ATLANTE
Cuadernos de Educación y Desarrollo
(2º Época)

GEOMETRIA PLANA APLICADA AO ENSINO ESCOLAR

Thomas Sousa Dos Santos[1]

Prof. M. Sc. Rickardo Léo Ramos Gomes[2]

Thomas Sousa Dos Santos y Rickardo Léo Ramos Gomes (2020): "Geometria plana aplicada ao ensino escolar", Revista Atlante Cuadernos de Educación y Desarrollo, ISSN: 1989-4155 (septiembre 2020). En línea: https://www.eumed.net/rev/atlante/2020/09/geometria-plana.html

RESUMO

O cotidiano da escola remete ao desenvolvimento do pensamento lógico-espacial, assim, este trabalho foi desenvolvido com o intuito de estruturar o conhecimento básico relacionado a geometria euclidiana plana aplicado a vida escolar através de uma linguagem simplificada, deste modo, axiomas foram detalhados por extenso onde o leitor possa relembrar dos seus anos escolares e por consequência lembrar do conteúdo, visando assim, ter alicerce para avançar em diversas nomenclaturas e conceitos. Sabendo disso, como todo grande escrito faz, os primeiros capítulos versam dizeres de conceitos básicos da geometria plana, como ponto, reta, contando com suas partes conhecidas como semirreta e segmento de reta, e ângulos, contudo há evolução, do mesmo modo que há a mesma na vida escolar, e conceitos de polígonos e trigonometria, destacando nos polígonos a sua criação, e suas características, e na trigonometria a análise de seno, cosseno e tangente de diversos modos, sendo incluso o gráfico, e também as relações métricas no triângulo retângulo.

Palavras-chave: Geometria. Trigonometria. Ângulos. Escola.

GEOMETRÍA PLANA APLICADA A LA VIDA ESCOLAR

RESUMEN

La vida cotidiana de la escuela se refiere al desarrollo del pensamiento lógico-espacial, por ello, este trabajo fue desarrollado con la intención de estructurar los conocimientos básicos relacionados con la geometría plana euclidiana aplicada a la vida escolar a través de un lenguaje simplificado, de esta manera se detallaron los axiomas en su totalidad. donde el lector pueda recordar sus años escolares y consecuentemente recordar el contenido, buscando así tener una base para avanzar en diversas nomenclaturas y conceptos. Sabiendo esto, como todo gran escrito, los primeros capítulos tratan

---

[1]

[2] Professor da Disciplina de Metodologia do Trabalho Científico (Orientador) – Centro Universitário UNIATENEU; Instituto Euvaldo Lodi (IEL); Centro Universitário Farias Brito (FBUNI); M. Sc. em Fitotecnia pela Universidade Federal do Ceará – UFC (Amparo Legal - Conselho Federal de Educação processo nº 1035/79; Parecer favorável, de nº 1213/80; Processo no MEC nº 241.674); Spec. em Metodologia do Ensino de Ciências pela Universidade Estadual do Ceará – UECE (Amparo Legal – Resolução Nº 433/91 do Cons. de Ens. Pesq. e Ext. da UECE); Graduado em Agronomia pela Universidade Federal do Ceará – UFC (Amparo Legal – Lei 1055/1950); Licenciado nas disciplinas da Área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias pela Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA (Amparo Legal – Conselho de Educação do Ceará Pareceres: Nº 0994/98 e Nº 0039/2005); Curso Livre de Aperfeiçoamento Doutorado (Tít. Cult.) em Ciências Biológicas pela FICL (Amparo Legal - Título Cultural: C.F. Arts. 205 e 206; Lei N° 9394/96 Art. 3º inciso II; Art. 42°; Art. 43° incisos I, III, IV e V); Curso Livre de Aperfeiçoamento Especialização (Tít. Cult.) em Paleontologia Internacional pela Faculdade Internacional de Cursos Livres – FICL (Amparo Legal - Título Cultural: C.F. Arts. 205 e 206; Lei N° 9394/96 Art. 3º inciso II; Art. 42°; Art. 43° incisos I, III, IV e V); Consultor Internacional do BIRD para Laboratórios Científicos. Conveniado com a Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT (Comitês 093 e 130). Fundador da RLRG Consultoria Científica.

Recibido: 04/09/20 Corregido: 10/10/20 Publicado: 16/10/20

sobre dichos de conceptos básicos de geometría plana, como punto, línea, con sus partes conocidas como semirrecta y segmento de línea, y ángulos, sin embargo hay evolución, así como hay lo mismo en la vida escolar, y conceptos de polígonos y trigonometría, destacando en sus polígonos su creación, y sus características, y en trigonometría el análisis de seno, coseno y tangente de diferentes formas, incluyendo el gráfico, y también las relaciones métricas en el triángulo rectángulo.

Palabras clave: geometría. Trigonometría. Anglos. Colegio.

FLAT GEOMETRY APPLIED TO SCHOOL LIFE

ABSTRACT

The daily life of the school refers to the development of logical-spatial thinking, thus, this work was developed with the aim of structuring the basic knowledge related to flat Euclidean geometry applied to school life through a simplified language, in this way, axioms were detailed in full where the reader can remember his school years and consequently remember the content, thus aiming to have a foundation to advance in various nomenclatures and concepts. Knowing this, as every great writing does, the first chapters deal with sayings of basic concepts of plane geometry, such as point, line, with its parts known as semi-straight and line segment, and angles, however there is evolution, just as there is the same in school life, and concepts of polygons and trigonometry, highlighting in their polygons their creation, and their characteristics, and in trigonometry the analysis of sine, cosine and tangent in different ways, including the graph, and also the metric relations in the right triangle.

Subject Descriptor (JEL): C. Mathematical and Quantitative Methods – C2 Mathematical Methods.

Keywords: Geometry. Trigonometry. Angles. School.

1 INTRODUÇÃO

O estudo de matemática escolar é subdividido em três grandes áreas: a aritmética, a álgebra e a geometria, a preocupação da primeira é estudar os números e suas propriedades juntamente com as operações entre eles, já a segunda tem como foco o estudo das variáveis, estas observadas em polinômios e equações, e por fim, a terceira visa o estudo do espaço, tamanho, posições e formas. Este escrito tem como objetivo geral apresentar a geometria plana em sala de aula, deste modo, será apresentado os diversos conceitos que fazem parte do conteúdo escolar dessa área da matemática. No entanto a geometria é bem vasta, e em termos escolares existem três tipos de geometria que são vistas em sala de aula: a geometria plana que foca em duas dimensões do espaço (comprimento e altura), a geometria espacial que frisa nas três dimensões do espaço (largura, comprimento e altura) e a geometria analítica que resolve problemas algébricos com as propriedades geométricas, devido a isso as páginas a seguir apresentarão apenas, de forma ilustrada e simplificada, o conteúdo de geometria plana dividido em sete capítulos. Assim, o primeiro capítulo tem como objetivo apresentar os conceitos básicos dessa área do conhecimento, tal apresentação é de maneira simples e intuitiva visando a compreensão do leitor; enquanto o capítulo dois, objetiva introduzir nomenclaturas essenciais para a criação do conhecimento geométrico; não distante disso, o objetivo específico do terceiro capítulo é detalhar as nuances dos triângulos; o que permite a introdução do capítulo quatro que tem como objetivo introduzir o conhecimento sobre os triângulos retângulos explicando as suas características; todavia a geometria vai muito além dos conhecimentos básicos e dos triângulos, desse modo, o objetivo do capítulo cinco é apresentar os quadriláteros juntamente om suas exclusividades; e para encerrar o conhecimento sobre os polígonos o capítulo seis objetiva expandir o conhecimento sobre os polígonos regulares independentemente da quantidade de lados; por fim o último capítulo, o sete, tem por objetivo específico apresentar de forma descritiva o conceito da formação de um círculo.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Como todo conhecimento, a geometria necessita de um marco inicial, desse modo, os conceitos de ponto e reta são assumidos como verdades, e a partir deles é construída toda a geometria. A seguir será possível observar estes conceitos.

2.1 Ponto

De início o conceito mais básico que se pode definir é o de **ponto**.

- O ponto é uma referência posicional no espaço.

A descrição do ponto é bem simples, e foi bem expressa por Santos e Viglioni (2011, p.20) “Euclides definiu linha como aquilo que tem comprimento sem largura e ponto como aquilo que não tem parte”, mas está totalmente voltada ao estudo da geometria, que é o de posição e espaço, no entanto o ponto não possui nem tamanho e nem forma, portanto ele não possui nenhuma dimensão.

Na escrita matemática, de acordo com Dolce e Pompeu (1997), geralmente um ponto é nomeado com letras latinas maiúsculas A, B, C, D, entre outras. Ele é útil em toda a geometria, no entanto na geometria analítica ele assume o formato de coordenadas bem específicas, assim além da letra descritiva ele possui as coordenadas: $A(x_0, y_0)$ no caso de estudos bidimensionais ou $A(x_0, y_0, z_0)$ no estudo tridimensional, onde: $x_0 = comprimento, y_0 = largura\ e\ z_0 = altura$. .

Faz parte do senso comum acreditar que algo que não possui tamanho e nem forma é inexistente, no entanto o estudo da matemática vai além do senso comum

2.2 Reta

Conhecendo o que é um ponto podemos avançar para o segundo conceito básico a **reta**.

- Uma reta é criada a partir da junção lateral ordenada de infinitos pontos, ou seja, um ponto ao lado do outro infinitas vezes, sabendo disso dado dois pontos quaisquer somente há uma única reta que passe por esses pontos.

Respeitando a classificação de Dolce e Pompeu (1997 p.1) “a escrita matemática para expressar as retas são letras latinas minúsculas: **r, s, t**, entre outras”.

A reta possui uma dimensão e é fundamental para o avanço geométrico pois a partir dela surge o conceito de **semirreta** e **segmento de reta**.

2.3 Semirreta

Uma semirreta é formada do mesmo modo que uma reta, no entanto é sabido o ponto inicial, logo uma semirreta que inicia-se em um ponto A e passa por um ponto B se prolonga infinitamente e é nomeada como: $\overrightarrow{AB}$

2.4 Segmento de Reta

Um segmento de reta é um trecho específico de uma reta onde é sabido o ponto inicial e o ponto final, logo o segmento de reta que inicia-se no ponto C e termina no ponto D é nomeado como: $\overline{CD}$, Papa Neto (2017) complementa que o segmento de reta é formado pelos pontos C e D e por todos os pontos que estão entre C e D

3 CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS

O segmento de reta é muito usado, no entanto ao apresentar os polígonos esses segmentos são rebatizados de **lados ou arestas**, nesse mesmo sentido o ponto é rebatizado para **vértice**, contudo antes mesmo da apresentação dos polígonos é necessário o entendimento do que é um **ângulo**.

3.1 Ângulos

Dado três pontos A, B e C, temos dois segmentos de reta que partem de A: $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, diz-se ângulo a medição entre esses dois segmentos. Nesse exemplo, como A é um ponto comum a ambos os segmentos de reta, representa-se esse ângulo por BÂC, sempre em letra latinas maiúsculas com o acento circunflexo em cima do ponto comum aos segmentos de reta que formam o ângulo, no entanto para certos conteúdos matemáticos a representação de ângulo também pode ser feita através de letras gregas minúsculas como: $\alpha, \beta, \gamma,$ entre outras. Santos e Viglioni (2011, p.38) dizem que "um ângulo com vértice A é um ponto A com duas semi-retas SAB e SAC, chamadas os lados do ângulo", no entanto, para fins de compreensão o termo semirreta pode ser substituído por segmento de reta.

Como a existência de um ângulo se dá através da medição entre dois segmentos de reta unidos por um ponto, é pertinente compreender os valores máximos que essa medição pode alcançar, assim toma-se que o segmento $\overline{AB}$ é fixo na horizontal, e o segmento $\overline{AC}$ está se movendo no sentido anti-horário:

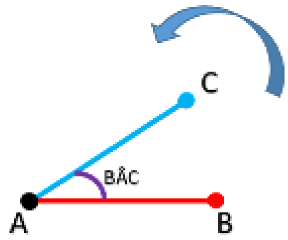

Figura 1 - Criando ângulos.
Fonte: criado pelo pesquisador

Logo quanto mais distante o segmento $\overline{AC}$ fica do $\overline{AB}$ maior o ângulo entre eles, é necessário observar que nesse movimento do segmento $\overline{AC}$ em algum momento ele ficará na vertical enquanto o segmento $\overline{AB}$ está na horizontal, nesse momento esse ângulo recebe um nome: **ângulo reto**:

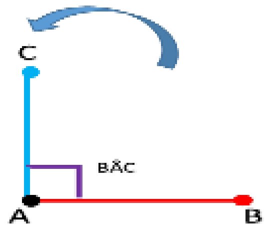

Figura 2 - Ângulo reto.
Fonte: criado pelo pesquisador

No entanto, $\overline{AC}$ continua se movendo, isso ocorre até que o segmento $\overline{AC}$ também se encontre na horizontal, mas do lado oposto ao segmento $\overline{AB}$, nesse momento o ângulo recebe um nome: **ângulo raso**.

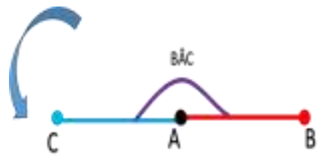

Figura 3 - Ângulo raso.
Fonte: criado pelo pesquisador

Continuando com o movimento de $\overline{AC}$, este dará uma volta completa em torno de A, até o ponto que $\overline{AC}$ coincidirá com $\overline{AB}$.

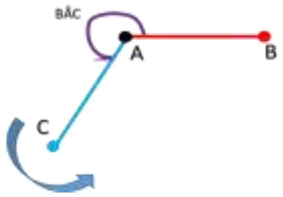

Figura 4 - Volta angular completa.
Fonte: criado pelo pesquisador

Os ângulos obtidos através desse movimento podem ser mensurados de duas formas: em graus e em radianos.

3.2 Conversões de Ângulos

A mensuração em graus toma como verdade que a volta completa possui 360°, enquanto a meia volta, ou seja, o ângulo raso possui 180°, e o ângulo reto possui 90°, nessa medida se faz necessário saber os **ângulos notáveis** que são muito úteis são eles o de 30°, o de 45° e o de 60°. Já a mensuração em radianos utiliza o valor de π para expressar um ângulo raso, de 2π para expressar uma volta completa e de $\frac{\pi}{2}$ para expressar um ângulo reto, sendo que $\pi = 3{,}1416 \ldots$

Esses dois tipos de medição são equivalentes, ou seja 90° = $\frac{\pi}{2}$, 180° = π e 360° = 2π, e as fórmulas abaixo são utilizadas para conversão:

De radianos para graus: $\hat{a}ngulo\ em\ radiano \cdot \frac{180}{\pi} = \hat{a}ngulo\ em\ graus$

De graus para radianos: $\hat{a}ngulo\ em\ graus \cdot \frac{\pi}{180} = \hat{a}ngulo\ em\ radianos$

Pronto, conhecendo o que é um ângulo e já sabendo que um ponto é chamado de vértice e que um segmento de reta é chamado de lado ou aresta, agora é necessário a apresentação do que é um polígono.

3.3 Um Pouco Mais Sobre Polígonos

Na geometria plana um polígono é uma figura fechada formada por segmentos de reta que se tocam apenas nos vértices formando ângulos. Caso os segmentos consecutivos não se cruzem é dito que o **polígono é simples**, caso haja alguma intersecção entre os segmentos é dito que o **polígono é complexo**, para fins didáticos será abordado a partir daqui apenas os polígonos simples.

Os polígonos podem ser divididos em dois grandes grupos mediante análise dos seus ângulos, quando todos os ângulos do polígono forem inferiores a 180° diz-se que se trata de um **polígono convexo**:

Figura 5 - Polígono convexo.
Fonte: criado pelo pesquisador

No entanto caso haja algum ângulo que seja superior a 180° diz-se que o **polígono é côncavo.**

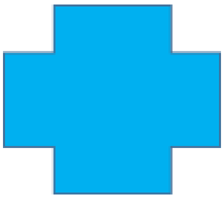

Figura 6 - Polígono côncavo.
Fonte: criado pelo pesquisador

Por um polígono ser uma figura fechada criada através de segmentos de reta, observa-se que não há nenhum polígono que possa ser criado apenas com um único segmento de reta, do mesmo modo é inexistente um polígono criado com apenas dois segmentos de reta, no entanto a partir de três segmentos de reta já é possível fechar uma figura, assim o menor polígono possível possui 3 lados, este é o triângulo.

Não é errado chamar o triangulo de polígono de três lados, do mesmo modo que não é incorreto chamar o quadrado ou o retângulo de polígono que quatro lados, no entanto há nomes específicos para os diversos polígonos, tais nomes são com base na quantidade de lados que possuem.

Tabela 1 - Tabela de nomes dos polígonos

Lados	Nome	Lados	Nome	Lados	Nome	Lados	Nome
3	trilátero	10	decágono	17	heptadecágono	50	pentacontágono
4	quadrilátero	11	undecágono	18	octodecágono	60	hexacontágono
5	pentágono	12	dodecágono	19	eneadecágono	70	heptacontágono
6	hexágono	13	tridecágono	20	icoságono	80	octacontágono
7	heptágono	14	tetradecágono	30	triacontágono	90	eneacontágono
8	octógono	15	pentadecágono	40	tetracontágono	100	hectágono
9	eneágono	16	hexadecágono				

Fonte: criado pelo pesquisador

Os lados são importantes na classificação dos polígonos, no entanto também são importantes os ângulos, assim um polígono é dito **equilátero** quando todos os lados são iguais, já quando todos os ângulos são iguais o polígono é dito **equiângulo**, no entanto quando ambos os casos acontecem, tanto os lados são iguais entre si e os ângulos são iguais entre si o polígono recebe o nome de **polígono regular.**

A quantidade de lados determina o nome do polígono, mas tão igualmente importante é o **somatório dos ângulos internos** desse polígono, e para calcular isso basta aplicar a fórmula:

$s_i = (n-2) \cdot 180°, \mathit{onde}\ n = \mathit{quantidade\ de\ lados}.$

Todavia essa não é a única fórmula importante na análise dos polígonos, é vital a ciência do **cálculo das diagonais dos polígonos**, esse cálculo é facilmente obtido com a utilização da fórmula:

$d = \frac{n(n-3)}{2}, \mathit{onde}\ n = \mathit{quantidade\ de\ lados}$

Que é bem explicada:

> Cada um dos n vértices de um polígono convexo pode ser ligado aos outros $n-1$ vértices por segmentos de reta, dos quais exatamente dois são lados do polígono, e os outros $n-3$ segmentos são diagonais. Assim, o produto $n(n-3)$ conta as diagonais do polígono, sendo que cada diagonal foi contada duas vezes, uma para cada vértice onde ela incide (Papa Neto, 2017, p.100)

Todo polígono possui ângulos internos, mas nem todo possui diagonal, o triângulo é o único polígono que não possui nenhuma diagonal, pois o cálculo das diagonais do polígono se dá analisando os vértices que não são ligados pelos lados, ou seja, aqueles que não são consecutivos, e o triângulo não possui nenhum vértice desse modo, pois nele todos os vértices são ligados entre si consecutivamente.

O triângulo é o polígono básico, pois qualquer outro polígono pode ser construído com apenas triângulos, e o número de diagonais determina quantos triângulos serão necessários para construção desse polígono.

Ao analisar qualquer polígono será notável que o número de vértices é igual ao número de ângulos internos que é igual ao número de lados, mas além disso também é igual ao número de ângulos externos. **O somatório de todos os ângulos externos de um polígono é 360**°, e cada ângulo externo é obtido da diferença do ângulo raso pelo ângulo interno.

O cálculo para a obtenção do ângulo externo possui um nome bem específico, pois ele serve para descobrir qual é o valor de um ângulo que falta para chegar ao ângulo raso de 180°, dessa forma os dois ângulos que somam 180° são batizados de **ângulos suplementares**, ou seja, um ângulo é o suplemento do outro para chegar a 180°.

Desse mesmo modo existe um nome específico para dois ângulos quaisquer que ao serem somados são o ângulo reto de 90°, diz-se que esses **ângulos são complementares**.

3.4 Características dos Polígonos

Para aprofundar mais o conhecimento sobre polígonos é pertinente estudar as características de: **altura, área, perímetro, mediana, mediatriz e bissetriz**.

- Altura: tomando qualquer lado (segmento de reta) de um polígono como base, diz-se que a altura é a menor distância possível do ponto mais longínquo desse polígono a essa base. Na geometria analítica o cálculo de altura é utilizado para encontrar a distância entre um ponto e uma reta.

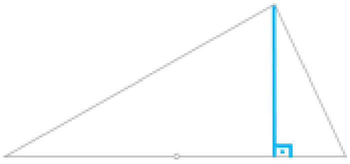

Figura 7 - Altura de um triângulo.
Fonte: criado pelo pesquisador

- Área: é o campo plano que cobre a superfície do polígono, por ser plano ele é bidimensional, assim a unidade de medida comumente utilizada é o metro quadrado de simbologia m².

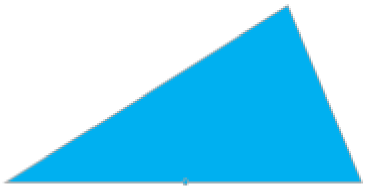

Figura 8 - Área.
Fonte: criado pelo pesquisador

  - Algumas fórmulas para cálculo de área:

    - Retângulo: $B \cdot h$
    - Triângulo: $\frac{B \cdot h}{2}$
    - Triangulo Equilátero: $\frac{B^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$
    - Losango: $\frac{D \cdot d}{2}$
    - Trapézio: $\frac{(B+b) \cdot h}{2}$
    - Círculo: $\pi \cdot r^2$
    - Hexágono regular: $\frac{3 \cdot B^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Onde: B é a base do polígono
h é a altura
D é a diagonal maior
d é a diagonal menor
r é o raio

  - Observa-se que para encontrar a área de todo polígono regular basta multiplicar o seu número de lados pela área do triângulo equilátero.

- Perímetro: Polígonos possuem vários lados, e o perímetro é o valor obtido da soma de todos esses lados.

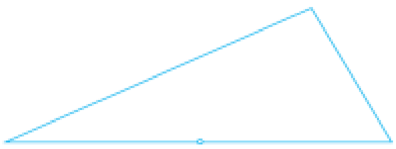

Figura 9 - Perímetro.

Fonte: criado pelo pesquisador

- Mediana: na análise dos polígonos a mediana é um segmento de reta que parte de um vértice e vai até o lado oposto a esse separando-o em duas metades iguais (ponto médio).

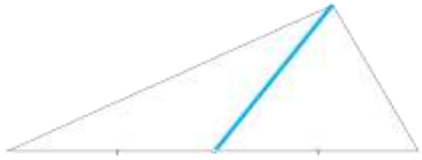

Figura 10 - Mediana de um triângulo.
Fonte: criado pelo pesquisador

- Mediatriz: entre dois vértices existe um ponto médio, a mediatriz é uma reta que passa por esse ponto médio formando um ângulo de 90°.

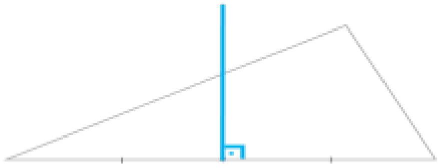

Figura 11 - Mediatriz de um triângulo.
Fonte: criado pelo pesquisador

- Bissetriz: A bissetriz está inteiramente ligada ao ângulo, pois ela é um segmento de reta que divide igualmente um ângulo. Papa Neto (2017, p. 59) explica a bissetriz como “uma semirreta AD é chamada bissetriz do ângulo CÂB se os ângulos CÂD e DÂB são congruentes”

Figura 12 - Bissetriz de um triângulo.
Fonte: criado pelo pesquisador

Conhecendo tais características a análise dos polígonos é facilitada, assim, a apresentação dos polígonos mais notáveis se dará a partir desse momento iniciando pelo triângulo.

4 TRILÁTERO OU TRIÂNGULO

O polígono ou figura geométrica mais básico é o trilátero, sendo mais conhecido pela denominação de triângulo, pois tal figura possui três ângulos.

4.1 Classificação de Triângulos

O tamanho dos lados é importantíssimo para a classificação dos triângulos, visto que quando os três lados são iguais o triangulo é denominado de **equilátero**, já quando apenas dois lados são idênticos entre si pois o terceiro possui outro tamanho é dito que o triângulo é **isósceles**, e por fim quando nenhum dos três lados são iguais entre si, ou seja todos os três são diferentes, o triangulo é chamado de **escaleno**.

> E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais. (EUCLIDES 2009, p.97).

Sabendo a quantidade de lados pode-se saber o somatório dos ângulos internos, para isso basta aplicar a fórmula $s_i = (3-2) \cdot 180°$, logo, o resultado será: $180°$.

O resultado obtido é pertinente para a classificação dos triângulos de acordo com seus ângulos, essa se faz de forma muito simples, onde se o triangulo tiver algum ângulo com valor igual a 90° esse triangulo é denominado: **triangulo retângulo**:

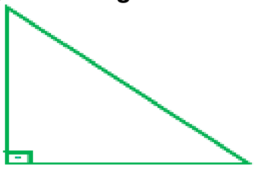

Figura 13 - Triângulo retângulo.
Fonte: criado pelo pesquisador

Mas se o triângulo tiver algum ângulo com o valor superior a 90° o triangulo será batizado de: **obtusângulo**:

Figura 14 - Obtusângulo.
Fonte: criado pelo pesquisador

E em situações que todos os ângulos forem menores que 90° esse triangulo se chamará **acutângulo**.

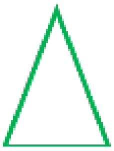

Figura 15 - Acutângulo.
Fonte: criado pelo pesquisador

Todos os triângulos se enquadram em uma dessas três classificações, visto que elas analisam diretamente o tamanho do ângulo, quesito essencial para que haja a formação do polígono triangular.

4.2 Semelhança de Triângulos

O estudo dos lados e dos ângulos dos triângulos é muito valorizado visto que o comportamento de um triângulo pequeno é o mesmo de um triângulo gigante caso esses triângulos sejam semelhantes entre si.

Para um triângulo ser dito semelhante a outro é necessário que os ângulos desses triângulos sejam congruentes, como já visto, independentemente do tamanho do triângulo o somatório dos seus ângulos internos sempre será 180°, e que seus lados sejam proporcionais.

Para descobrir se os triângulos são semelhantes é necessário encontrar o valor de uma constante k chamada de **razão de semelhança**. O cálculo de k é feito de maneira simples, dados dois triângulos:

∆ABC	∆DEF
Vértices: A, B, C	Vértices: D, E, F
Lados: a, b, c	Lados: d, e, f
Ângulos: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$	Ângulos: $\hat{D}, \hat{E}, \hat{F}$

Diz-se que esses dois triângulos são semelhantes, simbolizado por: ∆ABC ~ ∆DEF, se, e somente se:

Ângulos congruentes: $\hat{A} \cong \hat{D}, \hat{B} \cong \hat{E}, \hat{C} \cong \hat{F}$

Lados proporcionais: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$

Todavia, por saber que independente do triângulo ele sempre vai ter 180°, pode-se implicar uma semelhança de triângulos sabendo apenas dois ângulos **(Ângulo, Ângulo):**

Dados dois triângulos:

∆ABC	∆DEF
Ângulos: $\hat{A}, \hat{B}$	Ângulos: $\hat{D}, \hat{E}$

É possível afirmar que: ∆ABC ~ ∆DEF são semelhantes se: $\hat{A} \cong \hat{D}, \hat{B} \cong \hat{E}$

Diante disso Dolce e Pompeu (1997, p.40) contextualizam o postulado: “Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes”

Também é possível afirmar semelhança de triângulos não só pela análise dos ângulos **(Lado, Ângulo, Lado):**

Dados dois triângulos:

∆ABC	∆DEF
Lados: a, b	Lados: d, e
Ângulos: $\hat{A}$	Ângulos: $\hat{D}$

Afirma-se que esses triângulos são semelhantes caso possuam medidas de dois lados proporcionais, e o ângulo congruente entre esses dois lados.

$$\hat{A} \cong \hat{D}$$

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$$

Para esse caso existe o postulado trazido por Dolce e Pompeu (1997, p. 39): “Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes”

Também é possível afirmar a semelhança de triângulos apenas analisando os lados **(Lado, Lado, Lado):**

Dado dois triângulos:

∆ABC	∆DEF
Lados: a, b, c	Lados: d, e, f

Caso os três lados sejam proporcionais, diz-se que: ∆ABC ~ ∆DEF

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

Este terceiro caso também pode ser visto no postulado por Dolce e Pompeu (1997, p.42): “Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes”

Uma curiosidade muito pertinente é que a temática de semelhança de triângulos é muito cobrada em diversos tipos de vestibulares, dessa forma aprofundar esse conhecimento geométrico escolar se torna um pré-requisito para a inserção em alguma faculdade.

4.3 Teorema de Tales de Mileto

O estudo de semelhanças de triangulo é básico para a geometria, sendo que muitas vezes ele é resumido ao encontro da razão de semelhança, razão essa que é uma proporção entre os lados, e os lados de um triângulo que são segmentos de reta transversais.

No entanto o conceito de semelhança tem como alicerce o teorema de Tales de Mileto, que diz: “**a interseção entre duas retas paralelas e transversais formam segmentos proporcionais**”, embora tal teorema seja muito fácil primeiramente é necessário ampliar o conhecimento sobre retas.

4.4 Tipos de Retas

Existem alguns tipos de retas, e o teorema de Tales anuncia dois: as **retas paralelas** e as **retas transversais**.

- Retas paralelas: duas retas são chamadas de retas paralelas quando na sua infinitude não possuem nenhum ponto em comum.
  Exemplo:

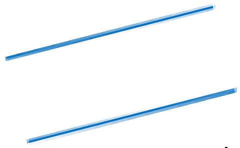

Figura 16 - Retas paralelas.
Fonte: criado pelo pesquisador

- Retas transversais: duas retas transversais também chamadas de **retas concorrentes** são aquelas que possuem um único ponto em comum, e através desse ponto é possível calcular o ângulo formado entre essas duas retas.
  Exemplo:

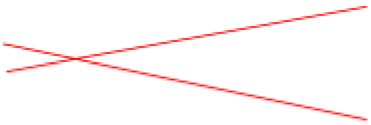

Figura 17 - Retas concorrentes.
Fonte: criado pelo pesquisador

- Retas perpendiculares: As retas perpendiculares são retas transversais que fazem o ângulo reto (90°).

  Exemplo:

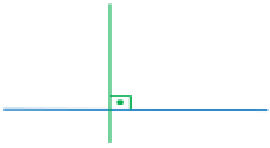

Figura 18 - Retas perpendiculares.
Fonte: criado pelo pesquisador

> Quando uma linha reta, caindo sobre outra. linha reta, fizer com esta dois ângulos iguais, um de uma, e outro de outra parte, cada um destes ângulos iguais se chama ângulo reto; e a linha incidente se diz perpendicular a outra linha; sobre a qual cai (EUCLIDES, 1944, p.5)

Dominando esse conhecimento sobre retas, basta aplicá-lo ao teorema de Tales de Mileto. Tomando as retas: r e s transversais, e as retas t, u e v paralelas entre si, obtém-se:

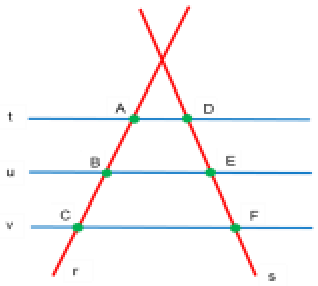

Figura 19 - Intersecção de retas paralelas e concorrentes.
Fonte: criado pelo pesquisador

O ponto A é a intersecção da reta r com a reta t.

O ponto B é a intersecção da reta r com a reta u.

O ponto C é a intersecção da reta r com a reta v.

O ponto D é a intersecção da reta s com a reta t.

O ponto E é a intersecção da reta s com a reta u.

O ponto F é a intersecção da reta s com a reta v.

Com tais dados pode ser calculado as seguintes proporções:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} \quad ou \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

Esse teorema é bem reforçado pelo quinto postulado de Euclides:

> Postulado 5. Sejam duas retas m e n cortadas por uma terceira reta r: Se a soma dos ângulos formados é menor do que 180 graus, então m e n não são paralelas. Além disso, elas se intersectam do lado dos ângulos cuja soma é menor do que 180 graus (*apud* SANTOS; VIGLIONI, 2011, p.18)

O uso do teorema de Tales é muito aplicado em cálculos de distâncias, e ele é bem simples, basta o domínio de proporções, do entendimento de retas paralelas e transversais.

4.5 Tipos de Ângulos

Esse tipo de reta também serve para expandir o conhecimento sobre ângulos, para isso basta tomar duas retas paralelas entre si, e uma terceira sendo transversal a elas, deste modo, são criados oito ângulos entre os cruzamentos dessas retas:

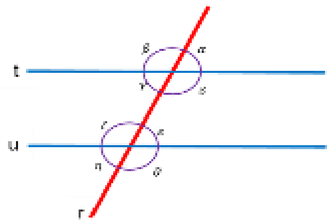

Figura 20 - Posicionamento de ângulos obtidos por uma reta transversal.
Fonte: criado pelo pesquisador

Desse modo é perceptível que a reta r separa os ângulos, existem os ângulos à direita de r: $\alpha, \delta, \varepsilon$ e θ, e os ângulos à esquerda de r: β, γ, ζ e η, esses ângulos em um lado específico da reta transversal são chamados de **ângulos colaterais**, no entanto se a análise for entre ângulos que estão em lados opostos à reta r, então os ângulos são chamados de **ângulos alternos.** Além disso, através da posição das retas pode-se afirmar que os seguintes ângulos possuem medida idêntica:

- $\alpha = \varepsilon$
- $\beta = \zeta$
- $\gamma = \eta$
- $\theta = \delta$

A análise dos lados e ângulos dos triângulos promove um grande de estudo da geometria, e a efetivação do conteúdo de semelhança de triângulos e do teorema de Tales de Mileto são as bases de tal campo, no entanto não é apenas disso que é construída a geometria, e sobre os triângulos é pertinente estudar alguns casos especiais.

5 TRIÂNGULO RETÂNGULO

O triângulo equilátero, por ser um polígono regular, tanto os lados iguais e os ângulos iguais, e tais valores são conhecidos e são 60°, no entanto uma das características do triângulo equilátero é que ele pode ser dividido em dois triângulos retângulos, para isso basta traçar a altura do triângulo equilátero.

O triângulo retângulo é especial, pois através dele se desenvolve um ramo inteiro da matemática chamado **trigonometria**, assim, suas particularidades são de exímio destaque, essas já iniciam com o nome dos seus lados, no triângulo retângulo o lado que se opõe ao ângulo de 90° é chamado de **hipotenusa**, e os demais lados são chamados de **catetos**.

Uma outra particularidade é que no triângulo retângulo ao saber apenas dois dos três lados é possível descobrir o terceiro lado, para tal feito deve-se aplicar o **teorema de Pitágoras:**

$(hipotenusa)^2 = (cateto1)^2 + (cateto2)^2$

O que é facilmente melhor expressado indicando variáveis algébricas para os lados, assim a: $hipotenusa\ = a,\ \ cateto1\ = b\ e\ cateto2\ = c$, logo:

$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$

O teorema de Pitágoras é apresentado aos estudantes no ensino fundamental, onde assume um papel muito importante nas aulas de matemática, pois é uma temática recorrente durante essa fase escolar.

5.1 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

A aplicação do teorema de Pitágoras pode ser uma particularidade interessante, no entanto, no que trata de triangulo retângulo, ela não é a única fórmula que é conhecida para descobrir valores, assim para conhecer as demais fórmulas chamadas de **relações métricas do triângulo retângulo** é necessário saber antes sobre: **projeções dos catetos** e **altura relativa da hipotenusa**, para isso observe a imagem a seguir:

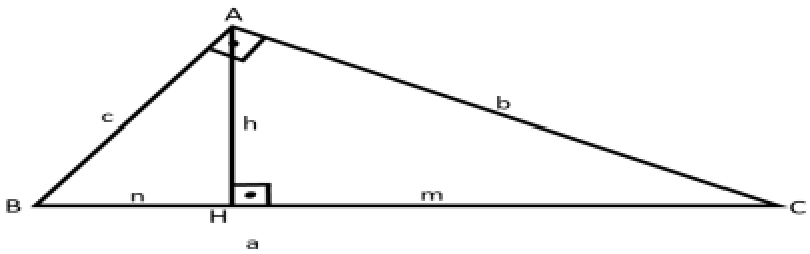

Figura 21 - Relações métricas: triângulo ABC.
Fonte: criado pelo pesquisador

A, B e C são os vértices

a, b e **c** são os lados, sendo hipotenusa: **a**, cateto1: **b**, cateto2: **c**

h é a altura relativa da hipotenusa, pois é a altura obtida do ângulo reto que se opõe ao lado **a**

m e **n** são as projeções dos catetos **b** e **c**, respectivamente, sobre a hipotenusa, para compreender melhor é necessário o seguinte exercício de imaginação: imagine o triângulo **ABC** sob o sol de meio dia, a sombra feita pelo lado **b** sobre a hipotenusa será exatamente o tamanho de **m**, já a sombra feita pelo lado **c** será o tamanho de **n**, por se tratar de sombras são chamados de projeções.

A análise dos vértices, lados, projeções e altura são simples, para isso basta observar a imagem anterior, nela é nítido que a hipotenusa é a soma das duas projeções, portanto:

$a = m + n$

Também é notável, que a altura h do triangulo ABC fez um ângulo reto com a hipotenusa a, no entanto essa altura h segmentou o triangulo ABC e dois triângulos retângulos menores, o triangulo: ABH (onde H é o ponto que a altura encontra a hipotenusa), e o triângulo: ACH.

Os lados do triângulo ABH são:

Cateto1: h   Cateto2: n   Hipotenusa: c

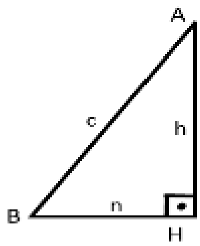

Figura 22 - Relações métricas: triângulo ABH.
Fonte: criado pelo pesquisador

Os lados do triângulo ACH são:

Cateto1: m

Cateto2: h

Hipotenusa: b

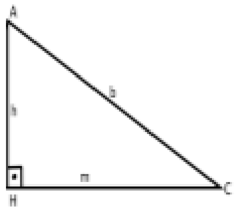

Figura 23 - Relações métricas: triângulo ACH.
Fonte: criado pelo pesquisador

Através da aplicação de semelhança entre triângulos, por meio da análise Lado-Ângulo-Lado, é obtido outras relações métricas nesses triângulos retângulos.

- Dessa forma obtém-se a razão: hipotenusa sobre cateto1:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{m}=\frac{c}{h}$$

Dessa razão de semelhança é obtido as seguintes relações métricas:

1) Sobre o triângulo ABC: O lado ao quadrado é igual ao produto da hipotenusa pela projeção do lado.

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{m}\rightarrow b^2=am$$

2) Sobre o triângulo ABC: o produto dos lados é igual ao produto da hipotenusa pela altura.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{h}\rightarrow ah=bc$$

Ainda utilizando semelhança entre triângulos obtém-se a razão: hipotenusa sobre cateto2:

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{n}=\frac{b}{h}$$

- Dessa razão de semelhança é obtido a seguinte relação métrica:

3) Sobre o triângulo ABC: o produto dos lados é igual ao produto da hipotenusa pela altura.

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{n}\rightarrow c^2=an$$

Continuando com semelhança entre triângulos obtém-se a razão: cateto2 sobre cateto1

$$\frac{b}{c}=\frac{h}{n}=\frac{m}{h}$$

- Dessa razão de semelhança é obtido a seguinte relação métrica:

4) Sobre o triângulo ABC: a altura ao quadrado é igual ao produto das projeções.

$$\frac{h}{n}=\frac{m}{h}\rightarrow h^2=mn$$

Tabela 2 - Resumo das relações métricas do triângulo retângulo.

Relações
$a^2 = b^2 + c^2$
$a = m + n$
$b^2 = am$
$ah = bc$
$c^2 = an$
$h^2 = mn$

Fonte: criado pelo pesquisador

O ensino, em sala de aula, dessas relações métricas nunca pode ser reduzido apenas a memorização das fórmulas, tal ênfase é merecida pois o entendimento das relações métricas facilita muito a vida estudantil para temáticas mais avançadas.

5.2 Trigonometria

Nem só pela observação e manipulação dos lados do triângulo retângulo é possível obter novas informações, também é possível obter as medidas dos lados através da observância dos seus ângulos, e isso possui um nome: **trigonometria.**

É sabido que um triângulo possui três ângulos, e um triângulo retângulo possui um dos seus três ângulos possuindo 90°, sobrando outros dois ângulos de medida quaisquer, dito isso a trigonometria analisa um desses ângulos sobressalentes, de agora em diante chamado de ângulo α, e as relações desse ângulo com os lados para obtenção de mais informações sobre o triângulo.

Deste modo, usando o ângulo α como referência é possível nomear os catetos, sendo que o cateto que forma o ângulo α com a hipotenusa é chamado de **cateto adjacente**, e o cateto que se opõe ao ângulo α é chamado de **cateto oposto**.

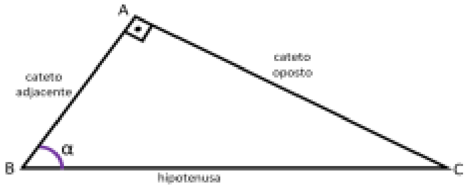

Figura 24 - Nomenclatura dos lados no triângulo retângulo.
Fonte: criado pelo pesquisador

A nomenclatura dos catetos em relação a α é fundamental para a definição das relações entre os ângulos e os lados, essas relações são funções primordiais à trigonometria: **seno, cosseno e tangente**.

> A palavra *seno* é resultado de uma confusão na tradução de textos do árabe para o latim. As tabelas de cordas, produzidas pelos matemáticos indianos e usadas na astronomia, foram escritas originalmente em sânscrito, traduzidas para o árabe e do árabe para o latim. A palavra “corda” escreve-se em árabe como *jaib*. Essa palavra tem as mesmas consoantes de *jiba*, que significa cavidade ou bolso. Como em árabe só se escrevem as consoantes, o tradutor latino, conhecedor do árabe, mas não do sânscrito, traduziu *jaib* como *jiba* e escreveu *sinus*, que quer dizer cavidade em latim (PAPA NETO, 2017, p.178)

A função seno é obtida através da razão do cateto oposto pela hipotenusa:

$$\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

A função cosseno é obtida através da razão do cateto adjacente pela hipotenusa:

$$\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

A função tangente é obtida através da razão do cateto oposto pelo cateto adjacente:

$$\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

Note que essas razões são calculadas pelos dados dos lados, no entanto são relacionadas ao ângulo α por uma equação simples:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}, cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}, tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

Assim, cada equação possui três variáveis, sendo duas referentes aos lados e uma referente ao ângulo, e para calculá-las é pertinente saber os valores dos senos, cossenos e tangentes de cada ângulo, tais valores são conhecidos, visto que os valores não se alterarão devido que o triângulo retângulo respeita as regras de semelhanças de triângulos e que o somatório dos ângulos internos de um triangulo sempre será 180°, assim, seguem as tabelas com os ângulos notáveis, e a tabela com todos os ângulos.

Tabela 3 - Valores das funções trigonométricas nos ângulos notáveis

	30°	45°	60°
$sen\ \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: criado pelo pesquisador

Tabela 4 - Valores das funções trigonométricas em todos os ângulos

GRAUS	SENO	COSSENO	TANGENTE	GRAUS	SENO	COSSENO	TANGENTE	GRAUS	SENO	COSSENO	TANGENTE	GRAUS	SENO	COSSENO	TANGENTE
0	0	1	0	90	1	0	NÃO EXISTE	180	0	-1	0	270	-1	0	NÃO EXISTE
1	0,01745	0,99985	0,017455	91	0,99985	-0,01745	-57,289962	181	-0,0175	-0,99985	0,017455	271	-0,9999	0,01745	-57,289962
2	0,0349	0,99939	0,034921	92	0,99939	-0,0349	-28,636253	182	-0,0349	-0,99939	0,034921	272	-0,9994	0,0349	-28,636253
3	0,05234	0,99863	0,052408	93	0,99863	-0,05234	-19,081137	183	-0,0523	-0,99863	0,052408	273	-0,9986	0,05234	-19,081137
4	0,06976	0,99756	0,069927	94	0,99756	-0,06976	-14,300666	184	-0,0698	-0,99756	0,069927	274	-0,9976	0,06976	-14,300666
5	0,08716	0,99619	0,087489	95	0,99619	-0,08716	-11,430052	185	-0,0872	-0,99619	0,087489	275	-0,9962	0,08716	-11,430052
6	0,10453	0,99452	0,105104	96	0,99452	-0,10453	-9,514364	186	-0,1045	-0,99452	0,105104	276	-0,9945	0,10453	-9,514364
7	0,12187	0,99255	0,122785	97	0,99255	-0,12187	-8,144346	187	-0,1219	-0,99255	0,122785	277	-0,9926	0,12187	-8,144346
8	0,13917	0,99027	0,140541	98	0,99027	-0,13917	-7,11537	188	-0,1392	-0,99027	0,140541	278	-0,9903	0,13917	-7,11537
9	0,15643	0,98769	0,158384	99	0,98769	-0,15643	-6,313752	189	-0,1564	-0,98769	0,158384	279	-0,9877	0,15643	-6,313752
10	0,17365	0,98481	0,176327	100	0,98481	-0,17365	-5,671282	190	-0,1737	-0,98481	0,176327	280	-0,9848	0,17365	-5,671282
11	0,19081	0,98163	0,19438	101	0,98163	-0,19081	-5,144554	191	-0,1908	-0,98163	0,19438	281	-0,9816	0,19081	-5,144554
12	0,20791	0,97815	0,212557	102	0,97815	-0,20791	-4,70463	192	-0,2079	-0,97815	0,212557	282	-0,9782	0,20791	-4,70463
13	0,22495	0,97437	0,230868	103	0,97437	-0,22495	-4,331476	193	-0,225	-0,97437	0,230868	283	-0,9744	0,22495	-4,331476
14	0,24192	0,9703	0,249328	104	0,9703	-0,24192	-4,010781	194	-0,2419	-0,9703	0,249328	284	-0,9703	0,24192	-4,010781
15	0,25882	0,96593	0,267949	105	0,96593	-0,25882	-3,732051	195	-0,2588	-0,96593	0,267949	285	-0,9659	0,25882	-3,732051
16	0,27564	0,96126	0,286745	106	0,96126	-0,27564	-3,487414	196	-0,2756	-0,96126	0,286745	286	-0,9613	0,27564	-3,487414
17	0,29237	0,9563	0,305731	107	0,9563	-0,29237	-3,270853	197	-0,2924	-0,9563	0,305731	287	-0,9563	0,29237	-3,270853
18	0,30902	0,95106	0,32492	108	0,95106	-0,30902	-3,077684	198	-0,309	-0,95106	0,32492	288	-0,9511	0,30902	-3,077684
19	0,32557	0,94552	0,344328	109	0,94552	-0,32557	-2,904211	199	-0,3256	-0,94552	0,344328	289	-0,9455	0,32557	-2,904211
20	0,34202	0,93969	0,36397	110	0,93969	-0,34202	-2,747477	200	-0,342	-0,93969	0,36397	290	-0,9397	0,34202	-2,747477
21	0,35837	0,93358	0,383864	111	0,93358	-0,35837	-2,605089	201	-0,3584	-0,93358	0,383864	291	-0,9336	0,35837	-2,605089
22	0,37461	0,92718	0,404026	112	0,92718	-0,37461	-2,475087	202	-0,3746	-0,92718	0,404026	292	-0,9272	0,37461	-2,475087
23	0,39073	0,9205	0,424475	113	0,9205	-0,39073	-2,355852	203	-0,3907	-0,9205	0,424475	293	-0,9205	0,39073	-2,355852
24	0,40674	0,91355	0,445229	114	0,91355	-0,40674	-2,246037	204	-0,4067	-0,91355	0,445229	294	-0,9136	0,40674	-2,246037
25	0,42262	0,90631	0,466308	115	0,90631	-0,42262	-2,144507	205	-0,4226	-0,90631	0,466308	295	-0,9063	0,42262	-2,144507
26	0,43837	0,89879	0,487733	116	0,89879	-0,43837	-2,050304	206	-0,4384	-0,89879	0,487733	296	-0,8988	0,43837	-2,050304
27	0,45399	0,89101	0,509525	117	0,89101	-0,45399	-1,962611	207	-0,454	-0,89101	0,509525	297	-0,891	0,45399	-1,962611
28	0,46947	0,88295	0,531709	118	0,88295	-0,46947	-1,880726	208	-0,4695	-0,88295	0,531709	298	-0,883	0,46947	-1,880726
29	0,48481	0,87462	0,554309	119	0,87462	-0,48481	-1,804048	209	-0,4848	-0,87462	0,554309	299	-0,8746	0,48481	-1,804048
30	0,5	0,86603	0,57735	120	0,86603	-0,5	-1,732051	210	-0,5	-0,86603	0,57735	300	-0,866	0,5	-1,732051
31	0,51504	0,85717	0,600861	121	0,85717	-0,51504	-1,664279	211	-0,515	-0,85717	0,600861	301	-0,8572	0,51504	-1,664279
32	0,52992	0,84805	0,624869	122	0,84805	-0,52992	-1,600335	212	-0,5299	-0,84805	0,624869	302	-0,8481	0,52992	-1,600335
33	0,54464	0,83867	0,649408	123	0,83867	-0,54464	-1,539865	213	-0,5446	-0,83867	0,649408	303	-0,8387	0,54464	-1,539865
34	0,55919	0,82904	0,674509	124	0,82904	-0,55919	-1,482561	214	-0,5592	-0,82904	0,674509	304	-0,829	0,55919	-1,482561
35	0,57358	0,81915	0,700208	125	0,81915	-0,57358	-1,428148	215	-0,5736	-0,81915	0,700208	305	-0,8192	0,57358	-1,428148
36	0,58779	0,80902	0,726543	126	0,80902	-0,58779	-1,376382	216	-0,5878	-0,80902	0,726543	306	-0,809	0,58779	-1,376382
37	0,60182	0,79864	0,753554	127	0,79864	-0,60182	-1,327045	217	-0,6018	-0,79864	0,753554	307	-0,7986	0,60182	-1,327045
38	0,61566	0,78801	0,781286	128	0,78801	-0,61566	-1,279942	218	-0,6157	-0,78801	0,781286	308	-0,788	0,61566	-1,279942
39	0,62932	0,77715	0,809784	129	0,77715	-0,62932	-1,234897	219	-0,6293	-0,77715	0,809784	309	-0,7772	0,62932	-1,234897
40	0,64279	0,76604	0,8391	130	0,76604	-0,64279	-1,191754	220	-0,6428	-0,76604	0,8391	310	-0,766	0,64279	-1,191754
41	0,65606	0,75471	0,869287	131	0,75471	-0,65606	-1,150368	221	-0,6561	-0,75471	0,869287	311	-0,7547	0,65606	-1,150368
42	0,66913	0,74314	0,900404	132	0,74314	-0,66913	-1,110613	222	-0,6691	-0,74314	0,900404	312	-0,7431	0,66913	-1,110613
43	0,682	0,73135	0,932515	133	0,73135	-0,682	-1,072369	223	-0,682	-0,73135	0,932515	313	-0,7314	0,682	-1,072369
44	0,69466	0,71934	0,965689	134	0,71934	-0,69466	-1,03553	224	-0,6947	-0,71934	0,965689	314	-0,7193	0,69466	-1,03553
45	0,70711	0,70711	1	135	0,70711	-0,70711	-1	225	-0,7071	-0,70711	1	315	-0,7071	0,70711	-1
46	0,71934	0,69466	1,03553	136	0,69466	-0,71934	-0,965689	226	-0,7193	-0,69466	1,03553	316	-0,6947	0,71934	-0,965689
47	0,73135	0,682	1,072369	137	0,682	-0,73135	-0,932515	227	-0,7314	-0,682	1,072369	317	-0,682	0,73135	-0,932515
48	0,74314	0,66913	1,110613	138	0,66913	-0,74314	-0,900404	228	-0,7431	-0,66913	1,110613	318	-0,6691	0,74314	-0,900404
49	0,75471	0,65606	1,150368	139	0,65606	-0,75471	-0,869287	229	-0,7547	-0,65606	1,150368	319	-0,6561	0,75471	-0,869287
50	0,76604	0,64279	1,191754	140	0,64279	-0,76604	-0,8391	230	-0,766	-0,64279	1,191754	320	-0,6428	0,76604	-0,8391
51	0,77715	0,62932	1,234897	141	0,62932	-0,77715	-0,809784	231	-0,7772	-0,62932	1,234897	321	-0,6293	0,77715	-0,809784
52	0,78801	0,61566	1,279942	142	0,61566	-0,78801	-0,781286	232	-0,788	-0,61566	1,279942	322	-0,6157	0,78801	-0,781286
53	0,79864	0,60182	1,327045	143	0,60182	-0,79864	-0,753554	233	-0,7986	-0,60182	1,327045	323	-0,6018	0,79864	-0,753554
54	0,80902	0,58779	1,376382	144	0,58779	-0,80902	-0,726543	234	-0,809	-0,58779	1,376382	324	-0,5878	0,80902	-0,726543
55	0,81915	0,57358	1,428148	145	0,57358	-0,81915	-0,700208	235	-0,8192	-0,57358	1,428148	325	-0,5736	0,81915	-0,700208
56	0,82904	0,55919	1,482561	146	0,55919	-0,82904	-0,674509	236	-0,829	-0,55919	1,482561	326	-0,5592	0,82904	-0,674509
57	0,83867	0,54464	1,539865	147	0,54464	-0,83867	-0,649408	237	-0,8387	-0,54464	1,539865	327	-0,5446	0,83867	-0,649408
58	0,84805	0,52992	1,600335	148	0,52992	-0,84805	-0,624869	238	-0,8481	-0,52992	1,600335	328	-0,5299	0,84805	-0,624869
59	0,85717	0,51504	1,664279	149	0,51504	-0,85717	-0,600861	239	-0,8572	-0,51504	1,664279	329	-0,515	0,85717	-0,600861
60	0,86603	0,5	1,732051	150	0,5	-0,86603	-0,57735	240	-0,866	-0,5	1,732051	330	-0,5	0,86603	-0,57735
61	0,87462	0,48481	1,804048	151	0,48481	-0,87462	-0,554309	241	-0,8746	-0,48481	1,804048	331	-0,4848	0,87462	-0,554309
62	0,88295	0,46947	1,880726	152	0,46947	-0,88295	-0,531709	242	-0,883	-0,46947	1,880726	332	-0,4695	0,88295	-0,531709
63	0,89101	0,45399	1,962611	153	0,45399	-0,89101	-0,509525	243	-0,891	-0,45399	1,962611	333	-0,454	0,89101	-0,509525
64	0,89879	0,43837	2,050304	154	0,43837	-0,89879	-0,487733	244	-0,8988	-0,43837	2,050304	334	-0,4384	0,89879	-0,487733
65	0,90631	0,42262	2,144507	155	0,42262	-0,90631	-0,466308	245	-0,9063	-0,42262	2,144507	335	-0,4226	0,90631	-0,466308
66	0,91355	0,40674	2,246037	156	0,40674	-0,91355	-0,445229	246	-0,9136	-0,40674	2,246037	336	-0,4067	0,91355	-0,445229
67	0,9205	0,39073	2,355852	157	0,39073	-0,9205	-0,424475	247	-0,9205	-0,39073	2,355852	337	-0,3907	0,9205	-0,424475
68	0,92718	0,37461	2,475087	158	0,37461	-0,92718	-0,404026	248	-0,9272	-0,37461	2,475087	338	-0,3746	0,92718	-0,404026
69	0,93358	0,35837	2,605089	159	0,35837	-0,93358	-0,383864	249	-0,9336	-0,35837	2,605089	339	-0,3584	0,93358	-0,383864
70	0,93969	0,34202	2,747477	160	0,34202	-0,93969	-0,36397	250	-0,9397	-0,34202	2,747477	340	-0,342	0,93969	-0,36397
71	0,94552	0,32557	2,904211	161	0,32557	-0,94552	-0,344328	251	-0,9455	-0,32557	2,904211	341	-0,3256	0,94552	-0,344328
72	0,95106	0,30902	3,077684	162	0,30902	-0,95106	-0,32492	252	-0,9511	-0,30902	3,077684	342	-0,309	0,95106	-0,32492
73	0,9563	0,29237	3,270853	163	0,29237	-0,9563	-0,305731	253	-0,9563	-0,29237	3,270853	343	-0,2924	0,9563	-0,305731
74	0,96126	0,27564	3,487414	164	0,27564	-0,96126	-0,286745	254	-0,9613	-0,27564	3,487414	344	-0,2756	0,96126	-0,286745
75	0,96593	0,25882	3,732051	165	0,25882	-0,96593	-0,267949	255	-0,9659	-0,25882	3,732051	345	-0,2588	0,96593	-0,267949
76	0,9703	0,24192	4,010781	166	0,24192	-0,9703	-0,249328	256	-0,9703	-0,24192	4,010781	346	-0,2419	0,9703	-0,249328
77	0,97437	0,22495	4,331476	167	0,22495	-0,97437	-0,230868	257	-0,9744	-0,22495	4,331476	347	-0,225	0,97437	-0,230868
78	0,97815	0,20791	4,70463	168	0,20791	-0,97815	-0,212557	258	-0,9782	-0,20791	4,70463	348	-0,2079	0,97815	-0,212557
79	0,98163	0,19081	5,144554	169	0,19081	-0,98163	-0,19438	259	-0,9816	-0,19081	5,144554	349	-0,1908	0,98163	-0,19438
80	0,98481	0,17365	5,671282	170	0,17365	-0,98481	-0,176327	260	-0,9848	-0,17365	5,671282	350	-0,1737	0,98481	-0,176327
81	0,98769	0,15643	6,313752	171	0,15643	-0,98769	-0,158384	261	-0,9877	-0,15643	6,313752	351	-0,1564	0,98769	-0,158384
82	0,99027	0,13917	7,11537	172	0,13917	-0,99027	-0,140541	262	-0,9903	-0,13917	7,11537	352	-0,1392	0,99027	-0,140541
83	0,99255	0,12187	8,144346	173	0,12187	-0,99255	-0,122785	263	-0,9926	-0,12187	8,144346	353	-0,1219	0,99255	-0,122785
84	0,99452	0,10453	9,514364	174	0,10453	-0,99452	-0,105104	264	-0,9945	-0,10453	9,514364	354	-0,1045	0,99452	-0,105104
85	0,99619	0,08716	11,430052	175	0,08716	-0,99619	-0,087489	265	-0,9962	-0,08716	11,430052	355	-0,0872	0,99619	-0,087489
86	0,99756	0,06976	14,300666	176	0,06976	-0,99756	-0,069927	266	-0,9976	-0,06976	14,300666	356	-0,0698	0,99756	-0,069927
87	0,99863	0,05234	19,081137	177	0,05234	-0,99863	-0,052408	267	-0,9986	-0,05234	19,081137	357	-0,0523	0,99863	-0,052408
88	0,99939	0,0349	28,636253	178	0,0349	-0,99939	-0,034921	268	-0,9994	-0,0349	28,636253	358	-0,0349	0,99939	-0,034921
89	0,99985	0,01745	57,289962	179	0,01745	-0,99985	-0,017455	269	-0,9999	-0,01745	57,289962	359	-0,0175	0,99985	-0,017455
												360	0	1	0

Fonte: criado pelo pesquisador

Note que tabela 3, a qual é denominada de ângulos notáveis é bem mais simples, e na natureza é observável vários exemplos de utilização desses poucos ângulos, dessa forma é pertinente a aprendizagem dessa tabela.

A análise dos ângulos de qualquer triângulo é simplificada pelo fato que qualquer obtusângulo pode ser convertido para um acutângulo, de tal maneira que o ângulo sempre fique entre 0° e 90°, muitas vezes tornando-se um ângulo notável, para isso existem fórmulas simplificadoras:

Dado um ângulo $\alpha > 90°$ (ângulo obtuso, nomeado por Euclides (1944, p.5) "Ângulo obtuso é o que é maior, que o ângulo reto") diz-se que:

1) $sen\alpha = sen(180° - \alpha)$

O seno de α (ângulo obtuso) possui o mesmo valor do seno do suplemento de α

2) $cos\alpha = -cos(180° - \alpha)$

O cosseno de α (ângulo obtuso) é o oposto do valor do cosseno do suplemento de α

Com essa informação, a importância da memorização dos valores da tabela dos valores das funções trigonométricas é reduzida ao ponto de apenas manter a tabela próxima frente a necessidade de utilização da mesma.

5.3 Círculo trigonométrico

O entendimento da trigonometria pode ser facilitado, para isso **basta dispor todos os 360° em torno de um círculo**, sendo que o ângulo mais à direita possui a medida de 0° e a partir dele em sentido anti-horário os ângulos vão aumentando até fechar o círculo.

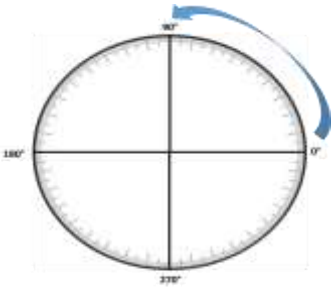

Figura 25 - Criação do círculo trigonométrico.
Fonte: criado pelo pesquisador

Esse círculo é construído escolhendo um ponto qualquer, que será chamado de origem, e a partir dele é traçado um seguimento de reta com tamanho de 1, assim esse seguimento move-se em sentido anti-horário, criando assim os ângulos. Contudo esse movimento tem alguns marcos, sendo esses:

- De 0° a 90°$(\frac{\pi}{2})$ é o **primeiro quadrante**.
- Acima de 90°$(\frac{\pi}{2})$ até 180°(π) é o **segundo quadrante**.
- Acima de 180°(π) até 270°$(\frac{3\pi}{2})$ é o **terceiro quadrante**.
- Acima de 270°$(\frac{3\pi}{2})$ até 360°(2π) é o **quarto quadrante**.

Figura 26 - Delimitação dos quadrantes.
Fonte: criado pelo pesquisador

Os marcos apresentados servirão de pontos de referência para toda a trigonometria.

5.4 Análise do Sinal das Funções Trigonométricas

A análise da tabela 4 é perspicaz, no entanto por existirem diversas informações nela é interessante resumir os dados, dessa forma a análise dos sinais das funções seno, cosseno e tangente vem como uma forma de sintetizar em apenas 4 grupos os valores.

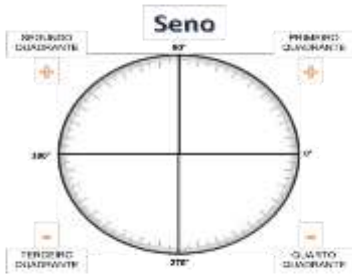

Figura 27 - Análise do sinal - SENO.
Fonte: criado pelo pesquisador

Figura 28 - Análise do sinal - COSSENO.
Fonte: criado pelo pesquisador

Figura 29 - Análise do sinal - TANGENTE.
Fonte: criado pelo pesquisador

A função seno sempre será positiva no primeiro e no segundo quadrante, e será negativa no terceiro e no quarto.

A função cosseno sempre será positiva no primeiro e no quarto quadrante, e será negativa no segundo e no terceiro.

A função tangente sempre será positiva no primeiro e no terceiro quadrante, e será negativa no segundo e no quarto.

Os sinais dos valores das funções são obtidos devido que o círculo trigonométrico é sobreposto no plano cartesiano, assim os seguimentos de reta horizontais que partem da origem se sobrepõe ao eixo das abcissas, enquanto os seguimentos de reta verticais que partem da origem se sobrepõem ao eixo das ordenadas, com isso, sabendo que o círculo foi construído movimentando um seguimento de reta de tamanho 1, obtém-se que a extremidade à direita no eixo das abcissas, equivalente aos ângulos de 0° e 360°, possui valor de abcissa 1 e o valor de ordenada 0, já a extremidade superior no eixo das ordenadas, equivalente ao ângulo de 90°, possui o valor de abcissa

0 e valor de ordenada 1, já a extremidade à esquerda no eixo das abcissas, equivalente ao ângulo de 180°, possui valor de abcissa -1 e o valor de ordenada 0, já a extremidade inferior no eixo das ordenadas, equivalente ao ângulo de 270°, possui o valor de abcissa 0 e valor de ordenada -1.

5.5 Análise Das Medidas Das Funções Trigonométricas

Todavia, por mais importante que a análise do sinal seja, ela é incompleta sem o devido valor, para encontrar os valores é necessário incluir um triângulo retângulo dentro do círculo trigonométrico onde a hipotenusa desse triângulo e o cateto adjacente se encontram na origem do círculo, formando assim um ângulo α, logo o valor do seno é a medida que pode ser visualizada sobre o eixo das ordenadas, já o valor do cosseno é a medida que pode ser visualizada sobre o eixo das abcissas, e o valor da tangente é a medida obtida do seguimento de reta que tangencia o círculo trigonométrico, sendo perpendicular ao eixo x, até o prolongamento da hipotenusa do triângulo retângulo.

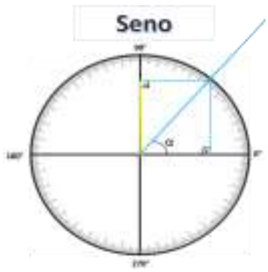

Figura 30 - Análise da medida - SENO.
Fonte: criado pelo pesquisador

Figura 31 - Análise da medida - COSSENO.
Fonte: criado pelo pesquisador

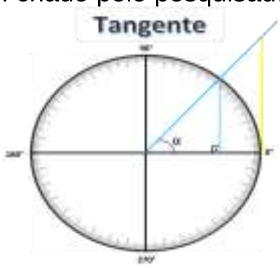

Figura 32 - Análise da medida - TANGENTE.
Fonte: criado pelo pesquisador

Os valores e sinais das razões trigonométricas auxiliam muito na obtenção de resultados matemáticos, eis um exemplo:

Dado um triângulo retângulo que possui o cateto adjacente no valor de 10 cm e um ângulo de 30° calcule os valores dos demais lados:

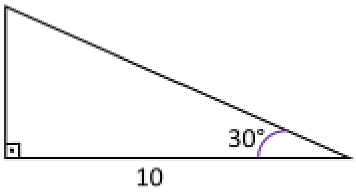

Figura 33 - Figura 33 – Triângulo retângulo - EXERCÍCIO.
Fonte: criado pelo pesquisador

Resposta: como é informado o valor do cateto adjacente, a função mais adequada para esta questão é a função cosseno:

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

Fazendo as devidas substituições obtém-se:

$$cos\ 30° = \frac{10}{x}$$

Consultando na tabela o valor de cosseno de 30°, ou utilizando a tabela de ângulos notáveis:

$$\frac{1}{2} = \frac{10}{x} \rightarrow x = 20$$

Descoberto o valor da hipotenusa, agora basta aplicar o teorema de Pitágoras para descobrir o valor do cateto oposto:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Fazendo as devidas substituições obtém-se:

$$20^2 = 10^2 + c^2 \rightarrow 400 = 100 + c^2 \rightarrow c^2 = 400 - 100 \rightarrow c = \sqrt{81} \rightarrow c = 17{,}3205$$

Um dos meios mais eficazes de aprender matemática é resolvendo questões, dessa forma o aluno coloca em prática o conteúdo recém-aprendido efetivando-o de modo mais satisfatório.

5.6 Análise do Gráfico das Funções Trigonométricas

As nomenclaturas relação, razão e função estão sendo equivalentes, e aqui são dispostas para evitar repetitividade dos termos, no entanto ao dizer função remete ao conceito de mesmo nome pré-estabelecido, de tal forma é necessário a explicação do comportamento de cada uma das funções trigonométricas:

É pertinente lembrar que as funções estão inseridas no círculo trigonométrico, e esse foi criado a partir de um segmento de reta de tamanho 1, e possui 360° ou 2π, nesse sentido pode-se observar que a função ao dar uma volta completa acaba incidindo no ponto de início, e caso seja necessário estabelecer um ângulo superior a 360° (2π), os valores serão equivalentes aos iniciais: uma função trigonométrica aplicada ao ângulo de 90° $(\frac{\pi}{2})$ possui mesmo resultado que se aplicada ao ângulo de 450°$(\frac{5\pi}{2})$. Assim, pode-se afirmar que as funções trigonométricas são funções periódicas.

Função seno $f(\alpha) = sen\ \alpha$

Restrita pelos valores do círculo trigonométrico a função seno possui uma imagem que fica no intervalo: $[-1{,}1]$, isso devido que o valor de qualquer seno não pode ser maior que 1 ou menor que -1. $Im = [-1{,}1]$

No que diz respeito ao domínio da função seno, esse é o conjunto dos números reais, visto que o $sen\ \alpha$ é definido para qualquer α real. $D = \mathbb{R}$

No plano cartesiano, a função seno se comporta do seguinte modo:

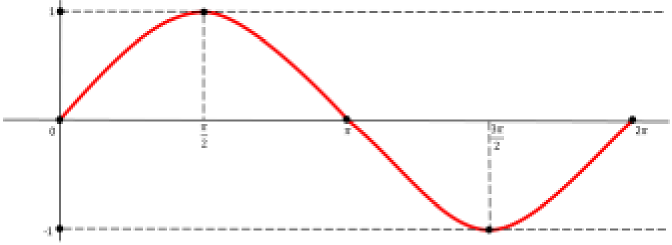

Figura 34 - Análise do gráfico - SENO.
Fonte: criado pelo pesquisador

Função cosseno $f(\alpha) = cos\ \alpha$

A função cosseno é muito parecida com a função seno, pois também é restrita pelos valores do círculo trigonométrico, e a sua imagem fica no intervalo: $[-1,1]$, o motivo para isso é que o valor de qualquer cosseno não pode ser maior que 1 ou menor que -1. $Im = [-1,1]$

No que diz respeito ao domínio da função cosseno, esse é o conjunto dos números reais, visto que o $cos\ \alpha$ é definido para qualquer α real.. $D = \mathbb{R}$

No plano cartesiano, a função cosseno se comporta do seguinte modo:

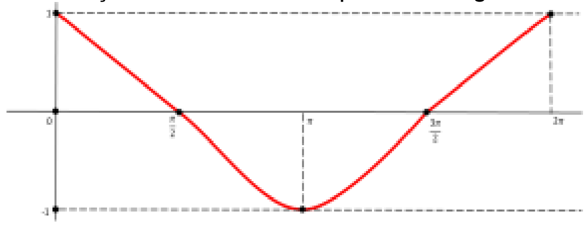

Figura 35 - Análise do gráfico - COSSENO.
Fonte: criado pelo pesquisador

Função tangente $f(\alpha) = tg\ \alpha$

A função tangente se difere das demais, pois ela não é limitada pelos valores do círculo trigonométrico. Por ser uma função ilimitada, a imagem da tangente pode ser qualquer número negativo, ou qualquer número positivo, $Im =]-\infty, \infty[$

A existência da função tangente só é possível quando o valor α for diferente de 90° ou 270°, que também pode ser visto quando o $sen\ \alpha = 1$ ou o $cos\ \alpha = 0$, assim é necessário definir o domínio dessa função: $D = \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ sendo $k = números\ de\ voltas\ no\ círculo\ trigonométrico$

No plano cartesiano, a função tangente se comporta do seguinte modo:

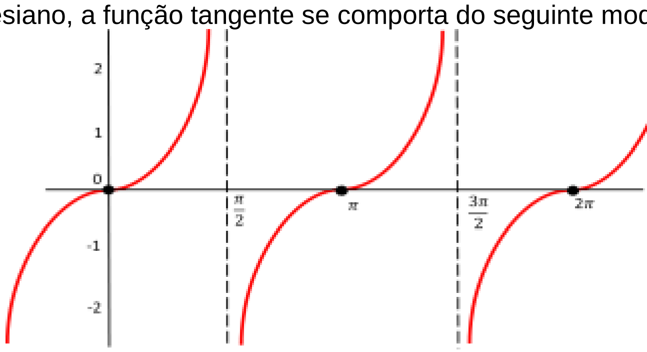

Figura 36 - Análise do gráfico - TANGENTE.
Fonte: criado pelo pesquisador

Ao observar os gráficos é necessário a compreensão que essas funções são periódicas, ou seja, o comportamento no gráfico se repetirá quando os valores no círculo trigonométrico forem equivalentes.

5.7 Outras Funções Trigonométricas

O entendimento dessas três primeiras funções trigonométricas é fundamental para o avanço da trigonometria, isso pode ser visto nas próximas três funções: secante, cossecante e cotangente:

A função secante é obtida através do inverso do cosseno, desde que o valor do cosseno não seja zero.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

De um modo mais textual, a secante é definida por Santos e Viglioni (2011, p. 109) como: “Uma reta é tangente a um círculo se possui um único ponto em comum. O ponto em comum é denominado de ponto de tangência. Se uma reta intersecta um círculo em dois pontos, ela é denominada reta secante”

A função cotangente é obtida através do inverso da tangente, desde que o valor da tangente não seja zero.

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$$

No entanto a cotangente também pode ser definida por:

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}$$

Isso acontece, pois, a própria tangente pode ser definida pela razão do seno pelo cosseno, ao invés do cateto oposto pelo cateto adjacente, observe:

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \rightarrow \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \cdot 1 \rightarrow \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \cdot \frac{hipotenusa}{hipotenusa}$$
$$\rightarrow \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \cdot \frac{hipotenusa}{cateto\ adjacente} \rightarrow \frac{\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}}{\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}} \rightarrow \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$$

Logo:

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$$

Portanto:

$$cotg\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}$$

A função cossecante é obtida através do inverso do seno, desde que o valor do seno não seja zero.

$$\text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha}$$

Conhecendo as definições dessas três novas funções trigonométricas, é pertinente o estudo dos sinais das mesmas, assim:

A função secante sempre será positiva no primeiro e no quarto quadrante, e será negativa no segundo e no terceiro.

A função cotangente sempre será positiva no primeiro e no terceiro quadrante, e será negativa no segundo e no quarto.

A função cossecante sempre será positiva no primeiro e no segundo quadrante, e será negativa no terceiro e no quarto.

A apresentação dessas funções de modo visual se dá utilizando o mesmo círculo trigonométrico, assim as funções secante, cotangente e cossecante podem ser compreendidas como os valores de seguimentos de reta, sendo a secante aquele que compreende a distância da origem até a reta tangente, já a cotangente é a o seguimento de reta paralelo ao eixo x obtido que toca o círculo trigonométrico em um único ponto sobre o eixo y, e por fim a cossecante á o seguimento de reta que compreende a distância da origem até a cotangente.

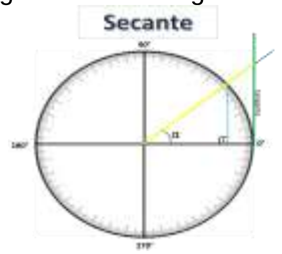

Figura 37 - Análise da medida - SECANTE.
Fonte: criado pelo pesquisador

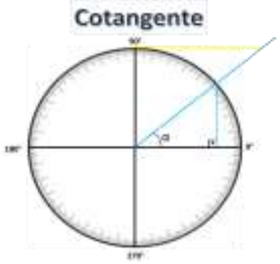

Figura 38 - Análise da medida - COTANGENTE.
Fonte: criado pelo pesquisador

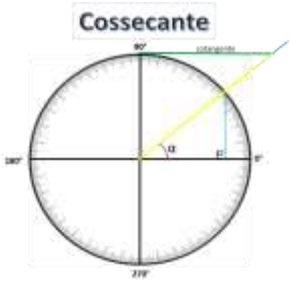

Figura 39 - Análise da medida - COSSECANTE.
Fonte: criado pelo pesquisador

Tabela 5 - Resumo das principais razões para obtenção das funções trigonométricas.

Nome da Função	Razão 1	Razão 2
seno	$\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$	
cosseno	$\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$	
tangente	$\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$	$\frac{seno}{cosseno}$
secante	$\frac{hipotenusa}{cateto\ adjacente}$	$\frac{1}{cosseno}$
cotangente	$\frac{cosseno}{seno}$	$\frac{1}{tangente}$
cossecante	$\frac{hipotenusa}{cateto\ oposto}$	$\frac{1}{seno}$

Fonte: criado pelo pesquisador

As funções secante, cotangente e cossecante muitas vezes são deixadas de lado por professores durante o ensino escolar, o que é um erro, pois tais funções possuem igual importância que as seno, cosseno e tangente.

5.8 Relação Fundamental da Trigonometria

Essas seis funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, secante, cotangente e cossecante) foram obtidas com o uso do círculo trigonométrico, no entanto o uso do círculo trigonométrico vai além, com ele é possível encontrar uma brilhante relação: **a relação fundamental da trigonometria.**

Para visualizar essa relação é necessário o uso do teorema de Pitágoras, note na imagem a seguir que o valor do seno é o mesmo que um cateto do triangulo retângulo, e que o valor do cosseno é equivalente ao outro cateto, assim:

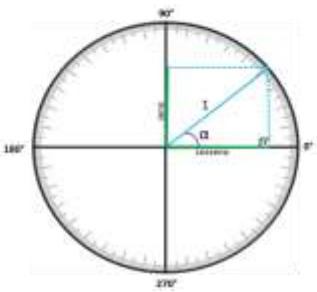

Figura 40 - Pitágoras no círculo trigonométrico.
Fonte: criado pelo pesquisador

Aplicando Pitágoras nesse triângulo retângulo obtém-se:
$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

Na vida escolar, quando aparece a palavra “fundamental” é perspicaz ter uma atenção maior, visto que o que envolve tal palavra determina uma importância maior no conteúdo, seja como fonte de criação de novos dados, ou seja como complemento, assim entender a Relação Fundamental da Trigonometria é essencial.

5.9 Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

O triângulo retângulo foi uma ferramenta essencial para o encontro da relação fundamental e das funções trigonométricas, no entanto, a trigonometria não se restringe à apenas esse tipo de triângulo. Para localizar ângulos ou lados em qualquer triângulo, é necessário que sejam aplicadas as seguintes leis:

- Lei dos senos
- Lei dos cossenos

1) A lei dos senos é aplicada em acutângulos e obtusângulos, e ela é entendida como uma proporção de um lado do triângulo com seno do ângulo oposto a esse lado, ou seja, dado o triangulo ABC, com o lado a opondo-se ao vértice A, o lado b opondo-se ao vértice B, e o lado c opondo-se ao vértice C, obtém-se:

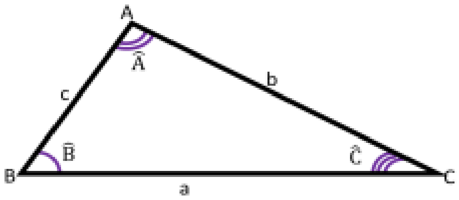

Figura 41 - Triângulo exemplo.
Fonte: criado pelo pesquisador

Aplicando a Lei dos senos:

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}$$

Tal lei aplicada a triângulos com apenas um lado e os valores dos ângulos conhecidos gera o resultado dos outros lados dos triângulos. Observe o triângulo a seguir, onde são conhecidos dois ângulos e o lado c.

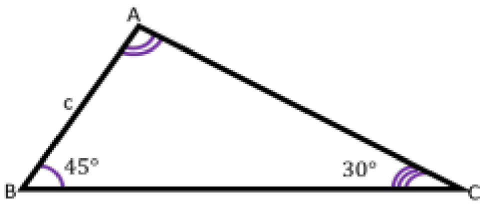

Figura 42 - Triângulo exemplo – lei dos senos.
Fonte: criado pelo pesquisador

Aplicando a Lei dos senos com o intuito de descobrir os outros lados:

$$\frac{b}{sen\ 45°} = \frac{c}{sen\ 30°} \rightarrow b = \frac{sen\ 45°}{sen\ 30°} \cdot c$$

Como os ângulos de 45° e 30° são ângulos notáveis, então basta substituir:

$$b = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot c \rightarrow b = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c \rightarrow b = c\sqrt{2}$$

De forma análoga é possível encontrar o valor do lado a, mas para isso é necessário conhecer o ângulo Â, este é obtido do somatório dos ângulos internos de um triangulo:

$$180° = 45° + 30° + \hat{A} \rightarrow \hat{A} = 105°$$

Aplicando a Lei dos senos:

$$\frac{a}{sen\ 105°} = \frac{c}{sen\ 30°} \rightarrow a = \frac{sen\ 105°}{sen\ 30°} \cdot c$$

Utilizando a tabela dos valores das funções trigonométricas ângulo a ângulo:

$$a = \frac{0{,}96593}{0{,}5} \cdot c \rightarrow a = 1{,}93186 \cdot c$$

A lei dos cossenos, também é aplicada em acutângulos e obtusângulos, e é facilmente compreendida como o quadrado de qualquer lado do triângulo é igual à soma dos quadrados dos demais lados subtraindo o dobro da multiplicação entre si desses lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles, em suma, a lei dos cossenos é:

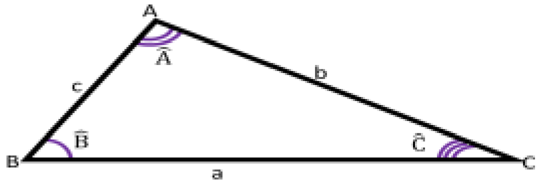

Figura 43 - Triângulo exemplo 1– lei dos cossenos.
Fonte: criado pelo pesquisador

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\hat{C}$$

Utiliza-se muito a lei dos cossenos quando em um triangulo qualquer se tem os valores de todos os lados e deseja obter a medida de algum ângulo, ou então quando há conhecimento apenas de dois lados e um ângulo e deseja descobrir a medida do terceiro lado, observe alguns exemplos:

1° exemplo: calcular o ângulo $\hat{A}$ do triangulo a seguir:

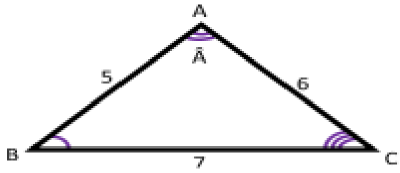

Figura 44 - Triângulo exemplo 2– lei dos cossenos.
Fonte: criado pelo pesquisador

Aplicando a lei dos cossenos:

$$7^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot cos\hat{A}$$

Substituindo os valores utilizando a tabela de valores das funções trigonométricas:

$$49 = 36 + 25 - 60 \cdot cos\hat{A} \rightarrow -12 = -60 \cdot cos\hat{A} \rightarrow cos\hat{A} = \frac{12}{60} \rightarrow cos\hat{A} = 0{,}2$$

Logo, com o auxílio da tabela de valores das funções trigonométricas:

$$cos\hat{A} = 0{,}2 \rightarrow \hat{A} = 78°$$

2° exemplo: Calcular o lado b do triangulo a seguir:

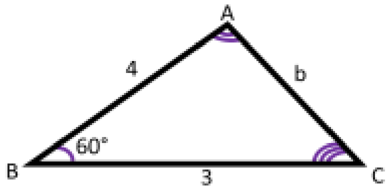

Figura 45 - Triângulo exemplo 3– lei dos cossenos.
Fonte: criado pelo pesquisador

Aplicando a lei dos cossenos:

$$b^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot cos60°$$

Pelo ângulo de 60° ser um ângulo notável, é fácil substituir:

$$b^2 = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow b^2 = 25 - 12 \rightarrow b^2 = 13 \rightarrow b = \sqrt{13}$$

Infelizmente, muitos alunos saem da escola sem nunca terem visto os conceitos de lei dos senos e lei dos cossenos, isso devido a diversos fatores, como a má distribuição das temáticas e o pouco tempo destinando ao ensino da matemática.

5.10 Conversão e Transformação Trigonométricas

É importante notar que quando o ângulo for maior que 90° é pertinente convertê-lo para um ângulo menor que 90°, para isso: Dado um ângulo $\alpha > 90°$ (ângulo obtuso) diz-se que:

$sen\alpha = sen(180° - \alpha)$

O seno de α (ângulo obtuso) possui o mesmo valor do seno do suplemento de α

$cos\alpha = -cos(180° - \alpha)$

Tal conversão facilita muito no trato de obtusângulos, visto que o ângulo obtuso é convertido em um ângulo agudo, nomeado por Euclides (1944, p.5) "Ângulo agudo é o que é menor, que o ângulo reto", mas, muitas vezes é necessário subtrair um ângulo não do ângulo raso, mas sim de um ângulo qualquer, do mesmo modo, esporadicamente é necessário adicionar um ângulo a outro, tais operações recebem o nome de: transformações trigonométricas.

As transformações trigonométricas são divididas em duas: a de adição de arcos, e de subtração de arcos, sendo possível calcular o seno, o cosseno ou a tangente da adição ou da subtração.

O cálculo do seno comum é expresso por: $sen\ \hat{A}$, no entanto adicionando um arco de ângulo $\hat{B}$, o seno da adição será expresso por: $sen\ (\hat{A} + \hat{B})$, tal adição não pode ser calculada como uma soma comum, mas sim, para calculá-la é necessário aplicar a fórmula abaixo:

$sen\ (\hat{A} + \hat{B}) = sen\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{B} + cos\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{B}$

É pertinente observar que quando o $\hat{A} = \hat{B}$ obtém-se um arco duplo, dessa forma a fórmula:

$sen\ (\hat{A} + \hat{A}) = sen\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{A} + cos\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{A}$

Pode ser expressa como:

$sen\ 2 \cdot \hat{A} = 2 \cdot sen\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{A}$

Sobre a subtração de arcos, o seno da subtração será expresso por: $sen\ (\hat{A} - \hat{B})$, tal subtração não pode ser calculada como uma diferença comum, mas sim para calculá-la é necessário aplicar a fórmula abaixo:

$sen\ (\hat{A} - \hat{B}) = sen\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{B} - cos\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{B}$

Já o cálculo do cosseno comum é expresso por: $cos\ \hat{A}$, no entanto adicionando um arco de ângulo $\hat{B}$, o cosseno da adição será expresso por: $cos\ (\hat{A} + \hat{B})$, tal adição não pode ser calculada como uma soma comum, mas sim para calculá-la é necessário aplicar a fórmula abaixo:

$cos\ (\hat{A} + \hat{B}) = cos\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{B} - sen\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{B}$

É pertinente observar que quando o $\hat{A} = \hat{B}$ obtém-se um arco duplo, dessa forma a fórmula:

$cos\ (\hat{A} + \hat{A}) = cos\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{A} - sen\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{A}$

Pode ser expressa como:

$cos\ 2 \cdot \hat{A} = cos^2\ \hat{A} - sen^2\ \hat{A}$

Sobre a subtração de arcos, o cosseno da subtração será expresso por: $cos\ (\hat{A} - \hat{B})$, tal subtração não pode ser calculada como uma diferença comum, mas sim, para calculá-la é necessário aplicar a fórmula abaixo:

$cos\ (\hat{A} - \hat{B}) = cos\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{B} + sen\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{B}$

Por fim, o cálculo da tangente comum é expresso por: $tg\ \hat{A}$, no entanto adicionando um arco de ângulo $\hat{B}$, a tangente da adição será expressa por: $tg\ (\hat{A} + \hat{B})$, tal adição não pode ser calculada como uma soma comum, mas sim para calculá-la é necessário aplicar a fórmula abaixo:

$$tg\ (\hat{A} + \hat{B}) = \frac{tg\ \hat{A} + tg\ \hat{B}}{1 - tg\ \hat{A} \cdot tg\ \hat{B}}$$

É pertinente observar que quando o $\hat{A} = \hat{B}$ obtém-se um arco duplo, dessa forma a fórmula:

$$tg\ (\hat{A} + \hat{A}) = \frac{tg\ \hat{A} + tg\ \hat{A}}{1 - tg\ \hat{A} \cdot tg\ \hat{A}}$$

Pode ser expressa como:

$$tg\ 2 \cdot \hat{A} = \frac{2 \cdot tg\ \hat{A}}{1 - tg^2 \hat{A}}$$

Sobre a subtração de arcos, o cosseno da subtração será expresso por: $cos\ (\hat{A} - \hat{B})$, tal subtração não pode ser calculada como uma diferença comum, mas sim para calculá-la é necessário aplicar a fórmula abaixo:

$$tg\ (\hat{A} - \hat{B}) = \frac{tg\ \hat{A} - tg\ \hat{B}}{1 + tg\ \hat{A} \cdot tg\ \hat{B}}$$

Lembrando que no caso da tangente, como não existe tangente de 90° $(\frac{\pi}{2})$ e nem de 270° $(\frac{3\pi}{2})$, vide tabela dos valores das funções trigonométricas, quando na adição de arcos: $tg\ (\hat{A}+\hat{B}) = tg\ (90°)\ ou\ tg\ (\hat{A}+\hat{B}) = tg\ (270°)$ ou na subtração: $tg\ (\hat{A}-\hat{B}) = tg\ (90°)\ ou\ tg\ (\hat{A}-\hat{B}) = tg\ (270°)$ não existirá resultado. Do mesmo modo não existirá resultado, devido a ser um denominador, quando: $1 - tg\ \hat{A} \cdot tg\ \hat{B} = 0$ ou $1 + tg\ \hat{A} \cdot tg\ \hat{B} = 0$

Tabela 6 - Resumo das relações trigonométricas.

Relação	Fórmula
Relação Fundamental da Trigonometria	$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
Lei dos Senos	$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}$
Lei dos Cossenos	$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\hat{A}$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\hat{B}$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\hat{C}$
Seno em obtusângulos	$sen\alpha = sen(180° - \alpha)$
Cosseno em obtusângulos	$cos\alpha = -cos(180° - \alpha)$
Adição de arcos - Seno	$sen\ (\hat{A}+\hat{B}) = sen\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{B} + cos\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{B}$
Subtração de arcos - Seno	$sen\ (\hat{A}-\hat{B}) = sen\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{B} - cos\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{B}$
Adição de arcos - Cosseno	$cos\ (\hat{A}+\hat{B}) = cos\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{B} - sen\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{B}$
Subtração de arcos - Cosseno	$cos\ (\hat{A}-\hat{B}) = cos\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{B} + sen\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{B}$
Adição de arcos - Tangente	$tg\ (\hat{A}+\hat{B}) = \frac{tg\ \hat{A} + tg\ \hat{B}}{1 - tg\ \hat{A} \cdot tg\ \hat{B}}$
Subtração de arcos - Tangente	$tg\ (\hat{A}-\hat{B}) = \frac{tg\ \hat{A} - tg\ \hat{B}}{1 + tg\ \hat{A} \cdot tg\ \hat{B}}$

Fonte: criado pelo pesquisador

O ensino da geometria é milenar, e portanto, já fora explorado diversas vezes (contudo ainda há muito a explorar) e por isso há muitas fórmulas bem definidas para facilitar o aprendizado, mas é ressalvável que não é adequado apenas a memorização das fórmulas.

6 QUADRILÁTERO

Figura geométrica que possui quatro lados.

Os quadriláteros podem ser classificados de acordo como seus lados se posicionam, ou seja, quando seus lados são paralelos dois a dois, ou seja, quando os dois pares de lados que se opõe são paralelos, este recebe o nome de **paralelogramo**, já quando há apenas um único par de lados que se opõe paralelos, diz-se que é um **trapézio**, já quando não há nenhum lado paralelo a outro, trata-se de um **quadrilátero sem nome específico**.

Todo quadrilátero, independentemente da sua classificação, possui o somatório dos ângulos internos totalizando 360°, isso pode ser observado aplicando a fórmula:

$s_i = (4 - 2) \cdot 180°$, logo, o resultado será: $360°$.

Cada quadrilátero é formado pela junção de dois triângulos.

6.1 Paralelogramo

O paralelogramo possui dois pares de lados paralelos, isso significa que seus lados opostos são congruentes, e seus ângulos opostos também são congruentes, e por saber o somatório dos ângulos internos é pertinente observar que todo paralelogramo também possui seus ângulos não opostos como ângulos suplementares, além disso ao traçar as duas diagonais do paralelogramo, o ponto de intersecção das mesmas é o ponto médio do paralelogramo.

$$d = \frac{4 \cdot (4-3)}{2} = 2$$

No entanto os paralelogramos podem ser subdivididos:
Quando o paralelogramo for equilátero ele será denominado de **losango**.
Quando o paralelogramo for equiângulo ele será denominado de **retângulo**.
Quando o paralelogramo for regular ele será denominado de **quadrado**.

Quando dois triângulos retângulos iguais com catetos iguais se unem, formam um quadrado, mas se os catetos forem diferentes, ao se unirem formaram um retângulo, mas se os triângulos forem iguais e forem isósceles, ao se unirem formaram um losango.

6.2 Losango

Todos os lados do losango possuem a mesma medida, e por ser um paralelogramo o losango possui duas diagonais, no entanto as diagonais dos losangos são perpendiculares, ou seja, elas formam um ângulo de 90°.

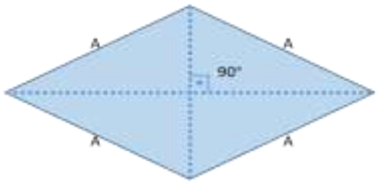

Figura 46 - Losango.
Fonte: criado pelo pesquisador

As diagonais do losango são muito importantes, tanto que para calcular a área dessa figura geométrica é necessário multiplicar a diagonal maior pela diagonal menor e dividir o resultado por dois:

$$\frac{D \cdot d}{2}$$

Na figura 46 pode-se observar que a diagonal depara o losango em dois triângulos isósceles.

6.3 Retângulo

Um retângulo é um paralelogramo que possui os quatro ângulos com o mesmo valor, assim para totalizar os 360° que um paralelogramo possui de ângulos interno, um retângulo tem que possuir os seus quatro ângulos tendo 90° cada.

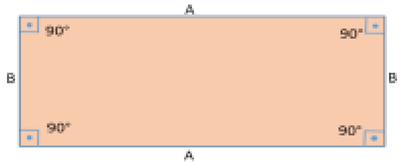

Figura 47 - Retângulo.
Fonte: criado pelo pesquisador

Os lados dos retângulos são importantes para o cálculo da área, tanto que um lado sempre coincidirá com a altura dessa figura, assim a fórmula do cálculo da área é o lado base multiplicado pelo lado altura:

$$B \cdot h$$

Na figura 47, ao traçar uma diagonal essa separará o retângulo em dois triângulos retângulos.

6.4 Quadrado

O quadrado é um paralelogramo especial, pois ele é regular, com isso ele possui seus quatro ângulos congruentes e seus quatro lados com o mesmo valor, assim não é errado dizer que todo quadrado é um retângulo, ou que todo quadrado é um losango

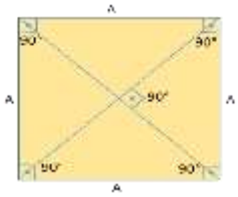

Figura 48 - Quadrado.
Fonte: criado pelo pesquisador

O quadrado é uma figura geométrica regular que possui o cálculo de área simplificado pela multiplicação dos seus lados, e como os lados são iguais, então a fórmula de cálculo será lado ao quadrado:

l^2

Na figura 48, ao traçar uma diagonal essa separará o quadrado em dois triângulos retângulos.

6.5 Trapézio

O quadrilátero que possui apenas um único par de lados opostos paralelos chamados de base maior e base menor, sendo os outros dois lados livres, essa definição de trapézio pode ser expandida e Santos e Viglioni (2011, p.155) o fazem: “Um trapézio é um quadrilátero com dois lados opostos paralelos. Os lados paralelos são chamados de bases”. Existem três tipos de trapézio:

Trapézio isósceles: é aquele que possui os lados, que não são paralelos, congruentes, isso faz com que os ângulos gerados com a base maior sejam iguais entre si, do mesmo modo os ângulos formados com a base menor são iguais entre si, e por consequência as diagonais são congruentes. Esse tipo de trapézio pode ser observado como a junção de um retângulo com dois triângulos retângulos um de cada lado.

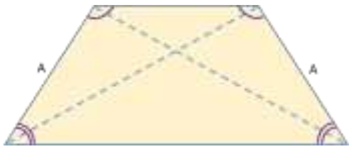

Figura 49 - Trapézio isósceles.
Fonte: criado pelo pesquisador

Trapézio retângulo: é aquele que é formado através da formação que um dos lados que não é paralelo faz com a base maior, e com a base menor, essa formação gera dois ângulos internos de 90°. Esse tipo de trapézio pode ser observado como a junção de um retângulo com um triangulo retângulo.

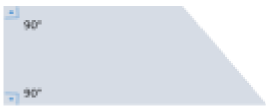

Figura 50 - Trapézio retângulo.
Fonte: criado pelo pesquisador

Trapézio geral: não possui relação específica sobre os lados que não são paralelos, estes podendo assumir qualquer medida e qualquer formação de ângulos com as bases.

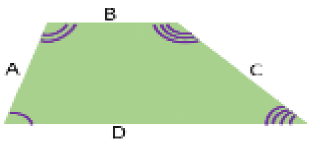

Figura 51 - Trapézio Geral.
Fonte: criado pelo pesquisador

Independentemente do tipo do trapézio o cálculo da área será a soma das medidas da base maior com a base menor multiplicado pela altura dividido por dois:

$$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

O trapézio, também, pode ser dividido em dois triângulos, basta encontrar as diagonais.

6.6 Outros Quadriláteros

Os paralelogramos e os trapézios consistem de polígonos notáveis de quatro lados, no entanto são todos convexos, e os quadriláteros também podem ser côncavos (ou seja, possuir algum ângulo interno obtuso), além disso, mesmo nos côncavos os quadriláteros podem ter os quatro lados diferentes entre si, com seus respectivos ângulos diferentes, assim tais quadriláteros gerais não se restringem as definições dos polígonos notáveis, no entanto estes fazem parte dos quadriláteros gerais.

Figura 52 - Organização dos quadriláteros.
Fonte: criado pelo pesquisador

A representação visual da figura 52 mostra em detalhes o comportamento de todos os quadriláteros.

7 PENTÁGONOS, HEXÁGONOS E DEMAIS POLÍGONOS

A utilização de triláteros e quadriláteros iniciam a construção do conhecimento sobre polígonos, no entanto há polígonos de infinitos lados, assim se faz necessário a apresentação do conhecimento sobre pentágonos e sobre hexágonos e a partir desses a elevação do conhecimento para qualquer polígono.

No entanto no que diz respeito a polígonos de diversos lados, o mais interessante são quando são regulares, ou seja, possuem ângulos congruentes e lados de mesma medida, assim a partir desse ponto serão apresentados apenas polígonos regulares.

7.1 Pentágonos

Figura geométrica que possui cinco lados.

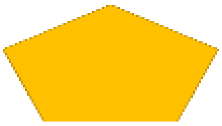

Figura 53 - Pentágono.
Fonte: criado pelo pesquisador

Para saber o valor de cada ângulo interno de um pentágono regular basta aplicar a fórmula: $s_i = (5 - 2) \cdot 180°$, que resulta em $540°$, agora basta dividir pela quantidade de ângulos do pentágono, que resultará em 108° por ângulo interno.

Ainda assim é possível encontrar quantas diagonais esse polígono de cinco lados possui, para isso:

$$d = \frac{5 \cdot (5 - 3)}{2} = 5$$

Já a área do pentágono pode ser calculada através da multiplicação da sua quantidade de lados pela área do triangulo equilátero: $\frac{B^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, assim:

$$\frac{5 \cdot B^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Uma curiosidade sobre o pentágono, é que o departamento de defesa dos Estados Unidos da América leva o nome da figura geométrica pois está situado em um edifício com tal formato.

7.2 Hexágonos

Figura geométrica que possui seis lados.

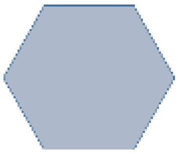

Figura 54 - Hexágono.
Fonte: criado pelo pesquisador

Para saber o valor de cada ângulo interno de um hexágono regular basta aplicar a fórmula: $s_i = (6 - 2) \cdot 180°$, que resulta em $720°$, agora basta dividir pela quantidade de ângulos do hexágono, que resultará em 120° por ângulo interno.

Ainda assim é possível encontrar quantas diagonais esse polígono de cinco lados possui, para isso:

$$d = \frac{6 \cdot (6 - 3)}{2} = 9$$

Já a área do hexágono pode ser calculada através da multiplicação da sua quantidade de lados pela área do triangulo equilátero: $\frac{B^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, assim:

$$\frac{6 \cdot B^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \rightarrow \frac{3 \cdot B^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Uma curiosidade sobre os hexágonos, é que eles são as formas que as abelhas constroem seus favos de mel, organizando assim melhor a estrutura da colmeia, Hales (1999) provou esse pensamento denominado de Conjectura da Colmeia que foi levantado por Papus de Alexandria no seu V livro, onde o resultado diz que o hexágono é a figura geométrica regular que tem a maior área com o menor perímetro.

7.3 Demais Polígonos

Figura geométrica que possui diversos (n) lados.

Para saber o valor de cada ângulo interno de um polígono de n lados regular basta aplicar a fórmula: $s_i = (n - 2) \cdot 180°$, que resultará no valor do somatório de todos os ângulos externos desse polígono, log após basta dividir pela quantidade de ângulos n, que resultará em algum valor menor que 180° por ângulo interno, visto que o ângulo raso faz uma reta, pois é inexistente um polígono formado de uma única reta, visto que para formar um polígono são necessários ao menos 3 segmentos de reta,

Ainda assim é possível encontrar quantas diagonais esse polígono de n lados possui, para isso:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Lembrando que a quantidade de diagonais de um polígono é igual a quantidade de triângulos necessários para a construção desse polígono.

Já a área desse polígono de n lados pode ser calculada através da multiplicação da sua quantidade de lados pela área do triangulo equilátero: $\frac{B^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, assim:

$$\frac{n \cdot B^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

É notável que o que as informações apresentadas que se aplicam a um pentágono ou a um hexágono também são aplicáveis a um polígono regular de n lados, dessa forma não cabe maiores repetições da utilização das fórmulas já conhecidas para apresentar outros polígonos.

8 UM CASO ESPECIAL: CÍRCULOS

Para um entendimento claro sobre círculos é necessário lembrar como foi criado o círculo trigonométrico, ou como foi criada a ideia de ângulo, ou seja, um segmento de reta se movimentando em sentindo anti-horário tendo um vértice fixo. No entanto, Barbosa e Euclides esclarecem a formação do círculo como:

“Seja A um ponto do plano e r um número real positivo. O círculo de raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano, tais que $\overline{AB} = r$ (BARBOSA, 2006, p. 20)”.

Círculo é uma figura plana fechada por uma só linha, a qual se chama circunferência: de maneira que todas as linhas retas, que de um certo ponto existente no meio da, figura, se conduzem para a circunferência, são iguais entre si. (EUCLIDES, 1944, p. 5)

Definindo os termos: é de notório saber que esse vértice fixo é chamado de origem, e o segmento de reta é denominado de **raio,** assim o outro vértice sempre será equidistante da origem, visto que o tamanho do raio continuará o mesmo, desse modo é o conjunto dos pontos que são equidistantes da origem formam uma **circunferência**, e essa circunferência é o limitador do círculo, pois este é o conjunto de todos os pontos internos à uma circunferência.

Figura 55 - Características do círculo.
Fonte: criado pelo pesquisador

A circunferência é o perímetro do círculo, e como perímetro é possível ser calculado, no entanto diferente dos polígonos que basta somar todos os valores dos lados para obter o perímetro, na circunferência esse cálculo usa como referência o raio na seguinte fórmula:

$C = 2 \cdot \pi \cdot r$, onde r é o valor do raio

Todavia, a análise dos círculos não se restringe ao uso dessa única fórmula, há também a fórmula que calcula a área do círculo, esta é:

$\pi \cdot r^2$

É vital a compreensão que o círculo é uma figura geométrica que não possui nenhum lado, portanto um círculo não é um polígono, contudo é possível fazer uma analogia do círculo aos polígonos, para isso cabe a análise dos polígonos inscritos a uma circunferência, ou sobrepostos a um círculo:

Figura 56 - Inserção de polígonos em círculos.
Fonte: criado pelo pesquisador

Com essa figura é notável que quanto mais lados o polígono possui, mais próximo ele fica do círculo, assim, utilizando o método da exaustão é pertinente observar que um círculo seria tido como polígono de infinitos lados.

9 METODOLOGIA

O método utilizado para desenvolver esta monografia se constituiu de uma pesquisa bibliográfica que buscou referências nas teorias publicadas em artigos científicos, documentos oficiais, livros e sites, visando uma explicação mais aprofundada sobre os assuntos existentes no desenvolvimento do escrito monográfico sob à luz de prévias contribuições científicas.

No que tange as contribuições pesquisadas é pertinente ressaltar as obras dos autores: Euclides (2009) Papa Neto (2017) e Dolce e Pompeo (1996).

Evidencia-se a importância de uma base teórica forte, pois esta é a fundamentação inicial para um olhar sobre as informações bibliográficas erguidas nesta pesquisa.

Dito isso, o domínio do assunto através dos olhares dos autores pesquisados é um fertilizante para florescer a imaginação, ou seja, através deles, faz-se possível o florescimento de ideias sobre a temática dessa monografia.

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As pesquisas para a composição deste trabalho trouxeram muito mais que conteúdo, trouxeram uma profunda reflexão, pois foi possível notar que, por mais que tal conteúdo seja simples, ele é esquecido caso não praticado, dessa forma os conceitos foram revistos e reaprendidos para que pudessem ser expressados aqui num formato de sete capítulos bem ilustrados.

Para atender o objetivo específico do primeiro capítulo apresentou-se os conceitos mais básicos de toda a geometria, mas tais conceitos não foram divulgados de forma axiomática, como diversas outras literaturas o fazem, mas de forma simples e intuitiva onde qualquer leitor possa compreender facilmente, já para atender o objetivo do capítulo dois apresentou-se diversas nomenclaturas, pois foi nessa parte que houve a construção passo a passo de polígonos, essa linearidade de informação culminou com a criação do polígono básico, o triângulo; então a partir desse ponto foi iniciado o capítulo três, que teve o objetivo específico atingido, juntamente com o capítulo quatro, quando trouxe informações exclusivas sobre triângulos, porém, o capítulo quatro trabalhou um triângulo específico, o triângulo retângulo, e todas as benesses que essa figura geométrica oferece, desde o conceito de semelhança de triângulos, passando pelo teorema de Tales de Mileto, pelo Teorema de Pitágoras e relações métricas, até uma área específica da matemática chamada de: Trigonometria, que estuda as relações entre os ângulos do triangulo retângulo.

O capítulo quatro foi o mais extenso de todos, mas da mesma importância que os demais, após a conclusão da trigonometria iniciou-se o capítulo cinco, que teve seu objetivo específico atingido quando trabalhou os quadriláteros de forma detalhada, explicando seus diferenciados tipos e estabelecendo uma relação entre eles, já os objetivos específicos dos últimos conteúdos foram atingidos no capítulo seis que trabalhou todos os demais polígonos dando ênfase no pentágono e no hexágono visando facilitar a intuição de conceito geral, e no capítulo sete que trouxe uma figura geométrica plana que não é um polígono, o círculo.

Enfim, a aprendizagem extrapolou os níveis de uma revisão de conteúdo ou de uma pesquisa por referencial teórico, de forma a auxiliar profundamente no dia a dia do docente que trabalhará com a temática de geometria plana.

REFERÊNCIAS

ABNT - Associação Brasileira De Normas Técnicas. (2002). *NBR6023:* trabalhos acadêmicos: referências. Rio de Janeiro.

Barbosa, J.L.M. (2006). *Geometria euclidiana plana.* 10. ed. Rio de Janeiro: SBM. 222 p.

Berlinski, David. (2018). *Os elementos de Euclides*. 1.ed. Rio de Janeiro: Zahar. 160 p.

Brasil. (1996). *Lei 9.394* – Lei de diretrizes e bases da educação nacional. Brasília

Dolce, Osvaldo, Pompeo, José Nicolau. (1993). *Fundamentos de matemática elementar:* geometria plana: exercícios resolvidos, exercícios propostos com resposta, testes de vestibular. 7.ed. São Paulo: Atual. 230 p.

Euclides. (2009). *Os Elementos.* Tradução Irineu Bicudo, São Paulo: Unesp, 593 p.

Papa Neto, Ângelo. (2017). *Geometria plana e construções geométricas.* Fortaleza: UAB/IFCE. 226 p.

Santos, Almir Rogério Silva; Viglioni, Humberto Henrique de Barros. (2011). *Geometria Euclidiana Plana.* UFS. 237 p.

SITES INVESTIGADOS

Os elementos de Euclides. Disponível em: <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/1parte.html>. Acessado em: 25 de novembro de 2019.

Postulado das Paralelas. Disponível em: <http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/postulado_paralelas.html>. Acessado em: 25 de novembro de 2019.

Honeycomb Conjecture. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/HoneycombConjecture.html>. Acessado em: 12 de fevereiro de 2020.

The Honeycomb Conjecture. Thomas C. Hales. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/math/9906042>. Acessado em: 12 de fevereiro de 2020