Lembrando que no caso da tangente, como não existe tangente de 90° $(\frac{\pi}{2})$ e nem de 270° $(\frac{3\pi}{2})$, vide tabela dos valores das funções trigonométricas, quando na adição de arcos: $tg\ (\hat{A}+\hat{B}) = tg\ (90°)\ ou\ tg\ (\hat{A}+\hat{B}) = tg\ (270°)$ ou na subtração: $tg\ (\hat{A}-\hat{B}) = tg\ (90°)\ ou\ tg\ (\hat{A}-\hat{B}) = tg\ (270°)$ não existirá resultado. Do mesmo modo não existirá resultado, devido a ser um denominador, quando: $1 - tg\ \hat{A} \cdot tg\ \hat{B} = 0$ ou $1 + tg\ \hat{A} \cdot tg\ \hat{B} = 0$

Tabela 6 - Resumo das relações trigonométricas.

Relação	Fórmula
Relação Fundamental da Trigonometria	$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
Lei dos Senos	$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}$
Lei dos Cossenos	$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\hat{A}$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\hat{B}$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\hat{C}$
Seno em obtusângulos	$sen\alpha = sen(180° - \alpha)$
Cosseno em obtusângulos	$cos\alpha = -cos(180° - \alpha)$
Adição de arcos - Seno	$sen\ (\hat{A}+\hat{B}) = sen\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{B} + cos\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{B}$
Subtração de arcos - Seno	$sen\ (\hat{A}-\hat{B}) = sen\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{B} - cos\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{B}$
Adição de arcos - Cosseno	$cos\ (\hat{A}+\hat{B}) = cos\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{B} - sen\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{B}$
Subtração de arcos - Cosseno	$cos\ (\hat{A}-\hat{B}) = cos\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{B} + sen\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{B}$
Adição de arcos - Tangente	$tg\ (\hat{A}+\hat{B}) = \frac{tg\ \hat{A} + tg\ \hat{B}}{1 - tg\ \hat{A} \cdot tg\ \hat{B}}$
Subtração de arcos - Tangente	$tg\ (\hat{A}-\hat{B}) = \frac{tg\ \hat{A} - tg\ \hat{B}}{1 + tg\ \hat{A} \cdot tg\ \hat{B}}$

Fonte: criado pelo pesquisador

O ensino da geometria é milenar, e portanto, já fora explorado diversas vezes (contudo ainda há muito a explorar) e por isso há muitas fórmulas bem definidas para facilitar o aprendizado, mas é ressalvável que não é adequado apenas a memorização das fórmulas.

6 QUADRILÁTERO

Figura geométrica que possui quatro lados.

Os quadriláteros podem ser classificados de acordo como seus lados se posicionam, ou seja, quando seus lados são paralelos dois a dois, ou seja, quando os dois pares de lados que se opõe são paralelos, este recebe o nome de **paralelogramo**, já quando há apenas um único par de lados que se opõe paralelos, diz-se que é um **trapézio**, já quando não há nenhum lado paralelo a outro, trata-se de um **quadrilátero sem nome específico**.

Todo quadrilátero, independentemente da sua classificação, possui o somatório dos ângulos internos totalizando 360°, isso pode ser observado aplicando a fórmula:

$s_i = (4-2) \cdot 180°$, logo, o resultado será: $360°$.

Cada quadrilátero é formado pela junção de dois triângulos.

6.1 Paralelogramo

O paralelogramo possui dois pares de lados paralelos, isso significa que seus lados opostos são congruentes, e seus ângulos opostos também são congruentes, e por saber o somatório dos ângulos internos é pertinente observar que todo paralelogramo também possui seus ângulos não opostos como ângulos suplementares, além disso ao traçar as duas diagonais do paralelogramo, o ponto de intersecção das mesmas é o ponto médio do paralelogramo.

$$d = \frac{4 \cdot (4-3)}{2} = 2$$

No entanto os paralelogramos podem ser subdivididos:
Quando o paralelogramo for equilátero ele será denominado de **losango**.
Quando o paralelogramo for equiângulo ele será denominado de **retângulo**.
Quando o paralelogramo for regular ele será denominado de **quadrado**.

Quando dois triângulos retângulos iguais com catetos iguais se unem, formam um quadrado, mas se os catetos forem diferentes, ao se unirem formaram um retângulo, mas se os triângulos forem iguais e forem isósceles, ao se unirem formaram um losango.

6.2 Losango

Todos os lados do losango possuem a mesma medida, e por ser um paralelogramo o losango possui duas diagonais, no entanto as diagonais dos losangos são perpendiculares, ou seja, elas formam um ângulo de 90°.

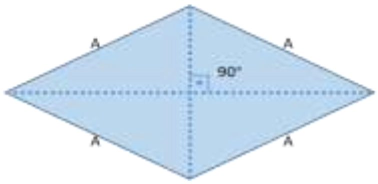

Figura 46 - Losango.
Fonte: criado pelo pesquisador

As diagonais do losango são muito importantes, tanto que para calcular a área dessa figura geométrica é necessário multiplicar a diagonal maior pela diagonal menor e dividir o resultado por dois:

$$\frac{D \cdot d}{2}$$

Na figura 46 pode-se observar que a diagonal depara o losango em dois triângulos isósceles.

6.3 Retângulo

Um retângulo é um paralelogramo que possui os quatro ângulos com o mesmo valor, assim para totalizar os 360° que um paralelogramo possui de ângulos interno, um retângulo tem que possuir os seus quatro ângulos tendo 90° cada.

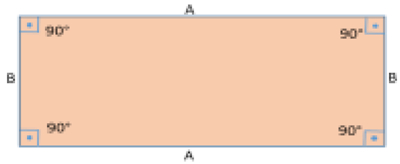

Figura 47 - Retângulo.
Fonte: criado pelo pesquisador

Os lados dos retângulos são importantes para o cálculo da área, tanto que um lado sempre coincidirá com a altura dessa figura, assim a fórmula do cálculo da área é o lado base multiplicado pelo lado altura:

$$B \cdot h$$

Na figura 47, ao traçar uma diagonal essa separará o retângulo em dois triângulos retângulos.

6.4 Quadrado

O quadrado é um paralelogramo especial, pois ele é regular, com isso ele possui seus quatro ângulos congruentes e seus quatro lados com o mesmo valor, assim não é errado dizer que todo quadrado é um retângulo, ou que todo quadrado é um losango

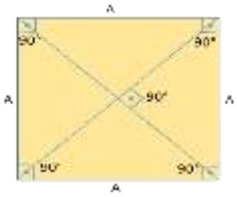

Figura 48 - Quadrado.
Fonte: criado pelo pesquisador

O quadrado é uma figura geométrica regular que possui o cálculo de área simplificado pela multiplicação dos seus lados, e como os lados são iguais, então a fórmula de cálculo será lado ao quadrado:

l^2

Na figura 48, ao traçar uma diagonal essa separará o quadrado em dois triângulos retângulos.

6.5 Trapézio

O quadrilátero que possui apenas um único par de lados opostos paralelos chamados de base maior e base menor, sendo os outros dois lados livres, essa definição de trapézio pode ser expandida e Santos e Viglioni (2011, p.155) o fazem: "Um trapézio é um quadrilátero com dois lados opostos paralelos. Os lados paralelos são chamados de bases". Existem três tipos de trapézio:

Trapézio isósceles: é aquele que possui os lados, que não são paralelos, congruentes, isso faz com que os ângulos gerados com a base maior sejam iguais entre si, do mesmo modo os ângulos formados com a base menor são iguais entre si, e por consequência as diagonais são congruentes. Esse tipo de trapézio pode ser observado como a junção de um retângulo com dois triângulos retângulos um de cada lado.

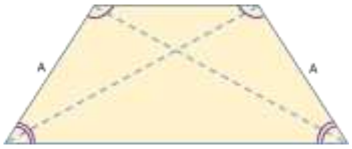

Figura 49 - Trapézio isósceles.
Fonte: criado pelo pesquisador

Trapézio retângulo: é aquele que é formado através da formação que um dos lados que não é paralelo faz com a base maior, e com a base menor, essa formação gera dois ângulos internos de 90°. Esse tipo de trapézio pode ser observado como a junção de um retângulo com um triangulo retângulo.

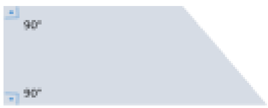

Figura 50 - Trapézio retângulo.
Fonte: criado pelo pesquisador

Trapézio geral: não possui relação específica sobre os lados que não são paralelos, estes podendo assumir qualquer medida e qualquer formação de ângulos com as bases.

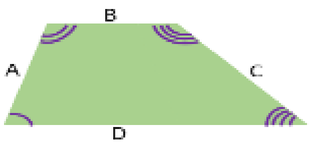

Figura 51 - Trapézio Geral.
Fonte: criado pelo pesquisador

Independentemente do tipo do trapézio o cálculo da área será a soma das medidas da base maior com a base menor multiplicado pela altura dividido por dois:

$$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

O trapézio, também, pode ser dividido em dois triângulos, basta encontrar as diagonais.

6.6 Outros Quadriláteros

Os paralelogramos e os trapézios consistem de polígonos notáveis de quatro lados, no entanto são todos convexos, e os quadriláteros também podem ser côncavos (ou seja, possuir algum ângulo interno obtuso), além disso, mesmo nos côncavos os quadriláteros podem ter os quatro lados diferentes entre si, com seus respectivos ângulos diferentes, assim tais quadriláteros gerais não se restringem as definições dos polígonos notáveis, no entanto estes fazem parte dos quadriláteros gerais.

Figura 52 - Organização dos quadriláteros.
Fonte: criado pelo pesquisador

A representação visual da figura 52 mostra em detalhes o comportamento de todos os quadriláteros.

7 PENTÁGONOS, HEXÁGONOS E DEMAIS POLÍGONOS

A utilização de triláteros e quadriláteros iniciam a construção do conhecimento sobre polígonos, no entanto há polígonos de infinitos lados, assim se faz necessário a apresentação do conhecimento sobre pentágonos e sobre hexágonos e a partir desses a elevação do conhecimento para qualquer polígono.

No entanto no que diz respeito a polígonos de diversos lados, o mais interessante são quando são regulares, ou seja, possuem ângulos congruentes e lados de mesma medida, assim a partir desse ponto serão apresentados apenas polígonos regulares.

7.1 Pentágonos

Figura geométrica que possui cinco lados.

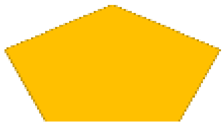

Figura 53 - Pentágono.
Fonte: criado pelo pesquisador

Para saber o valor de cada ângulo interno de um pentágono regular basta aplicar a fórmula: $s_i = (5 - 2) \cdot 180°$, que resulta em $540°$, agora basta dividir pela quantidade de ângulos do pentágono, que resultará em 108° por ângulo interno.

Ainda assim é possível encontrar quantas diagonais esse polígono de cinco lados possui, para isso:

$$d = \frac{5 \cdot (5 - 3)}{2} = 5$$

Já a área do pentágono pode ser calculada através da multiplicação da sua quantidade de lados pela área do triangulo equilátero: $\frac{B^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, assim:

$$\frac{5 \cdot B^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Uma curiosidade sobre o pentágono, é que o departamento de defesa dos Estados Unidos da América leva o nome da figura geométrica pois está situado em um edifício com tal formato.

7.2 Hexágonos

Figura geométrica que possui seis lados.

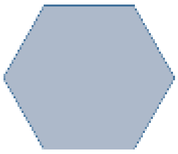

Figura 54 - Hexágono.
Fonte: criado pelo pesquisador

Para saber o valor de cada ângulo interno de um hexágono regular basta aplicar a fórmula: $s_i = (6 - 2) \cdot 180°$, que resulta em $720°$, agora basta dividir pela quantidade de ângulos do hexágono, que resultará em 120° por ângulo interno.

Ainda assim é possível encontrar quantas diagonais esse polígono de cinco lados possui, para isso:

$$d = \frac{6 \cdot (6 - 3)}{2} = 9$$

Já a área do hexágono pode ser calculada através da multiplicação da sua quantidade de lados pela área do triangulo equilátero: $\frac{B^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, assim:

$$\frac{6 \cdot B^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \to \frac{3 \cdot B^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Uma curiosidade sobre os hexágonos, é que eles são as formas que as abelhas constroem seus favos de mel, organizando assim melhor a estrutura da colmeia, Hales (1999) provou esse pensamento denominado de Conjectura da Colmeia que foi levantado por Papus de Alexandria no seu V livro, onde o resultado diz que o hexágono é a figura geométrica regular que tem a maior área com o menor perímetro.

7.3 Demais Polígonos

Figura geométrica que possui diversos (n) lados.

Para saber o valor de cada ângulo interno de um polígono de n lados regular basta aplicar a fórmula: $s_i = (n - 2) \cdot 180°$, que resultará no valor do somatório de todos os ângulos externos desse polígono, log após basta dividir pela quantidade de ângulos n, que resultará em algum valor menor que 180° por ângulo interno, visto que o ângulo raso faz uma reta, pois é inexistente um polígono formado de uma única reta, visto que para formar um polígono são necessários ao menos 3 segmentos de reta,

Ainda assim é possível encontrar quantas diagonais esse polígono de n lados possui, para isso:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Lembrando que a quantidade de diagonais de um polígono é igual a quantidade de triângulos necessários para a construção desse polígono.

Já a área desse polígono de n lados pode ser calculada através da multiplicação da sua quantidade de lados pela área do triangulo equilátero: $\frac{B^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, assim:

$$\frac{n \cdot B^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

É notável que o que as informações apresentadas que se aplicam a um pentágono ou a um hexágono também são aplicáveis a um polígono regular de n lados, dessa forma não cabe maiores repetições da utilização das fórmulas já conhecidas para apresentar outros polígonos.

8 UM CASO ESPECIAL: CÍRCULOS

Para um entendimento claro sobre círculos é necessário lembrar como foi criado o círculo trigonométrico, ou como foi criada a ideia de ângulo, ou seja, um segmento de reta se movimentando em sentindo anti-horário tendo um vértice fixo. No entanto, Barbosa e Euclides esclarecem a formação do círculo como:

“Seja A um ponto do plano e r um número real positivo. O círculo de raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano, tais que $\overline{AB} = r$ (BARBOSA, 2006, p. 20)”.

Círculo é uma figura plana fechada por uma só linha, a qual se chama circunferência: de maneira que todas as linhas retas, que de um certo ponto existente no meio da, figura, se conduzem para a circunferência, são iguais entre si. (EUCLIDES, 1944, p. 5)

Definindo os termos: é de notório saber que esse vértice fixo é chamado de origem, e o segmento de reta é denominado de **raio,** assim o outro vértice sempre será equidistante da origem, visto que o tamanho do raio continuará o mesmo, desse modo é o conjunto dos pontos que são equidistantes da origem formam uma **circunferência**, e essa circunferência é o limitador do círculo, pois este é o conjunto de todos os pontos internos à uma circunferência.

Figura 55 - Características do círculo.
Fonte: criado pelo pesquisador

A circunferência é o perímetro do círculo, e como perímetro é possível ser calculado, no entanto diferente dos polígonos que basta somar todos os valores dos lados para obter o perímetro, na circunferência esse cálculo usa como referência o raio na seguinte fórmula:

$C = 2 \cdot \pi \cdot r, \text{onde r é o valor do raio}$

Todavia, a análise dos círculos não se restringe ao uso dessa única fórmula, há também a fórmula que calcula a área do círculo, esta é:

$\pi \cdot r^2$

É vital a compreensão que o círculo é uma figura geométrica que não possui nenhum lado, portanto um círculo não é um polígono, contudo é possível fazer uma analogia do círculo aos polígonos, para isso cabe a análise dos polígonos inscritos a uma circunferência, ou sobrepostos a um círculo:

Figura 56 - Inserção de polígonos em círculos.
Fonte: criado pelo pesquisador

Com essa figura é notável que quanto mais lados o polígono possui, mais próximo ele fica do círculo, assim, utilizando o método da exaustão é pertinente observar que um círculo seria tido como polígono de infinitos lados.

9 METODOLOGIA

O método utilizado para desenvolver esta monografia se constituiu de uma pesquisa bibliográfica que buscou referências nas teorias publicadas em artigos científicos, documentos oficiais, livros e sites, visando uma explicação mais aprofundada sobre os assuntos existentes no desenvolvimento do escrito monográfico sob à luz de prévias contribuições científicas.

No que tange as contribuições pesquisadas é pertinente ressaltar as obras dos autores: Euclides (2009) Papa Neto (2017) e Dolce e Pompeo (1996).

Evidencia-se a importância de uma base teórica forte, pois esta é a fundamentação inicial para um olhar sobre as informações bibliográficas erguidas nesta pesquisa.

Dito isso, o domínio do assunto através dos olhares dos autores pesquisados é um fertilizante para florescer a imaginação, ou seja, através deles, faz-se possível o florescimento de ideias sobre a temática dessa monografia.

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As pesquisas para a composição deste trabalho trouxeram muito mais que conteúdo, trouxeram uma profunda reflexão, pois foi possível notar que, por mais que tal conteúdo seja simples, ele é esquecido caso não praticado, dessa forma os conceitos foram revistos e reaprendidos para que pudessem ser expressados aqui num formato de sete capítulos bem ilustrados.

Para atender o objetivo específico do primeiro capítulo apresentou-se os conceitos mais básicos de toda a geometria, mas tais conceitos não foram divulgados de forma axiomática, como diversas outras literaturas o fazem, mas de forma simples e intuitiva onde qualquer leitor possa compreender facilmente, já para atender o objetivo do capítulo dois apresentou-se diversas nomenclaturas, pois foi nessa parte que houve a construção passo a passo de polígonos, essa linearidade de informação culminou com a criação do polígono básico, o triângulo; então a partir desse ponto foi iniciado o capítulo três, que teve o objetivo específico atingido, juntamente com o capítulo quatro, quando trouxe informações exclusivas sobre triângulos, porém, o capítulo quatro trabalhou um triângulo específico, o triângulo retângulo, e todas as benesses que essa figura geométrica oferece, desde o conceito de semelhança de triângulos, passando pelo teorema de Tales de Mileto, pelo Teorema de Pitágoras e relações métricas, até uma área específica da matemática chamada de: Trigonometria, que estuda as relações entre os ângulos do triangulo retângulo.

O capítulo quatro foi o mais extenso de todos, mas da mesma importância que os demais, após a conclusão da trigonometria iniciou-se o capítulo cinco, que teve seu objetivo específico atingido quando trabalhou os quadriláteros de forma detalhada, explicando seus diferenciados tipos e estabelecendo uma relação entre eles, já os objetivos específicos dos últimos conteúdos foram atingidos no capítulo seis que trabalhou todos os demais polígonos dando ênfase no pentágono e no hexágono visando facilitar a intuição de conceito geral, e no capítulo sete que trouxe uma figura geométrica plana que não é um polígono, o círculo.

Enfim, a aprendizagem extrapolou os níveis de uma revisão de conteúdo ou de uma pesquisa por referencial teórico, de forma a auxiliar profundamente no dia a dia do docente que trabalhará com a temática de geometria plana.

REFERÊNCIAS

ABNT - Associação Brasileira De Normas Técnicas. (2002). *NBR6023:* trabalhos acadêmicos: referências. Rio de Janeiro.

Barbosa, J.L.M. (2006). *Geometria euclidiana plana.* 10. ed. Rio de Janeiro: SBM. 222 p.

Berlinski, David. (2018). *Os elementos de Euclides*. 1.ed. Rio de Janeiro: Zahar. 160 p.

Brasil. (1996). *Lei 9.394* – Lei de diretrizes e bases da educação nacional. Brasília

Dolce, Osvaldo, Pompeo, José Nicolau. (1993). *Fundamentos de matemática elementar:* geometria plana: exercícios resolvidos, exercícios propostos com resposta, testes de vestibular. 7.ed. São Paulo: Atual. 230 p.

Euclides. (2009). *Os Elementos.* Tradução Irineu Bicudo, São Paulo: Unesp, 593 p.

Papa Neto, Ângelo. (2017). *Geometria plana e construções geométricas.* Fortaleza: UAB/IFCE. 226 p.

Santos, Almir Rogério Silva; Viglioni, Humberto Henrique de Barros. (2011). *Geometria Euclidiana Plana.* UFS. 237 p.

SITES INVESTIGADOS

Os elementos de Euclides. Disponível em: <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/1parte.html>. Acessado em: 25 de novembro de 2019.

Postulado das Paralelas. Disponível em: <http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/postulado_paralelas.html>. Acessado em: 25 de novembro de 2019.

Honeycomb Conjecture. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/HoneycombConjecture.html>. Acessado em: 12 de fevereiro de 2020.

The Honeycomb Conjecture. Thomas C. Hales. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/math/9906042>. Acessado em: 12 de fevereiro de 2020