a la lógica del proceso de formación del conocimiento científico, a dar explicaciones más completas de situaciones concretas de la práctica social.

1.4. La globalización del aprendizaje.

El principio de la globalización del aprendizaje fue ampliamente debatido en la década del 40 entre pedagogos cubanos como Alfredo M. Aguayo, Hortensia Martínez Amores y Diego González, los cuales tomaron como base los fundamentos aportados por O. Decroly y Jean Piaget y que fuera objeto de análisis en el Seminario Internacional de Río de Janeiro en 1949, según refiere A. Aguayo en su libro Pedagogía (1945).

En tal sentido, al tratar los fundamentos psicológicos de la globalización destacaron que antes, la enseñanza se orientaba de lo simple a lo complejo, de lo fácil a lo difícil, considerando al detalle más sencillo y simple que el conjunto; reconociendo que la

enseñanza se orientó de lo minucioso a los todos o conjuntos, de la letra a la palabra, de las hojas al árbol. De estas ideas se destacó que de acuerdo con la Psicología de los estados de conciencia, el niño observa rasgos o cualidades de los objetos y llega a tener la idea o noción general de ellos; pero otros investigadores como Decroly han demostrado que el niño percibe el objeto como un todo y luego va efectuando el análisis de sus distintas cualidades.¹⁹

De estas posiciones Diego González resalta que es necesario esforzarse más en relacionar que en separar, en fusionar que en dividir en partes, quiere decir, que el niño se interesa más por el conjunto que por los detalles.

Desde el punto de vista pedagógico se reconocen consecuencias en el sentido de que las asignaturas no deben existir aisladas y que en cada materia de aprendizaje ocupen un lugar señalado los centros de interés o complejos, el método de proyectos y el de problemas, el de juegos y cuentos, etc., que en la escuela activa aproximan el aprendizaje al proceso natural de la vida que es movimiento y acción.

El centro de interés o complejos, lo define Diego González como "un asunto u objetivo, expresivo de una aspiración, necesidad o propósito de los alumnos, alrededor del cual se desenvuelven algunas enseñanzas y actividades de la escuela, estos pueden tener un carácter general y particular"²⁰. Estas ideas sirvieron para la argumentación del llamado método de los centros de interés de Decroly.

La base psicológica del método de los centros de interés está en la globalización, en el que si bien se reconocen los rasgos de la psicología asociacionista, se fundamenta en que el conocimiento es primero global y luego analítico porque considera que para el niño es más fácil el conjunto primero y luego los detalles.

No obstante, el método de Decroly limitaba su aplicación a los grados inferiores y sugería que para los grados superiores se volviera al programa tradicional con el objetivo de organizar los conocimientos en armonía con las exigencias de la sistematización científica, aunque juzgaba conveniente su utilización en este nivel de un modo atenuado.

Este método estuvo muy relacionado con la experiencia pedagógica de la italiana María Montessori, que logró caracterizar el hecho de que el niño está dotado de fuerzas para

¹⁹ González, Diego: Didáctica o dirección del aprendizaje. 5. edición. La Habana. 1952. p. 49

²⁰ Aguayo, A. y H. Amores: Pedagogía. 5. edición. La Habana 1945. p. 143.

su autoeducación, aunque no llegó a explicar las razones dio formas muy concretas que desde el punto de vista práctico favorecen el desarrollo de estas fuerzas.

Para la enseñanza de los niños introdujo formas de organización donde el maestro presenta modelos o patrones que reflejan lo esencial de la actividad a realizar, desde un primer momento, y luego disminuye la intervención pedagógica que se concentra en el control y corrección de la actuación del niño.

En la experiencia de M. Montessori es especialmente importante el papel asignado a la presentación de modelos de actuación en una etapa inicial y la promoción de la actividad independiente del niño, lo que ha sido aplicado en muchas escuelas de nivel primario en países como Italia, Bélgica, Francia, México, etc., y muchos manuales se estructuran actualmente según este método, aunque no se extienden a otros niveles de enseñanza.

En nuestra opinión, la globalización proporciona al aprendizaje del alumno un núcleo a partir del cual se pretende darle unidad a la materia de enseñanza y es lo que fundamenta la posición de que se trabaja más para observar los vínculos, las relaciones, causas y consecuencias con respecto a ese núcleo y es lo que conforma la idea o noción general que se pretende lograr en el alumno.

Esta globalización, es evidente que favorece el proceso de síntesis en el aprendizaje si se tiene en cuenta que "la síntesis se efectúa con más facilidad si anteriormente se ha recibido aquel todo que ahora intentamos reconstruir mentalmente por partes aisladas", lo cual no le resta importancia al estudio de las partes como base para la comprensión de ese todo.²¹

Como base para el logro de la globalización estos representantes establecieron esencialmente temáticas a partir de las cuales se diseñaban tareas para las diferentes asignaturas, lo que indudablemente ofrecía al alumno una información más completa y coherente sobre el objeto de estudio; lo que no se declara es el papel de la resolución de problemas en la aplicación de este principio.

Claro está, la aplicación del principio de la globalización no entraña un método específico como los señalados anteriormente sino que se orienta para organizar y entrelazar los contenidos en una determinada secuencia con un determinado fin que permita, hablando en el lenguaje del aprendizaje significativo, ir estructurando su significado.

Es conveniente aclarar que, en ocasiones, el término de globalización se ha tomado prácticamente como un sinónimo de imprimir al proceso de enseñanza un carácter

²¹ Leontiev, A. N. y otros: Psicología. Editorial Grijalbo. México. 1975. p. 238.

interdisciplinario. Por supuesto, estos términos, en sí mismos, no son comparables porque en realidad pertenecen a niveles distintos de sistematicidad del conocimiento.

El término globalización está dirigido a cómo nos acercamos al conocimiento de la realidad, lo que presenta un carácter totalizador, sin embargo, las disciplinas se refieren a cómo es la realidad dotándonos a su vez de los medios para su transformación.

No obstante, la aplicación del principio de la globalización del aprendizaje y las valoraciones críticas hechas, permitieron en esta investigación, reconocer la importancia de que los alumnos puedan asimilar el contenido de la asignatura a partir de una visión global inicial que les permita, partiendo de un objeto de referencia, realizar un proceso de análisis y síntesis de forma continua a lo largo de una unidad temática o asignatura. Se destaca particularmente el carácter interdisciplinario que posibilita la vinculación de los alumnos con la práctica social como uno de sus principales fundamentos.

Quiere decir, que la estructura del proceso de enseñanza ha de propiciar que el alumno efectúe la síntesis correspondiente a partir de los conceptos, teoremas y procedimientos, pero disponiendo de los objetos de referencia que guíen la ordenación, reordenación e interrelación de cada una de las partes que conforman el sistema de conocimientos y habilidades. De esta forma, la visión global sobre el objeto de estudio, tendrá un mayor efecto en el aprendizaje, en dependencia del grado de significatividad que posea dicho contenido.

Las posibilidades de la globalización en el aprendizaje, dentro de un enfoque lineal en el desarrollo de los contenidos, en función de la resolución de problemas se ha manifestado en muchas escuelas de Europa y América Latina, las que han ofrecido vías para su aplicación, fundamentándose los éxitos en los niveles de aprovechamiento que se alcanzan en los alumnos.

Una de las experiencias que resulta de interés analizar es la del maestro ucraniano Víctor F. Shatalov, que ofrece una variante de la globalización del aprendizaje en su forma de estructurar los temas de las asignaturas en lo referente al contenido, para el logro en los alumnos de un nivel superior en la resolución de problemas.

El objetivo de esta experiencia es descubrir ante los alumnos la posibilidad del análisis independiente de un mayor número de problemas a través de la introducción de los conocimientos teóricos, por el propio profesor, mediante grandes bloques que agrupan el contenido de dos o tres epígrafes del manual, utilizando como medio esencial señales

básicas o señales de apoyo que contenían el texto informativo codificado para guiar al alumno en el proceso de aprendizaje de la materia tratada.

V. F. Shatalov desarrollaba y describía el contenido utilizando, donde fuera posible, elementos de la conversación heurística, experiencias y distintos métodos de concretización, dirigiendo la atención de los alumnos sobre los métodos de conocimientos, métodos de resolución de los problemas planteados, puesto que éstos juntos conforman el objeto de asimilación.

En el sistema de V. F. Shatalov se puede observar una forma muy original y característica de representación, es decir, las señales de apoyo, que se modelan de forma abstracta de acuerdo con el contenido que se va a desarrollar en la clase y puede abarcar todo el material teórico del programa (conceptos científicos, fórmulas, gráficas, esquemas, etc).

Las señales de apoyo son semejantes a las que aparecen en los manuales ilustrativos que ampliamente son utilizados en las escuelas, pero a diferencia de los que utilizan imágenes concretas de los objetos estudiados, V. F. Shatalov emplea palabras claves, oraciones cortas, símbolos; lo cual ha constituido uno de los aspectos desfavorablemente valorados, por considerar que éstas señales están orientadas a la apropiación mecánica del contenido de la asignatura, lo que se refleja en que el alumno después de la segunda repetición del nuevo material debe continuar el trabajo en su casa observando el listado de las señales de apoyo para recordar la narración del maestro y leyendo el manual complementará los nuevos conocimientos y en la próxima lección deberá reproducir de forma escrita dichas señales.

La ventaja fundamental del método de V. F. Shatalov, que fuera demostrado a través de su experiencia, es el incremento significativo del volumen de conocimientos activos en sus alumnos tomando como base las siguientes acciones pedagógicas del maestro:

- ❖ las señales de apoyo elaboradas reflejan los enlaces de los contenidos entre las unidades desarrolladas;
- ❖ la narración del maestro sirve de modelo para la formación de los métodos de trabajo de los escolares;
- ❖ prevalece la conversación heurística en mayor escala que en las clases habituales;
- ❖ se acelera la cultura lingüística de los escolares y por consiguiente el desarrollo del pensamiento;

- ❖ el método favorece la atención diferenciada a través de la asignación de problemas según los resultados alcanzados;
- ❖ la introducción de los conocimientos en bloques y su posterior trabajo sobre ellos es muy económico y reduce de una manera significativa el tiempo necesario para la asimilación del contenido del programa.

La valoración acerca de la efectividad del método de V. F. Shatalov de la profesora Z. I. Kalmíkova destaca las ventajas anteriores en la enseñanza primaria y fundamenta que este sistema desarrolla el pensamiento productivo del alumno, crea las bases para la realización de operaciones lógicas como: comparación, diferenciación, generalización, etc., para el establecimiento de causas y consecuencias que conducen a la concientización de nuevos conocimientos teóricos y esto se logra cuando las señales de apoyo se presentan de forma compacta, en su totalidad que ofrezcan una visión amplia, completa del material estudiado.

Una conclusión importante desde el punto de vista psicológico y didáctico ofrece Z. I. Kalmíkova, cuando expresa: tal introducción de los nuevos conocimientos teóricos, indudablemente difíciles para los alumnos, contradice las recomendaciones habituales de los metodólogos de dar el material en pequeñas porciones, fortaleciéndolo mediante ejercicios con la posterior unificación en un único sistema en clases especiales de generalización. Pero, la misma completamente responde a las recomendaciones psicológicas contemporáneas, fundamentadas mediante experimentos de muchos años bajo la dirección de L. V. Zankov, V. V. Davydov, P. M. Erdienov y otros.²²

Al analizar, en esencia, el método de V. F. Shatalov, sus ventajas e inconvenientes, llegamos a la conclusión, en esta investigación, de que sus resultados favorables pueden estar, más que en la estructuración del material y el uso de las señales de apoyo, en la visión global, total del contenido, que en poco tiempo lleva al alumno a sus relaciones y consecuencias fundamentales; que indudablemente producen un efecto motivacional y un nivel de preparación superior para resolver problemas, que son independientes de la forma en que se ha desarrollado dicho material.

²² Kalmíkova, Z. I.: ¿Desarrolla el pensamiento productivo el sistema de enseñanza de Shatalov?. En Cuestiones de Psicología # 2. Moscú. 1987. p. 74.

Esto quiere decir, que la lógica que se sigue en la estructuración del material coincide con la aplicada habitualmente, sólo que con la aceleración de su introducción en bloque, auxiliada con las señales de apoyo, para el reconocimiento, la identificación de objetos, propiedades y relaciones; sin embargo, con la limitación del mecanicismo que puede producir como efecto tales medios, se reconocen logros en los alumnos en la resolución de problemas.

En tal sentido, se resume que una de las razones esenciales que influyen en ese nivel superior en la eficiencia de los alumnos se encuentra en la estructuración del contenido de la asignatura de forma tal que, desde el inicio, los alumnos dispongan de los conocimientos teóricos necesarios y un grupo representativo de problemas que deben ser resueltos con ese contenido.

En resumen, podemos destacar, que cada una de las posiciones valoradas, sobre la globalización del aprendizaje, poseen rasgos comunes y sus especificidades. Lo que sí constituye un elemento central en todos los casos es la experiencia favorable, en el nivel primario de enseñanza, de que el alumno reciba la materia de forma integrada y, posteriormente, asimile los detalles que complementan su comprensión y le permiten resolver los problemas correspondientes con un determinado nivel de independencia.

Sin embargo, no es cualquier estructura de la materia de enseñanza, agrupada de forma lineal o atropellada, la que garantiza un nivel superior de comprensión e independencia en los alumnos, debe prevalecer un principio de organización y estructuración que guíe al maestro desde el punto de vista metodológico en la planificación y dirección del proceso de enseñanza - aprendizaje.

1.5. El aprendizaje significativo.

En una variante de enseñanza de la Matemática, hemos puesto en un primer plano los problemas, de modo que los conceptos adquieran significado en ese contexto lo que, sin dudas, constituye un punto teórico importante en el **aprendizaje significativo**.

Según D. Ausubel, el aprendizaje significativo surgió como un intento de contrarrestar el aprendizaje repetitivo y el carácter no significativo del aprendizaje y va dirigido a garantizar el establecimiento de las relaciones esenciales y no de un modo arbitrario entre lo que debe aprenderse y lo que es conocido, es decir, lo que se encuentra en las estructuras cognitivas de la persona que aprende.

D. Ausubel y sus seguidores consideran, desde el punto de vista cognitivo, que aprender de un modo significativo consiste en realizar un proceso de actualización de los

esquemas de conocimientos relativos a la situación en consideración, es decir, "poder atribuirle un significado al material objeto de estudio".²³

En este tipo de aprendizaje los esquemas cognitivos del que aprende no se limitan a asimilar la nueva información sino que el mismo entraña una constante revisión, modificación y ampliación; produciéndose nuevos vínculos entre ellos. De esta forma, permite una mayor funcionalidad y una memorización comprensiva de los contenidos asimilados de un modo significativo.

La noción del aprendizaje significativo llevó necesariamente a reanalizar el papel que los contenidos juegan en el proceso de enseñanza aprendizaje ampliando su significación hasta considerar también a las estrategias y distintos tipos de procedimientos tales como: el sistema de preguntas para indagar, explorar y observar con un carácter científico.

Uno de los principales exponentes de estas teorías es el español César Coll que al reconocer el carácter no espontáneo del aprendizaje significativo fundamenta las condiciones en que este se produce:²⁴

1. El contenido de la enseñanza debe ser potencialmente significativo desde el punto de vista de su estructuración interna, significatividad lógica, coherencia, claridad y organización. Esta condición no se reduce a la estructura misma del contenido, sino que abarca también la presentación que de él se efectúa que tiene en cuenta los esquemas de conocimientos previos existentes en la estructura cognitiva de la persona que aprende.
2. El alumno debe disponer del bagaje indispensable para efectuar la atribución de significados, o sea, disponer de los conocimientos previos necesarios que le van a permitir abordar el nuevo aprendizaje.
3. La actitud favorable a la realización de aprendizajes significativos que requiere realizar una actividad cognitiva compleja (seleccionar esquemas previos de conocimientos y aplicarlos a la nueva situación, revisarlos, modificarlos, proceder a su reestructuración, al establecimiento de nuevas relaciones, evaluar su adecuación, etc.) para la cual el alumno debe estar suficientemente motivado.

Como condición primaria del aprendizaje significativo se considera el papel que los contenidos desempeñan en la enseñanza y la importancia de que en la forma de presentarlo se ponga de manifiesto, en

²³ Belmont, J.: Estrategias cognoscitivas y aprendizaje estratégico. En Acción Pedagógica. Vol. 2 (1,2). 1991. p.62-63.

²⁴ Hidalgo Guzmán, J.L.: Aprendizaje operatorio. Ensayos de teoría pedagógica. Casa de la Cultura del maestro mexicano. A.C. 1992. p. 86.

mayor o menor medida, su estructura, lo que posibilita la autonomía del alumno para enfrentar nuevas situaciones, para identificar problemas, para sugerir soluciones interesantes.

Estas condiciones de la enseñanza para promover aprendizajes significativos apuntan hacia el estudio de la estructura del contenido y determinan aquella que permita al alumno aprender, es decir, poder integrar cada nuevo conocimiento a las estructuras ya formadas para ampliarlas, perfeccionarlas, modificarlas y poder utilizarlas en situaciones concretas. Esto concuerda perfectamente con nuestra posición con relación al aprendizaje y su particularidad específica.

1.6. Consideraciones sobre la selección y ordenamiento del contenido de la asignatura.

En nuestra opinión uno de los intentos más importante para lograr un aprendizaje que supere las consecuencias de un aprendizaje lineal, es decir, darle significatividad a los contenidos y, de este modo, lograr una mayor actividad en los alumnos es el realizado en los Estados Unidos de Norteamérica con la creación de un documento de orientación general de lo que se considera calidad en la Educación Matemática.

En los esfuerzos actuales para la reforma de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de EE. UU. ha propuesto los estándares curriculares que se establecen con los objetivos siguientes: que los estudiantes aprendan a valorar la matemática, que se sientan seguros de su capacidad de hacer matemáticas, que lleguen a resolver problemas matemáticos, que aprendan a comunicarse mediante las matemáticas y que aprendan a razonar matemáticamente.²⁵

Los estándares no se proponen para conformar un tema o unidad en un texto, sino, por el contrario, proponen las actividades de aprendizaje de los alumnos a partir de la idea de que toda la Matemática debe ser estudiada dentro de un contexto que dé sentido a las ideas y conceptos. Como contexto deben utilizarse situaciones de problemas que establezcan la necesidad de ideas nuevas y motiven a los estudiantes.

Los estándares se entienden “como juicios de valor basados en un concepto amplio y coherente del proceso educativo que surge de varios factores: las metas sociales, las metas escolares, la investigación sobre enseñanza - aprendizaje y la experiencia personal”.²⁶

²⁵ National Council of Teachers of Mathematics (NCTM): Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Edición en Castellano de Sociedad Andaluza de Educación Matemática “THALES”. P.5.

²⁶ Ibid (26). P. 7.

En los estándares curriculares se parte de considerar los contenidos matemáticos atendiendo a tres características: saber matemáticas es usar matemáticas, los cambios en el uso de las matemáticas en la última década por la capacidad del ordenador de procesar grandes paquetes de información y los cambios tecnológicos y la ampliación de las áreas donde se utilizan las matemáticas que han provocado un crecimiento en las propias matemáticas.

Los estándares especifican que la docencia debe ser desarrollada a partir de situaciones de problema, que deben ser lo suficientemente simple para que el estudiante las pueda manejar y lo suficientemente complejas para que permitan una pluralidad de enfoques. De ahí que los cuatro primeros estándares se denominen: resolución de problemas, comunicación, razonamiento y conexiones matemáticas que subrayan la posición de que es preciso acercarse a las matemáticas de forma global.

El estándar número uno es **las matemáticas como resolución de problemas** que plantea que el currículo incluya abundantes y diversas experiencias en la resolución de problemas como método de indagación y aplicación para que con la actividad el estudiante sea capaz de usar enfoques de resolución de problemas para investigar y entender los contenidos matemáticos; formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas; resolver problemas de pasos múltiples y no rutinarios; verificar e interpretar resultados en relación con la situación del problema original; generalizar soluciones y estrategias para situaciones de problemas y adquirir confianza en el uso significativo de las matemáticas

En la concepción propuesta a partir de los estándares curriculares, para cada nivel de enseñanza, coincidimos en el lugar primario en que se sitúa en la actividad de aprendizaje, la actividad de resolución de problemas, como el contexto principal para el aprendizaje y la aplicación de las matemáticas y la necesidad de diseñar las situaciones problemas que le permitan al alumno desarrollar estrategias y enfoques en la elaboración y fijación de conceptos, proposiciones y procedimientos matemáticos.

En las últimas décadas, en nuestro país, la selección y ordenamiento del contenido de la Matemática en la escuela ha tenido su base en los fundamentos de la Pedagogía y Teoría de la enseñanza, particularmente de la antigua República Democrática Alemana.

Los criterios más difundidos han sido el ordenamiento lineal del contenido y el ordenamiento según las líneas directrices que se sustentan en la lógica y sistemática de la ciencia matemática, la elaboración y aplicación del saber y poder matemáticos.

El ordenamiento lineal del contenido de la Matemática en la escuela se ha llevado a cabo por ciclos: primer ciclo de la primaria, segundo ciclo de la primaria, secundaria básica y preuniversitario. Para cada ciclo se definen los elementos del saber y poder que se introducen o profundizan, así como las capacidades mentales generales y cualidades que en cada etapa deben ser formadas. Lo que se destaca en esta forma de ordenamiento es que no aparece una definición del elemento a partir del cual se estructura ese contenido y qué es lo que caracteriza el modo de actuación del alumno.

Cuando la materia se ordena atendiendo a aspectos principales de la transmisión de conocimientos, el desarrollo de habilidades y capacidades generales y específicas y de la educación de los alumnos se refiere a las líneas directrices, que se definen como lineamientos que penetran todo el curso escolar a partir de la relación entre el objetivo a lograr, el contenido que es objeto de aprendizaje y los métodos a elegir.

Los programas actuales de la asignatura Matemática se diseñan a partir del ordenamiento según las líneas directrices que se agrupan en las concepciones de W. Jungk y W. Zillmer en directrices del conocimiento y del desarrollo de capacidades y en la propuesta del colectivo de autores cubanos se agrupan a partir de los contenidos matemáticos, las capacidades mentales específicas y generales y la educación de los alumnos.

La presentación de las líneas directrices definidas en los programas vigentes se orienta hacia la descripción de los objetivos y el contenido matemático así como los métodos para lograrlos, lo que ofrece pautas para el diseño curricular propiamente y la orientación del profesor, pero no se presentan indicaciones a partir de lo que caracteriza la actividad de aprendizaje del alumno, no describen la manera en que los alumnos, en cada etapa, estructuran la información y la utilizan para realizar las tareas, cómo resuelven los problemas en un contexto determinado.

En el ordenamiento lineal del contenido y según las líneas directrices se destacan más los componentes del saber (conceptos, proposiciones, procedimientos) que son esenciales en las diferentes unidades temáticas por grados y ciclos, así como las habilidades matemáticas, lo que resulta de mucha importancia, sin embargo, no se analizan las exigencias respecto a la resolución de problemas, al nivel de significación que tiene cada

contenido para resolver situaciones problemáticas dentro y fuera de la asignatura. Es importante señalar que se asume, entre los fundamentos para el tratamiento metodológico de las distintas situaciones típicas y complejos de materia, la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales de P. Y. Galperin, considerando importante, en este caso, establecer nuestra posición al respecto.

En tal sentido, esta presupone un proceso de aprendizaje que comienza con la formación de las acciones necesarias para apropiarse de los conocimientos, hábitos y habilidades como paso previo para la solución de los problemas y organiza el proceso de forma tal que los alumnos se apropien primero de esas acciones mentales y después se enfrenten a los problemas y busquen su solución. En consecuencia, la misma establece una secuencia lineal para la estructuración de proceso de aprendizaje obviando en cierto sentido que la reorganización de los conocimientos, hábitos y habilidades del sujeto que aprende es parte importante en el mismo y depende de la estructuración inicial que cada sujeto posee al comenzar cierto aprendizaje.

Consideramos que, si en la actividad del estudiante no se plantea un problema y la búsqueda de su solución, resulta más difícil que haya reorganización, organización y estructuración de los conocimientos y las habilidades; además, el estudiante pueda desplegar los conocimientos y estrategias conocidas y principalmente manifestar sus creencias y actitudes, como condiciones importantes en la resolución de problemas.

En este caso, aunque se tiene conocimiento de que la estructura interna tiene cierta incidencia sobre este desarrollo no aparece manifestado explícitamente. P. Y. Galperin presta mayor atención al proceso de formación de las acciones mentales y su perfeccionamiento, que son premisas del desarrollo del pensamiento, pero no son las únicas.

Al respecto S. L. Rubinstein se manifestó, indicando lo erróneo y las consecuencias de una enseñanza que no tenga en cuenta este condicionamiento interno. De esta forma, dio una alternativa reconociendo, en primer lugar, que este proceso de evolución es lento, dependiente de lo externo como base y describió desde el punto de vista externo como transcurría este proceso de pensamiento. No obstante, en los trabajos de S. L. Rubinstein queda expresado que en el aprendizaje sigue constituyendo un paso determinante: **la**

interiorización de acciones, aunque dirigido en lo esencial a los procedimientos generalizados.²⁷

Es interesante señalar que, en las concepciones del aprendizaje de P. Y. Galperin y sus seguidores (N. F. Talízina), se destaca el papel asignado a la formación de una base orientadora para la acción que ha sido ampliamente utilizado en nuestro país.

La base orientadora para la acción la define N. F. Talízina como el sistema de condiciones en el que realmente se apoya el hombre para cumplir la acción tomando en cuenta todas las condiciones necesarias para la estructuración correcta de la parte ejecutora y, como organismo de dirección, tiene la responsabilidad de representar el modelo de la actividad que debe formar y ese modelo ha de ser lo más completo posible. Observemos que las condiciones internas que tiene el sujeto de aprendizaje se coloca en un segundo plano.

Al caracterizar los tipos de base orientadora se destaca que su éxito radica, ante todo, en el contenido seleccionado, que puede ser substancialmente diferente en su representación, grado de generalidad y la plenitud del reflejo de las condiciones necesarias para la acción.

En la interpretación práctica de estas posiciones teóricas se ha observado la mayor tendencia a crear la base orientadora de tipo particular, aislada, específica, para la formación de un concepto, teorema o procedimiento, y en menor medida, se proponen aquellas que orienten a los alumnos hacia toda una clase de conceptos, teoremas o procedimientos, es decir, con un carácter generalizado que le permita la aplicación consciente de un método general a la diversidad de situaciones particulares. Claro, consideramos, que el punto de partida de la formación de los métodos generalizados en los alumnos lo debe constituir el problema en sí y las acciones propias del sujeto y no simplemente el sistema de acciones que componen o que se descompone el procedimiento generalizado.

Tales situaciones, se acentúan en la formación de una base orientadora para las acciones propias del contenido que se estructuran o agrupan en unidades temáticas, sistemas de clases o niveles de organización más abarcadores. El problema lo observamos en la necesidad de precisar cómo formar la base orientadora en estos niveles de organización en función del objetivo a lograr que no puede ser simplemente el desarrollo de

²⁷ Rubinstein, S.L.: El problema de las capacidades y las cuestiones relativas a la teoría psicológica. En Antología de la Psicología Pedagógica y de las Edades, de Iliasov I. I. y V. Ya. Liaudis. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1986. P. 66-67.

hábitos y habilidades y de una asimilación lo más sólida posible de conocimientos impartidos por el profesor, dejando prácticamente al alumno la tarea de repetir lo que el maestro le indica.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.

La Matemática Educativa en los últimos años ha sido reflejo de las tendencias del desarrollo y la sistemática de la Ciencia Matemática que ha llevado a sistemas educativos, como el nuestro, a resaltar las formas por encima del significado de las actividades dirigidas a analizar, interpretar y valorar la resolución de problemas.

El ordenamiento del contenido, de forma lineal o de las líneas directrices, no hace explícito el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje, éstos se enmarcan más en la selección y el orden que en la fundamentación de la actuación del alumno que le cree las condiciones para resolver problemas; en ellas no se hace explícita la actividad de resolución de problemas, comunicación, razonamientos y conexiones matemáticas; como otras concepciones analizadas.

Los paradigmas sobre el papel de la resolución de problemas matemáticos constituyen un importante antecedente a considerar al fundamentar la actividad matemática como resolución de problemas y cómo todo problema matemático es la base de un campo de problemas a partir del cual puede estructurarse la elaboración recursiva de la teoría, aspecto que se asume como esencial en la variante que se propone.

En el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en la escuela cubana la resolución de problemas se destaca como medio de fijación al finalizar el contenido de un tema o como medio de motivación de forma aislada y no se destaca como medio para el aprendizaje, como un medio para dirigir el pensamiento y conformar un modo de actuación generalizado en el alumno.

Una variación de esta concepción debe propiciar que la ejercitación, la profundización, sistematización y aplicación constituyan realmente momentos que propicien que la asimilación de los conocimientos y las habilidades matemáticas, se logre de forma integrada, desde el principio, a partir del objetivo a que se aspira (resolución de problemas) que permita formar en el alumno el modo de actuación frente a una determinada situación problemática.

El análisis tendrá en cuenta como cuestión central **la permanencia estructurada de los conocimientos y las habilidades, desde el inicio**, tomando como unidad organizativa la unidad temática; además de lograr que el alumno sea capaz de meditar y

reflexionar alrededor de su propia actividad dirigida en lo fundamental hacia la resolución de problemas matemáticos.

Caracterizar los problemas y posibles campos de problemas y cómo expresar la estructura del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, sobre su base, es la interrogante que se enfrenta en el capítulo siguiente.

CAPITULO II: VARIANTE PARA LA ESTRUCTURACIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE Y DEL CONTENIDO DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

INTRODUCCIÓN.

Como se ha explicado, en el capítulo anterior, el aprendizaje de la Matemática se ha caracterizado, en líneas generales, por la siguiente secuencia de pasos:

- Determinación de los objetivos de la formación matemática.
- Selección del contenido matemático sistematizado atendiendo a su importancia social y el lugar que ocupa dentro de la estructura de la Matemática.
- Análisis de la transición a partir de la estructuración vigente de la enseñanza de la Matemática hacia una nueva variante.
- Propuesta de métodos para lograr con el contenido seleccionado la asimilación por el alumno.

De este modo, la variante que se fundamenta presupone que, en la estructura del proceso de enseñanza aprendizaje, el alumno se enfrente a un sistema de problemas prácticos y matemáticos que, siendo comprensibles, le permitan ir profundizando en las diferentes tareas cognoscitivas que de él se derivan.

La idea es que el punto de partida del aprendizaje lo constituya la necesidad que transmite el planteamiento y solución de un sistema de problemas relacionados con la vida práctica y la construcción de la propia Matemática. De ahí que la variante que se propone para la nueva estructuración tiene como base los objetivos de la asignatura y los problemas que con determinados rasgos se constituyan como medio de aprendizaje.

2.1. Esencia de la variante propuesta.

Para la estructuración del proceso se parte de los objetivos que la sociedad plantea a la formación matemática y un sistema de problemas a diferencia de la secuencia general que se sigue en otros enfoques.

Esta estructuración se propone para que el alumno no transite por la asignatura con el producto del conocimiento sistematizado, desconociendo siempre el contenido siguiente, sino avanzar conociendo qué problema tiene planteado y, en gran medida, conocer una vía

de solución e ir precisando con cada nuevo conocimiento qué aporte hace para la explicación, profundización y precisión de esa u otra vía de solución, la mejor comprensión del problema en sí, así como la formulación de nuevos problemas.

Esta estructura sustenta la variante propuesta que, en su esencia, le debe permitir al profesor una acción transformadora, que se concrete en métodos para dirigir el proceso de enseñanza de la asignatura basado en el planteamiento, comprensión y resolución de problemas.

La variante propuesta consiste en:

Estructurar un sistema de problemas a partir de los cuales se pueda representar todo el sistema teórico de la asignatura, en su forma esencial, y desarrollar de forma representativa, modeladora, a través de problemas, todo el sistema de habilidades; es decir, que cada sistema de conocimientos y habilidades necesario sea elaborado por los alumnos asociado a un sistema de problemas.

El **sistema de problemas** se entiende como un grupo de problemas que tienen el objetivo de dar significación y objetividad al contenido y sirven de base para la motivación y orientación de los alumnos. El sistema de problemas está caracterizado por: transmitir información y estimular a la valoración de situaciones prácticas, no de forma aislada, sino con un conjunto de datos y relaciones sobre un tema determinado que posibilite extraer conclusiones sólidas, estimular el desarrollo de diferentes formas de razonamiento y procedimientos heurísticos y dar permanencia a los objetivos básicos de la asignatura de manera que los contenidos se reactiven permanentemente.

La esencia radica en que al estructurar la asignatura ocupen una posición rectora los problemas que constituirán la medida del valor instrumental del contenido que debe construir el alumno.

La idea fundamental, que se propone, es romper con el aislamiento en el aprendizaje de los conceptos, relaciones y procedimientos, que hacen más difícil al alumno realizar un proceso de reestructuración en función de sus propios conocimientos, para lograr que con determinadas condiciones o datos conocidos pueda encontrar vías de solución que le guíen hacia el conocimiento y la demostración de lo desconocido.

El propósito es incentivar a los alumnos en la solución de ejercicios para poder aplicar el sistema de conocimientos y habilidades atendiendo a la variedad de las condiciones que se dan y que se buscan y que se logre un alto nivel en las habilidades para la argumentación, explicación y descripción de los procesos de solución, como reflejo básico

de que realmente se avanza en la profundización, como función didáctica que pretende enfocar nuevas vías y posibilidades de fundamentación, es decir, la conformación en el alumno de una cultura matemática.

La variante propuesta tiene en cuenta la noción de globalización, la significatividad y objetividad del contenido que se estudia y la importancia del contexto social en el perfeccionamiento de la actividad de estudio del alumno resumiéndose en las siguientes reglas:

- ❖ lograr, desde el inicio, una visión integradora del contenido;
- ❖ lograr, desde el inicio, una visión amplia acerca de las posibilidades de aplicación en la práctica social, es decir, del valor instrumental del contenido.

En la primera regla se reflejan los elementos esenciales que hemos explicado de la globalización y, en la segunda, el grado de significación y objetividad que tenga el contenido para el alumno.

Debe significarse, en estas consideraciones, el lugar que ocupan los principios didácticos de la asequibilidad y el de la accesibilidad, por la importancia que tiene que el planteamiento de los problemas, su comprensión y solución se adecuen a las condiciones previas de desarrollo de los alumnos, así como los ejercicios propuestos para su fijación.

El logro de una visión amplia de las posibilidades de aplicación del contenido en la práctica social está indisolublemente ligado al planteamiento de la motivación y orientación hacia el objetivo en tres momentos básicos:

- ❖ sobre una unidad temática;
- ❖ sobre un sistema de clases y
- ❖ sobre una clase.

Estos niveles permiten entrelazar la orientación que debe lograrse en cada clase sobre el aporte que cada concepto o procedimiento hace a las soluciones de los problemas esenciales para la conformación de un verdadero sistema de conocimientos y habilidades.

De lo que se trata es de ampliar la concepción en la dirección del alumno acerca del principio de la sistematización de la enseñanza que se conoce como: la ordenación, estructuración de los conocimientos en un sistema, el entrelazamiento de los aspectos aislados; es decir, analizar en detalles los conceptos, estudiar relaciones colaterales, los casos particulares y, consecuentemente, se logra una mayor comprensión e ideas más profundas al ordenar, luego, los conocimientos en un sistema. Se reconoce que, generalmente, la sistematización no se puede dar en una clase, sino al concluir un sistema

de clases o unidad temática.²⁸ Esta forma de enseñanza no ha garantizado que el alumno durante el proceso de estudio de la unidad temática asimile los métodos que le permitan resolver problemas, porque, en gran medida, no se ha logrado desde el inicio, una adecuada comprensión de su esencia a partir de:

¿Qué se estudia? (Aspecto cognitivo)

¿Qué utilidad tiene? (Aspecto social)

¿Para qué se estudia?

¿Cómo podrá ser utilizado?

¿Cómo puede evaluarse el grado de utilidad?

En resumen, el postulado fundamental en que se sustenta la variante propuesta es lograr que los alumnos puedan, desde el primer momento, comprender el problema en toda su complejidad y cómo encontrar los fundamentos de la vía de solución a través del contenido de una unidad temática.

2.2. Los problemas esenciales o generadores del contenido de la asignatura.

Ya hemos indicado lo esencial de la variante que se propone, en la que se asume que el aprendizaje del alumno tiene como centro lograr el perfeccionamiento de su propia actividad y esto se comprueba y tiene su mayor desarrollo cuando existe cierto grado de permanencia u objetividad de los problemas que debe resolver, de ahí que sea importante caracterizar, de forma general, aquellos que, desde el punto de vista didáctico, permitirán conducir esta forma de enseñanza.

Para una asignatura la definición de los problemas de carácter general que deberán aprender a resolver los alumnos, según las exigencias sociales que se planteen, debe conducir a la precisión de cuáles objetivos serán necesarios cumplimentar. Quiere decir, que la relación dialéctica problema - objetivo caracteriza el vínculo entre las exigencias sociales, los problemas que requieren para su solución del contenido matemático y, posteriormente, los objetivos que hay que vencer para poder resolver esos problemas en cada etapa del proceso de enseñanza aprendizaje.

De este análisis, se ha derivado la explicación del concepto de **problema esencial** por la necesidad de esclarecer los rasgos que tienen y el trabajo docente metodológico que en consecuencia se propone realizar.

²⁸ Ibid.(14). P. 186.

Sobre esta base los problemas esenciales de la asignatura se explican como aquellos que **expresan las exigencias que en la actividad matemática, desde el punto de vista teórico y práctico, deben lograr los alumnos en el contexto de la asignatura, es decir, deben ser el reflejo de la situación que han de comprender, interpretar y resolver con el contenido que estudian.**

Cada problema esencial o generador de la asignatura se concreta en un conjunto de “subproblemas” que constituyen las direcciones o condiciones específicas en que se manifiesta el perfeccionamiento del sistema de conocimientos y habilidades, es decir, la situación - problema que se plantea a los alumnos teniendo en cuenta su nivel de desarrollo y el objetivo previsto para su aprendizaje en un grado, unidad temática o sistema de clases.

Estos problemas son los que guían el hilo conductor del contenido teniendo en cuenta los siguientes rasgos:

- ❖ concretan el objetivo a lograr con el contenido de la unidad;
- ❖ constituyen la base de la motivación;
- ❖ el planteamiento y solución del problema, en su fase inicial, conduce a los alumnos al sistema de acciones a aplicar en el nivel de familiarización mediante indicaciones o impulsos;
- ❖ como hilo conductor del contenido deben lograr que el sistema de conocimientos sea la vía para el perfeccionamiento de una o varias vías de solución;
- ❖ los problemas esenciales pueden ser formulados como ejercicios, como preguntas, como actividades extraclases para buscar el valor práctico o como actividades prácticas usando medios de enseñanza u objetos reales;
- ❖ la solución de los problemas esenciales, en la fase inicial, consistirá en la utilización del método conocido por el alumno y luego la introducción inmediata del concepto, teorema o procedimiento que sirve de instrumento para la búsqueda de una nueva vía de solución;
- ❖ la introducción de los conceptos, teoremas o procedimientos en la etapa inicial (introdutoria) no implica necesariamente la demostración o fundamentación, esta sobrevendrá en la etapa siguiente de elaboración del nuevo contenido, lo que constituye el perfeccionamiento del sistema de conocimientos y habilidades;
- ❖ los problemas esenciales de la unidad temática se plantearán y resolverán al inicio de cada unidad, para lo que se dispondrá de varias clases;

- ❖ la vía escogida para la solución de los problemas esenciales ha de tener en cuenta las condiciones previas de los alumnos, o sea, una vía en la que el proceder pueda ser ejecutado con el nivel alcanzado y con la introducción del elemento nuevo del contenido para valorar las posibilidades de perfeccionar ese proceder.

2.3. Funciones de los problemas esenciales.

Como se ha referido en el capítulo 1, diferentes autores han fundamentado el papel de los problemas de acuerdo al lugar que ocupan en el proceso de enseñanza aprendizaje, así se reconocen los problemas como fundamento y medio del aprendizaje, en la concepción de constructivistas y cognitivistas, el problema como medio para la fijación y para la motivación; estas últimas han tenido más aplicación en nuestra escuela.

Consideramos que el alumno construye el conocimiento dentro de un contexto social, tanto de forma individual como colectiva, constituyendo la resolución de problemas un importante medio para estimular este proceso bajo la dirección del profesor.

La variante que se asume al estructurar el contenido de enseñanza de la Matemática a través de problemas hace necesario, a la luz de nuestras posiciones, asumir cuáles funciones deben caracterizar esos problemas en cada uno de los niveles de sistematicidad del proceso docente educativo.

Las funciones que se consideran son las siguientes:

Desarrolladora: Los problemas ofrecen a los alumnos una amplia visión de las posibilidades que brinda el contenido en cuanto a la aplicación práctica, métodos de solución, relación intermateria y cómo expresar en el lenguaje apropiado los resultados.

Esta función de los problemas está dirigida en lo fundamental al análisis que necesariamente ha de realizarse con cada problema o grupo de ellos que nos permita asegurarnos que los mismos recorren los campos de la práctica más importantes para la sociedad.

Modeladora: Los problemas ofrecen a los alumnos un modelo de actuación y se convierten una vez resueltos, de forma individual completamente o con aclaraciones, en puntos de referencia para la resolución de otros o en la elaboración de nuevos procedimientos y nuevos problemas.

Es decir, éstos podrán aparecer dentro del contexto de la variante de forma independiente y podrán ser presentados por el profesor como aclaración a los alumnos después de una actividad independiente o conjunta. Es conveniente aclarar que los problemas en su función desarrolladora también satisfacen la función modeladora.

Sistematizadora: Los problemas ofrecen la posibilidad de relacionar, entrelazar conceptos y procedimientos aislados, sobre un objeto matemático y construir un nuevo sistema de conocimientos y habilidades.

Esta función de los problemas está dirigida en lo fundamental al análisis que necesariamente ha de realizarse con cada problema o grupo de ellos que nos permita asegurarnos que los mismos estimularán en los alumnos la realización de las construcciones mentales ya mencionadas en su conjunto.

Socializadora: Los problemas permiten sintetizar distintos puntos de vista con relación a la forma en que se hayan resuelto por los alumnos, propician el intercambio profesor - alumno y alumno - alumno, además de que en el caso de los problemas relacionados con la vida práctica, el alumno adquiere una comprensión más profunda acerca del contenido matemático en relación con el papel que desempeña en el desarrollo social.

Lógica: Los problemas constituyen la base para la estructuración de la materia en dependencia de la vía lógica para la obtención del nuevo conocimiento: inducción y deducción.

Esta función de los problemas está dirigida en lo fundamental al análisis que necesariamente ha de realizarse con cada problema o grupo de ellos que nos permita asegurarnos que los mismos estimularán en los alumnos la realización de los distintos tipos de razonamientos.

Heurística: Los problemas son la base del desarrollo heurístico, a través de ellos se desarrollan los principios generales y particulares, las reglas y estrategias que guían en la búsqueda de la solución y de nuevos problemas. La búsqueda de soluciones transcurre a través de preguntas por lo que constituye un elemento esencial a caracterizar en la actividad del alumno.

Estas funciones brindan las condiciones necesarias para fundamentar la estructura del contenido de la enseñanza de la Matemática y desde el punto de vista formativo, contribuyen a que los alumnos:

- ❖ Construyan modelos positivos de actuación para la búsqueda de vías de solución, en el análisis y búsqueda de explicaciones y cómo evaluar los resultados.

- ❖ Construyan los modelos para la representación del proceso de solución en un lenguaje apropiado, utilizando la terminología y simbología matemática y las inferencias lógicas de forma exacta.
- ❖ Se eduquen en el enfrentamiento de una dificultad para resolverla con los medios de que disponen y la perfeccionen sistemáticamente.
- ❖ Profundicen en la utilización de los procedimientos heurísticos.
- ❖ Consoliden una disposición hacia la resolución de problemas.

La determinación de los problemas esenciales a partir de las funciones señaladas provocan una nueva situación en el profesor al tener que seleccionar las situaciones concretas que le servirán para que los alumnos construyan los modos de actuación en función de los objetivos y la necesidad de nuevos conocimientos y habilidades.

2.4. Los problemas esenciales, los objetivos y el contenido de la asignatura.

Los problemas esenciales son la expresión concreta de la aspiración a lograr con los alumnos en el dominio del contenido, en relación con el nivel de preparación para la comprensión, análisis y solución de las situaciones teóricas y prácticas que le son inherentes. El problema surge a partir de la determinación de la necesidad que para la vida práctica y para la Matemática tiene el contenido con la adecuada precisión del lugar de los conceptos y procedimientos como un todo y el nivel de profundidad que en su estudio se puede alcanzar atendiendo a las condiciones del desarrollo de los alumnos.

El objetivo, como punto de partida y premisa pedagógica más general, expresa la transformación que se desea alcanzar en el alumno, o sea, el propósito que guía al maestro y a los propios alumnos a través del proceso de enseñanza.

Los objetivos, como señala Carlos Alvarez, son el "modelo pedagógico del encargo social, son los propósitos y aspiraciones que durante el proceso docente se van conformando en el modo de pensar, sentir y actuar del estudiante"²⁹. Además lo resalta como categoría pedagógica que tiene la función de orientar y organizar el proceso docente.

²⁹ Alvarez de Zayas, C.: Didáctica de la Educación Superior. Material impreso. Centro de Estudios Manuel F. Gran. Universidad de Oriente. P. 30.

En el análisis de esta categoría didáctica se destaca el carácter subjetivo por expresar la aspiración, idea o propósito y su unidad dialéctica con lo objetivo al determinar el contenido y los modos de actuación del profesor y los alumnos.

La relación problema esencial - objetivo permite orientar el proceso de estructuración del sistema de conocimientos y habilidades ya que concreta las situaciones que ha de enfrentar el alumno como consecuencia de la asimilación "normal" de dichos sistemas, lo cual se traduce en la labor del profesor a la determinación de qué debe saber hacer ese alumno.

De la precisión de los problemas esenciales de una asignatura se delimita el propósito a alcanzar en los alumnos con una visión más abarcadora y general, lo que conlleva a que el objetivo de cada unidad temática se ubique como un eslabón para el logro de dicho propósito. El objetivo de cada unidad temática, sistema de clases y cada clase debe verse como componente necesario para la comprensión, análisis y solución de uno, al menos, de los problemas esenciales, entendido en el sentido de su perfeccionamiento.

La posición rectora de los objetivos en el proceso docente se materializa al cumplir la función de orientar a los profesores y los alumnos en la aspiración de resolver un problema mediante la construcción y búsqueda de los conceptos, procedimientos y relaciones necesarios para lograrlo.

De la relación entre los problemas esenciales, los objetivos y el contenido de la enseñanza se han identificado algunos aspectos para su tratamiento didáctico:

1. Los problemas esenciales deben ser la expresión de la universalidad de la aplicación de la Matemática en las diferentes ramas de la ciencia y la técnica y de la propia Matemática que motive la interpretación de la solución de situaciones prácticas.
2. La solución de los problemas esenciales debe entrañar la utilización de un sistema de conocimientos con la completitud y significatividad necesaria para el alumno.
3. El planteamiento del problema y el análisis de su solución le debe permitir al alumno, comprender la necesidad de su estudio y la vía posible para resolverlo, pudiendo ejecutarla con los instrumentos de que dispone y con la introducción del concepto, teorema o procedimiento que constituye el nuevo elemento esencial para completar el sistema de conocimientos y habilidades ya formado y lograr su perfeccionamiento.
4. El problema debe reflejar un eslabón cualitativo en el desarrollo de la Matemática y el análisis de su significación práctica, es decir, que exprese al alumno el nivel de formación matemática que aporta la solución de cada nuevo problema, la exigencia que será

resuelta con el nuevo sistema de conocimientos como base para el logro de una orientación racional.

5. La solución de los problemas esenciales debe estimular la unidad en el desarrollo de los tipos de pensamiento reductivo y deductivo según el nivel de enseñanza, es decir, propiciar la ejecución de acciones que le permitan al alumno calcular, medir, comparar, construir, etc., como base para la formación de estrategias generales y su fundamentación.

Como se observa, en estos aspectos se fundamenta el papel de la Matemática en el desarrollo científico técnico, el desarrollo de la propia Matemática y la resolución de problemas como la vía para demostrar a los alumnos la necesidad de su estudio.

En la medida en que la relación problema esencial - objetivo se esclarece para el profesor se precisan dos acciones importantes: **la determinación y derivación de los objetivos para cada clase** conociendo las exigencias de la unidad temática dadas en el programa de la asignatura.

Con la caracterización de los problemas esenciales de la asignatura se explica el contenido del propósito a alcanzar por los alumnos con una visión más abarcadora y general, lo que conlleva a que el objetivo de cada clase se ubique como un eslabón para el logro de dicho propósito.

El objetivo de cada clase debe verse como componente necesario para la comprensión, análisis y solución de uno de los problemas esenciales en un primer plano, pero estrechamente relacionado con los restantes problemas del sistema.

La posición rectora en el proceso docente se materializa al cumplir la función de orientar a los profesores y los alumnos en la aspiración de resolver un problema mediante la búsqueda de los conceptos, procedimientos y relaciones necesarios para lograrlo.

La definición de los problemas esenciales, partiendo de lo que debe ser capaz de resolver el alumno derivado de las exigencias que la sociedad plantea a la asignatura y cada tipo de enseñanza, determina el sistema de conocimientos y habilidades que debe formarse.

En el contenido de la Matemática se encuentran los conceptos, teoremas, procedimientos (de cálculo, demostración, construcción) y todos ellos se integran, necesariamente para resolver los problemas específicos y generales que sirven para interpretar y avanzar en el proceso de solución de los problemas esenciales.

En la literatura sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática se reconocen las situaciones típicas como las formas metodológico- organizativas de las clases y se estructuran desde el punto de vista didáctico a partir del trabajo en un problema, lo que fundamenta los procesos de formación de conceptos, búsqueda de teoremas y su demostración, la resolución de ejercicios con texto y de construcción y la búsqueda de un procedimiento algorítmico como procesos de solución de problemas específicos, que generalmente se resuelven en una clase o parte de ella.

La integración de estos problemas específicos, en la Matemática, constituye para el alumno una tarea muy difícil si no dispone de un criterio sólido acerca de las relaciones entre ellos y, sobre todo, su utilidad. Ambos criterios pueden guiar al alumno cuando tiene claridad en el objetivo a lograr porque conoce el problema que debe resolver utilizando los conceptos, teoremas y procedimientos como instrumentos.

Con esta concepción se fundamenta la formación de un sistema de conocimientos y de habilidades, es decir, que los componentes del contenido están adecuadamente estructurados en función del objetivo a alcanzar por el alumno.

La formación del sistema de habilidades, necesariamente abarca las habilidades generales que son la base de la solución de los problemas esenciales de una unidad temática y las habilidades específicas que constituyen el dominio de los procedimientos de cálculo, construcción y demostración que se deben ejercitar como elementos componentes del sistema de acciones de la habilidad general.

Comprender esta interrelación es, para el profesor, una tarea básica porque le permite deslindar lo inmediato y lo mediato en el cumplimiento de los objetivos y la vía para lograrlo a través del trabajo con los problemas esenciales y la estructuración del contenido a partir de ellos.

2.5. La formulación de preguntas en la variante propuesta.

El significado que adquiere en la variante que proponemos la estimulación adecuada de la actividad heurística de los alumnos es el fundamento de que consideremos también importante puntualizar el uso de las preguntas dentro de su contexto.

El concepto de pregunta se considera actualmente como algo que no se ha investigado suficientemente y se discute su relación con los conceptos de tarea y de problema.

La pregunta se reconoce como una forma lógica de expresión de un problema en sí mismo. Así M. I. Majmutov define la pregunta como “la presentación lingüística y gramatical de la idea y en un sentido más estrecho como la forma lingüística de expresión del problema docente como categoría lógico psicológica”.³⁰

En su sentido específico, la pregunta ofrece la indicación, el impulso o estímulo para actuar en el proceso de búsqueda o solución de los problemas docentes que surgen en el proceso de enseñanza de una u otra asignatura y la amplitud exigida en la respuesta es la expresión del nivel de dominio del contenido.

Un rasgo esencial en la formulación de las preguntas es la dirección de la búsqueda cognoscitiva y la indicación de las vías de solución al problema fundamental que se plantea al alumno según el objetivo de la clase, sistema de clases o unidad temática.

En tal sentido, en las Metodologías Especiales las preguntas se asocian a los métodos de enseñanza que se basan en la conversación de clases, donde el profesor formula y el alumno responde, la diferencia radica en los tipos de preguntas y el vínculo que se establece entre ellas en función del propósito previamente determinado, para una u otra función didáctica.

Si se asume que la resolución de problemas es la base objetiva para el surgimiento de preguntas en los alumnos como elementos estructurales de la búsqueda mental entonces, la estructuración de la enseñanza a partir de los problemas esenciales, conduce a la necesidad de definirle al profesor una estrategia para la formulación de preguntas para lograr que ellas también lleguen a formar parte del modo de actuar de los alumnos en la resolución de los problemas matemáticos, que sirva de estímulo natural y de auto perfeccionamiento de la actividad de aprendizaje.

El alumno podrá alcanzar un óptimo nivel de independencia en la resolución de problemas en la medida en que sea capaz de plantearse el sistema de preguntas que lo guíen hacia la solución y el planteamiento de nuevos problemas a la vez que le sirvan de autocontrol de su propio proceso de solución (a su modo de actuación); pero, para ello requiere del constante entrenamiento. Una de las posiciones importantes que se asume es la

³⁰ Ibid. (15). P. 127.

necesidad de que el profesor estimule al alumno a formular las preguntas para ejecutar los procesos de:

- ❖ La comprensión y análisis de los problemas;
- ❖ La búsqueda de las vías de solución;
- ❖ El planteamiento de la solución;
- ❖ La valoración (control) de la solución y de la vía empleada y;
- ❖ El planteamiento de nuevos problemas.

En la medida en que el alumno sea consciente de cómo proceder, de forma general, alcanzará un desarrollo superior en el análisis de situaciones particulares en uno u otro tema y en diferentes asignaturas.

Al estudiar el proceso de solución de problemas y reconocer las preguntas o interrogantes como sus elementos estructurales, en esta variante se propone un sistema en el que se destacan diferentes tipos, atendiendo al papel que ocupan en la búsqueda de vías y de la propia solución.

Las **preguntas de identificación** son aquellas en las que el alumno va a reconocer símbolos, términos, propiedades, pasos de un procedimiento, etc.; que le permite comprender y analizar la situación que se presenta y sus respuestas son breves y simples. Estas deben estimular a que el alumno sea capaz de identificar objetos por sus propiedades o las acciones que se llevan a cabo en función de su constitución, es decir, estimular la formación de procesos y objetos.

Las **preguntas de reproducción** son aquellas en las que el alumno debe recordar o repetir conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos y expresarlos de forma oral, escrita o ambas; éstas están presentes en los procesos de comprensión, análisis y búsqueda de la vía de solución. Sus respuestas son descriptivas y deben expresar una idea completa de lo que se caracteriza.

Las **preguntas de relación** son aquellas en las que el alumno ha de establecer vínculos, rasgos similares o diferentes, sustituir palabras por símbolos y viceversa, a partir de los datos y las condiciones dadas que le permiten plantearse vías de solución. Estas preguntas encaminan el logro del objetivo en la medida en que lleven a conclusiones concretas sobre las relaciones encontradas entre la situación y el sistema de conocimientos y habilidades nuevo o ya formado. Las respuestas son amplias y pueden ofrecer el análisis de una situación y la síntesis a través de una conclusión sobre lo encontrado. Estas preguntas

deben estimular a que el alumno sea capaz de coordinar procesos y aplicar procesos a objetos con ciertas características generales

Las **preguntas de valoración** (control) son aquellas que guían al alumno a la comprobación constante de los pasos seguidos en la búsqueda de la vía de solución, en el planteamiento de la solución y la calidad de los resultados logrados. Las respuestas pueden ser amplias, conteniendo también el análisis de lo hecho y un criterio sobre el cumplimiento del objetivo planteado.

La caracterización de los tipos de preguntas constituye una guía para la actividad del profesor y un instrumento para el aprendizaje del alumno, considerando que lo esencial no está en que el alumno responda ante el impulso, sino que se apropie también del modo de interrogar, de buscar, en el enfrentamiento de situaciones problémicas.

En las preguntas de relación se pueden distinguir diferentes niveles de generalidad según la proximidad de las respuestas al enunciado, es decir, aquellas cuyas respuestas requieren hallar condiciones, plantearse suposiciones hasta establecer las conclusiones buscadas y están las preguntas de respuestas inmediatas que exigen observar o determinar la relación entre una u otra situación.

Generalmente, las preguntas de relación constituyen la base de la motivación de una clase, sistema de clases o unidad temática, en la medida en que la respuesta precise de la conformación de un nuevo sistema de conocimientos y habilidades o consolide los ya formados.

2.6. Los problemas esenciales en la unidad temática.

La derivación de los problemas esenciales para una unidad temática conduce a un nivel de concreción de esos problemas, de carácter general, que de hecho se convierten en problemas particulares y se seleccionan teniendo en cuenta, entre otros factores, la información que transmiten en el orden formativo e instructivo y el diagnóstico de los alumnos.

Las unidades temáticas aparecen en la asignatura con el volumen de contenido necesario para resolver un sistema de problemas que expresa de manera concreta y particular las exigencias de uno o más problemas esenciales de la asignatura.

Así, por ejemplo, si el problema esencial de la asignatura se refiere al cálculo, para las unidades temáticas relacionadas con los números racionales, el trabajo con variables,

etc., este problema se deriva y transmite a los alumnos a través de un conjunto de situaciones de la vida práctica y de la necesidad de la construcción de la actividad matemática que brinda la vía de solución.

Se destaca, entonces, que en este nivel de sistematicidad del proceso docente educativo es un propósito el que la actividad de los alumnos se desarrolle en función de la solución de los problemas, no de forma dispersa, sino en la conformación de métodos de solución para una clase de problemas en los que se integran no solamente los contenidos de una rama de la Matemática, a través de esas situaciones puede lograrse la reactivación permanente de aquellas ramas que tienen su desarrollo en otras unidades temáticas.

La estructuración del contenido de la enseñanza en la unidad temática siguiendo la variante atiende a aspectos como los siguientes:

- El problema esencial de la asignatura, al que responde el contenido de la unidad temática, es resuelto en una o varias direcciones, con el planteamiento de preguntas de relación y valoración en las que se precisa el objetivo a lograr.
- El problema esencial alcanza su significación y objetividad para el alumno a través de un sistema de problemas integrado por situaciones de la vida práctica y de la Matemática que justifican la necesidad del estudio del nuevo contenido.
- En el sistema de problemas que enfrentan los alumnos al iniciar la unidad temática se evidencian los métodos de solución que se deben construir, así como los conceptos fundamentales en que se sustentan, lo que orienta hacia los principales bloques que se conforman en sistemas de clases.
- La interrelación entre las diferentes unidades temáticas se logra a partir del tratamiento que se da a los problemas esenciales de toda la asignatura a través de los problemas que se proponen.
- La actividad de los alumnos estará estimulada por la resolución de problemas que los conduzcan a construir los métodos, más que a recibirlos, a través de una actividad reflexiva no limitada a una o varias clases, sino a todas las clases que integran una unidad temática.
- La labor del profesor se orienta a seleccionar el sistema de problemas partiendo del problema esencial a que responde la unidad, a cómo dar permanencia a todos los

problemas esenciales y el diagnóstico de la actividad del alumno que le aporte las condiciones que posee para resolver problemas, en el desarrollo de las habilidades matemáticas precedentes y el conocimiento acerca de las situaciones de la vida práctica que serán objeto de análisis, para posteriormente determinar la estrategia para la elaboración de los nuevos conceptos, teoremas y procedimientos y todas las acciones necesarias para su dominio.

Es importante señalar que con el contenido de una unidad temática se produce el perfeccionamiento del sistema de conocimientos y habilidades que resuelve uno de los problemas esenciales, por lo que éste ocupa un **primer plano** en la estructuración del contenido, para seleccionar el sistema de problemas que será propuesto a los alumnos al iniciar el tema, cada sistema de clases y cada una de las clases. Los restantes problemas esenciales se desarrollarán en un **segundo plano**, y tienen la importancia de poder llevar a cabo la relación intermateria y distinguir la estructura del contenido de la Matemática en la escuela.

2.7. Los momentos esenciales en la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Para el sistema de clases y las clases los problemas que se proponen a los alumnos deben ser portadores de las exigencias de la solución de los problemas de carácter general y la particularidad de lo que aporta el contenido que se estudia. Es en estos niveles de sistematicidad del proceso docente educativo que se logra la comprensión de la significación y de la objetividad que cada contenido tiene para explicar la solución de problemas de tipo económicos, sociales, políticos, etc., utilizando los medios matemáticos.

En la concepción de esta variante se consideraran tres momentos principales para la estructuración del proceso de enseñanza - aprendizaje relativo al sistema de clases.

Uno de estos momentos es el planteamiento, comprensión y análisis de la solución de los problemas esenciales que llegan al alumno a través de un sistema de problemas concreto, que le sirve para comprender el significado y objetividad de uno u otro método de solución, alcanzar la motivación y la orientación hacia los objetivos más generales de la unidad temática y específicos del sistema de clases. Las preguntas que se formulan al alumno con el sistema de problemas son de relación y valoración y se incorporan las particularidades del contenido matemático a través de preguntas de identificación y reproducción.

En este momento, introductorio, se precisan las siguientes acciones:

- ❖ Diagnóstico de las condiciones previas de los alumnos y del grado de comprensión del problema esencial;
- ❖ Planteamiento y formulación del sistema de problemas en correspondencia con el contenido objeto de estudio y las condiciones previas de los alumnos;
- ❖ Búsqueda de vías de solución;
- ❖ Análisis y valoración de los resultados y las direcciones en que se puede perfeccionar las vías encontradas con el estudio del nuevo contenido.

Otro momento importante es el que se ocupa de la construcción de los conceptos, teoremas y procedimientos que conforman el sistema de conocimientos y habilidades como componentes imprescindibles para poder resolver los problemas derivados del problema esencial. La motivación va dirigida al perfeccionamiento del sistema de conocimientos y habilidades matemáticas a través de la búsqueda de lo nuevo con el objetivo de resolver los problemas específicos y generales.

Los cuatro tipos de preguntas son un importante recurso heurístico para entrenar a los alumnos en los procesos de identificación de conceptos y propiedades, de reproducción de características, premisas, tesis, pasos de procedimientos de solución, así como establecer relaciones, consecuencias, etc. en la conformación

En resumen, la estructuración del sistema de problemas para el momento introductorio, conjuntamente con los que se derivarán para la construcción de conceptos, teoremas y procedimientos en un sistema de clases tendrá en cuenta que en su conjunto estén representados los diferentes principios heurísticos, los diferentes tipos de razonamientos y los diferentes tipos de construcciones mentales. Esta estructuración se verá favorecida con la realización de lo que denominaremos descomposición genética esencial de un problema esencial que sería el análisis de las distintas construcciones mentales que se deben realizar para que se construyan los conceptos, los procedimientos que intervienen en el proceso de perfeccionamiento³¹.

El momento destinado a la fijación comprende las acciones para lograr el dominio de los conceptos, teoremas y procedimientos específicos y promover la integración

³¹ Dubinsky, Ed: ISETL: A Programming Language for Learning Mathematics. En Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol XLVIII, 1027-1051(1995) p.1040

constante a través del planteamiento de problemas que estimulen la utilización del sistema de conocimientos y habilidades.

Este momento es propicio para proponer una ejercitación variada desde los ejercicios para la utilización de procedimientos específicos hasta aquellos que integran procedimientos de diferentes unidades temáticas y grados. La concepción de esta ejercitación responde al objetivo de entrenar al alumno para la resolución de los problemas, como meta de la actividad cognoscitiva independiente. La selección de cada ejercicio responde a los pasos necesarios para la asimilación de los modos de actuación correspondientes

Las formas de organización del proceso de enseñanza aprendizaje en cada uno de los momentos descritos toma como sustento el trabajo grupal, cooperativo lo que significa que el planteamiento y solución de uno o varios problemas en una o varias clases no descansa solo en la actividad individual del alumno sino en la interacción, la comunicación que sea capaz de establecer con el profesor y los restantes alumnos, considerando que en ese proceso se estimula la búsqueda de diversas vías de solución, los propios alumnos evalúan sus limitaciones y potencialidades y pueden enfrentar un mayor número de problemas en un mismo espacio de tiempo.

Cada momento va dirigido a que los alumnos dentro de un contexto social (grupo de trabajo) enriquezcan sus esquemas de actuación cuando se enfrentan a los problemas propuestos, construyan los métodos de solución teniendo en cuenta una visión futura del desarrollo del contenido y relativo al problema esencial que corresponde al contenido de la unidad temática. En lo relativo a los restantes problemas esenciales tendrá un carácter dual, es decir, tratará de enriquecer los esquemas cognitivos con visión retrospectiva de lo aprendido y durante el transcurso de la unidad temática y cada sistema de clases podrá interiorizar con una visión de futuro las metas inmediatas y mediatas que se proponen en la búsqueda de soluciones.

2.8. La clase de Matemática.

A la luz de esta variante y los resultados de la experiencia realizada se han caracterizado los tipos de clases que corresponden a los momentos didácticos ya explicados, siguientes:

- Las clases introductorias, de presentación del sistema de problemas, para su análisis, comprensión y búsqueda de vías de solución, sirve de base para motivar y orientar hacia

el objetivo acerca de la necesidad de los medios matemáticos. En este tipo de clase el contenido de análisis incorpora la contextualización que se da en los problemas que exige también referirse a situaciones de la vida práctica que deben ser explicadas por los alumnos para poder plantearse métodos para la solución.

- Las clases de elaboración del conocimiento matemático parte de la situación que ofrece uno o varios problemas del sistema de problemas y tiene la misión de que los conceptos, teoremas, procedimientos y la actividad matemática, en general, tengan para el alumno la significación adecuada.
- Las clases de fijación del sistema de conocimientos tienen la responsabilidad de que el alumno llegue a dominar los métodos y procedimientos a través de una variada ejercitación y ejemplificación partiendo del análisis de los problemas que ha resuelto el alumno, prestando atención a las individualidades en el nivel de desarrollo alcanzado.
- Las clases de resolución de problemas que se dirigen a estimular y desarrollar esta actividad, individual y colectivamente, se realizan en cualquier momento y se encaminan al entrenamiento de los alumnos para el análisis de situaciones concretas y la aplicación de métodos de solución. Aunque la resolución de problemas está presente en todos los tipos de clases, en este caso, se crean los espacios necesarios para el entrenamiento en la actividad, para enfrentarse a una diversidad de situaciones y sistematizar los métodos o vías de solución.

La estructura didáctica de las clases se propone teniendo en cuenta el lugar de la actividad de resolución de problemas y lo establecido en la Metodología de la enseñanza de la Matemática. Se realizan precisiones importantes a las diferentes funciones didácticas en función de la resolución de problemas por los alumnos:

- El aseguramiento del nivel de partida se realiza a lo largo de toda la clase en función de las necesidades de los alumnos para resolver los ejercicios o problemas, debe dejar de ser un momento en el que sólo el profesor recuerda al inicio de la clase las condiciones previas necesarias, **para estimular al estudiante al reconocimiento de cuáles conceptos, teoremas o procedimientos necesita** para poder actuar, lo que debe suceder en el momento en que se enfrenta a la búsqueda de soluciones para que realmente identifique lo que necesita (si lo domina o no), que tenga significación la nueva materia de enseñanza y aprendizaje y no se le quite su responsabilidad en la reproducción y aplicación de los conocimientos anteriores.

- La motivación y orientación hacia el objetivo guían al alumno hacia el resultado que debe lograr con la solución de los ejercicios y problemas, que puede ser construir nuevos conceptos, teoremas o procedimientos, aprender a resolver tipos de ejercicios o problemas y resumir o generalizar esos procedimientos.
- La elaboración de la nueva materia no se caracteriza por la exposición del profesor, sino por la **actividad del alumno con la orientación del profesor**, desempeñando un papel esencial el momento que le proporciona orientarse en el objetivo de la clase partiendo del análisis de uno o varios problemas y la discusión de los resultados del trabajo individual o en grupos, posteriormente el profesor debe ser capaz de resumir de forma conjunta, a través de una conversación heurística, el nuevo contenido o las vías de solución encontradas, las dificultades y logros y promover la autoevaluación de la actividad.
- Las actividades dirigidas a la fijación comprenden sistemas de ejercicios, preparados para que el alumno forme y desarrolle las habilidades matemáticas relacionadas con la elaboración y uso de conceptos, teoremas, procedimientos y análisis de situaciones intra y extramatemáticas. A través de ejercicios formales y con textos. Esta función didáctica ocupa un espacio importante en la intención de que el alumno domine los métodos y procedimientos necesarios para la sistematización en vías de solución de los problemas.
- La aplicación deja de ser la función didáctica de la etapa final del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, se desarrolla desde el momento introductorio en que se presenta en función de la orientación hacia el valor práctico o necesidad del nuevo contenido y en la función de que el alumno le dé uso al sistema de conocimientos, habilidades, actitudes y valores formados en la resolución de problemas.
- El control y la evaluación del alumno requiere de la incorporación de técnicas que aporten una caracterización más precisa de la preparación alcanzada en la actividad fundamental que es la resolución de problemas en cada uno de los momentos del proceso. Especialmente, se sugiere enriquecer vías para el control de la observación de la actividad individual y colectiva, la exposición oral o discusión de vías de solución y acciones tan importantes como el análisis de un problema y el establecimiento de estrategias o planes para resolverlos.

Con relación a los métodos de enseñanza, formas de organización y medios de enseñanza se precisan los aspectos siguientes que caracterizan las clases en la variante que se presenta:

- La organización del proceso de enseñanza aprendizaje en grupos tiene su base en la necesidad de que se estimule en el alumno la comunicación, el intercambio, la comprensión y significación de la actividad que realiza, aspectos imprescindibles para la construcción de los conceptos, teoremas y procedimientos, que se fijan en ese proceso socializado. Pero, para lograr esos propósitos la conformación de los grupos toma como base, en primer lugar, la caracterización psico-pedagógica individual y colectiva del grupo docente, la estabilidad de los integrantes de los grupos y al mismo tiempo la atención diferenciada.
- Las tareas que se proponen en una clase organizada en grupos deben estructurarse de manera tal que se mantenga la actividad de los alumnos y la profundidad y complejidad obligue al intercambio, al debate; porque de lo contrario se convierte en una organización formal y los estudiantes vuelven al trabajo individual aunque estén agrupados.
- El momento de la clase, después del trabajo individual o en grupos requiere de actividades como: explicar y comparar las vías de solución y los resultados, valorar las principales dificultades, la actitud, responsabilidad, calidad del trabajo colectivo, comunicación lograda y finalmente propiciar la autoevaluación y evaluación a otros grupos por los mismos alumnos.
- En la valoración final debe quedar siempre conformado el método o procedimiento que el alumno debe fijar, explicado por los propios alumnos o de ser necesario lo debe mostrar el profesor.
- Las hojas de trabajo constituyen medios auxiliares que contribuyen al ahorro de tiempo, ayudan a la concentración del alumno en la actividad y le dan la orientación completa del objetivo que debe lograr. En las hojas se pueden presentar los sistemas de ejercicios y problemas que el alumno debe resolver, las orientaciones de las tablas, diagramas y resúmenes que debe completar o elaborar, la forma en que debe expresar las conclusiones y las soluciones según las valoraciones que se harán al finalizar la clase.
- La actividad independiente comienza en la propia clase y debe tenerse en cuenta que los alumnos resuelven ejercicios y problemas en sistemas, es decir, que se le orientan diversos tipos de actividades y se fortalece como tarea dentro y fuera de la clase el

trabajo con los libros de texto en la lectura y análisis de conceptos y propiedades, el análisis de ejemplos, la solución de ejercicios del propio texto y la formulación de otros a partir de un conjunto de datos o relaciones.

- La resolución de ejercicios formales como vía para desarrollar las habilidades matemáticas ocupa en las clases un lugar especial teniendo en cuenta que la cantidad y periodicidad de las ejecuciones son requisitos incuestionables para llegar a dominar los modos de actuación correspondientes.
- La introducción y conclusión de la clase constituyen espacios de tiempo de imprescindible necesidad en las precisiones que debe hacer el profesor sobre el cumplimiento del objetivo. En las clases que concluyen sin las valoraciones finales no se propicia en gran medida la concientización de los objetivos previstos en la formación de valores con relación a la responsabilidad, la laboriosidad, la solidaridad, el colectivismo, etc.
- La formación y desarrollo de las habilidades propias de la asignatura requieren del espacio para que el alumno construya los modos de actuación, métodos y procedimientos de solución y los llegue a dominar a través de la ejercitación, sistematización y aplicación a la resolución de problemas. Es importante que cada habilidad se forme con la claridad de cuáles problemas pueden ser resueltos con un determinado modo de actuación o método de solución.

En la variante que se presenta se destaca el papel del profesor y los alumnos en la actividad de resolución de problemas, como el hilo conductor en el desarrollo del proceso docente educativo.

La **actividad del profesor** se encamina a:

- ❖ Dominar los enfoques metodológicos relacionados con la enseñanza a través de problemas y las propuestas que aparecen en esta variante,
- ❖ Diseñar actividades para estimular, a través de la resolución de problemas, la actividad de los alumnos,
- ❖ Controlar los resultados del aprendizaje de los alumnos.

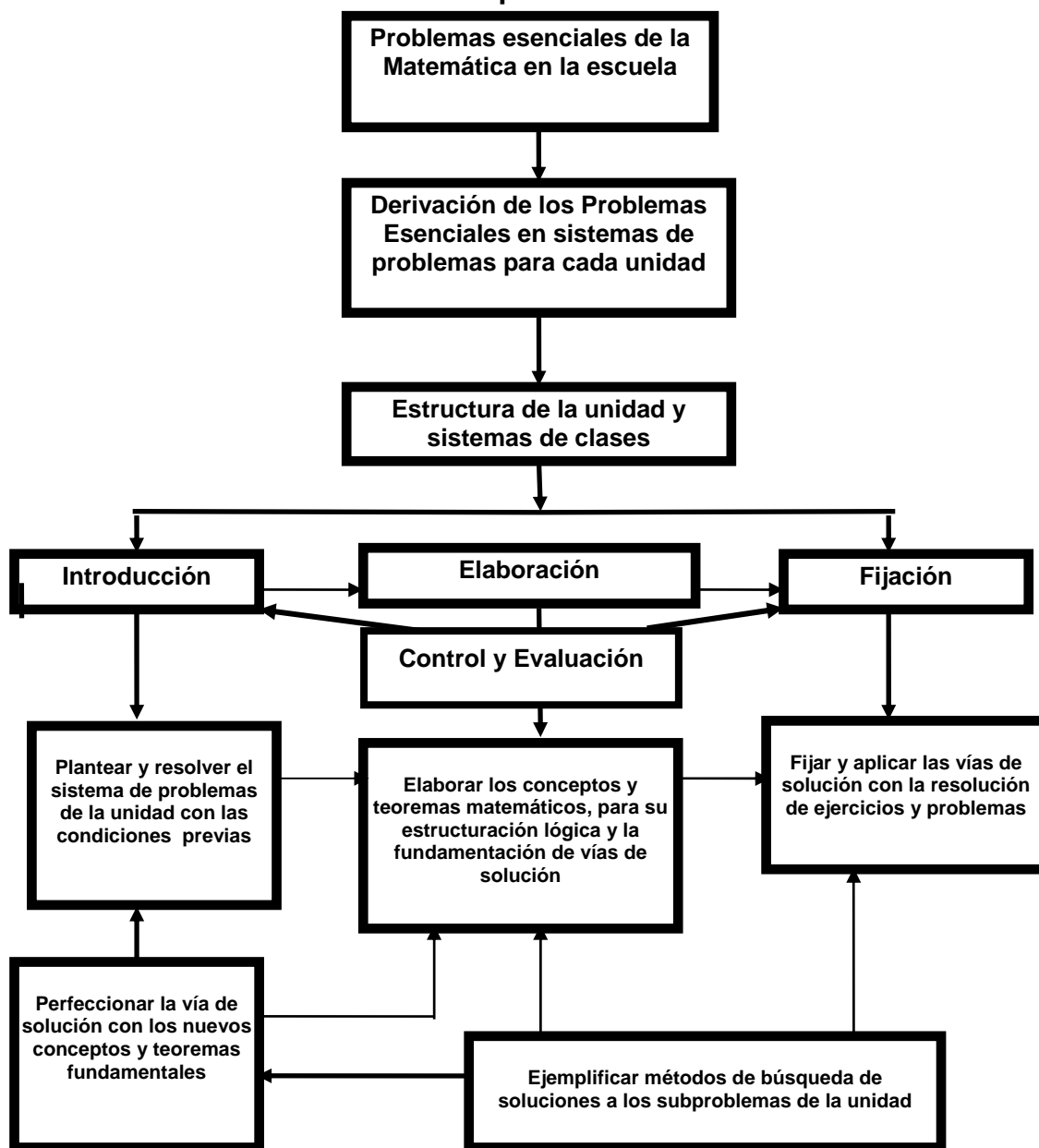
La **actividad de los alumnos** se orienta a:

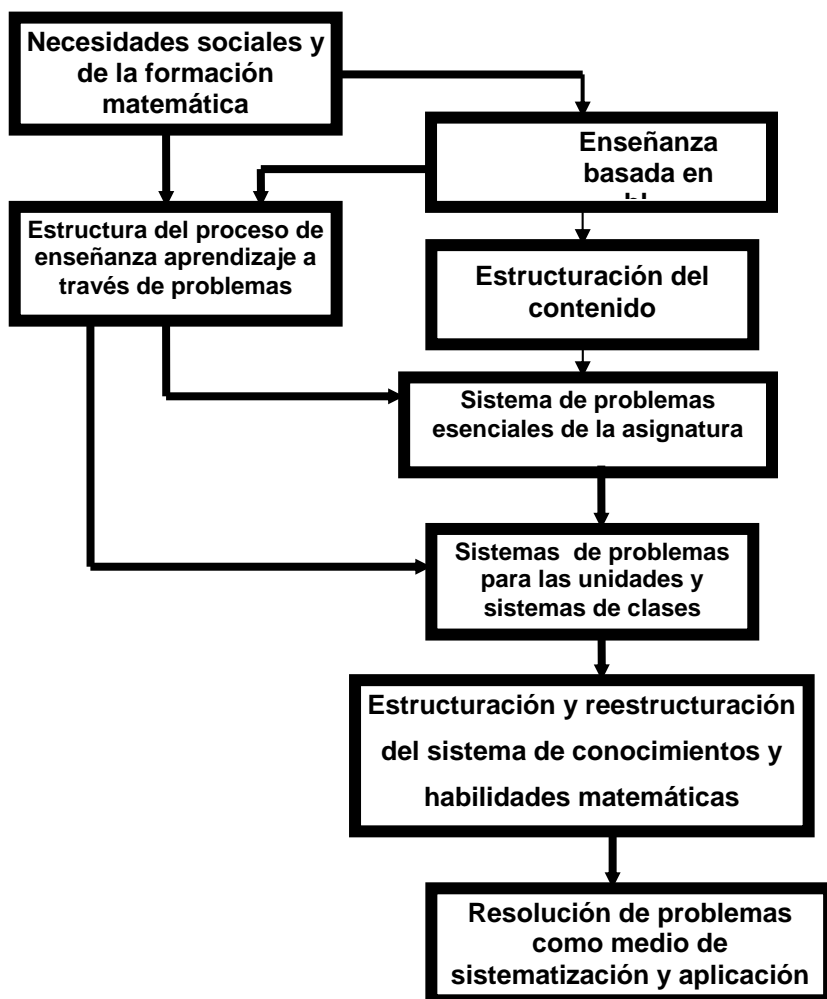
- ❖ Identificar la resolución de problemas como medio para la comprensión del nuevo contenido (conceptos, procedimientos y actitudes),

- ❖ Convertir, la resolución de problemas, en una necesidad que le permitan interpretar el medio en que viven y el significado y objetividad del conocimiento matemático

El esquema 1 constituye una síntesis de los aspectos principales de la variante propuesta, sus vínculos y relaciones que propicia una comprensión más clara de la estructuración del contenido de la enseñanza y las cuestiones metodológicas que se han considerado necesarias para describir el proceso. Seguidamente se muestra el esquema que nos da la forma general para la estructuración del contenido.

ESQUEMA 1: Una estructuración del proceso de enseñanza - aprendizaje basada en problemas.



Esquema 2: Estructuración del contenido.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.

En este capítulo se expone el aporte teórico de la tesis que es una variante para la estructuración del proceso de enseñanza - aprendizaje y del contenido de la Matemática en la escuela media que toma como principio que todo el sistema teórico y práctico de la asignatura se construya a partir de un sistema de problemas que han sido denominado problemas esenciales, los que se han caracterizado y asignado sus funciones.

Desde el punto de vista didáctico se explica la relación entre los problemas esenciales, los objetivos y contenidos y se describen los momentos principales del proceso de enseñanza aprendizaje en el contexto de una unidad temática y sistemas de clases.

Se asume que para enseñar y aprender a través de problemas son necesarios recursos heurísticos que brindan la resolución de los propios problemas y la formulación de preguntas para que el alumno construya los modos de actuación que le posibilitan la búsqueda de vías de solución.

En el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática la aplicación de la variante no significa romper con el tratamiento de las situaciones típicas ya establecidas, sino que ellas se entrelacen o sistematicen en un contexto que lo brinda el problema esencial y los sistemas de problemas que se derivan, la caracterización de los tipos de clases aporta precisiones a la comprensión de su estructura didáctica y permiten una profundización a los propósitos de la clase contemporánea.

La variante, a diferencia de otras consultadas sobre la enseñanza a través de problemas, incorpora las funciones de esos problemas y desde el punto de vista práctico se debe completar con la presentación de una propuesta de aquellos problemas que se corresponden con los objetivos de la asignatura en los programas vigentes en la escuela media.

CAPITULO III: LA DETERMINACIÓN DE LOS PROBLEMAS ESENCIALES EN EL CONTENIDO DE LA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA MEDIA.

INTRODUCCIÓN.

Este capítulo tiene el propósito de mostrar, desde el punto de vista práctico, la aplicación de la variante para la estructuración del proceso de enseñanza - aprendizaje y del contenido de la Matemática y, en consecuencia, como transcurriría el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura en la escuela.

La determinación de problemas esenciales para el contenido de la Matemática en la escuela, que tienen en cuenta las exigencias de los programas vigentes, expresa las direcciones en que se perfeccionan el sistema de conocimientos y habilidades matemáticas y, de hecho, los marcos en que se prepara al alumno para resolver problemas dentro y fuera de la Matemática.

La propuesta didáctica que implica la variante se concreta con un ejemplo que muestra cómo se concibe la actividad del alumno a partir del planteamiento del problema esencial y sus subproblemas, el tránsito por procesos inductivos, cuasiempíricos, que lo acerquen a la significación práctica de los conceptos, teoremas y procedimientos, a fortalecer la intuición en la preparación para resolver problemas.

La validación de los resultados se presenta sobre la opinión de expertos, que brindan una valoración acerca de las ventajas o desventajas que, en las condiciones actuales de la escuela cubana, puede tener la variante aquí presentada.

3.1. Los problemas esenciales en el contenido de la Matemática en la escuela media.

La aplicación de la variante propuesta para la estructuración del contenido de la Matemática en la escuela media tiene su punto de partida en la determinación del sistema de problemas esenciales de la asignatura a partir del cual pueda ser representado todo su sistema teórico y práctico. El sistema de problemas se determina teniendo en cuenta los indicadores que expresan la universalidad de aplicación de la Matemática para que den respuesta a las exigencias del desarrollo científico técnico contemporáneo y estimule el desarrollo de los tipos de pensamiento que le corresponden, la completitud del sistema, la asequibilidad y comprensión atendiendo al desarrollo real y potencial del alumno.

Los problemas esenciales de la asignatura Matemática, al ser determinados con una concepción de sistema, deberán mostrar su interrelación, que con el aprendizaje de la solución de cada problema y sus subproblemas el alumno construya el contenido de la enseñanza según los objetivos y revelar la nueva cualidad que como sistema genera, que es **ubicar la resolución de problemas como principio de la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje en todos los niveles de sistematicidad de este proceso.**

Una de las tareas que en el orden teórico y práctico se ha llevado a cabo en esta investigación ha sido la determinación de problemas esenciales que, de acuerdo con los objetivos de la formación matemática, pueden servir de base para la estructuración del contenido de la asignatura en la escuela media, que puede corresponderse con el plan vigente.

Un sistema de problemas puede ser el siguiente:

1. Perfeccionamiento del procedimiento de cálculo;
2. Perfeccionamiento del movimiento y reproducción de polígonos;
3. Perfeccionamiento de la reproducción de cuerpos geométricos;
4. Perfeccionamiento de la ubicación sucesiva de puntos;
5. Perfeccionamiento del pronóstico a partir de datos numéricos.

A continuación se explica cada problema a partir de su valor práctico y lo que representan para la formación matemática y general de los alumnos, así como las direcciones principales (subproblemas) en que se produce el perfeccionamiento del sistema de conocimientos y habilidades que le permiten hallar vías de solución cada vez más completas. Se tratará de mostrar, de forma general, cómo cada contenido de la Matemática escolar puede ser puesto en función de, al menos, uno de los perfeccionamientos indicados y cuáles contenidos actitudinales pueden desarrollarse en cada problema.

La precisión de cada subproblema con los conceptos y teoremas básicos para la solución en la unidad temática y el grado correspondiente debe ofrecer la indicación de cómo transita el perfeccionamiento del sistema de conocimientos y habilidades en la preparación de los alumnos para resolver los problemas de la magnitud que la vida práctica le plantea y seleccionar los ejemplos que se propondrán de acuerdo con el nivel de desarrollo que aporta su diagnóstico inicial y sistemático.

3.1.1. Perfeccionamiento del procedimiento de cálculo.

La significación del cálculo en la práctica social del hombre hace que en cualquier programa de Matemática éste ocupe un lugar esencial.

El cálculo no ha de verse restringido a la necesidad de las operaciones aritméticas de forma aislada, sino integrado a todas aquellas valoraciones que los instrumentos matemáticos permiten hacer para perfeccionar los procedimientos particulares y además aquellos aspectos cualitativos que garantizan la seguridad de que los cálculos realizados son correctos.

El cálculo, en el desarrollo científico técnico actual, no aparece para realizar operaciones aisladas, casuales; sino, para realizar operaciones que se dan de forma reiteradas, numerosas y semejantes. Basta señalar las mediciones que se ejecutan en las investigaciones o en la práctica cotidiana en el control económico, en las actividades comerciales, etc. En esta práctica aparecen los elementos fundamentales de la optimización y de la apreciación cualitativa de los cálculos realizados que permita estimar posibles resultados y errores.

La Educación Matemática del alumno puede propiciar que él se apropie no sólo de la necesidad de saber sumar, restar, multiplicar o dividir en uno u otro dominio numérico, como generalmente se comprende el cálculo; debe lograrse la visión más completa de lo que aportan otros contenidos matemáticos para precisar, ampliar, valorar o estimar los resultados de las operaciones realizadas en función de un determinado problema.

Una de las direcciones en que se perfeccionan los procedimientos de cálculo es en la disminución del número de las operaciones, por la importancia que tiene cuando se realizan numerosos cálculos en la búsqueda de procedimientos que racionalicen las acciones (mentales y prácticas) a ejecutar, que facilitan la estimación y corrección de los resultados, lo que está estrechamente relacionado con el aumento de la precisión.

La reiteración del cálculo genera la noción de variables, la noción de tablas de valores y a su vez genera aquellos cálculos que pueden ser realizados de antemano y que son indispensables para formar dicha tabla de valores; por ejemplo: si de forma reiterada es necesario calcular el producto de dos valores, calcular los cuadrados, calcular los cubos, etc.

La utilización de tablas genera dos problemas fundamentales:

1. Dados los valores de las variables, calcular el resultado y;
2. Dado el resultado, conocer los valores de las variables que lo generaron.

Del segundo problema surge la necesidad de estudiar la teoría de resolver ecuaciones que conducen al cálculo de valores particulares que satisfagan una expresión matemática dada.

Esta dirección en el perfeccionamiento del procedimiento de cálculo es la que permite determinar valores particulares que satisfagan una o varias expresiones algebraicas.

La valoración cualitativa del cálculo debe aportar la comprobación y validez de los resultados y son las funciones y sus propiedades las que permiten estimar el comportamiento en la realización de cálculos sucesivos a partir de una ley de formación.

Si, por ejemplo, se calculan cuadrados, el que ejecuta los cálculos debe comprender que las propiedades de las funciones constituyen instrumentos para comprobar que los resultados que se van obteniendo son correctos en la medida en que sea capaz de estimar el rango del error admisible al formar la tabla de valores correspondientes a los resultados. Así desempeñan papeles importantes: la monotonía, los extremos, la periodicidad, la simetría, etc.

Cuando en el cálculo reiterado se utilizan cifras aproximadas como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, la noción de límite viene a dar una interpretación cualitativa del resultado en base a los criterios anteriores con la aceptación de un rango de error al cual a su vez le son aplicables las estimaciones cualitativas de las funciones.

A este problema esencial se le da solución en las siguientes direcciones:

SUBPROBLEMAS

APORTES TEÓRICOS

Disminución del número de operaciones del cálculo.

- ◆ Concepto de términos semejantes.

Aumento de la precisión en el cálculo.

- ◆ Propiedad de monotonía de las operaciones con números racionales.
- ◆ Extensión del rango de las operaciones con números racionales.

Determinación de valores particulares para una expresión algebraica dada.

- ◆ Ecuaciones.
- ◆ Cálculo de raíces.
- ◆ Cálculo de razones.
- ◆ Cálculo sucesivo de exponentes (logaritmos).

Determinación de valores particulares que satisfagan más de una expresión algebraica.

- ◆ Despejo de variables y sustitución en otra expresión (sistemas de ecuaciones).

Valoración cualitativa del cálculo.

- ◆ Propiedades particulares de las funciones
- ◆ (tabla numérica y representación gráfica).
- ◆ Inecuaciones.
- ◆ Descomposición en factores.
- ◆ Límite y continuidad.

Los contenidos actitudinales que se incorporan en el tratamiento de este problema esencial se relacionan con la estimulación, en el alumno, del interés y la disposición por conocer y desarrollar estrategias de cálculos y sus resultados, la necesidad de racionalizar procedimientos de cálculo, garantizar la exactitud de los resultados y la disposición de enfrentar situaciones prácticas a través de cálculos seguros.

Son importantes actitudes como las siguientes:

- ❖ La valoración de la importancia de las mediciones y estimaciones para resolver problemas de la vida cotidiana.
- ❖ Poder utilizar los instrumentos de medición,
- ❖ Valorar la importancia del sistema métrico decimal,
- ❖ Perseverancia en la búsqueda de vías de solución a los problemas relacionados con el cálculo numérico, algebraico, etc.,
- ❖ Interés por explicar el significado de los números y las regularidades de cada dominio numérico.

3.1.2. Perfeccionamiento del traslado y reproducción de polígonos.

Son muchas las profesiones y oficios que utilizan la Geometría Plana como instrumento para construir figuras de diferentes dimensiones, desde aquellas que son representadas en una hoja de papel hasta aquellas que no se pueden trazar con regla, compás o cartabón como sucede en la escuela.

El hombre necesita construir mesas, sillas, puertas, paredes, objetos electrónicos; por sólo citar algunos ejemplos, y para ello es imprescindible que sea capaz de trazar cuadriláteros (en particular, paralelogramos), triángulos u otros polígonos, además de descomponer unos polígonos en otros.

La Geometría Plana brinda al hombre el conocimiento de estas figuras y sus propiedades además de los procedimientos para trasladarlos y reproducirlos con iguales

magnitudes, pero también en aquellos casos en que es necesario hacerlo a mayor y menor escala que la realizable con los instrumentos de dibujo que utilizan en la escuela.

La utilidad en la práctica del hombre hace que en la formación geométrica sea la Geometría Plana una parte de la Matemática escolar que debe preparar al alumno para construir los polígonos basándose en el conocimiento de sus propiedades y relaciones.

Esta acción del hombre, de la que debe apropiarse el alumno, se perfecciona en diferentes direcciones que el estudio de la Geometría Plana aporta en todo el curso de Matemática.

El alumno en la escuela transita por diferentes niveles en el perfeccionamiento del traslado y reproducción, desde que aprende a reproducir polígonos iguales en un mismo plano aplicando los movimientos del plano, hasta que posteriormente es capaz de hacerlo en planos diferentes utilizando el concepto de igualdad de polígonos que le permite ejecutarlo con las mediciones de lados y ángulos. Aquí se destaca el papel del triángulo y los teoremas de igualdad de triángulos, en los que puede descomponerse todo polígono.

Pero, este procedimiento se sigue perfeccionando en la medida en que se comprenden las insuficiencias de los instrumentos de medición y la necesidad de mejorar la precisión en la medición de segmentos y ángulos.

Como en toda acción del hombre, se plantea una importante dirección en el perfeccionamiento de la reproducción de polígonos, el realizar el menor número de operaciones para ganar en racionalidad y en precisión en la construcción de un polígono igual o semejante a uno dado.

Estas direcciones en la disminución del número de operaciones a realizar y el aumento de la precisión en la medición de segmentos y ángulos en la práctica, le permiten al alumno comprender cómo lograr mayor precisión en la construcción del nuevo polígono, lo que indica un nivel de calidad superior en la formación matemática.

Asimismo, la comparación de superficies poligonales es un elemento cualitativo importante para cubrir superficies, o sea, calcular de forma aproximada las magnitudes de las superficies necesarias para cubrir otra con la mayor exactitud posible.

La reproducción de los polígonos a gran escala debe preparar al alumno para la experimentación necesaria al realizar las construcciones que demanda la vida práctica en lo que es imprescindible aplicar las propiedades generales de la semejanza.

SUBPROBLEMAS

Reproducción de polígonos de un plano a otro.

Disminución del número de operaciones.

Mejorar la precisión en la medición de segmentos.

Mejorar la precisión en la reproducción de ángulos.

Comparación de superficies poligonales.

Reproducción de un polígono a gran escala.

APORTES TEÓRICOS.

- ◆ Definición de igualdad de polígonos.
- ◆ Teoremas sobre igualdad de triángulos.

- ◆ Teorema sobre la descomposición de un polígono convexo en triángulos.
- ◆ Teorema de descomposición de un polígono no convexo en polígonos convexos.

- ◆ Teorema sobre la determinación de los puntos extremos de un segmento.
- Definición de circunferencia (compás).

- ◆ Teoremas sobre ángulos en la circunferencia (compás).

- ◆ Concepto de superficies equivalentes.
- ◆ Concepto de área.
- ◆ Concepto de perímetro.

- ◆ Concepto de semejanza
- ◆ Propiedades generales de la semejanza.
- ◆ Problemas de la experimentación a gran escala.

Entre los contenidos actitudinales que se deben fomentar en la solución de este problema esencial se encuentran:

- ❖ La disposición e interés por conocer e investigar las formas y relaciones geométricas del medio en que se desarrollan,

- ❖ Valorar la importancia de lograr la precisión en la descripción y representación de las formas geométricas.
- ❖ Apreciar las cualidades, como la simetría, que le dan belleza a las formas geométricas,
- ❖ Valorar la importancia de las mediciones y estimaciones en el estudio de las formas geométricas y la realización de esbozos gráficos,
- ❖ Interés por lograr la exactitud, limpieza y claridad en la realización y presentación de las construcciones geométricas,
- ❖ Despertar la necesidad de observar, describir e investigar las propiedades más significativas de un gráfico o construcción geométrica,
- ❖ Mostrar disposición y deseos por la elaboración de estrategias de solución para enfrentar situaciones prácticas a través del conocimiento de las propiedades y relaciones de las figuras geométricas.

3.1.3 Perfeccionamiento de la reproducción de cuerpos geométricos.

La construcción de casas, fábricas, depósitos, cajas, tubos, etc, hace imprescindible que el hombre conozca la forma de hacerlo, determinar la capacidad, la superficie u otras magnitudes. Esta acción reiterada trae como consecuencia , como en otros problemas, que se preocupe en lograrlo de una forma más óptima y precisa.

Para ello, se requiere del conocimiento de las nociones relacionadas con los cuerpos geométricos, sus propiedades y formas más óptimas para construirlos, desde la etapa inicial de predicción de las cualidades que debe satisfacer el objeto que se propone construir.

A los alumnos, la escuela ha de prepararlo para actividades necesarias, que van desde construir una caja con una capacidad dada, construir una pequeña casa, construir ortoedros, conos, pirámides, cilindros con determinadas magnitudes; que son las tareas que más tarde deberá enfrentar y no únicamente aquellas en que se da el cuerpo geométrico y se solicita calcular algunas de sus magnitudes.

La elaboración de proyectos para la construcción de cuerpos geométricos precisa de su representación en un plano por la posibilidad que ofrece para calcular, experimentar y diseñar la secuencia de pasos para realizar la construcción real.

De forma análoga a los restantes procesos el hombre se ha propuesto optimizar la construcción de los cuerpos geométricos y aquí interviene la Geometría del espacio como instrumento matemático fundamental.

De igual manera la reproducción a gran escala y la comparación de cuerpos geométricos constituyen tareas esenciales en los procesos constructivos y especialmente en

lo relacionado con el uso racional de recursos en cuanto a comparar superficies y capacidades en los objetos con determinadas propiedades.

Las direcciones en las que se resuelve este problema esencial son las siguientes:

SUBPROBLEMAS

APORTES TEÓRICOS.

Realización de la reproducción tomando como base un plano.	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Definición de poliedros iguales. ◆ Definición de ángulos poliedros. ◆ Concepto de plano, ángulo entre planos.
Representación de un cuerpo geométrico en un plano.	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Concepto de proyección. ◆ Teoremas de representación
Disminución del número de operaciones en la reproducción de un cuerpo geométrico	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Teoremas de congruencia de poliedros. ◆ Teoremas de paralelismo. ◆ Teoremas de perpendicularidad.
Reproducción de un cuerpo geométrico a gran escala.	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Concepto de semejanza. ◆ Propiedades generales de la semejanza.
Comparación de regiones determinadas por cuerpos geométricos.	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Conceptos de regiones equivalentes. ◆ Concepto de volumen.

Los contenidos actitudinales que se forman en el estudio de los cuerpos geométricos son, entre otros:

- ❖ Mostrar interés por conocer y explicar las propiedades y relaciones de los objetos en el espacio,
- ❖ Valorar la importancia del conocimiento de los cuerpos geométricos para poder interpretar las relaciones geométricas del medio en que viven y hacer sus representaciones,
- ❖ Apreciar las cualidades, como la simetría, que le dan belleza a las formas geométricas y sus composiciones,

- ❖ Valorar la importancia de las mediciones y estimaciones en el estudio de las formas geométricas y la realización de esbozos gráficos de los cuerpos geométricos,
- ❖ Poder utilizar instrumentos de medición o la búsqueda de instrumentos alternativos y emplear las magnitudes adecuadas,
- ❖ Demostrar interés por lograr la exactitud, limpieza y claridad en la realización y presentación de las construcciones geométricas,
- ❖ Despertar la necesidad de observar, describir e investigar las propiedades más significativas de un gráfico o construcción geométrica,
- ❖ Mostrar disposición y deseo por la elaboración de estrategias de solución para enfrentar situaciones prácticas a través del conocimiento de las propiedades y relaciones de las figuras y cuerpos geométricos.

3.1.4. Perfeccionamiento de la ubicación sucesiva de puntos.

La ubicación de puntos, conocer la relación entre ellos, su distancia y otras propiedades, ha ocupado la atención de múltiples ramas como el diseño de equipos electrónicos, en la construcción de aviones y barcos, en la carpintería, etc.

La acción de ubicar puntos es realizada constantemente, por la necesidad de situar objetos, relaciones en un determinado contexto en que se toman aquellos puntos a partir de los cuales se ubican los restantes.

El problema radica en que si se tiene un punto de referencia, cada punto se ubica a partir de ese punto de referencia, pero para ello son necesarias mediciones de longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos. Así, sucesivamente, se toman nuevos puntos que pueden ser ubicados con relación al punto de referencia inicial o a los restantes puntos ya ubicados.

La diversidad de puntos de referencia que surgen, trae consigo el aumento de los errores de medición y éstas a su vez se reproducen de forma aproximada. Así surge el problema de disminuir estos errores y el número de operaciones que permiten determinar la posición exacta de un punto dado.

Una de las direcciones en que se resuelve este problema es la ubicación de puntos sobre una recta a partir de un único punto de referencia (el cero). Otra de las direcciones es reducir los puntos de referencia a dos rectas que se cortan y finalmente reducir los puntos de referencia a tres rectas, no coplanares, que se cortan en un punto.

De esta forma la ubicación de cada punto es independiente y no transmite los errores que se comenten en la ubicación de cada uno de ellos.

La Matemática, como ciencia, fundamenta estos procesos con métodos algebraicos que garantizan la determinación exacta de la ubicación de puntos en una recta y con relación a un sistema de coordenadas, lo que es de especial utilidad práctica.

El problema de la Matemática en la escuela es dar la visión de la utilidad práctica de estos elementos, que se inician desde la representación de números en el rayo y la recta numérica y luego en la comprensión de las posibilidades de los sistemas de coordenadas rectangulares para ubicar puntos en el plano y en el espacio.

La Geometría analítica, que se prepara desde las enseñanzas primaria y secundaria, ofrece al alumno el método para calcular, inicialmente, la ubicación de los puntos que posteriormente podrá representar gráficamente.

De esta manera, se destaca el trabajo con las dependencias funcionales, con las ecuaciones, con las secciones cónicas; las que logran caracterizaciones algebraicas de conjuntos de puntos del plano y del espacio. Se trata de que la asignatura muestre cómo a partir del mismo problema (ubicación de puntos) se puede extender a la ubicación de figuras y cuerpos geométricos, que es lo principal desde el punto de vista práctico.

El tránsito desde la ubicación de puntos en una recta, en el plano y luego en el espacio, debe transmitir al alumno la noción de posición, que no es solamente el problema de determinar la posición de un punto dado, sino poder ubicar el punto en las condiciones que se establezcan.

Este problema esencial se integra con los tres problemas anteriores porque los toma como base para su comprensión y solución, pero a su vez constituye una nueva dirección en la que se perfecciona la solución de los demás problemas.

Las direcciones en las que se resuelve este problema esencial son:

SUBPROBLEMAS

APORTES TEÓRICOS.

Ubicación de puntos con relación a un punto de referencia.

- ◆ Conjunto de números racionales.

Ubicación de puntos en el plano.

- ◆ Sistemas de coordenadas rectangulares.
- ◆ Representación cartesiana o paramétrica de rectas, circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas.

Ubicación de puntos en el espacio	♦ .Sistemas de coordenadas rectangulares.
Interpretación algebraica de las relaciones de posición entre puntos y rectas y entre rectas.	♦ Concepto de ecuación. ♦ Concepto de función. ♦ Concepto de sistema de ecuaciones. ♦ Representación paramétrica de los distintos lugares geométricos.
Sistematización de procedimientos algebraicos para la determinación de puntos con relación a un sistema de coordenadas.	♦ Resolución de sistemas de ecuaciones.

Los contenidos actitudinales que se desarrollan con este problema esencial son:

- ❖ Valorar la importancia de la orientación en el plano y el espacio para el conocimiento del medio,
- ❖ Interés por interpretar, a través de cálculos y estimación de magnitudes, las representaciones geométricas y viceversa,
- ❖ Interés por localizar, describir y demostrar la situación y posición de objetos en el plano y el espacio,
- ❖ Deseo de utilizar técnicas para construir figuras simétricas, realizar movimientos,
- ❖ Valorar la importancia de las mediciones y estimaciones en el estudio de las figuras y cuerpos geométricos,
- ❖ Interés por la elaboración de estrategias de solución para enfrentar situaciones prácticas a través del conocimiento de las propiedades y relaciones de figuras, cuerpos geométricos y su interpretación algebraica.

3.1.5. Perfeccionamiento de los pronósticos a partir de datos numéricos.

En cualquier esfera de la vida el hombre realiza proyectos sobre el probable comportamiento de un hecho o fenómeno y para ello se basa en los datos de que dispone.

La recopilación de datos que se obtienen de mediciones, cálculos, comparaciones; no es suficiente si no se dispone de los métodos que ofrezcan estimaciones, valoraciones cualitativas que garanticen una información acerca del comportamiento del hecho o fenómeno.

Conocer, a partir de datos numéricos, cómo se manifiesta un problema dado es una tarea que la Matemática resuelve cuando se estudian conceptos como el de promedio desde la escuela primaria. Pero, éste a su vez se perfecciona con otros conceptos matemáticos como los de moda, mediana, que mejoran la precisión en el conocimiento del comportamiento de cada uno de los datos particulares.

La valoración cualitativa de datos numéricos a través de métodos matemáticos concretos da al alumno posibilidades para estimar, pronosticar, prever, proyectar; ante cualquier problema, las condiciones presentes y futuras con mayor exactitud, para contrarrestar la espontaneidad, el tanteo, la casualidad, en el análisis de situaciones cotidianas a su alcance.

Estos métodos son partes importantes de la labor profesional en múltiples ramas de la ciencia y la técnica, particularmente aquellas que se sustentan de investigaciones experimentales.

En tal sentido, la Matemática escolar puede sistematizar estos conceptos en función de mostrar su utilidad, las ventajas y desventajas de cada uno y preparar al alumno para aplicarlos a la valoración y estimación de situaciones prácticas concretas a partir de datos numéricos conocidos.

Las direcciones en que este problema esencial se resuelve son:

SUBPROBLEMAS

APORTES TEÓRICOS.

Realización del pronóstico.

- ◆ Concepto de promedio.
- ◆ Concepto de mediana.
- ◆ Concepto de frecuencia.
- ◆ Concepto de probabilidad.
- ◆ Representación gráfica de datos.

Valoración cualitativa de las tablas de valores.

- ◆ Concepto de moda.
- ◆ Concepto de dispersión.
- ◆ Coeficiente de correlación.

Los contenidos actitudinales relacionados con este problema esencial son:

- ❖ Valorar la necesidad de la precisión y veracidad de la recogida y análisis de datos, así como su presentación organizada y clara,
- ❖ Valorar la importancia del lenguaje gráfico y las tablas como medios para presentar, analizar y relacionar datos,
- ❖ Mostrar disposición para analizar los elementos significativos en conjuntos de datos, sus principales tendencias y comportamientos,
- ❖ Relacionarse con métodos de recogida de datos, análisis de su comportamiento y emisión de conclusiones,
- ❖ Identificar los conceptos y procedimientos que ayudan a interpretar el comportamiento de conjuntos de datos.

3.2. Ejemplo de sistema de actividades y problemas para desarrollar la variante propuesta para ciertos tópicos.

En este epígrafe se mostrará, a través de determinadas actividades, la concepción que, para el tratamiento del contenido, puede tenerse en cuenta según los tres momentos didácticos que se han propuesto para estructurar el proceso de enseñanza a partir de problemas. Este se encuentra en el campo de la Geometría por lo que consideramos importante realizar un breve bosquejo de la base axiomática que la fundamenta. La base axiomática en que se fundamenta la propuesta es la de A. N. Kolmogorov.

En primer lugar, debemos indicar que el sistema de axiomas que propone Kolmogorov no es independiente. Aunque algunos de los axiomas pueden ser simplificados el sistema resulta completo, es decir, con ellos se puede construir desde el punto de vista lógico toda la geometría euclidiana, por lo tanto, posee una buena estructura lógica.

El sistema está constituido por 12 axiomas divididos en cinco grupos como es ya tradición en la presentación de la Geometría.

El primer grupo, denominado “Axiomas de pertenencia”, establece la relación de pertenencia de puntos a una recta y de las rectas a un plano. En pocas palabras, los axiomas de este grupo establecen la existencia de los objetos geométricos fundamentales. Por ejemplo, el primer axioma “cada recta es un conjunto de puntos” nos permite advertir la importancia que tiene la teoría de conjuntos para esta construcción.

En el segundo grupo se introduce el axioma de distancia, indicándose las propiedades fundamentales, es decir, la noción de espacio métrico. Como el concepto de

distancia se encuentra más cercano a la experiencia habitual del niño lo consideramos un punto importante a favor de la variante que proponemos.

El tercer grupo de axiomas, los de orden, establecen en primer lugar la existencia de una partición particular de la recta. Este axioma da la posibilidad del trabajo con la noción de continuidad.

El cuarto grupo está constituido por un sólo axioma que resulta de sumo interés para nuestros propósitos, el axioma de movimiento en el plano, es decir la posibilidad de los distintos movimientos. Aunque este axioma en los cursos desarrollados según esta axiomática no juega un rol importante, consideramos que en la aplicación de esta variante la estructuración de la experiencia del niño se pone en función de construir la noción de espacio geométrico. Finalmente el quinto grupo está constituido por un solo axioma que es el de paralelismo.

Un problema que se observa en esta axiomática es que la existencia de la medida de los ángulos queda como uno de los presupuestos debido a la dificultades de su demostración, lo que hace que se pueda considerar como uno de sus elementos de partida sin generar dificultades de tipo lógicas.

Con estos fundamentos se explicará la variante en un tópico específico que es objeto de estudio en el programa vigente en el 7. grado: la igualdad o congruencia de triángulos. La idea que se observará tiene como hilo conductor la propuesta de un conjunto de actividades para dar tratamiento al problema esencial del perfeccionamiento del traslado y reproducción de polígonos y se propone mostrar cómo de forma inductiva el alumno puede llegar a la elaboración del nuevo contenido, lo que fortalece el significado, la comprensión de la utilidad práctica y contribuye a aumentar la intuición geométrica y sobre esa base trabajar las formalizaciones, el carácter deductivo.

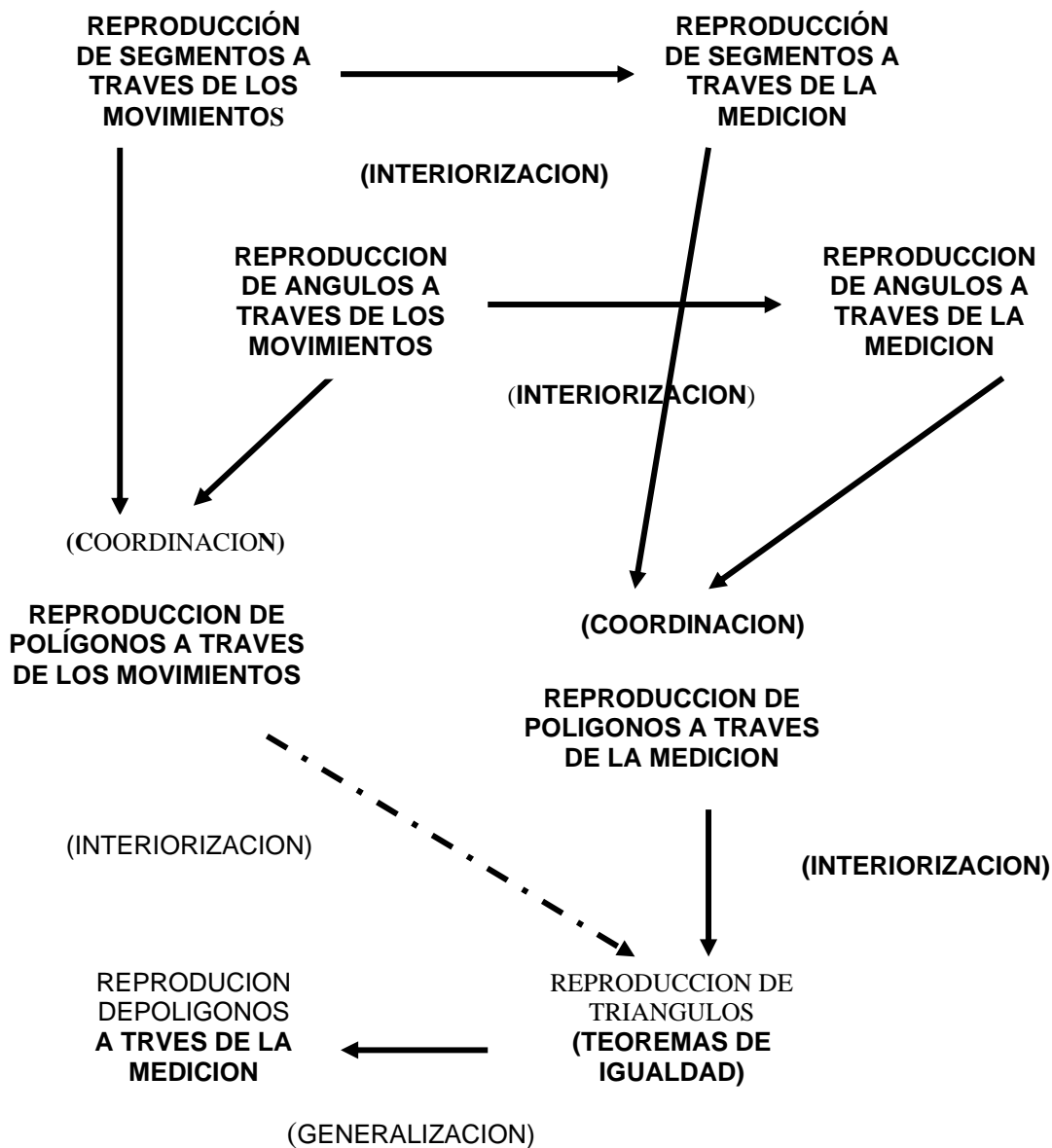
El problema esencial referido al perfeccionamiento del traslado y reproducción de polígonos tiene entre otros subproblemas, el siguiente: ***Construir con la mayor exactitud posible, un polígono igual a otro polígono dado.***

El primer momento en la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje en correspondencia con la variante propuesta, presupone que la actividad del alumno se encamine al planteamiento y solución del subproblema, representado en una o varias situaciones de la práctica social tales como la representación de un proyecto de edificación donde se distinguen claramente diferentes figuras geométricas en su estructura y se indican algunas de sus magnitudes a partir de las cuales deben determinarse otras que también se

indicarán, a partir de las condiciones previas que posee lo que le permitirá al profesor a su vez realizar el diagnóstico de la preparación no sólo en el dominio de los conocimientos y habilidades matemáticas formadas en grados anteriores, es medular poder caracterizar las condiciones para enfrentarse, con independencia a la solución del problema.

Una primera actividad puede estar dirigida a determinar algunas de las figuras geométricas realizando una tabulación de los datos que poseemos, de cada una de ellas. Aquí es importante, ya sea directamente o a través de preguntas, que se indique la importancia que tiene el conocimiento de algunas de las magnitudes representadas para la determinación de la cantidad necesaria de algunos de los materiales a utilizar en la construcción de la edificación.

Otra actividad que puede desarrollarse es partir de la situación de que el plano de la mesa en la que ellos escriben es distinto de los que aparecen en la edificación representada y no pueden realizar las representaciones de las figuras en esos casos con la aplicación de los movimientos y pueden realizarse utilizando el concepto de igualdad por superposición. En esta situación, realizamos la siguiente descomposición genética del concepto de igualdad de polígonos, que sirve de base para seleccionar y diseñar ejercicios y problemas:



Para ello se recomienda, teniendo en cuenta la descomposición genética indicada y los datos de la figura de partida, que el aseguramiento de las condiciones previas se lleve a cabo a partir de actividades como las siguientes:

Nota: el profesor tendrá las plantillas originales como medio de comparación.

1. Dado el pentágono ABCDE construya un pentágono igual PQRST, utilizando los movimientos del plano. (Anexo 1)
2. Dado el pentágono ABCDE construya un pentágono igual PQRST, realizando las mediciones de lados y ángulos. (Anexo 2)

3. Compare las vías empleadas en cuanto a la exactitud lograda en la construcción utilizando las plantillas originales.
4. Busque un método para construir el polígono PQRST con mayor exactitud.

En la primera actividad puede asociarse al contexto en que el polígono se construye en la misma hoja que el polígono dado, teniendo en cuenta que el movimiento se realiza en el mismo plano. De igual forma, en la segunda se asocia al contexto en que se puede construir el nuevo polígono en diferentes hojas, la idea de planos diferentes, realizando las mediciones y trazados de lados y ángulos.

En el ejemplo dado se hace necesario medir los cinco lados y los cinco ángulos del pentágono ABCDE y construir los cinco lados y los cinco ángulos del nuevo pentágono (claro, se observará que algunas mediciones serán innecesarias), esta construcción es realizable con los conocimientos que tiene el alumno. Se aconseja realizar la construcción del pentágono PQRST teniendo en cuenta que se construya primero un lado, luego un ángulo, y así sucesivamente (al realizar esta construcción debe tenerse en cuenta el tiempo y la cantidad de operaciones que el alumno emplea).

En las actividades 3 y 4 se encuentran las condiciones para realizar la motivación por la necesidad de perfeccionar un método de solución al problema planteado que conduce a orientar el objetivo de la actividad de aprendizaje a partir de la sistematización de los conocimientos y habilidades que intervienen en el proceso de solución, tanto las precedentes como las que serán necesarias en el diseño del método que se busca para mejorar la exactitud en la construcción del nuevo polígono.

En este momento el alumno debe poder caracterizar en términos de las operaciones de medición que intervienen en la reproducción, es decir, en la rotación interviene solamente la medición de ángulos, en la simetría axial la medición de segmentos, en la traslación la medición de segmentos en dos funciones diferentes (para el trazado de paralelas y para la traslación de los vértices), en la simetría central la medición de segmentos y en el caso de la igualdad es la medición de segmentos y ángulos. Aquí es conveniente realizar actividades escritas u orales para identificar los movimientos por las acciones de medición que intervienen, identificar figuras a través de la descripción de las acciones para la construcción de modo que favorezca la formación de procesos y objetos mentales teniendo en consideración la estructura del conocimiento matemático. El trabajo en grupos pequeños es muy importante en este momento para enriquecer las acciones individuales.

En la actividad 4 aparece planteado al alumno el problema que, concretamente, va a resolver con el significado de lo que ya sabe hacer desde grados anteriores y, sobre esa base, la nueva meta que es encontrar la vía de solución, que es desconocida, que conducirá a la elaboración del nuevo contenido.

Para el segundo momento didáctico que se dirige a la búsqueda de la solución que es la elaboración del método buscado y su ejercitación se recomiendan actividades como las que se darán a continuación.

Actividades dirigidas al perfeccionamiento del traslado de segmentos.

Una de las direcciones en que se perfecciona el traslado y reproducción de polígono es mejorar la precisión en la medición de segmentos, por lo que se considera necesario que el alumno sea consciente de cómo es que realiza esas mediciones, cuáles imprecisiones ocasiona ese método y plantearse un método para resolver la dificultad. Una actividad que se puede proponerse al alumno para este fin se muestra a continuación.

5. Sobre una hoja de papel se han dibujado varias circunferencias con el mismo radio, a partir de cada uno de los centros se han trazado rayos, indicándose con ciertas letras los puntos de intersección con las circunferencias respectivas. (Ver anexo 3)
 - a) Compare las longitudes de los segmentos indicados. Explique a qué se debe la coincidencia o la diferencia.
 - b) Explique un procedimiento que le permita reproducir la longitud de un segmento sin necesidad de realizar las mediciones con la regla graduada.
 - c) Este procedimiento de reproducir la longitud de un segmento a qué forma de reproducción de un polígono perfeccionaría.

Se le indicará al alumno realizar la comprobación de la deducción anterior en la reproducción de polígonos de distintas maneras. Se indicarán con claridad las situaciones que aparecen sin resolver. Se realizarán algunos ejercicios que involucren las acciones que integran la comparación de segmentos. (Ver anexo 4)

Con esta comprensión práctica se pueden construir un grupo de problemas donde los alumnos de un modo deductivo puedan establecer igualdades o diferencias en determinadas figuras. Además, como el movimiento que se perfecciona es el de traslación puede constituir la base para generar otro grupo de problemas donde de forma deductiva el alumno obtenga propiedades, determine longitudes y precise ubicaciones. El regreso a la figura original resulta un momento de especial interés ya que permite a los alumnos comprender la objetividad de la Matemática.

Actividades dirigidas a reconocer la importancia del triángulo en la reproducción de polígonos.

Se podría continuar con algún tipo de ejercicio que destaque de alguna manera la importancia del estudio del triángulo en el perfeccionamiento de la reproducción de polígonos un ejercicio podría ser el siguiente:

6. A continuación se tienen un grupo de plantillas que representan a distintas figuras geométricas. Descomponer cada una de ellas en figuras que le sean conocidas partiendo de la unión de sus vértices. (Ver anexo5)

a) Indique, en los casos que se pueda, cuándo es posible realizar esa descomposición obteniéndose una mayor cantidad de figuras mediante la unión de sus vértices.

Actividades dirigidas a determinar el número de operaciones mínimas para reproducir un triángulo.

En este momento, se concentrará la atención en el estudio de la reproducción del triángulo teniendo presente el concepto de igualdad. Se recomienda el siguiente ejercicio:

7. Se tiene una tabla que resume los datos tomados de modo aproximado de los elementos fundamentales de algunos triángulos. (Ver anexo 6)

a) Realice la construcción de cada grupo de ellos.

b) ¿De cuántas maneras puede hacerse la reproducción de cada triángulo?

Esta situación resulta preparatoria para la obtención de los teoremas de igualdad de triángulos, los que se formularán inicialmente producto del proceso inductivo. Se dará posteriormente una hoja de trabajo con distintos triángulos representados para que ellos identifiquen los datos suficientes para su reproducción. Luego, con estos datos, se realizarán las construcciones geométricas y se observarán las imprecisiones que se conservan.

Actividades dirigidas a perfeccionar la reproducción de ángulos.

Uno de los pasos constructivos que ocasiona dificultad a los alumnos es el referido al transporte de amplitudes de ángulos que siempre está asociado al uso del semicírculo graduado. A través de los teoremas de igualdad es posible buscar una vía que perfeccione el traslado de ángulos sin la utilización del semicírculo graduado, de modo que las acciones sólo dependen de las características del compás.

8. Sobre una hoja de papel se ha trazado una circunferencia cuyo centro se encuentra en el punto O. A partir de este punto se han trazado dos rayos indicándose los puntos de intersección con la circunferencia. A ambos rayos se les ha aplicado una misma rotación con centro en O. (Ver anexo 7)

- a) Compare el ángulo inicial con el ángulo final.
- b) ¿Cómo son las distancias entre los puntos de intersección de los rayos y los puntos resultantes de la rotación aplicada?
- c) ¿Qué procedimiento para el traslado de ángulos con mayor exactitud se puede deducir de las observaciones?
- d) ¿A qué tipo de reproducción de polígonos beneficiaría este procedimiento?

Actividades dirigidas a perfeccionar la reproducción de polígonos.

Se propone, en este caso, un ejercicio donde se comprueba concretamente el aporte de los resultados de las actividades anteriores a la reproducción de polígonos.

- 9. Construya un triángulo igual al triángulo ABC.
- 10. ¿Con cuáles datos es suficiente la construcción del triángulo?
- 11. Descomponga el pentágono ABCDE en triángulos y construya nuevamente el pentágono PQRST.

En este momento se realizarán ejercicios sobre la comparación de ángulos, suma de ángulos y operaciones con ángulos. (Ver anexo 8)

Las imprecisiones que se producen en la construcción de un polígono (por el uso de instrumentos de medición) y la necesidad de disminuir o racionalizar el procedimiento constructivo son los problemas que el alumno debe comprender y cuya solución tiene como base el estudio de **la igualdad de triángulos**, que es el núcleo a partir del cual se reestructura todo el sistema de conocimientos y habilidades de la Geometría Plana que tiene el alumno (en el 7. Grado según el programa vigente). Estas imprecisiones y el proceso de su solución pueden atenderse de manera global con el siguiente ejercicio:

- 12. Se da un sistema de plantillas que representan a distintas figuras geométricas. (Ver anexo 9)
 - a) En una hoja de papel represente a cada una de ellas y describa la secuencia de pasos seguidos en función de los elementos fundamentales (lados y ángulos) de las figuras que se han ido dibujando.
 - b) Teniendo en cuenta las representaciones de las distintas figuras conforme una tabla con las mediciones aproximadas de sus elementos fundamentales.
 - c) Con los datos tomados de forma aproximada en otra hoja de papel realice la representación del sistema de datos y compárelo con el original. Explique las causas de las diferencias.
 - d) Realice ahora el proceso de reproducción aplicando los elementos que lo perfeccionan. Compárelos.

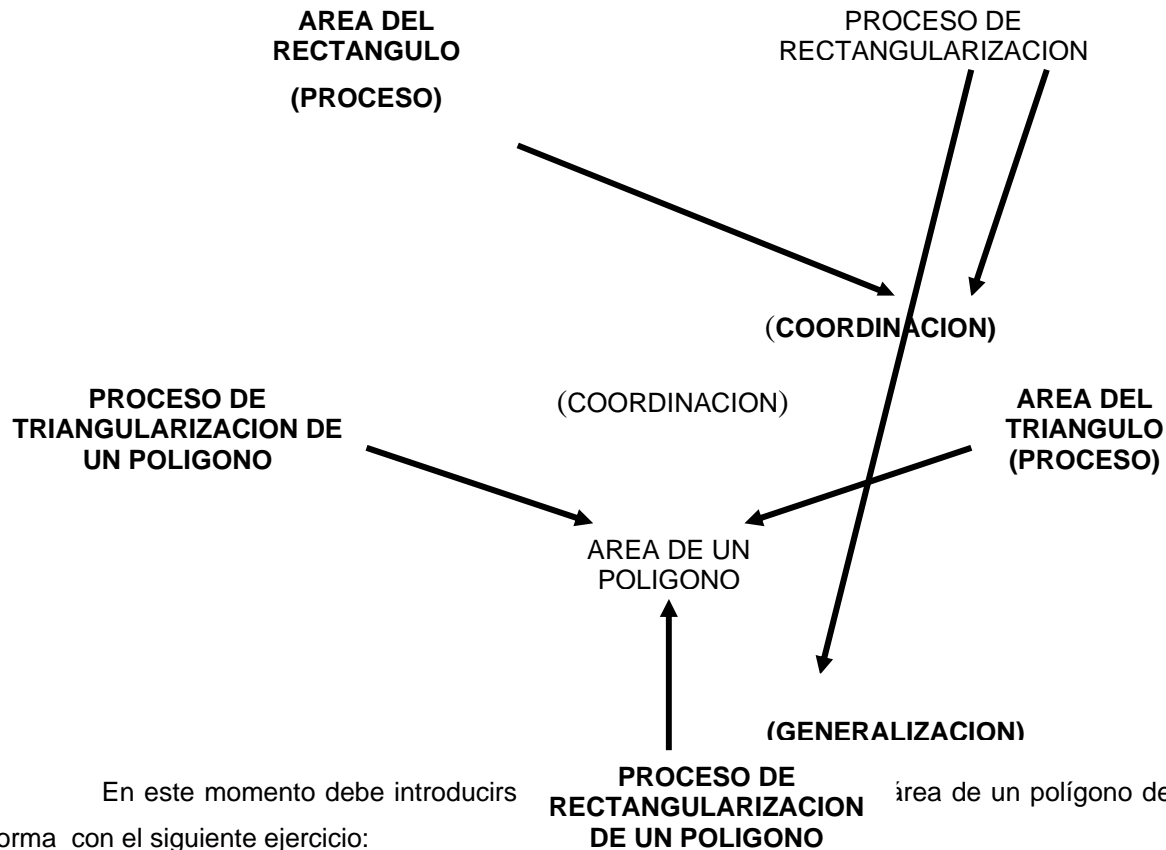
El profesor mostrará con la plantilla demostrativa (pentágono) cómo descomponer el polígono dado en otros polígonos, siendo más conveniente destacar lo ventajoso que resulta descomponerlo en triángulos, aunque el alumno debe comprender que cualquiera sea la descomposición (en un triángulo y un cuadrilátero o en tres triángulos) se conserva la misma superficie lo que permite introducir el concepto de superficies equivalentes. En este proceder es conveniente que el alumno sea capaz de reproducirlo en diversas situaciones.

Al reducir el problema a la construcción de triángulos, se debe explicar cómo el número de acciones se simplifica significativamente, es decir, si en la primera construcción realizó seis mediciones y seis pasos de construcción sobre esta base se realizan con tres, debe observar también que las operaciones a realizar para construir cualquier otro polígono también se simplifica.

La acción de descomponer un polígono en otros de menor número de lados está muy ligada a la acción de reconstruir el polígono inicial como un todo sin perder la noción de cada una de las partes en que se ha subdividido y la posición que cada una ocupa.

Actividades dirigidas a que el alumno construya el concepto de área de un polígono.

En primer lugar veamos una propuesta de descomposición genética del concepto de área de un polígono:



En este momento debe introducirse la siguiente forma con el siguiente ejercicio:

13. Sobre una hoja de papel se han dibujado varias figuras geométricas. De cada una se te ha dado una plantilla transparente. Señala en los casos que puedas cuáles son mayores por pares. (Ver anexo 10)

- Explica, en los casos en que te sea posible, qué procedimiento empleaste para realizar la comparación.
- ¿En cuáles casos piensas que fue más sencillo el proceso de comparación?
- ¿Es posible utilizar el concepto de perímetro para decir si una figura es más grande que la otra?

En el siguiente ejercicio se hará énfasis en que la comparación de dos superficies es más fácil o resulta realizable en el caso de que las figuras a comparar sean rectángulos.

14. Sobre varios rectángulos se han tomado, de modo aproximado, las siguientes mediciones. (Ver anexo 11)

- Determina el número de cuadraditos de 1 mm de longitud de los lados que contienen cada uno de ellos.
- ¿Cuál es el mayor y cuál es menor?

El siguiente ejercicio tiene como objetivo lograr que comprenda que en el caso del triángulo rectángulo es posible dar aproximadamente la cantidad de cuadraditos de 1 mm de lado.

15. Sobre una hoja de papel se han dibujado una serie de rectángulos los cuales tienen una parte sombreada. Diga en los casos que sea posible, de forma aproximada, el número de cuadraditos de 1mm de longitud de lado que contienen dichas partes. (Ver anexo 12)

Ahora se introducirá el proceso de rectangularización de un polígono con el siguiente ejercicio:

16. Se dan plantillas de distintos tipos de triángulos para traten de descomponer cada uno de ellos en triángulos rectángulos. (Ver anexo 13)
17. Se tiene un grupo plantillas de figuras geométricas, haciendo su representación en una hoja de papel, pruebe si es posible descomponerlas en triángulos rectángulos. (Ver anexo 14)
 - a) Determine el número aproximado de cuadraditos, de 1mm de longitud de sus lados, que posee cada polígono.

Con este ejercicio se completa el tratamiento metodológico del concepto de área que conlleva a la definición del concepto de altura. Al igual que en otros instantes deben proponerse ejercicios escritos u orales que permitan que el alumno trate de identificar el sistema de acciones que componen la rectangularización de un polígono a través de la descripción de dichas acciones, de este modo se favorece la formación de procesos y objetos mentales. Después es posible confeccionar problemas que sus soluciones estén impregnadas, en lo fundamental, de un enfoque deductivo.

Actividades dirigidas a la deducción de las propiedades de algunos cuadriláteros

En este momento se estudia el triángulo comenzando con el estudio de algunos tipos de cuadriláteros que se obtienen de combinar dos triángulos iguales. Así se puede proponer el siguiente ejercicio:

18. Se tiene un grupo de plantillas que representan diferentes triángulos iguales o congruentes por pares. Se quiere que con cada par se formen todas las figuras posibles haciendo coincidir sus lados homólogos. (Ver anexo 15)
 - a) Describa el tipo de figura que se forman atendiendo al número de lados.
 - b) Describa las características generales de las figuras.

- c) Con cada figura confeccione una tabla que indique los datos fundamentales de cada una de las figuras.
- d) Reconstruye las figuras originales a partir de los datos tomados. Compárelas con las plantillas originales.

Este problema permitirá caracterizar distintos tipos de cuadriláteros tales como el rectángulo, el cuadrado, el paralelogramo, el rombo, las propiedades de sus diagonales etc. También se preparan las condiciones de los conceptos de mediana, bisectriz y mediatriz.

En el tercer momento didáctico, que tiene como finalidad que el alumno aplique el sistema de conocimientos y habilidades formados a resolver problemas, se recomiendan problemas y ejercicios donde predomine el enfoque deductivo e intervengan las propiedades generales de los movimientos.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.

En el capítulo se demuestra que el contenido de la Matemática escolar puede ser seleccionado y organizado a partir de problemas esenciales y sus subproblemas ya cada concepto matemático de Matemática escolar puede interpretarse en función de algún tipo de los perfeccionamientos indicados.

El trabajo metodológico que se genera a partir de la variante propuesta conduce a modificaciones en cuanto a los tipos de actividades y los enfoques en cuanto a los procesos inductivos y deductivos que se encaminan a la preparación de los alumnos para resolver problemas.

Las propuestas realizadas, por tanto, precisan modificaciones en el diseño de la asignatura en sus documentos fundamentales: en el programa la exigencia del problema esencial y sus subproblemas, en las orientaciones metodológicas las sugerencias al profesor sobre las acciones para dirigir el proceso y en el libro de texto las actividades que el alumno debe ejecutar en cada momento didáctico.

CONCLUSIONES.

Como resultado de la investigación realizada se ha podido concluir que:

- ❖ Los problemas esenciales y su papel en el proceso de enseñanza de la Matemática en relación con los objetivos y el contenido de la enseñanza pueden servir de guía para su selección en la concepción de los programas de estudio y en correspondencia con las condiciones particulares de los profesores y los alumnos.
- ❖ La estructuración del contenido de la unidad temática tomando como base los tres momentos descritos ofrece una forma de organización que garantiza el tratamiento de los problemas esenciales y la orientación más completa sobre el nivel alcanzado en la solución de cada problema y el perfeccionamiento constante que se produce con la apropiación de los nuevos conocimientos y habilidades.
- ❖ Las precisiones sobre el trabajo con sistemas problemas y la formulación de preguntas constituyen indicaciones para el profesor en la planificación y el logro de la permanencia de los problemas esenciales, así como de la sistematización de los modos de actuación que en cada uno se propone.
- ❖ La determinación de los problemas esenciales y las direcciones principales en que se perfecciona su solución con el contenido de la Matemática en la escuela media permite concluir que es posible fundamentar el tratamiento metodológico para cada unidad temática, sobre un enfoque sistémico, y establecer nuevas relaciones entre aquellas que corresponden al mismo problema esencial.
- ❖ El proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Matemática en la escuela media pudiera ser estructurado a partir del planteamiento, comprensión y solución de los problemas esenciales, según la variante fundamentada.

RECOMENDACIONES.

Se recomienda:

- ❖ Que se divulgue la variante propuesta para la estructuración del contenido de la enseñanza de la Matemática como una alternativa a aplicar por los profesores de la asignatura, de la escuela media, y una vía para la generalización de los resultados.
- ❖ Que se organicen cursos y seminarios metodológicos para la preparación del personal docente en los problemas teóricos abordados en el tema de investigación.
- ❖ Que se investiguen las posibilidades de aplicación de la variante propuesta en otros niveles y subsistemas de educación, así como en otras asignaturas.
- ❖ Realizar trabajos de investigación encaminados a fundamentar variantes para la estructuración del contenido de las unidades temáticas concretas en las que se resuelva cada problema esencial.

BIBLIOGRAFÍA.

1. Lenin, V. I.: Cuadernos filosóficos. Editora Política. La Habana. 1979.
2. Castro, Fidel: Discurso pronunciado en el acto de graduación del Destacamento Pedagógico Manuel Ascunce Domenech el 7 de julio de 1981. Editora de impresores gráficos.
3. Programa del Partido Comunista de Cuba. Editora Política. Ciudad de la Habana. 1987.
4. Aballí, Gudelia y otros: El desarrollo de habilidades previas de cálculo en 9. grado. Revista Educación # 67. Ciudad de la Habana. Octubre- Diciembre, 1987.
5. Abdulina, O. A.: La preparación pedagógica general del maestro en el sistema de instrucción superior pedagógica. Moscú. 1984. (Traducción).
6. Acuña Soto, Claudia: Por una Geometría más formativa, mostremos antes de demostrar en Matemática Educativa. México. 1989.
7. Aguayo, Alfredo y H. Amores: Pedagogía. 5. edición. La Habana 1945.
8. Alvarez de Zayas, Carlos M.: Fundamentos teóricos de la dirección del proceso de formación del profesional de perfil ancho. Ciudad de la Habana. 1984.
9. -----: La escuela integrada a la vida. Pedagogía` 93. Ciudad de la Habana. 1993.
10. -----: Didáctica de la Educación Superior. Material impreso.
11. -----: Fundamentos teóricos de la dirección del proceso docente educativo en la Educación Superior Cubana. Tesis Doctoral. Ciudad de la Habana. 1989.
12. Alvarez de Zayas, Rita M.: El sistema de habilidades profesionales en la Metodología de la enseñanza de la Historia. Revista Varona # 8. Ciudad de la Habana. 1982.
13. Amaya de Ochoa, Graciela: Dificultades del aprendizaje y el razonamiento matemático del niño en edad escolar. Revista Estudios educativos # 20. Medellín. Primer semestre, 1984 p. 9 - 28.
14. Andreiev, I.: Problemas lógicos del conocimiento científico. Editorial Progreso. Moscú. 1984.
15. Arrieta Gallastegui, J.J.: La resolución de problemas y la educación matemática: Hacia una mayor interrelación entre investigación y desarrollo curricular. En Enseñanza de las Ciencias. 7(1). Febrero. España. 1989.
16. Ballester, Sergio y otros: Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo 1. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1992.

17. Ballester, Sergio: Cómo sistematizar los conocimientos matemáticos. Editorial Academia. Ciudad de la Habana. 1995.
18. Ballester, Sergio y C. Arango: Cómo consolidar conocimientos matemáticos. Editorial Academia. Ciudad de la Habana. 1995.
19. Barrón Ruiz, A.: Aprendizaje por descubrimiento: principios y aplicaciones inadecuadas. En Enseñanza de las Ciencias. Vol. 11 (1). Barcelona. Marzo. 1993.
20. -----: Constructivismo y desarrollo de aprendizajes significativos. Revista Educación 294. Madrid. Enero-abril 1991.
21. Bassedas, Eulalia: El asesoramiento psico-pedagógico: una perspectiva constructivista. Cuadernos de Pedagogía # 159. Barcelona. 1988. p. 65 - 71.
22. Belmont, J.: Estrategias cognoscitivas y aprendizaje estratégico. Revista Acción Pedagógica. Vol.2 No 1,2. 1991. p. 56 - 72.
23. Blauberg, I. V. y otros: Systems theory, philosophical and methodological problems. Editorial Progreso. 1977. En inglés.
24. Briedenbach, D.: Development of process conception of function. Educational Studies in Mathematics, 23 (1992) p 247-285.
25. Brito, Héctor y otros: Psicología general para los Institutos Superiores Pedagógicos. Tomo 2. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1987.
26. -----: Capacidades, habilidades y hábitos. Una alternativa teórica, metodológica y práctica. Boletín informativo. CDIP, ISP "Frank País García". 1990.
27. -----: Capacidades, habilidades y hábitos. Una alternativa para su tratamiento psicológico y pedagógico. Material impreso.
28. -----: Habilidades y hábitos. Consideraciones psicológicas para su manejo pedagógico. Revista Varona # 20 Ciudad de la Habana. 1988.
29. Brueckner, L. y G. Bond: Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje. Edición revolucionaria. La Habana. 1968.
30. Bruner, Jerome: Acción, pensamiento y lenguaje. Compilación. Alianza Editorial. Madrid. 1989.
31. -----: Juego, pensamiento y lenguaje. Revista Perspectivas. Vol. XVI # 1. 1986. p. 79 - 85.
32. Burns, Cecile G.: Resolver problemas: el mejor componentes del curriculum. Revista Universitas 2000 # 4. Venezuela. 1987. p. 173 - 176. En inglés.

- 33.Campistrous, L. y otros: Matemática. Orientaciones metodológicas 10. grado. Editorial Pueblo y Educación. 1989.
- 34.Campistrous, L. y C. Rizo: Aprender a resolver problemas aritméticos. En Memorias de la 8. Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Costa Rica. 1994.
- 35.Campistrous Pérez, Luis y C. Rizo. Algunas técnicas de resolución de problemas aritméticos. Curso Pre - reunión Pedagogía '99.
- 36.Campistrous, L. y C. Rizo: Aprender a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1996.
- 37.Colectivo de autores: Pedagogía. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1984.
- 38.Coll, César: Por una opción constructivista de la intervención pedagógica en el curriculum escolar en Psicología y Educación. En Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica. Madrid. 1987.
39. -----: Acción, interacción y construcción del conocimiento en situaciones educativas. Revista educación 279. p. 9-24. Madrid. Enero-abril. 1986.
40. -----: De qué hablamos cuando hablamos de constructivismo. En Cuadernos de Pedagogía 221. p. 8-10. Barcelona. Enero 1994.
41. -----: Aprendizaje significativo y ayuda pedagógica. En Cuadernos de Pedagogía 168. 4. edición. Barcelona. 1990.
- 42.Danilov, M. A. y M. N. Skatkin: Didáctica de la escuela media. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1978.
- 43.Davydov, V. V.: Tipos de generalización en la enseñanza. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1982.
44. -----: Contenido y estructura de la actividad de aprendizaje de los alumnos. En Educadores del mundo. Berlín. 1981.
45. -----: La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico. Editorial Progreso. Moscú. 1988.
- 46.De Guzmán, Miguel: Tendencias innovadoras en educación matemática. Editorial Olímpica. Buenos Aires. 1992.
- 47.Del Río Sánchez, J. y otros: Análisis comparado del currículo de Matemáticas en Iberoamérica (nivel medio). Mare Nostrum. Ediciones Didácticas. S. A. Madrid. 1992.
- 48.Diccionario de Filosofía. Editorial Progreso. Moscú. 1984.

- 49.Dubinsky, Ed: El aprendizaje cooperativo de las Matemáticas en una sociedad no cooperativa. En Revista Cubana de Educación Superior No 2-3. CEPES. Universidad de La Habana. 1996.
- 50.Dubinsky, Ed: Learning Abstrac Algebra with ISTE.L.New York-Springer-Verlag.1994
- 51.Dubinsky, Ed: Calculus, Concepts and Computers, 2nd edition. New York: McGraw-Hill.1995
- 52.Dubinsky, Ed: ISETL: A Programming Language for Learning Mathematics. En Communications on Pure an Applied Mathematics, Vol XLVIII, 1027-1051(1995)
- 53.Echeita, G.: El aprendizaje significativo. En Infancia # 11. Barcelona. Enero-febrero. 1992.
- 54.Fortuny Aymery, Josep Ma.: Información y control en la educación matemática. Revista Educar # 17. Barcelona. 1990.
- 55.Ferrer, M y A. Rebollar : ¿Cómo dirigir el proceso de formación de las habilidades matemáticas. Curso Pedagogía '99.Ciudad de la Habana.
- 56.Friedman, L. M. y E. N. Turetski: ¿Cómo aprender a resolver problemas?. Editorial Instrucción. Moscú. 1989. En ruso.
- 57.Friedman, L. M.: Metodología para enseñar a resolver problemas matemáticos. En Matemática en la escuela # 5. Moscú. 1991. Traducido del ruso.
- 58.Fuentes González, Homero: Perfeccionamiento del sistema de habilidades de la disciplina Física para estudiantes de Ciencias Técnicas. Tesis de grado. 1989.
- 59.Galperin, P. Ya.: Sobre la posibilidad de una Psicología objetiva. Revista Cuestiones de Psicología # 6. Moscú. 1987. En ruso.
- 60.Galperin, P. Ya.: Sobre el método de formación por etapas de las acciones intelectuales. En Antología de la Psicología Pedagógica y de las edades. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1986.
- 61.García Venero, M.: Metodología para el logro de un aprendizaje significativo. En Tecnología y Comunicación Educativa. Año 4 (14). México. Octubre. 1989.
- 62.Gascón, J. El papel de la Resolución de problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. En Educación Matemática. Vol. 6 (3). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Diciembre, 1994. P. 37-50.
- 63.Gladki, A. V.: Sobre el sistema metodológico de V. F. Shatalov. Revista Matemática en la escuela # 4. 1988. p. 38 -42. En ruso.
- 64.Gleizer G. D. : Geometría 6-9. Editorial Instrucción. Moscú. 1985.

- 65.Gómez, I. y otros: La selección de contenidos en las ciencias. En Cuadernos de Pedagogía # 168. 4. edición. Barcelona. 1990.
- 66.González, Diego: Didáctica o dirección del aprendizaje. 5. edición. Cultural S. A.. La Habana. 1952.
- 67.González, Fredy: Trascendencia de la resolución de problemas de Matemática. En Paradigma Vol. VIII (2). Venezuela. Diciembre, 1987.
- 68.Greeno, J. G: El pensamiento. Desde una perspectiva alterna. Revista acción pedagógica. Vol 1 # 2. 1989. p. 51 - 69.
- 69.Guetmanova, A. y otros: Lógica: en forma simple sobre lo complejo. Diccionario. Editorial Progreso. Moscú. 1991.
- 70.Hernández Báez, J.L.: La determinación del nivel básico común de los contenidos de educación general media. Revista Ciencias Pedagógicas # 12. Año VII. Enero-Julio. 1986.
- 71.Hernández Fernández, Herminia: El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Educación Superior Cubana, experiencias en el Algebra Lineal. Tesis de grado. Ciudad de La Habana. 1989.
- 72.Hidalgo Guzmán, José L.: Aprendizaje operatorio. Ensayos de teoría pedagógica. Casa de la Cultura del maestro mexicano, A. C. 1992.
- 73.Imaz Jahnke, C.: Qué es la Matemática educativa. En Pedagogía. p.5-8. Vol. 6 (17). México. D.F. Enero-marzo.1989.
- 74.Jungk, Werner: Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tres partes. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1982.
- 75.Kalmíkova, Z. I.: ¿Desarrolla el pensamiento productivo el sistema de enseñanza de Shatalov?. Revista Cuestiones de Psicología # 2. Moscú. 1987.
- 76.Kilpatrick, Jeremy: Lo que el constructivismo puede ser para la educación de la Matemática. Revista Educar # 17. Barcelona. 1990.
- 77.Klingberg, L.: Introducción a la Didáctica General. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1972.
- 78.Koliaguin, Yu. M.: Metodología de la enseñanza de la Matemática en la escuela media. Editorial Instrucción. 1975. En ruso.
- 79.Krutietski, V. A.: Cuestiones generales sobre la estructura de las capacidades matemáticas. En Antología de la Psicología pedagógica y de las edades. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1986.

- 80.Labarrere, Alberto: La formación de procedimientos generales para la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Revista Ciencia Pedagógicas # 14. Ciudad de la Habana. Enero - Junio, 1987.
- 81.Labarrere, Alberto: Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1987.
- 82.Labarrere, Alberto: Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1988.
- 83.Labarrere, Guillermina y G. Valdivia: Pedagogía. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1985.
- 84.Leontiev, A. N.: Actividad, conciencia y personalidad. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1981.
- 85.Leontiev, A. N. y otros: Psicología. Editorial Grijalbo. México. 1975.
- 86.Lugve, A.: El desacuerdo constructivo: aprendiendo de los conflictos. Cuadernos de Pedagogía # 156. Barcelona. 1988.71 - 74.
- 87.Majmutov, M. I.: La enseñanza problémica. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1983.
- 88.Márquez Rodríguez, Aleida: Sistema teórico - metodológico para la formación de habilidades. Material impreso. ISP "Frank País García". 1991.
- 89.Martínez, Graciela: El tránsito de la formación de conceptos matemáticos primarios a la solución de problemas aritméticos en niños de edad preescolar mayor a edad escolar menor. Revista Cubana de Psicología. Vol. 1 # 2. 1984.
- 90.MINED: Estado actual y proyección de la enseñanza de la asignatura Matemática. Informe a la reunión de la Comisión Nacional de Matemática. Ciudad de la Habana. Octubre. 1993.
- 91.MINED: Informe del trabajo realizado por la Comisión de Matemática en el diagnóstico del estado de la enseñanza de la Matemática. Ciudad de la Habana. Abril - Junio. 1991.
- 92.MINED: Matemática. Proyecto. Concepción general de la asignatura en el subsistema de la educación general, politécnica y laboral. Folleto. 1987.
- 93.Montealegre, Rosalía: La actividad comunicativa y el papel regulador del lenguaje en el niño. Cuadernos de Psicología. Vol. 12, # 1. 1992. p. 71 - 90.
- 94.Montessori, M.: Ideas generales sobre mi método. Editorial Losada. Buenos Aires. 1948.
- 95.Moreno, L. Y G. Waldegg: Constructivismo y Educación Matemática. En Educación Matemática. Vol 4 (2). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Agosto, 1992.

- 96.Müller, Horst: El trabajo heurístico y la ejercitación en la enseñanza de la Matemática. Folleto. ISP "Frank País García".
- 97.Muñoz, Félix y otros: Matemática. 7. grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1989.
98. -----: Matemática. 8. grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1990.
99. -----: Matemática. 9. grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1991.
100. -----: Matemática. Orientaciones metodológicas. 7. grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1989.
101. -----: Matemática. Orientaciones metodológicas. 8. grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1990.
102. -----: Matemática. Orientaciones metodológicas. 9. grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1991.
- 103.Nadirashvili, Sh. A.: Dimitri Nikolaevich Uznadze. Cuestiones de Psicología # 6. Moscú. 1986. p. 87 - 95.
- 104.National Council of Teachers of Mathematics (NCTM): Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Edición en Castellano de Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES".
- 105.Panizza, M. y P. Sadovski: Las nuevas tendencias de la enseñanza en el nivel medio. Universidad de Buenos Aires. 1994.
- 106.Peltier, Marie Lise: Una Visión General de la Didáctica de Las Matemáticas en Francia. En Educación Matemática. Vol. 5 (2). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Agosto, 1993.
- 107.Pérez Martínez, L.: La formación de habilidades lógicas a través de la enseñanza de la Física General en Carreras de Ciencias Técnicas. Tesis de grado. Santiago de Cuba. 1992.
- 108.Pérez Piqueras, E.: Aprendizaje eficaz. En Comunidad escolar. Vol. 11 (414). Madrid. Junio. 1993.
- 109.Petrovski, A. V.: Psicología general. Editorial Progreso. Moscú. 1980.
- 110.Piaget, J.: La epistemología genética. Barcelona. 1970.
111. -----: La construcción de lo real en el niño. Editora revolucionaria. La Habana. 1967.
112. -----: La enseñanza de las Matemáticas. Madrid. 1968.
- 113.Polya, George: ¿Cómo plantear y resolver problemas?. Editorial Trillas. México. 1986.

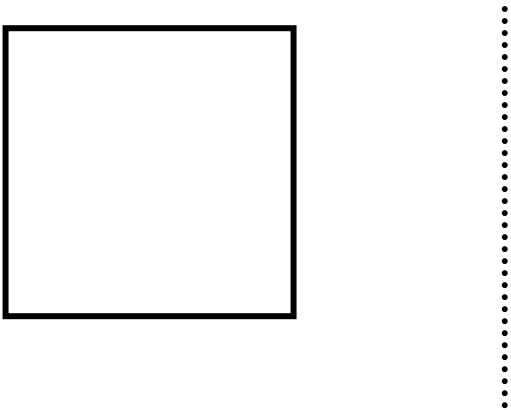
114. Porlán, Rafael: Constructivismo y Escuela. Hacia un modelo de enseñanza -aprendizaje basado en la investigación. Díada Editora S. L. 2. Edición. Enero, 1995.
115. Pranguishvili, A. S.: El aprendizaje y la disposición. En Antología de la Psicología Pedagógica y de las Edades, de Iliasov I. I. y V. Ya. Liaudis. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1986
116. Pranguisvili, A. S. y E. A. Gersamiya: Some interpretations of the "Uznadze effect" in modern cognitive psychology. Soviet Psychology. Vol XXI # 2. 1983. p.73 - 103.
117. Rebollar, A. y otros: Estudio de la habilidad para resolver problemas matemáticos en la escuela media. Informe de investigación. Santiago de Cuba. 1993.
118. Rebollar, A.: Una variante para la estructuración del contenido de la Matemática en la escuela media. Informe de investigación. Santiago de Cuba. 1994.
119. Rebollar, A y otros: La resolución de problemas, un medio para la estimulación del aprendizaje de la Matemática. Congreso Pedagogía '99. Ciudad de la Habana. 1999
120. Ríbnikov, K.: Historia de las Matemáticas. Primera edición en Español. Editorial MIR. Moscú. 1987.
121. Rizo, Celia: La formación de habilidades y capacidades en la enseñanza de la Matemática. Revista Educación # 13. Enero - Junio. 1983. p. 46 - 55.
122. Roganovski, N. M.: Elementos de la actividad matemática como objetivo de la enseñanza. Revista Pedagogía Soviética # 7. Moscú. 1976. p. 67 - 71. En ruso.
123. Rodríguez Hung, Teresa: Enfoque sistémico en la dirección de la asimilación de los conceptos básicos de la disciplina Matemática. Tesis de grado. Ciudad de la Habana. 1991.
124. Rodríguez, Roberto y otros: La aplicación del método de V. F. Shatalov en la asignatura Análisis Matemático. Informe de investigación. ISPETP. Ciudad de la Habana. 1985.
125. Rubinstein, S. L.: Psicología del pensamiento. Editora universitaria. La Habana. 1966.
- 126.-----: El problema de las capacidades y las cuestiones relativas a la teoría psicológica. En Antología de la Psicología Pedagógica y de las Edades, de Iliasov I. I. y V. Ya. Liaudis. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1986.
127. -----: El principio de la actividad creativa. Cuestiones de Psicología # 4. 1986. p. 101 - 107. En ruso.
128. Ruzin, N. H.: El problema como objetivo y medio de la enseñanza de la Matemática. Revista Matemática en la escuela # 4. Moscú. 1980. p. 13 - 15. En ruso.

- 129.Sánchez Sarto, Luis: Diccionario de Pedagogía. Editorial Labor S. A. Tomos 1 y 2. 1936.
- 130.Santaló, Luis y otros: La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia. En Tratado de Educación Personalizada, dirigido por Víctor García Hoz. Ediciones RIALP. S. A. Madrid. 1994.
- 131.Santos Marín, Norma: Sistema de habilidades lógicas relacionadas con los conceptos y los teoremas en la Matemática de las Ciencias Técnicas. Tesis de grado. Universidad Central de Las Villas. 1985.
- 132.Santos, L.M.: Resolución de problemas; El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las Matemáticas. En Educación Matemática. Vol 4 (2). Agosto. 1992.
- 133.Santos Trigo, Manuel: ¿Qué significa el Aprender Matemáticas?. Una Experiencia con estudiantes de Cálculo. En Educación Matemática. Vol. 7 (1). Grupo Editorial Iberoamérica
- 134.Sanz Cabrera, Teresa: Estudio de los procedimientos lógicos de identificación de conceptos y clasificación. Tesis de grado. Ciudad de la Habana. 1989.
- 135.Schoenfeld, A. H.: Ideas y tendencias en la resolución de problemas. En La enseñanza de la Matemática a debate. Ministerio de Educación y Ciencias. Madrid. 1985.
136. Schoenfeld, A. H.: Mathematical Problem Solving; Academic Press. 1985.
- 137.Silvestre Oramas, Margarita: Metodología y técnica que contribuyen a estimular el desarrollo intelectual. Proyecto cubano TEDI. 1993.
- 138.Spirin, L. F.: Formación de las habilidades profesionales pedagógicas del maestro. Traducción. ISP "Frank País G."
- 139.Talizina, N.: Psicología de la enseñanza. Editorial Progreso. Moscú. 1988.
- 140.-----: Conferencias sobre los fundamentos de la enseñanza en la Educación Superior. Universidad de La Habana. 1984.
- 141.Thomas A, Romberg: Características problemáticas del currículo escolar de Matemáticas. En Enseñanza de las Ciencias. Vol. 11 (1). Barcelona. Marzo. 1993.
- 142.Tomás Folch, Marina: Los problemas aritméticos de la enseñanza primaria. Estudio de dificultades y propuesta didáctica. Revista Educar # 17. Barcelona. 1990.
- 143.Torres, Paúl: La enseñanza problémica de la Matemática de nivel medio general. Tesis de grado. Ciudad de la Habana. 1993.

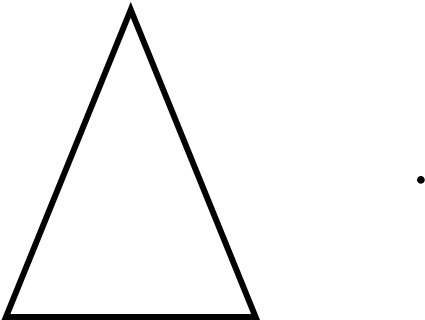
144. Turner Martí, Lidia: Cinco preguntas acerca del Perfeccionamiento continuo del Sistema Nacional de Educación. Revista Educación # 66. Julio - Septiembre. 1987.
145. Ursul, A., M. Rodríguez y otros: La dialéctica y los métodos científicos generales de investigación. Tomo 1. Editorial Ciencias Sociales. Ciudad de la Habana. 1981.
146. Usova, A. V.: Acerca de los criterios y niveles para la formación de las habilidades cognoscitivas en los alumnos. Revista Pedagogía Soviética # 12. Moscú. 1980. p. 45 - 49. En ruso.
147. Uznadze, D.N.: La Psicología de la disposición. En Antología de la Psicología. 2. parte. Bajo la dirección de A. V. Petrovski. Editorial Instrucción. Moscú. 1977. En ruso
148. Valencia, Teresita: ¿Cómo contribuir al desarrollo del pensamiento durante la clase. Revista Educación # 64. Enero - Marzo. 1987.
149. Velázquez de Castro, M.: Habilidades para el aprendizaje. En Comunidad escolar. Vol. 12 (450). Madrid. Abril 1994.
150. Vigotski, L. S.: Pensamiento y lenguaje. Edición revolucionaria. La Habana. 1968.
151. Wenzelburger, E: La Matemática Contemporánea y su Papel en la Enseñanza del Medio Superior. Revista Educación Matemática Vol.4 (2). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Agosto, 1992.
152. Zabala, A.: El enfoque globalizador. En Cuadernos de Pedagogía # 168. 4. edición. Barcelona. 1990.
153. Zankov, L.: La enseñanza y el desarrollo. Editorial Progreso. Moscú. 1984

ANEXO 1. Sistema de plantillas.

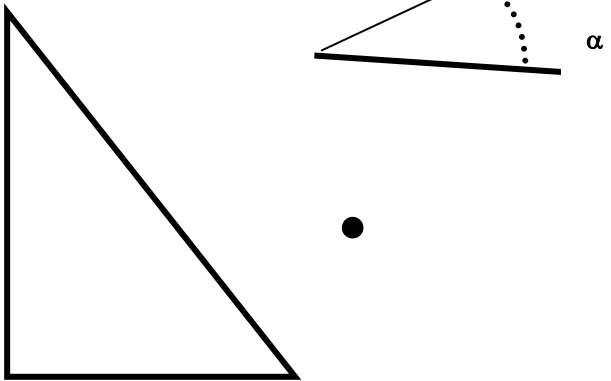
a) Simetría axial.



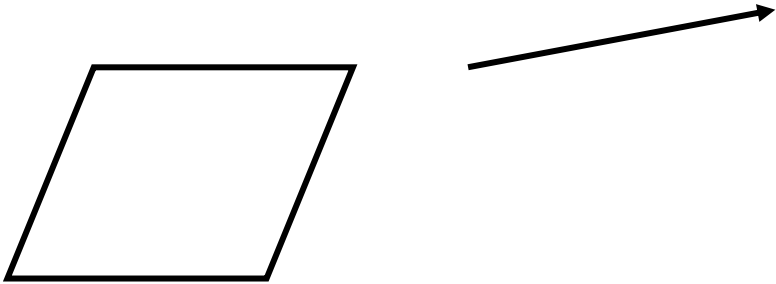
b) Simetría central.



c) Rotación de ángulo.

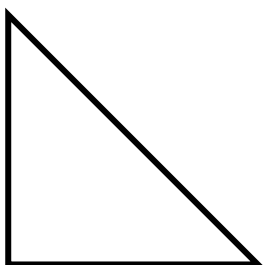


d) Traslación.

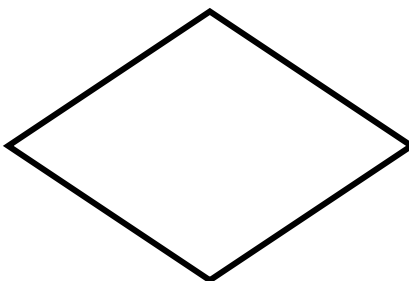


Anexo 2. Sistema de plantillas

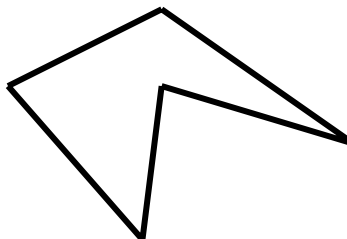
a) Triángulo ABC.



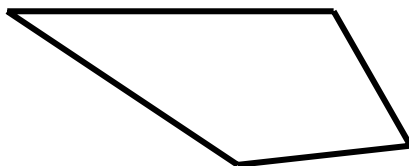
b) Rombo ABCD

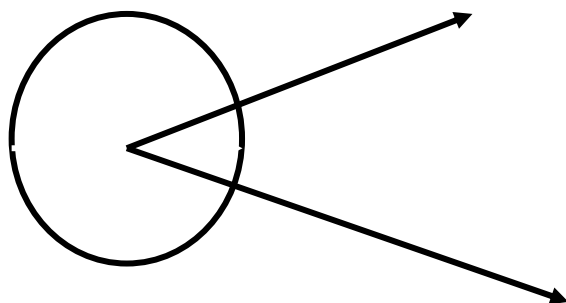
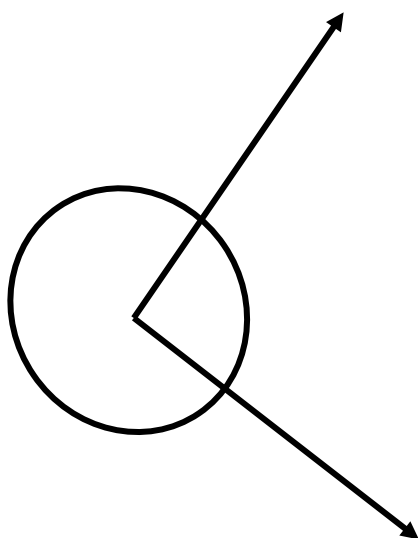


c) Pentágono ABCDE.



e) Cuadrilátero ABCD



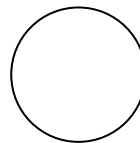
Anexo 3. Sistema de circunferencias.**a) Circunferencia C_1** **b) Circunferencia C_2** 

Anexo 4. Modelo de ejercicio para la ejercitación de la acción de comparar segmentos.

Ejercicio para formar el sistema de acciones.

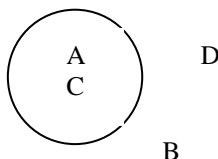
1. Se tiene dibujado un círculo con su centro.

Trace varios radios en el mismo.



2. ¿Todos los radios trazados son de igual longitud?

3. En el dibujo se tiene un círculo con su centro A. Además se tienen varios puntos denotados por A, B, C y D. Trace el segmento \overline{AB} .



4. ¿Este segmento es radio de la circunferencia? _____

5. Dibuja el segmento \overline{AC} . ¿Es este segmento más largo o más corto que el radio \overline{AB} ? _____. ¿En qué lugar se encuentra el punto C en el interior o en exterior de la circunferencia? _____.

6. Dibuje el segmento \overline{AD} . ¿Es este segmento más largo o más corto que el radio \overline{AB} ? _____. ¿En qué lugar se encuentra el punto D en el interior o en exterior de la circunferencia? _____.

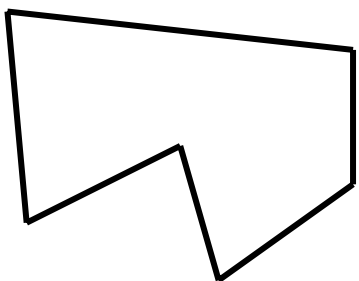
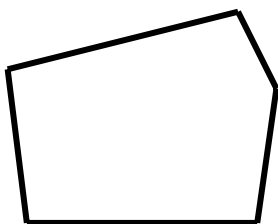
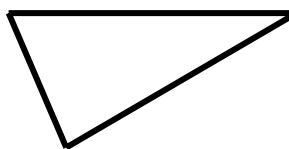
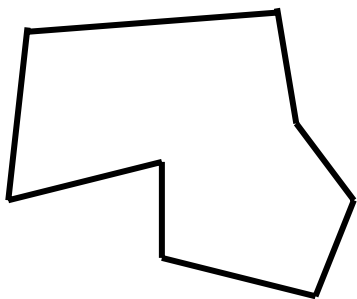
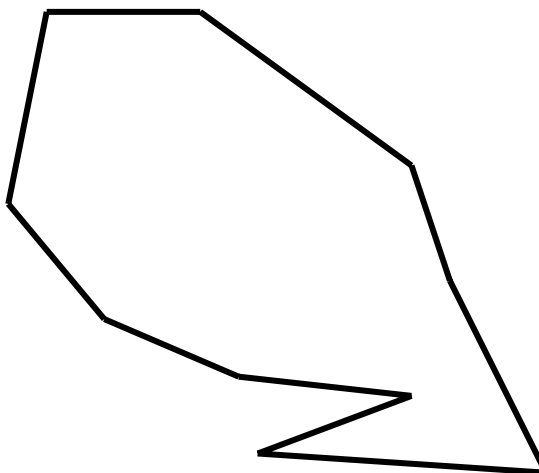
Ejercicio para convertir el sistema de acciones en un proceso.

2. Sobre una hoja de papel se dibuja una circunferencia con su centro O. En la hoja se indican mediante las letras A, B, y C tres puntos.

a) Cuando formamos el segmento \overline{OA} se observa que A es un punto de la circunferencia. ¿Este segmento es radio de la circunferencia? _____

b) Cuando formamos el segmento \overline{OB} se observa que existe un punto de la circunferencia que está en el interior del segmento. ¿En lugar se encuentra el punto en el interior o en exterior de la circunferencia? _____.

c) Cuando formamos el segmento \overline{OC} se observa que ningún punto de la circunferencia pertenece al segmento. ¿Es este segmento más largo o más corto que el radio \overline{AB} ? _____.

Anexo 5. Sistema de plantillas.**a) Exágono no convexo.****b) Cuadrilátero.****c) Pentágono.****d) Triángulo.****e) Octágono.****f) Dodecágono**

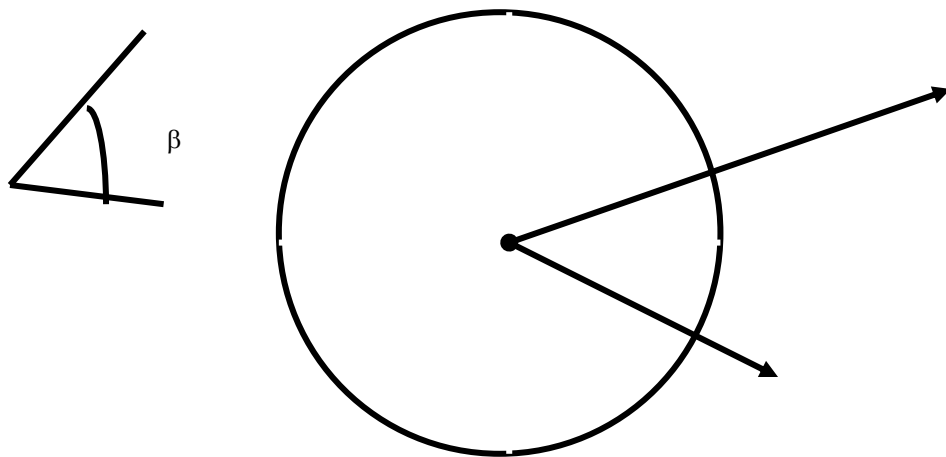
Anexo 6. Sistema de datos para construir triángulos

1. Datos numéricos sobre las longitudes de los lados y amplitudes de los ángulos interiores de alguno polígonos dados, tomados de forma aproximada. (triángulos)

Triángulo ABC.	longitud del AB	longitud del BC	longitud del CA	amplitud del ángulo BAC	amplitud del ángulo CBA	amplitud del ángulo ACB
T-1						
T-2						
T-3						
T-4						
T-5						
T-6						
T-7						

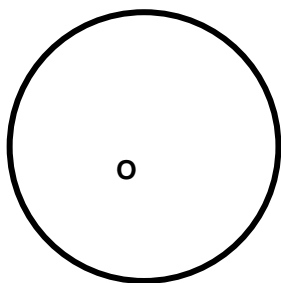
Anexo 7. Para la rotación.

Características de la rotación.



Anexo 8. Operaciones con ángulos.

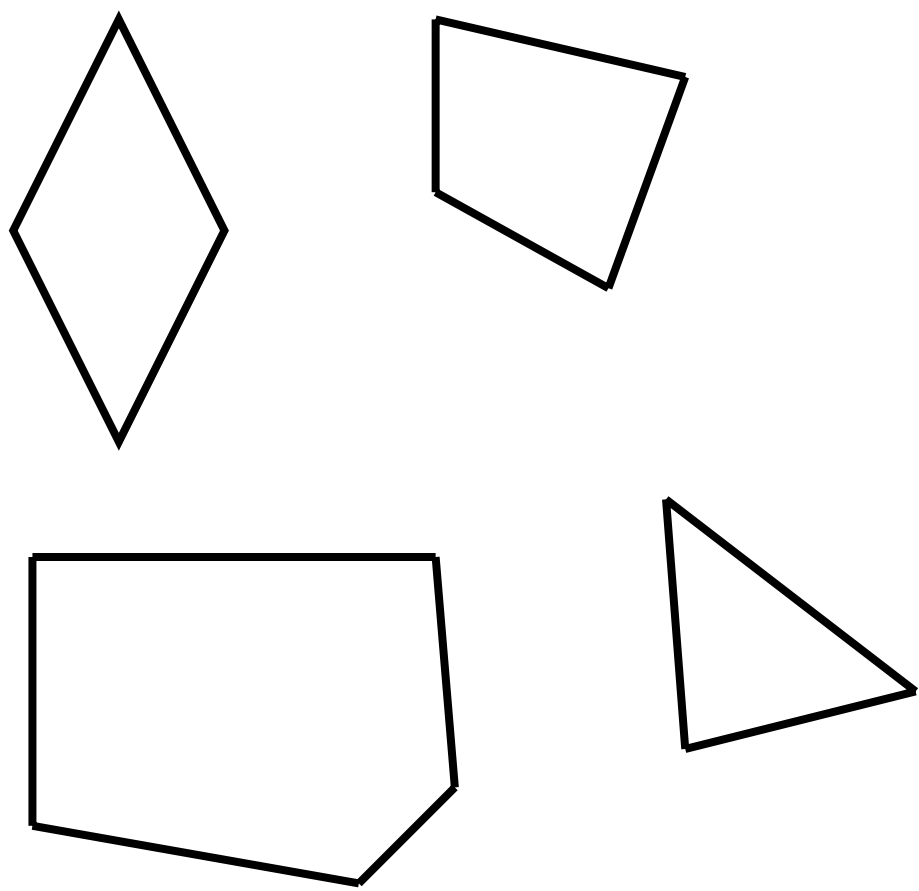
1. Se tiene dibujado un círculo con su centro. Trace varios rayos que parte del centro de la circunferencia.



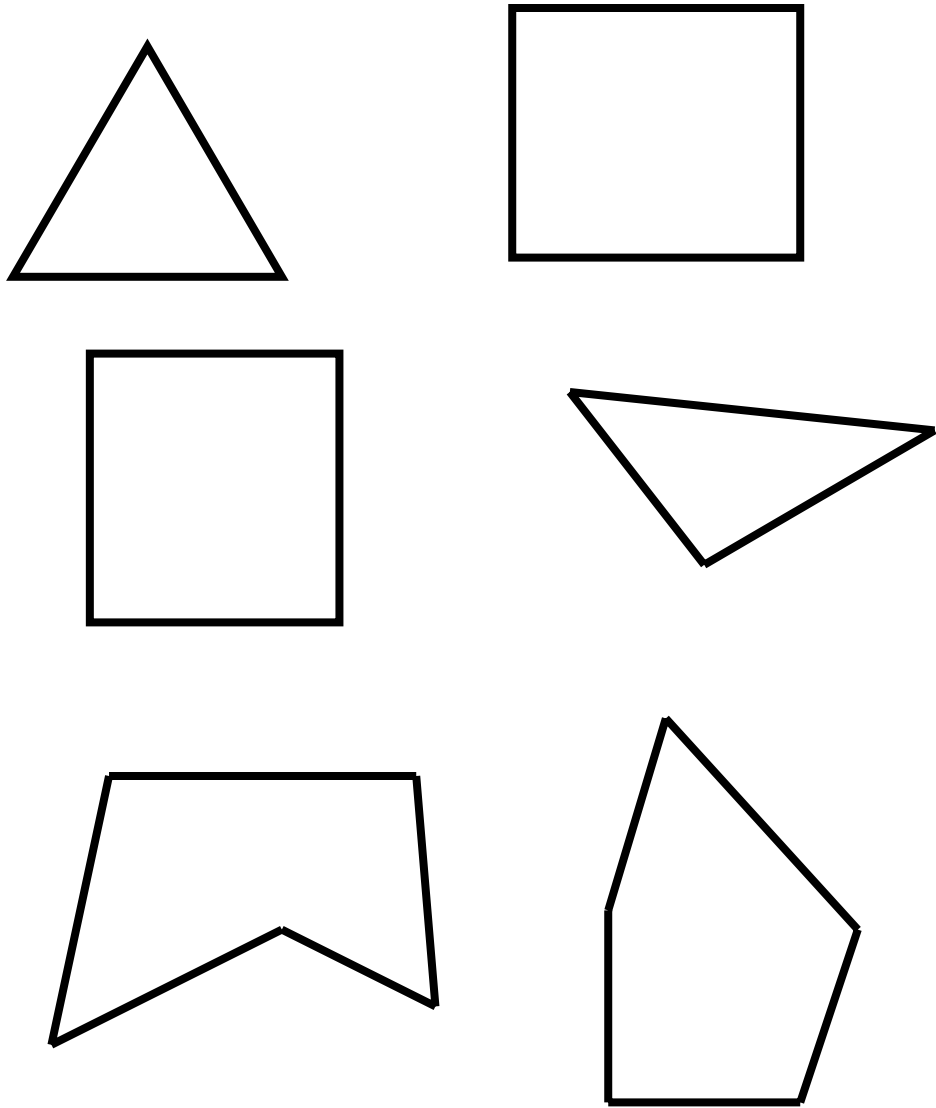
2. ¿Todos los rayos trazados interceptan a la circunferencia? _____
3. En el dibujo se tiene un círculo con su centro A. Además se tienen varios puntos denotados por B, C y D que son los puntos de intersección de los rayos que parten de A con la circunferencia.
4. Dibuja el arco BC. ¿Es este arco más largo o más corto que el arco BD? _____ ¿En lugar se encuentra el punto C en el interior o en exterior del arco BD? _____.
5. Sobre una hoja de papel se dibuja una circunferencia con su centro O. En la hoja se indican mediante las letras A, B, y C tres puntos que señalan la intersección de tres rayos que parte del punto O con la circunferencia.
 - a) Cuando formamos el arco AC se observa que B es un punto de la circunferencia que es interior al arco indicado. ¿Es este arco más largo o más corto que el arco AB? _____.
 - b) Cuando formamos el arco \overline{OB} se observa que existe un punto de la circunferencia que está en el interior del segmento. ¿En qué lugar se encuentra el punto: en el interior o en exterior de la circunferencia? _____.
2. Trace una circunferencia con centro en O.

2. Trace dos radios diferentes de la circunferencia.
 - ¿Cuál de los radios es más largo? _____
 - ¿Son iguales? _____
3. Trace un segmento de modo que uno de sus extremos sea O y corte a la circunferencia.
 - ¿Es este segmento más largo que el radio de la circunferencia?
4. Trace un segmento de modo que uno de los extremos sea O y no corte a la circunferencia.
 - ¿Es este segmento más corto que el radio de la circunferencia?.
5. a) ¿Cuál de los segmentos es el más corto?
- B) ¿Cuál es el más corto?
- C) ¿Cuál es el radio de la circunferencia?
3. Sobre una hoja de papel se trazan una circunferencia con centro O y se trazan dos segmentos ambos tienen uno de sus extremos en O, el que corta a la circunferencia su otro extremo es A y el que no corta a la circunferencia el otro extremo es B.
 - a) ¿Son iguales sus longitudes? _____
 - b) ¿Cuál tiene mayor longitud? _____
 - c) Si situamos un punto C sobre la circunferencia y formamos el segmento OC:
 - ¿Es OC el radio de la circunferencia? _____
 - ¿Tiene OC mayor longitud que OA? _____
 - ¿Tiene OC mayor longitud que OB? _____
2. Sobre una hoja de papel se tienen tres puntos. Con estos puntos se forman los segmentos AB y AC.
 - a) Si con centro en A se traza una circunferencia de radio A y se conoce que la misma corta al segmento AC ¿Cómo se relacionan las longitudes de estos segmentos? _____
 - b) Si con centro en A se traza una circunferencia de radio A y se conoce que la misma no corta al segmento AC ¿Cómo se relacionan las longitudes de estos segmentos?

Anexo 9. Sistema de plantillas.



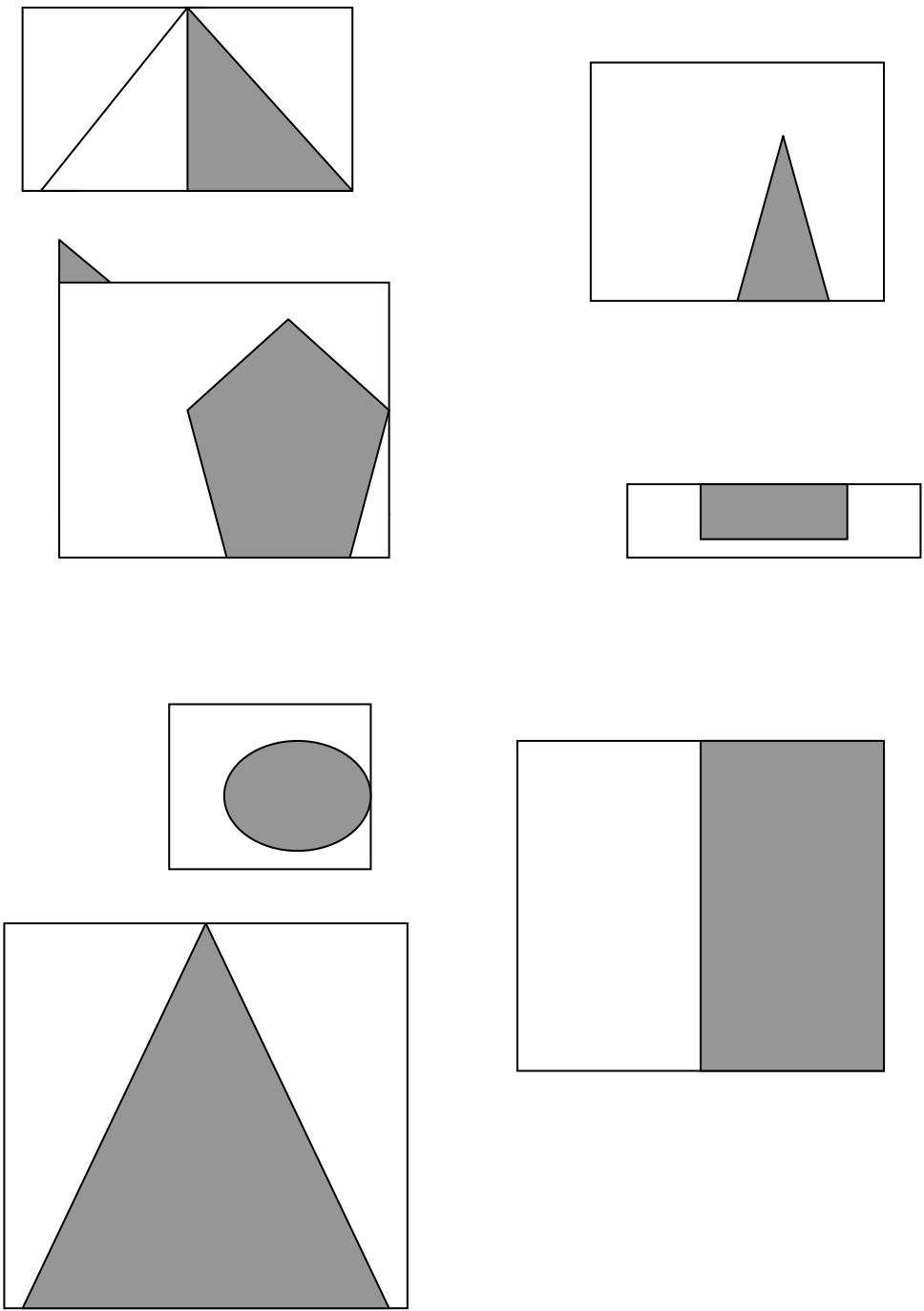
Anexo 10. Sistema de plantillas.



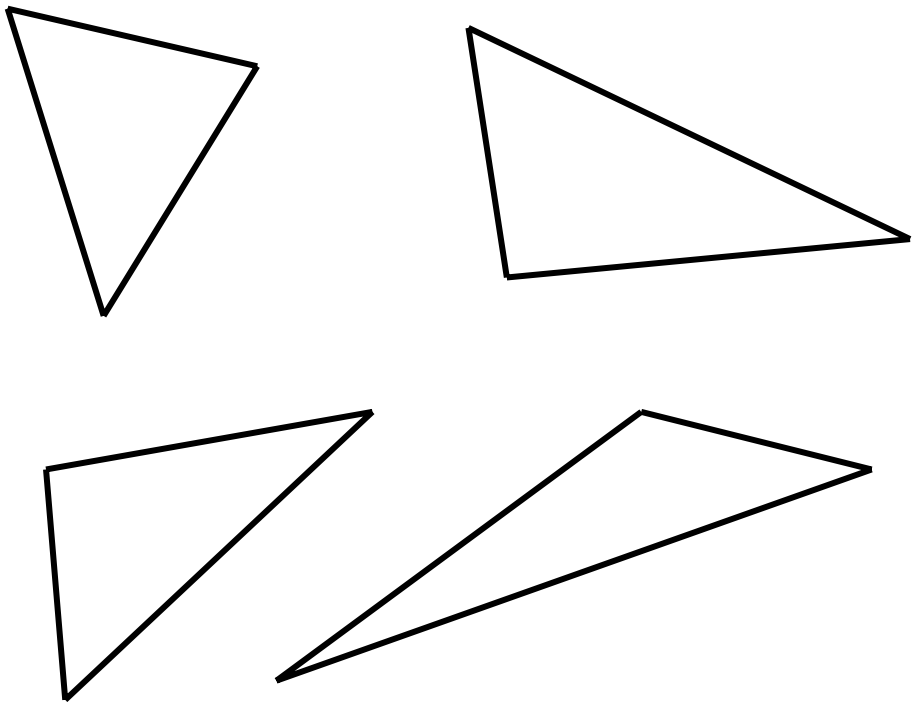
Anexo 11. Tabla de datos.

Rectángulo ABCD	Longitud del lado AB	Longitud del BC
R-1	3,7	4,6
R-2	2,3	4,0
R-3	5,0	2,8
R-4	4,5	1,3
R-5	3,9	3,4

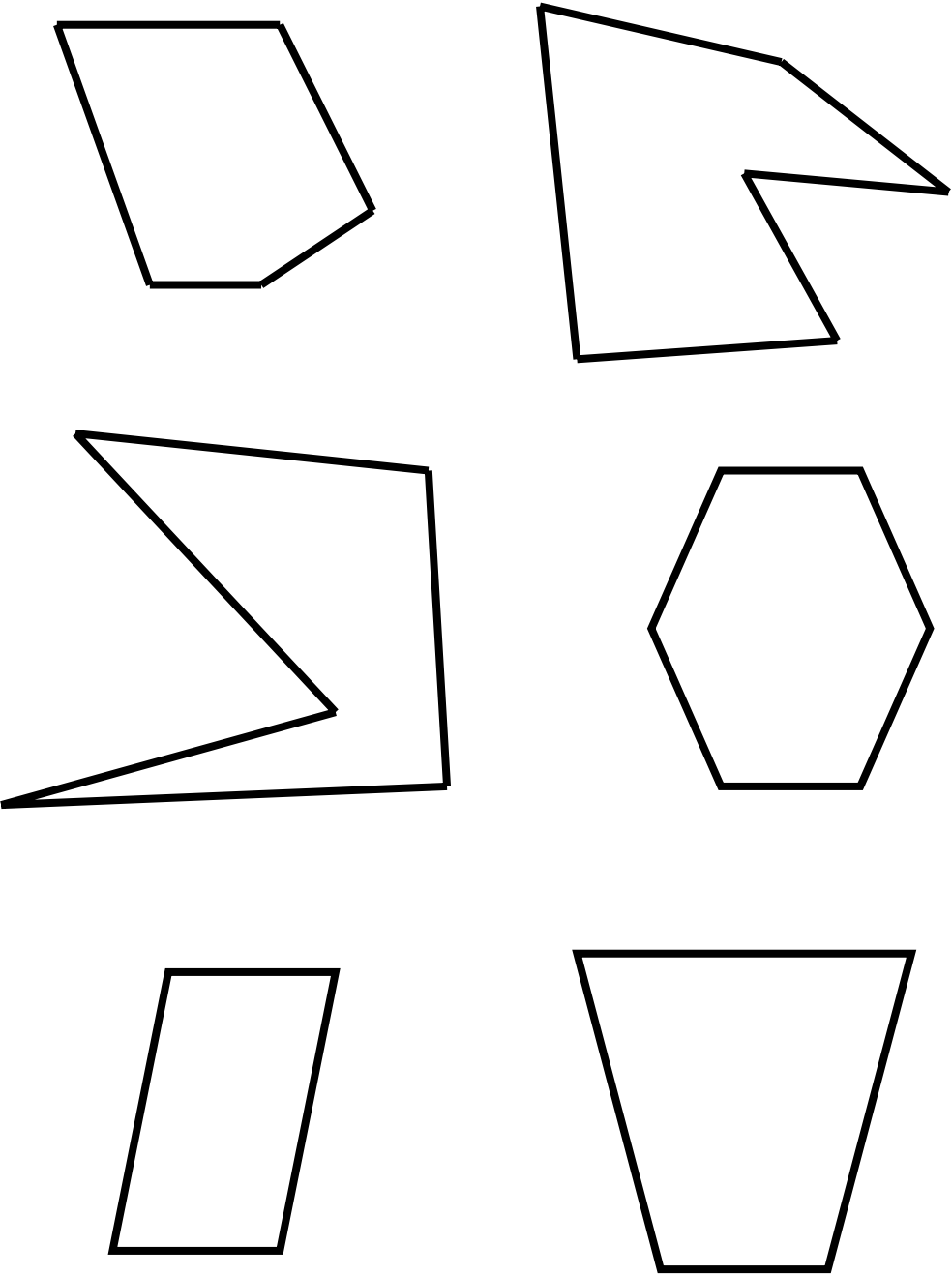
Anexo 12. Sistema de figuras.



Anexo 13. Sistema de plantillas.



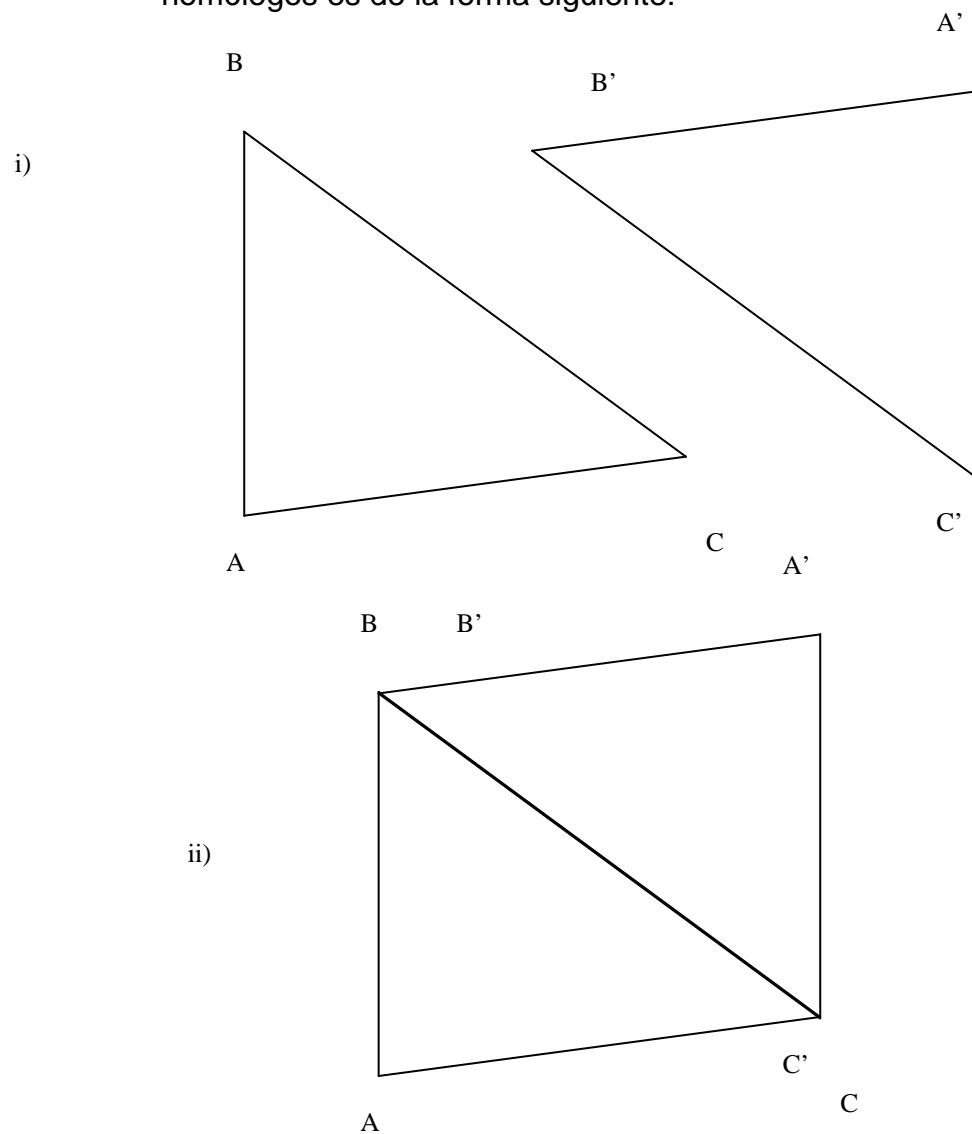
Anexo 14. Sistema de plantillas.



Anexo 15. Estudio de los cuadriláteros.

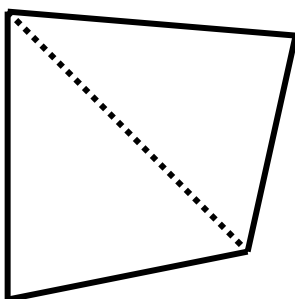
Como hemos indicado el estudio de algunos de los cuadriláteros se motivará a partir del ejercicio y el estudio de algunos tipos de triángulos se motivarán también en concordancia a la importancia que tenga en el estudio de los cuadriláteros. El objetivo de este anexo mostrar algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Una de las formas en que se pueden unir dos triángulos a través de sus lados homólogos es de la forma siguiente:



En el primer esquema observamos dos triángulos iguales denotados por ABC y $A'B'C'$ donde los lados homólogos se indican en dicho esquema. El segundo esquema muestra la formación de un cuadrilátero a través de los lados homólogos BC y $B'C'$ en el mismo orden. Este se descompone a su vez en dos triángulos que tienen dos lados iguales. Además, segmento BC divide al ángulo ABA' en dos ángulos iguales de esta forma comienza el proceso de formación del concepto de bisectriz. De esta forma se estudiará las propiedades del triángulo isósceles. Y de estas propiedades se deducirán las propiedades de las diagonales. Se deducirán métodos para el trazado de la perpendicular al punto medio de un segmento y la bisectriz de un ángulo.

Ejemplo 2. Otra de las formas en que se pueden unir dos triángulos a través de sus lados homólogos es de la forma siguiente:



En este caso la unión será por los mismos lados homólogos pero invirtiendo los extremos. Se deducirá que los lados opuestos son iguales. Además se deducirán algunas propiedades de este tipo de cuadrilátero tales como que las diagonales se cortan en su punto medio, la igualdad de sus ángulos opuestos. Finalmente se obtiene un método para determinar el punto medio de un segmento y la definición del concepto de mediana. Es importante señalar que de las propiedades deducidas se tratarán de aplicar a la reconstrucción de estos tipos de cuadriláteros.