ATLANTE
Cuadernos de Educación y Desarrollo
(2º Época)

NÚMEROS PRIMOS: OS ÁTOMOS DA MATEMÁTICA

Prof. Spec. Ivan De Oliveira Holanda Filho[1]
ivanfilho@ymail.com
Prof. M. Sc. Marcos Paulo Mesquita Da Cruz[2]
marcos_paulo_mesquita@hotmail.com
Prof. Spec. Ernandes Farias Da Costa[3]
ernandes.farias.costa@hotmail.com
Prof. M. Sc. Rickardo Léo Ramos Gomes[4]
rickardolrg@yahoo.com.br

Ivan De Oliveira Holanda Filho, Marcos Paulo Mesquita Da Cruz, Ernandes Farias Da Costa y Rickardo Léo Ramos Gomes (2020): "Números primos: os átomos da Matemática", Revista Atlante Cuadernos de Educación y Desarrollo, ISSN: 1989-4155 (septiembre 2020). En línea:
https://www.eumed.net/rev/atlante/2020/09/numeros-primos.html

RESUMO

Este trabalho faz uma análise sobre os números primos, colocando-os como os átomos da Matemática. Utilizou-se uma pesquisa bibliográfica, em livros, revistas, sites e artigos, no qual busca-se conhecer mais sobre os números primos. Os objetivos da pesquisa são mostrar as diversas possibilidades de trabalhar os números primos, avaliar o que foi estudado sobre eles ao longo da história e debruçar sobre as suas aplicações. A pesquisa vai de conceitos simples da matemática até ideias mais abstratas e complexas. O trabalho traz uma mescla de resultados antigos, de tempos que não havia tanta tecnologia, e estudos recentes. Ao longo do estudo, há um referencial teórico recheado de números primos; história de matemáticos, que se confundem com a história deles; números primos especiais; são mostradas conjecturas já esclarecidas e outra ainda em aberto. Segue-se depois com a metodologia do trabalho, que foi uma pesquisa bibliográfica e as considerações finais.

Palavras-chave: Números Primos. Sistemas Numéricos. Átomos da Matemática.

NÚMEROS PRIMARIOS: LOS ÁTOMOS DE LAS MATEMÁTICAS

RESUMEN

Este trabajo analiza los números primos, ubicándolos como los átomos de las matemáticas. Se utilizó una búsqueda bibliográfica, en libros, revistas, sitios web y artículos, en la que se busca conocer más sobre números primos. Los objetivos de la investigación son mostrar las diferentes posibilidades de

---

[1]Pós-Graduação em Ensino de Matemática (UNIATENEU), Licenciado em Matemática (UECE). Professor da Rede Básica de ensino em Maracanaú e do Estado do Ceará.
[2]Mestre em Economia Rural (UFC), Bacharel em Ciências Contábeis (UECE) e em Engenharia Metalúrgica (UFC). Professor de cursos técnicos e redes particulares de ensino.
[3] Pós-Graduação em Educação Matemática (FAK), Licenciado em Matemática (UECE). Professor da Rede Básica de ensino em Fortaleza.
[4] Professor da Disciplina de Metodologia do Trabalho Científico (Orientador) – Centro Universitário UNIATENEU; Instituto Euvaldo Lodi; Centro Universitário Farias Brito; M. Sc. em Fitotecnia pela Universidade Federal do Ceará – UFC; Spec. em Metodologia do Ensino de Ciências pela Universidade Estadual do Ceará – UECE; Graduado em Agronomia pela Universidade Federal do Ceará – UFC; Licenciado na Área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias pela Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA.

Recibido: 04/09/20 Corregido: 07/10/20 Publicado: 16/10/20

trabajar con números primos, evaluar lo que se ha estudiado sobre ellos a lo largo de la historia y ver sus aplicaciones. La investigación abarca desde conceptos matemáticos simples hasta ideas más abstractas y complejas. El trabajo trae una mezcla de resultados antiguos, de épocas en que no había tanta tecnología, y estudios recientes. A lo largo del estudio, hay un marco teórico lleno de números primos; historia de los matemáticos, que se confunden con su historia; números primos especiales; Se muestran conjeturas ya mostradas y otra aún abierta. Luego se sigue con la metodología del trabajo, que fue una búsqueda bibliográfica y las consideraciones finales.

Palabras clave: Números primos. Sistemas numéricos. Átomos en matemáticas.

PRIMARY NUMBERS: THE ATOMS OF MATHEMATICS

ABSTRACT

This work analyzes the prime numbers, placing them as the atoms of mathematics. A bibliographic search was used, in books, magazines, websites and articles, in which it is sought to know more about prime numbers. The objectives of the research are to show the different possibilities of working with prime numbers, to evaluate what has been studied about them throughout history and to look at their applications. The research ranges from simple math concepts to more abstract and complex ideas. The work brings a mixture of old results, from times when there was not so much technology, and recent studies. Throughout the study, there is a theoretical framework filled with prime numbers; history of mathematicians, who are confused with their history; special prime numbers; conjectures already shown and another one still open are shown. Then it follows with the methodology of the work, which was a bibliographic search and the final considerations.

Subject Descriptor (JEL): C. Mathematical and Quantitative Methods – C2 Mathematical Methods.

Keywords: Prime Numbers. Numerical Systems. Atoms in Mathematics.

1 INTRODUÇÃO

Os números primos intrigam os que gostam de matemática desde que foram descobertos; não se sabe ao certo se foi na Grécia pelo matemático Euclides de Alexandria ou através da escola pitagórica, do matemático Pitágoras de Samos, por volta de 530 a.C.

O certo é que, ainda hoje, mais de dois mil anos depois, o uso dos números primos são fundamentais na Criptografia dos dados de várias empresas e órgãos dos governos por todo o mundo. Há cada vez mais necessidade de serem encontrados números primos cada vez maiores para a melhor proteção contra hackers[5] e crackers[6].

Um fato curioso, é que há espécies de cigarras que ficam na terra uma boa parte do tempo e estão prontas para a vida em números primos. Elas conhecem os números primos?

Para os matemáticos, os números primos agraciam com problemas e conjecturas sem solução, que já foram alvo, sem sucesso, de grandes matemáticos, como Euler (1707-1783), Gauss (1777-1855) e Cantor (1845-1918).

---

[5]Hackers: Quem invadem sistemas computacionais ou computadores para acessar informações confidenciais ou não autorizadas, apontando possíveis falhas nesses sistemas. (DICIO-Dicionário Online de Português);

[6]Crackers: Indivíduos com grande conhecimento na área informática que invade computadores ou sistemas computacionais com propósitos ilegais, especialmente para roubar códigos, senhas pessoais ou bancárias (DICIO-Dicionário Online de Português).

Outros problemas ainda não resolvidos que envolvem os números primos, por exemplo, um que vale 1 milhão de dólares, como “hipótese de Riemann”. O matemático alemão, Riemmann (1826-1866), acreditava ter descoberto uma fórmula para descrever a distribuição dos primos. A demonstração desse teorema vale o prêmio milionário descrito acima.

Nesse trabalho veremos inicialmente a necessidade que o homem teve de contar, à medida que a vida e as atividades foram ficando mais complexas. Depois, nos debruçaremos com conceitos matemáticos, que são os sistemas de bases, que foram diversos ao longo das civilizações e muitos dos quais são usados rotineiramente por nós.

Em seguida, temos a seção “Números especiais”, que vai tratar dos números primos, como os átomos da Matemática e vai debater sobre várias ideias sobre números e outros números que bebem da fonte dos números primos, algumas conjunturas e ainda tipos de números primos, geralmente, menos vistos com um olhar mais demorado, que possuem características que chamaram e ainda chamam muita atenção.

Num momento seguinte, vemos trabalhos sobre números primos de três impressionantes matemáticos: Fibonacci (1170 -1250), Gauss (1777-1855) e Euler (1707-1783).

Com sentimento de final de sessão e de que a matemática está em tudo, vemos os números primos na probabilidade, na criptografia e na natureza. Encerrando a pesquisa, apresenta-se a Metodologia e as Considerações Finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Antes de expormos sobre os números primos, faz-se necessário, para entendermos melhor os conceitos, contar um pouco de história da Matemática de como surgiram os números e também dos sistemas de base, que serão vistos nas duas primeiras sessões.

Na terceira sessão são apresentados os números primos, caracterizando-os como os átomos da Matemática e vários números primos especiais. Na sessão quatro, são mostrados os estudos de três grandes matemáticos sobre números primos e na última sessão alguns lugares que são contemplados com os números primos.

2.1 Necessidade de Contar e o Surgimento dos Números

A necessidade de contar surgiu há muito tempo e não podemos definir com precisão quando realmente o homem passou a fazer uso da contagem. Até mesmo hoje, muitas tribos da África e da América não possuem o real sentido da palavra número.

A necessidade da contagem ficou clara, com algumas situações utilitárias, que foram vivenciadas pelos homens há muitos anos. Contar rebanhos de cabras, estocar alimentos, iniciar alguma festividade ou mesmo de uma guerra, todos esses foram exemplos importantes do processo de criação dos números.

Outro exemplo importante foi a troca de mercadorias e utensílios que, sem dúvida, foi significante para a criação não somente dos números, mas também para o desenvolvimento do comercio.

Ainda sobre o processo de contagem, estudos revelam que algumas espécies de animais parecem identificar certa quantidade de objetos, o que não implica que possuem a capacidade de contar.

De acordo com Ifrah (1994, p. 44): “pelo que sabemos, a contagem é com feito um atributo exclusivamente humano: diz respeito a um fenômeno mental complicado, intimamente ligado ao desenvolvimento da inteligência.”

Sem dúvida, o processo da criação de contagem foi importante e somente o ser humano pode criar tal artifício em seu benefício, mas o homem enfrentou grandes dificuldades para chegarmos a um processo que conhecemos hoje.

No início, o homem usava o modelo de equiparação, ou seja, ele fazia uma correspondência de um conjunto inicial a outro conjunto. Ao tentar contar animais, por exemplo, muitas vezes, ele fazia uma correspondência com números de pedrinhas, pérolas, conchas e até mesmo dentes de outros animais e, desse jeito, ele iniciou de certa forma, ainda que de uma maneira primitiva, o princípio de contar.

Outra maneira de contar que também fazia uso de correspondência era comparar determinados números de objetos a determinadas partes do corpo humano.

Tocava-se uma parte do corpo para representar uma unidade de algum objeto, por exemplo, e a partir disso continuava o processo para outra parte do corpo e se repetia, várias vezes, ainda que não se pudesse fazer uso de um processo mais avançado, mas a ordem estabelecida nos fornece uma ideia de uma série Aritmética.

Vale salientar que a memorização foi muito desenvolvida neste processo, mas ainda sim estes homens desconheciam ainda uma maneira de contagem mais abrangente, sendo por isso uma forma ainda limitada de contar.

Aos poucos, o homem evolui e o processo de contagem foi se tornando pela repetição de eventos mais abstrato, o homem começou a ter alguma consciência do que fazia.

Segundo Ifrah (1994, p. 45) relata:

> São necessárias três condições psicológicas para que um homem saiba contar e conceber os números no sentido em que entendemos:
>
> - ele deve ser capaz de atribuir um lugar a cada ser que passar diante dele;
> - ele deve ser capaz de intervir para introduzir na unidade que passa a lembrança de todas as que a precederam;
> - ele deve saber conceber esta secessão simultaneamente.

Ainda Ifrah (1994, p. 45) expõe: “Para permitir um progresso decisivo na arte do cálculo abstrato, a compreensão dos números exige então sua “classificação” em um sistema de unidades numéricas hierarquizadas que se encaixam umas nas outras”.

Fica então evidente que o processo de contar é um processo que se desenvolveu com o passar dos séculos e exigiu uma maior normalização. Esses processos serão descritos a seguir com os sistemas numéricos.

2.2 Sistemas Numéricos

Com o passar do tempo, os homens empregaram sons para os números e a partir disso houve uma sistematização para esses números falados, principalmente quando o processo de contagem se tornou mais extenso no qual foi necessário unificar esse processo.

Já foi salientada a importância dos dedos das mãos para a contagem. Sem dúvida, os dedos foram e são até hoje integrantes de contas que nós mesmos fazemos quando crianças ou mesmo quando adultos.

Há muitos anos, por exemplo, para se representar os números, usavam-se os dedos para designar os números conhecidos de cada época. No início, eram usados para representar símbolos escritos primitivos.

Muitas vezes, levantava-se os dedos para indicar esses números. A palavra dígito, por exemplo, significa dedo e até hoje é bastante usado o conceito de digital ou dígito no mundo moderno.

Os números que conhecemos hoje, de 1 a 9, conhecidos como algarismos indo-arábicos, eram representados pelos dedos o que indica que esses números possuem a mesma origem, mas depois os dedos também foram usados também para abranger números mais elevados.

Os números de 1 a 90 foram representados na mão esquerda, enquanto números como 100, 200, ..., 900 e 1000 eram representados na mão direita. Ainda hoje, algumas tribos da África utilizam os dedos para designar os números que conhecemos.

Entretanto, os números digitais barraram em um grande problema, o uso de cálculos. Até era possível fazer uso de cálculos e algumas culturas conseguiram fazer uso do cálculo com os dedos, mas era um processo difícil e seguia muitos passos de difícil memorização.

Realizar operações como adição tornou os números digitais inviáveis. Mais tarde várias maneiras de se escrever os números foram inventadas e, com isso, surgiram vários sistemas de numeração escrito.

2.2.1 Base dois

O sistema de base dois ou sistema binário utiliza-se apenas dois algarismos, 0 e 1, para representar qualquer número. Os números primos são importantes para os computadores e outros aparatos tecnológicos porque, segundo Mendes (2017, p. 45) afirma: "Os números binários [...] são utilizados como representação de número (sequências de 0s e 1s) em codificações de imagens, de sons, de caracteres, de figuras, de qualquer outro tipo de informação."

O mesmo autor relata: "Isso ocorre porque qualquer artefato tecnológico digital, o computador, por exemplo, é composto por uma série de interruptores elétricos com duas posições (MENDES, 2017 p. 56)". Ou seja, a base numérica que faz funcionar os meios tecnológicos é a base binária. Daí o seu importante papel na atualidade.

2.2.2 Base cinco

Algumas civilizações desenvolveram um sistema cuja base era cinco. Esse fato deve-se que eles aprenderam a contar em uma das mãos e a prolongar a série tendo como referência a outra mão.

Segundo Eves (2004, p. 27) foi o primeiro a ser largamente usado, e que algumas tribos sul-americanas ainda hoje contam com as mãos: "um, dois, três, quatro, mão, mão e um" e assim por diante.

Ou seja, esse sistema quinário, de base 5, tem a relevância de ter sido o pioneiro a ser difundido em larga escala pelo mundo. Muito provavelmente, porque é o número de dedos de uma mão e é muito fácil olhar para a mão e ver que possui cinco dedos.

2.2.3 Base dez

No sistema de base dez, também conhecido como sistema decimal, os nove primeiros números são a unidade e o zero constitui a base do sistema. Contamos de 1 a 9, e para expressarmos o dez, acrescentamos o zero, em seguida agrupam-se as unidades por feixes de dez, quando o número das dezenas é superior ou igual a dez, novamente são agrupados em feixes de dez obtendo-se as centenas. Do mesmo modo criaram-se os milhares, os milhões, os bilhões e etc.

Mas porque o sistema decimal é tão importante? Primeiramente, o hábito de contar através das dezenas, é um hábito bem antigo e está marcado no curso da história. Outro fato, é que os símbolos são simples, o que torna a memorização fácil.

Outra vantagem da base dez é que para exprimir um determinado número fazemos sua representação com certa quantidade de algarismos, enquanto que se o mesmo número fosse representado em uma base menor, como dois ou quatro, teríamos uma quantidade de algarismos bem maior para exprimir esse mesmo número. Por isso, com tantas vantagens, a base dez foi adotada em muitas partes do mundo atual, sendo que sua origem vem de muitos anos e passado através de muitas culturas.

2.2.4 Base doze

Outra base que é muita usada e muita difundida é a base duodecimal, base doze. Ainda hoje, quando vamos ao supermercado compramos dúzias de bananas ou ovos, essa prática de empregarmos o doze foi utilizada por antigos comerciantes.

A vantagem da base duodecimal para a base decimal e que na base doze emprega mais divisores (2,3,4,6) enquanto que a base dez só emprega (0,5).

2.2.5 Base sessenta

Certos povos como os sumérios usaram a base sexagesimal e até hoje essa base também guarda suas influencias nos nossos dias. A hora, o minuto, as medições de arcos, na Astronomia e em muitos outros casos temos o sessenta presente.

A escolha dessa base mais elevada, que as demais, ainda é uma dúvida para os historiadores. Culturas diferentes se “chocaram” e nessa fusão poderia ter dado início a base sexagesimal. Alguns estudiosos afirmam também que poderia ter sido da fusão da base doze com a base cinco.

Claro que são hipóteses em que o homem trabalha e não podemos ter a certeza de que a base sessenta surgiu com precisão de fusão de outras duas bases.

2.3 Números Especiais

Essa parte do trabalho contém a cereja do bolo. Trata propriamente dos números primos e de seu imenso *glamour* para a ciência das ciências. Já iniciamos com os números primos, como os átomos da Matemática, pois através desses números todos os outros são formados.

Depois veremos a diferença entre conjectura e teorema, partindo em seguida para congruência. Logo depois, os números Perfeitos, os números de Mersenne, a Conjectura de Goldbach, os números Palindrômicos e os números Gêmeos, que traz uma conjectura dos números Gêmeos.

2.3.1Números Primos: os átomos da matemática

Números primos são os números que tem apenas dois divisores no conjunto dos números naturais o 1 e ele mesmo o número que tem 4 divisores (no caso do conjunto dos números inteiros). O primeiro número primo é o 2 e também é o único número primo par; 3,5,7,11,13,17,19,23,29 são os próximos números primos. E por que eles são importantes?

Em Crilly (2017, p.37) pode-se perceber que:

> O estudo de números primos nos leva de volta ao mais básico do básico. Os números primos são importantes por serem os “átomos” da matemática. Do mesmo modo que os elementos básicos dos quais todos os outros compostos químicos são derivados, pode-se construir a partir dos números primos para criar compostos matemáticos.

Ao mesmo tempo em que são os mais simples números os “problemas” e/ou conjecturas atrelados aos números primos são bastantes complexos e abrangentes. Além de serem considerados os átomos da matemática, são importantes para a construção de outros números (“compostos matemáticos”).

Ainda em Crilly (2017, p. 36 e 37) tem-se que:

> O resultado matemático que consolida isso tudo tem o nome grandioso de “teorema de decomposição de número primo”. Isso diz que qualquer número inteiro maior que 1 pode ser escrito multiplicando-se exatamente números primos de um jeito específico. Vimos que 12=2x2x3 e que não há outra maneira de fazer isso com componentes primos. Isso é frequentemente escrito na notação de potência $12=2^2x3$.

A magnitude dos números primos já era conhecida de fato com os gregos. Euclides provou, em seu livro “Os Elementos”, que os primos nunca deixariam de existir. O fato de todo número composto ser formado pela multiplicação única de números primos também era conhecido pelos gregos.

Em Du Sautoy (2013, p.13)

> 2,3,5,7,11,13 [,..]. Esses são os primos, os números indivisíveis que são os blocos de construção de todos os outros números o hidrogênio e o oxigênio no mundo da matemática. Esses são protagonistas no coração da história dos números são como joias afixadas ao longo da fileira infinita dos números.

O fato de todos os números serem formado pela multiplicação de maneira única por números primos e a ordem com que os números primos aparecem faz desses números motivo de estudos durante muito tempo.

Outros problemas relacionados aos números primos como: a infinidade de primos gêmeos, fórmulas que gerem números primos e a conjectura de Goldbach permanecem até hoje sem respostas e muitos matemáticos dedicam seu tempo a entrarem no rol da fama do mundo acadêmico.

2.3.2 Conjecturas e Teoremas qual a diferença?

Alguns matemáticos ficaram famosos por tentarem criar fórmulas para gerarem números primos. Gauss, Fermat, Mersene, Euler, entre tantos outros matemáticos que contribuíram com estudos sobre números primos.

Em Coutinho (2005, p. 15)

> Teorema: A palavra vem do grego e originalmente significa “espetáculo ou festa”. O sentido moderno de ‘proposição a ser

> demonstrada” é atestado a partir do Elementos de Euclides. O enunciado de um teorema é constituído de duas partes, as hipóteses e a tese. As hipóteses descrevem aquilo que estamos supondo verdade; a tese é a conclusão do teorema.

Teoremas são importantes para demonstrações e desenvolvimentos de teorias da matemática. Os antigos gregos já demonstravam entender a sua importância em dar o nome de “espetáculo”, e elevaram a matemática a um outro nível de ciência de um modo geral. A seguir o tópico sobre congruência conteúdo de extrema importância ao desenvolvimento dos números primos.

2.3.3 Congruência

Definição: Seja **n** um (número) natural maior que 1. Dados dois números inteiros **a** e **b**, diz-se que a|b (mod n) quando, n a-b. Logo **a** é congruente a **b** modulo **n**

Note que para n=1 a afirmação também é verificada. Neste caso, todos os números inteiros são congruentes entre si.

Teorema: Dados dois números inteiros a, b são congruentes a (mod n) se e apenas se, a divisão de cada um deles por n tem o mesmo resto.

Dem.: Pondo a= dn+r e b= qn+s com 0_ r, s <n, se n |a-b então n | (r −s); como |r − s| < n terá de ser r − s = 0.

(Propriedades fundamentais das Congruências)

i) a□ a mod n

ii) Se a □ b mod n, então b □a mod n.

iii) Se a□ b mod n e b □c mod n, então a□ c mod n.

iv) Se a □b mod n e c □d mod n, então

a + c □b + d e a.c □b.d mod n.

O estudo de congruência é base para estudos avançados de Teoria dos Números que hoje está atrelado a outras ciências em desenvolvimento. A seguir a definição de outros números de importância na matemática devida as suas características únicas.

2.3.4Números Perfeitos

Um número é dito perfeito quando a soma de seus próprios divisores resulta nele mesmo. Divisores próprios de um número são todos os divisores positivos desses números excluindo o seu próprio divisor, no caso ele mesmo. Vejamos exemplos de números perfeitos:

O número 6 tem os seguintes divisores (1,2,3) e somando esses números obtemos 6; O número 28 tem como divisores o 1, 2, 4, 7 e 14, em que a soma resulta no próprio 28.

Os gregos da antiguidade ficaram fascinados com esses números, daí o nome números perfeitos. Um fato curioso é que todos os números perfeitos conhecidos são pares, hoje não se sabe da existência de um número perfeito ímpar.

No IX livro de Euclides ele prova que se $2^n - 1$ é um número primo então $2^{n-1} * (2^n - 1)$ é um número perfeito par. Mais tarde, Euler provou que todo número perfeito par é dessa forma.

2.3.5 Números de Mersenne

O francês Marin Mersenne (1588-1648) era filósofo, pastor, teólogo e matemático. Foi contemporâneo de Fermat e Decartes. Mersenne cogitou que para 2^n-1 sendo p um número primo 2^n-1,também seria. Posteriormente verificou-se que ele estava errado, pois M11 = 2^{11} – 1 = 2047, que não é primo (2047=23*89).

Figura 1: Marin Mersenne (1588-1648)
Fonte: Sack, Harald. (2020). *Marin Mersene* – Matemática e Harmonia Universal. Berlim: SciHi Blog.

Mesmo não sendo correta a sua conjectura, essa teve importância histórica.

2.3.6 Conjectura de Goldbach

Christian Goldbach (1690 - 1764) estudou Matemática, Medicina e leis no geral.

Figura 2: Christian Goldbach (1690 - 1764)
Fonte: Matos, Fábio (2018). *Mistério que intriga a mente dos matemáticos há 276 anos*. São Paulo: Matemática & Afins. Disponível em: https://matematicaeafins.com.br/blog/2018/05/24/misterio-que-intriga-a-mente-dos-matematicos-ha-276-anos/. Consultado em: 19 jul. 2020.

Em Stewart (2014, p. 44) “O matemático amador alemão Christian Goldbach correspondia-se com muitas das mais ilustres figuras de seu tempo. Em 1742, afirmou uma série de conjecturas curiosas a respeito dos números primos em uma carta a Leonhard Euler”. Os historiadores mais tarde notaram que René Descartes dissera muita coisa parecida alguns anos antes.

A primeira das afirmações de Goldbach era: “todo inteiro que possa ser inscrito como a soma de dois primos, pode ser também escrito como a soma de quantos primos se queira, até todos os termos serem unidades (Stewart, 2014, p. 44)”

Em sua resposta, Euler recorda uma conversa anterior com Goldbach, quando este assinalou que sua primeira conjectura seguia-se de outra mais simples, sua terceira conjectura. “Todo inteiro par é a soma de dois primos (Stewart, 2014, p. 44)”

A última a afirmação ficou conhecida como Conjetura de Goldbach, e até hoje ninguém consegui provar a sua afirmação. Alguns matemáticos como; Cantor, Euler e Vinagradof tentaram provar a conjectura sem sucesso.

2.3.7 Números Palindrômicos

Quando temos um número que é lido da mesma forma tanto da esquerda para a direita como na direita para a esquerda em uma determinada base, é dito que esse número é um número palindrômico.

Exemplo de alguns números na base dez.

0, 77,11,5,373,131,555

Além do que já foi dito sobre esses números existem também os números primos palindrômicos, que na verdade nada mais é do que um número que é primo e que também é palindrômico.

Exemplo de primos palindrômicos na base dez.

2,3,5,131,313,919.

Números palindrômicos também conhecidos como capicua são muitos estudados na matemática e comumente são utilizados em provas de olimpíadas como a Obmep (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) e antiga OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática).

2.3.8 Primos Gêmeos

São denominados primos gêmeos, os pares de números primos ímpares consecutivos, ou seja, cuja diferença é igual a 2.

Existe uma Conjectura, em aberto, sobre os números primos Gêmeos, no qual Pantoja (2012, p.68) afirma: “A famosa conjectura dos números primos gêmeos pergunta se existem um número infinitos de pares de primos da forma (p, p + 2), em outras palavras, se existem infinitos números primos cuja diferença é 2”.

Pantoja (2012, p.69) relata que: “Esta conjectura está em aberto, poucos avanços foram dados em busca de sua solução e é um dos temas centrais da moderna teoria analítica dos números”.

Para concluirmos sobre os números Gêmeos Pantoja (2012) expõe que: “Os primeiros pares de primos gêmeos menores do que 250 são (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43),(59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151),(179, 181), (191, 193), (197, 199), (227, 229), (239, 241)”.

Um dos grandes problemas que fascinam os matemáticos sobre o estudo dos números primos é justamente os primos gêmeos. Devido a dificuldade de soluções e/ou provas da conjectura acima descrita esse é um dos problemas que não teve tantos avanços como outras conjecturas nos últimos anos e sem dúvida, os matemáticos que conseguirem trazer uma demonstração a esse problema terá seu nome lembrado no mundo acadêmico.

2.4 Números Primos e Notáveis Matemáticos

Essa é uma parte agradável do trabalho, no qual vemos três estudos de notáveis matemáticos sobre os números primos, ei-los: os primos na sequência de Fibonacci, os Primos Gaussianos e uma Função de Euler para gerar números primos.

2.4.1 Primos na sequência de Fibonacci

Uma das sequências mais importantes na matemática e também uma das mais conhecidas é a sequência de Fibonacci (Leonardo Pisano 1170 -1250)

Figura 3: Leonardo Pisano 1170 -1250 (Fibonacci)
Fonte: Khurana, Chaitanya. (2018). *Números de Fibonacci.* Bhaskar House: Escola Passo a Passo. Disponível em: https://slideplayer.com/slide/12110749/. Consultado em: 20 jul 2020.

Seu primeiro termo é 1 assim como o segundo termo. Os demais termos são originados pela soma de dois termos antecessores.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

Em Stewart (2016, p.117-118) pode-se perceber a explicação da origem da sequência:

> Em 1202, Leonardo de Pisa escreveu um texto aritmético, o Liber Abbaci(Livro de Cálculos), explicando os numerais indo-arábicos 0-9 para uma audiência europeia. A obra incluía uma curiosa pergunta sobre coelhos. Comece com um par de coelhos imaturos. Após um período, cada par imaturo fica maduro, enquanto cada par maduro dá origem a um par imaturo. Os coelhos são imortais. Como cresce a população que passa os períodos? Leonardo mostrou que o número de pares obedece ao seguinte padrão:1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144. No qual cada número após os dois primeiros é a soma dos dois que o procedem.

Ao observar a sequência ela parece muito simples, porém suas aplicações são de grande valia na matemática, pois faz ligação com vários fenômenos da natureza e com a razão áurea. Existe ainda uma outra conexão da sequência de Fibonacci com os números primos.

Em Sautoy (2013, p.55)

> Há uma intrigante conexão entre a sequência de Fibonacci e os protagonista deste capítulo, os primos. Olhemos para os primeiros números de Fibonacci:1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144 [...]. Todo p-ésimo número de Fibonacci, onde p é um número primo é ele próprio primo. Por exemplo, 11 é primo e o 11º número de Fibonacci é 89, também primo. Se isso sempre funcionasse seria um ótimo modo de gerar primos cada vez maiores. Infelizmente não funciona. O 19º número de Fibonacci é 4.181, e embora 19 seja primo, 4,181 não é: vale 37x113. Nenhum matemático até hoje provou se existe uma quantidade infinitamente grande de números de Fibonacci primos. Esse é outro dos muitos mistérios não solucionados dos números primos na matemática.

Essa sequência de Fibonacci é vista em diversas situações de Matemática e na natureza.

2.4.2Primos Gaussianos

O matemático Gauss (Johann Carl Friedrich Gauss 1777-1855) também fez enormes contribuições na matemática, e claro na matemática dos números primos.

Figura 4: Gauss (1777-1855)
Fonte: Almeida, Bárbara de. (2016). *Karl Friedrich Gauss.* Curitiba: UNICENTRO. Disponível em: https://www3.unicentro.br/petfisica/2016/07/12/karl-friedrich-gauss-1777-1855/. Consultado em: 21 jul 2020.

Em Stewart (2014, p. 178):

> Inteiros gaussianos são números complexos a+bi em que a e b são inteiros. O inteiro gaussiano é primo se não pode ser expresso como produto de dois primos para inteiros gaussianos e maneira não trivial. A fatoração em primos para inteiros gaussianos é especial. Alguns primos comuns como 3 e 7 permanece primos quando considerados inteiros gaussianos, mas outros não: por exemplo 5(2+i).(2-i). Isso está intimamente relacionado com o teorema de Fermat sobre primos e somas de dois quadrados, e os inteiros gaussianos iluminam esse teorema e seus parentes.

Importante salientar que os matemáticos se apoiam nos trabalhos de seus antecessores. Para que uma teoria se desenvolva estudos de outros matemáticos são importantes.

Os estudos de Gauss, por exemplo, estão, intimamente, ligados ao teorema de Fermat o que comprova que muitas áreas da matemática podem estar conectadas.

2.4.3 Função de Euler para gerar números primos

Leonhard Euler (1707-1783) teve contribuições em várias áreas. Ele também estudou os números primos.

Figura 5: Leonhard Euler (1707-1783)
Fonte: Fiolhais, Carlos. (2007). *O Gênio de Euler.* São Paulo: De Rerum Natura. Disponível em: http://dererummundi.blogspot.com/2007/10/o-gnio-de-euler.html. Consultado em: 22 jul 2020.

Euler encontrou uma função em seus estudos que gerava números primos:

$F(n)= n^2+ n+41$

Esse polinômio gera números primos para n=1,2,3,4...39, mas para n=40 temos:

$F(40)=40^2+40+41$

$F(40)=40(40+1)+41$

$F(40)=40.41+41$

$F(40)=41(40+1)$

$F(40)=41.41$,um número composto.

Mas, para n=41 esse polinômio era falho em gerar números primo.

Em Rosen (2010, p. 214)

> Talvez não cause surpresa que tal conjectura tende a ser falsa: não temos que ir longe para encontrar um número inteiro positivo n para o qual f(n) é composto, pois $f(41)= 41^2-41+41=41^2$.Como $f(n)=n^2-n+41$ é um número primo para todos os n números inteiros positivos com $1 \leq n \leq 40$, poderíamos estar tentando a encontrar um polinômio diferente com a propriedade de que f(n) é um número primo para todos os n números inteiros positivos. Entretanto não há número inteiro positivo y tal que f(y) é composto
>
> [...]
>
> Muitos problemas famosos sobre números primos ainda esperam por resoluções de pessoas brilhantes.

Fica evidente que encontrar uma fórmula que gere números primos não é somente desafiador, mas é um dos problemas matemáticos mais difíceis de todos os tempos. Até mesmo o brilhante matemático Euler falhou em tal tentativa, mas suas contribuições na matemática são imensuráveis.

2.5 Utilizações e Aparecimento dos Números Primos

Nessa última sessão da Fundamentação Teórica, veremos alguns pontos de aplicações dos números primos em probabilidade, na criptografia e até na natureza. Afinal, a Matemática está em todo lugar.

2.5.1 A infinidade dos números primos e sua probabilidade

Ao fazer uma análise de números primos existem entre 1 e 100, 25 números primos entre números maiores como 401 e 500 apenas 17 primos. Ao observar a contagem entre 901 e 1000 apenas 14. Isso significa que a quantidade de números primos começa a ficar muito pequena ao aumentar os números. De 999901 a 1000000 existem 8 números primos. Todas as contagens acima estão em lista de 100 números, mas eles poderão não existir mais?

Em Derbyshire (2012, p. 51) tem-se que:

> A pergunta surge naturalmente: primos acabam rareando até finalmente não haver nenhum? Se eu continuasse a lista até trilhões de trilhões de trilhões de trilhões, eu acabaria chegando a um ponto além do qual não existem mais primos, de maneira que o último primo, o maior primo?
>
> A resposta para ela foi a descoberta por Euclides por volta de 300 a.C. Não, primos nunca se reduzem a nada. Sempre existem mais. Não existe o maior primo de todos. Por maior que seja um primo que encontraremos, sempre existirá uma maior a ser encontrado. Os primos continuam para sempre.
>
> Demonstração: suponhamos que N seja primo. Fornecemos este número(1x2x3x...N)+1. Este número não pode ser dividido de forma exata por qualquer número de 1 a N- sempre obteremos resto 1. Logo, ou ele não possui fator próprio- e, portanto, é algum número maior que N. Já que o menor fator próprio de qualquer número está fadado a ser primo – se não fosse, poderia ser fatorado em algo menor-, isto demonstra o resultado.

O mais surpreendente é que esse fato que os números primos nunca terão um fim já era conhecido pelos gregos a centenas de anos atrás e até os dias atuais esses mesmos conhecimentos são repassados de gerações a gerações.

2.5.2 O Teorema Chinês do Resto

Encontramos em Santos (2012) o Teorema do Resto Chinês:

Se $(a_i, m_j) = 1$, $(m_i, m_j) = 1$ para $i \neq j$ e c_i inteiro, então o sistema:

$a_1x \equiv c_1 \bmod m_1$
$a_2x \equiv c_2 \bmod m_2$
$\vdots$
$a_rx \equiv c_r \bmod m_r$

Possui solução e a solução é única módulo m, onde $m = m_1m_2...m_r$.

Uma aplicação do Teorema Chinês do Resto é na Criptografia RSA, que será vista em detalhes no tópico seguinte “Aplicação dos números primos”.

2.5.3 Aplicações dos números primos

Uma aplicação de números primos no mundo moderno está ligada a segurança. Isso mesmo a segurança de dados como: senhas de bancos e cartões de crédito.

Uma pessoa que faz uma compra online precisa colocar os dados do cartão de crédito, porém para que isso aconteça, além do próprio desenvolvimento da Internet precisou-se dar segurança a quem utiliza compras online[7].

O que aconteceria se outras pessoas tivessem acesso a seus dados bancários? Provavelmente esse tipo de comercio passaria a não existir com o tempo. Porém, não só a Internet se desenvolveu junto a ela a Criptografia do grego, *cryptos* significa mensagem, oculto também se desenvolveu.

No final do anos 70 e início dos anos 80, criaram um tipo de criptografia chamada RSA (Rivest, Shamir, Adleman) que na época trabalhavam no MIT (*Massachussets Institute of Technology*).

A criptografia RSA é um tipo de criptografia de mão única e que possibilitou a ascensão de transações comerciais no mundo moderno. A chave para a criação de um sistema inovador na época estava com os números primos.

Em Coutinho (2005, p.04)

> Para poder implementar o RSA precisamos de dois parâmetros básicos: dois números primos que vamos chamar de p e q. Para codificar uma mensagem usando o RSA é suficiente conhecer o produto de dois primos, que vamos chamar de n. Para decodificar uma mensagem precisamos dos primos p e q. A chave de codificação do RSA é, portanto, constituída essencialmente pelo número n=pxq. Cada usuário do método tem sua própria chave de codificação. Esta chave é tornada pública: todos ficam sabendo que para mandar uma mensagem para o banco Acme, deve ser usada a chave n. Por isso n também é conhecido como a chave pública. Já a chave de decodificação é constituída pelos primos p e q. Cada usuário tem que manter sua chave de decodificação secreta ou a segurança do método estará comprometida.

A aplicação dos números primos é de grande importância não no desenvolvimento, mas também na criptografia.

Em Singh (2011, p.303):

---

[7]Online: De modo a estar numa conexão ou na internet no exato momento em que acessa. (DICIO-Dicionário Online de Português)

> É concebível que daqui a uma década, ou mesmo amanhã alguém possa descobrir um método para a fatoração rápida e aí a RSA se tornará inútil. Contudo, por dois mil anos os matemáticos tem tentado e fracassado em encontrar um atalho, e, por enquanto a fatoração continua sendo um cálculo muito trabalhoso. A maioria dos matemáticos acredita que a fatoração é uma tarefa inerentemente difícil e que existe alguma lei matemática que proíba a existência de qualquer atalho. Vamos presumir que eles estejam certos: deste modo, a RSA estará segura durante o futuro previsível.

A segurança da internet depende então da união da criptografia com a matemática. Duas ciências que surgiram há séculos atrás e que até os dias atuais são muito importantes para nós. O futuro então depende dos números.

De acordo com Lemos (2010, p. 77) “A tendência, com o passar dos anos para garantir segurança, é o aumento no tamanho das chaves, isto é, a escolha de primos p e q maiores, já que novos e melhores algoritmos de fatoração surgem.”

Hoje a escolha de números primos é de grandíssima magnitude. Os números primos escolhidos têm dezenas de dígitos e com o passar do tempo a escolha desses primos passa a ser cada vez com mais dígitos.

Em Sautoy (2013, p.122) contata-se que:

> Em questões mais domesticas, Kloblitz se ressente das restrições que a NSA, agência de Segurança Nacional dos Estados Unidos, mantém sobre essa área da matemática. Atualmente, é necessário obter autorização da NSA para poder publicar certos trabalhos sobre teoria dos números, mesmo em jornais matemáticos mais desconhecidos. Graças às novas ideias de Kloblitz, as curvas elípticas se juntaram aos primos na “lista restrita” de pesquisas que o governo deseja monitorar.

Hoje o estudo de curvas elípticas se juntou aos números primos no auxílio da criptografia.

2.5.4 Os números primos além da Matemática

Existe ainda relações de números primos além da matemática. Em Du Sautoy (2013, p. 18 e 19) é possível perceber que:

> Nas florestas da América do Norte há uma espécie de cigarra com um ciclo de vida estranho. Por 17 anos elas es escondem sob a terra fazendo muito pouco, exceto sugar as raízes das árvores.
>
> [...]
>
> Para um matemático a característica mais curiosa é a escolha do número -17 um número primo. Será apenas coincidência que as cigarras tenham escolhido passar um número primo de anos e escondendo-se debaixo da terra? Parece que não. Existem outras espécies de cigarra que ficam sob o chão por 13 anos, e umas poucas que preferem ficar por 7 anos. Todos números primos. De forma bem impressionante, se uma cigarra de 17 anos de fato aparecer cedo demais, isso não ocorre um ano antes, e sim geralmente quatro anos, aparentemente trocando o período para um ciclo de 13 anos. Realmente, parece haver algo relativo a números primos ajudando essas várias espécies de cigarra. Mas o que é?

> [...]
>
> A melhor teoria até hoje para o ciclo vital de números primos das cigarras é a possível existência de um predador que também costumava aparecer periodicamente na floresta, sincronizando sua chegada de modo a coincidir com a das cigarras, e aí se banqueteando com os recém-surgidos insetos. É aí que entra a seleção natural, porque as cigarras que regulam suas vidas num ciclo de número primo irão deparar com predadores com muito menos frequência que as cigarras de ciclo de número não primo.

Vejamos abaixo uma imagem que retrata bem o que estamos discutindo:

Figura 6: Outros exemplos de ciclo das cigarras em números primos.
Fonte: Cassim, Eduardo. (2017). *Por que uma espécie americana de cigarra gosta do número primo 17?* São Paulo: Escola Tiradentes. Disponível em: http://matematicaescolatiradentes.blogspot.com/2017/02/. Consultado em: 22 jul 2020.

Ao que parece a seleção natural "utiliza" a matemática dos números primos e a natureza se desenvolve com padrões matemáticos. Outros exemplos notáveis desses padrões ocorrem com a razão áurea, a simetria, e na geometria.

Holanda Filho, Cruz e Gomes (2018, p.18) afirmam:

> A ideia de que todo número maior que um não primo, pode ser escrito como um produto de números primos é um dos teoremas mais importantes da matemática e é conhecido como teorema fundamental da aritmética.
>
> Muitos estudiosos se dedicaram aos estudos sobre números primos e desenvolveram uma área importante da matemática a teoria dos números.
>
> Ao longo dos anos muitas descobertas foram feitas e outras até os dias de hoje continuam em aberto fazendo com que muitos estudiosos do mundo todo continuem seus estudos e façam novas descobertas.
>
> Aproximadamente, na década 70 os números primos passaram a ter uma maior importância não só na matemática pura, mas também na

> computação. O estudo dos números primos serviu de base para os algoritmos de criptografia de chaves públicas. Muitos prêmios foram oferecidos a pessoas ou empresas que tentassem gerar números primos grandiosos como 10 bilhões de dígitos 100bilhões de dígitos entre outros. O que comoveu os grandes estudiosos e pessoas da área.

As ciências caminham em alguns momentos a passos curtos é verdade, mas pode-se perceber que o desenvolvimento de uma “área” pode contribuir a outras ciências e algumas vezes não parecer tem qualquer relação. Então maiores investimentos em pesquisas podem trazer grandes contribuições.

3 METODOLOGIA

A metodologia utilizada nesse trabalho foi à pesquisa bibliográfica, tendo como fonte de pesquisa artigos, livros, sites e revistas da temática. O levantamento de dados se deu principalmente por: artigos científicos e livros.

Em Espírito Santo, (1992, p.103) pode-se perceber que:

> O uso de referência bibliográfica se assenta no caráter cumulativo da ciência. Acredita-se que todos os trabalhos contribuem para o conteúdo do trabalho que os citou. Tal contribuição é feita em diferentes níveis a diferentes trabalhos. O uso de referências bibliográficas é afetado por muitos fatores, além da contribuição real da referência. Um importante fator é a disponibilidade ou acessibilidade da fonte: países com elevado controle bibliográfico propiciam maior volume de disseminação. Outro fato é a habilidade linguística do pesquisador não poliglotas tem menor acesso às referências bibliográficas.

Uma pesquisa bibliográfica que, segundo Gil (2002, p.44), “é desenvolvida mediante material já elaborado, principalmente livros e artigos científicos [...] há pesquisas exclusivamente desenvolvidas por meio de fontes bibliográficas”.

Antes de concluir a metodologia destaque, pelo menos 3 autores com os respectivos anos das obras que fundamentaram esta pesquisa.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A importância dos números primos se dá tanto na matemática como fora dela. Os números primos são os blocos (a base) que fazem parte para a criação de outros números (os compostos).

Ao longo do trabalho foram vistos vários conceitos, definições, conjecturas, teoremas, aplicações, curiosidades e diversos pontos que foram feitos sobre os ombros de gigantes, de pessoas que dedicaram e contribuíram muito para que os números primos sejam esses números tão misteriosos e mágicos. Além de serem os átomos da Matemática, que formam todos os demais números, os compostos.

Enfim, o trabalho obteve o êxito almejado de decompor o estudo de milhares de anos sobre os números primos em poucas páginas, de tratar de um assunto tão extenso e com base em pesquisas bibliográficas, podemos ter o nosso olhar crítico e mostrar uma parte desse fantástico segredo, que ainda tem muito a ser desvendado pelos homens.

Esse trabalho pode ser complementado com pontos que não foram abordados nessa pesquisa. Há um mundo de possibilidades com os números primos. Qualquer complementação através de outros trabalhos é bem vinda e qualquer contribuição, para isso, é válida.

REFERÊNCIAS

Almeida, Bárbara de. (2016). *Karl Friedrich Gauss.* Curitiba: UNICENTRO. Disponível em: https://www3.unicentro.br/petfisica/2016/07/12/karl-friedrich-gauss-1777-1855/. Consultado em: 21 jul 2020.

Cassim, Eduardo. (2017). *Por que uma espécie americana de cigarra gosta do número primo 17?* São Paulo: Escola Tiradentes. Disponível em: http://matematicaescolatiradentes.blogspot.com/2017/02/. Consultado em: 22 jul 2020.

Coutinho, S.C. (2005). *Números Inteiros e Criptografia RSA*. Rio de Janeiro: IMPA.

Crilly, Tony. (2017). *50 ideias de Matemática que você precisa conhecer.* Tradução Helena Londres. 1a. Ed. São Paulo: Planeta.

Derbyshire, John. (2012). *Obsessão Prima. Bernhard Riemann e o maior problema não resolvido da matemática.* Tradução Jesus de Paula Assis. Rio de Janeiro: Record.

DICIO. (2020). *Dicionário On Line*. São Paulo: DICIO.

Du Sautoy, Marcus. (2007). *A Música dos números primos:* a história de um problema não resolvido na matemática. Tradução Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Du Sautoy, Marcus. (2013). *Os mistérios dos números:* os grandes enigmas da matemática (que até hoje ninguém foi capaz de resolver); Tradução George Schlesinger. Rio de Janeiro. Zahar.

Espiríto Santo, Alexandre do. (1992). *Delineamentos de metodologia Científica.* São Paulo: Editora Loyola.

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática.* Campinas – São Paulo: Editora Unicamp.

Gil, Antonio Carlos. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa.* 4. ed. São Paulo: Atlas.

Fiolhais, Carlos. (2007). *O Gênio de Euler.* São Paulo: De Rerum Natura. Disponível em: http://dererummundi.blogspot.com/2007/10/o-gnio-de-euler.html. Consultado em: 22 jul 2020.

Holanda Filho, Ivan De Oliveira; Cruz, Marcos Paulo Mesquita Da; Gomes, Rickardo Léo Ramos. (2018). A relação científica entre criptografia e números primos. *Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo.* Universidad de Malága, Maio. ISSN: 1989-4155.

Ifrah, Georges. (1994). *Os números:* A história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Editora Globo.

Khurana, Chaitanya. (2018). *Números de Fibonacci.* Bhaskar House: Escola Passo a Passo. Disponível em: https://slideplayer.com/slide/12110749/. Consultado em: 20 jul 2020.

Lemos, Manoel. (2010). *Criptografia, Número Primos e Algoritmos.* Recife: Universidade Federal de Pernambuco. Distribuição IMPA.

Matos, Fábio (2018). *Mistério que intriga a mente dos matemáticos há 276 anos*. São Paulo: Matemática & Afins. Disponível em: https://matematicaeafins.com.br/blog/2018/05/24/misterio-que-intriga-a-mente-dos-matematicos-ha-276-anos/. Consultado em: 19 jul. 2020.

Mendes, Herman do Lago. (2017). Os Números Binários: do Saber Escolar ao Saber Científico. *JIEEM*: v.10, n.1, p.41-49. Disponível em <http://revista.pgsskroton.com.br/index.php/jieem/article/ view/4276/3623>. Acesso em: 18 jul. 2020. ISSN 2176-5634.

Michael, Sean. (2016). *Criptografia Essencial:* A Jornada do Criptógrafo.1 ed. Rio de Janeiro: Editora Elsevier.

Sack, Harald. (2020). *Marin Mersene* – Matemática e Harmonia Universal. Berlim: SciHi Blog.

Pantoja, Pedro. (2012). Primos Gêmeos e outras Conjecturas. *Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática*, n. 45, p. 1-11. ISSN 1695-677X (Online).

Rosen, Kenneth H. (2010). *Matemática Discreta e suas aplicações.* Tradução técnica: Helena Castro João Guilherme Giudice. 6a.ed. Dados eletrônicos. Porto Alegre: AMGH.

Santos, José Plínio de Oliveira. (2012). *Introdução à teoria dos números.* 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA.

Singh, Simon. (2011). *O livro dos códigos.* Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record.

Stewart, Ian. (2014). *Em busca do Infinito uma história da matemática dos primeiros números a teoria do caos.* Tradução Geoge Schlesinger. 1a.ed. Rio de Janeiro: Zahar.

Stewart, Ian. (2014). *Os maiores problemas matemáticos de todos os tempos.* Tradução Geoge Schlesinger. 1a.ed. Rio de Janeiro: Zahar.

Stewart, Ian. (2016). *O Fantástico Mundo Dos Números:* a matemática do zero ao infinito. Tradução Geoge Schlesinger. 1.ed. Rio de Janeiro: Zahar.