



Abril 2020 - ISSN: 1989-4155

**DIFICULTADES ALGEBRAICAS:
UN OBSTÁCULO AL INICIAR EL TRABAJO CON FUNCIONES**
Análisis Epistemográfico en primer año de la Universidad

**ALGEBRAIC DIFFICULTIES:
AN OBSTACLE AT STARTING WORK WITH FUNCTIONS**
Epistemographic Analysis at first year of University

**FLAVIA ÁLVAREZ¹ -
MARÍA JULIA BOLÍVAR²**

Departamento de Matemática del Ciclo Básico Común (C.B.C), Universidad de Buenos Aires (UBA). Buenos Aires, Argentina.

**GISELE HOLLISCH³-
NATALIA BENÍTEZ⁴**

Departamento de Matemática, Universidad Argentina de la Empresa (UADE). Buenos Aires, Argentina.

Departamento de Matemática del Ciclo Básico Común (C.B.C), Universidad de Buenos Aires (UBA). Buenos Aires, Argentina.

prof.alvarezflavia.cbc@gmail.com - profesora@juliabolivar.com.ar - ghollisch@uade.edu.ar - nabenitez10@uade.edu.ar

Para citar este artículo puede utilizar el siguiente formato:

Flavia Álvarez, María Julia Bolívar, Gisele Hollisch y Natalia Benítez (2020): "Dificultades algebraicas: un obstáculo al iniciar el trabajo con funciones. Análisis Epistemográfico en primer año de la Universidad", Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo (abril 2020). En línea:

<https://www.eumed.net/rev/atlante/2020/04/dificultades-algebraicas.html>
<http://hdl.handle.net/20.500.11763/atlante2004dificultades-algebraicas>

¹ Es Profesora en Enseñanza Media y Superior de Matemática egresada de la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA (2006) y Especialista en entornos virtuales de aprendizaje (UCA, 2019). Se desempeña como docente en la Universidad de Buenos Aires (UBA), en la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) y en la Universidad Católica Argentina (UCA).

² Es Profesora en Enseñanza Media y Superior de Matemática egresada de la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA (2006). Es Magíster en Educación de Ciencias egresada de la Universidad Nacional del Comahue (2016). Ha realizado un posgrado en Entornos Virtuales (UCA, 2019). Se desempeña como docente en la Universidad de Buenos Aires (UBA) y en la Universidad Católica Argentina (UCA).

³ Es Profesora en Enseñanza Media y Superior de Matemática egresada de la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA (2006) y Licenciada en Matemática aplicada de la misma institución (2010). Se desempeña como docente en la Universidad de Buenos Aires (UBA) y en la Universidad Argentina de la Empresa (UADE).

⁴ Es Profesora en Enseñanza Media y Superior de Matemática egresada de la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA (2007). Es Magíster en Educación de Ciencias con mención en Matemática, egresada de la Universidad Nacional del Comahue (2014). Se desempeña como docente en la Universidad de Buenos Aires (UBA) y en la Universidad Argentina de la Empresa (UADE). Realiza actividades de investigación desde el año 2012.

RESUMEN: En este artículo presentaremos brevemente el Análisis Epistemográfico (Drouhard, 2013) y explicaremos cómo fue utilizado para analizar los errores que cometen los estudiantes de primer año de la universidad al intentar resolver ejercicios sobre funciones. El objetivo de la investigación descrita fue analizar si las dificultades algebraicas de los estudiantes de la materia Matemática Empresarial I de la UADE tienen influencia en el aprendizaje del tema función.

El estudio realizado nos permitió observar que estas dificultades constituyen un punto clave a ser considerado por los docentes al momento de pensar en la enseñanza de funciones. Los conocimientos localizados por Drouhard en la dimensión instrumental aparecen como el principal obstáculo.

PALABRASCLAVE: Dificultades algebraicas en Matemática de primer año de la universidad, errores al trabajar con funciones en Matemática, Análisis Epistemográfico de los errores algebraicos, enseñanza- aprendizaje de la matemática en UADE.

ABSTRAC: In this article we will briefly present the Epistemographic analysis (Drouhard, 2013) and we will explain how it was used to analyze the mistakes committed by the students at the first year of university when trying to solve exercises about functions. The objective of the described investigation in this article was to analyze if the algebraic difficulties of the students in the subject Business Mathematics 1 in UADE have influence in the learning of the issue Function.

This study allowed us to observe that these difficulties build a key point to be considered for the professors at the moment of thinking about the teaching of functions. The knowledge localized by Drouhard in the instrumental dimension appears as the first obstacle.

KEY WORDS: Algebraic difficulties in Mathematics at first year of University, mistakes when working with functions in Mathematics, Epistemographic Analysis of the algebraic mistakes, teaching-learning of mathematics in UADE.

1. INTRODUCCIÓN

En las clases de primer año de la Universidad los alumnos demuestran tener muchas dificultades para abordar los temas referidos a “funciones”. Desde nuestro punto de vista, podrían ser las dificultades relacionadas con el trabajo algebraico las que les impiden avanzar hacia los conceptos y actividades desarrolladas en torno al tema.

Seleccionamos el tema “función” para analizar dichas dificultades algebraicas debido a que se trata del primer tema de Análisis Matemático que deben abordar los estudiantes de primer año de la Universidad.

Además, coincidimos, en que tener conocimiento acerca de la relación existente entre los errores de naturaleza algebraica de los alumnos y la comprensión de los conceptos referidos a funciones puede aportar elementos para re-organizar una enseñanza que ayude a sortear estas dificultades (Álvarez, Benítez, Bolívar y Hollisch, 2016).

El presente artículo muestra los resultados hallados en el proyecto de investigación “Análisis Epistemográfico sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en primer año de la Universidad”. La investigación desarrollada en dicho proyecto constituye una continuación del trabajo de tesis de la Mg. Natalia Benítez (2014) en el que se analizaron los errores que cometían los estudiantes de primer año al intentar resolver ejercicios sobre funciones en la materia Matemática I de la Universidad Argentina de la Empresa (UADE).

El objetivo fue, en ese momento, analizar si las dificultades algebraicas con las que ingresaban estos alumnos a la Universidad tenían influencia en sus desempeños. Para hacerlo se utilizó como marco teórico el Análisis Epistemográfico (Drouhard, 2014).

En el momento de la realización de la tesis no formaban parte de los contenidos de la materia cuestiones relativas al trabajo algebraico (operaciones con expresiones algebraicas, propiedades, factorización, ecuaciones e inecuaciones, tratamiento del módulo, etc.), mientras que, actualmente, estos temas constituyen la primera unidad del programa. La segunda unidad trata sobre el estudio de los diferentes tipos de funciones, cálculo de dominio, imagen, conjunto de

ceros, conjunto de positividad y negatividad, intersección de gráficos de funciones con los ejes coordenados, función inversa, resolución gráfica y analítica de intersección entre curvas, etc. Anteriormente a este cambio de currícula la materia iniciaba con lo que describimos como la segunda unidad.

Ante estos cambios, el desafío de la investigación que dio lugar al presente artículo fue realizar un análisis similar al efectuado en dicha oportunidad considerando la organización actual de la materia.

Por otro lado, buscamos indagar si los cambios propuestos desde el currículum han influido, y de qué manera, en el aprendizaje de los alumnos. A tal propósito analizamos si estas dificultades algebraicas continúan siendo un obstáculo para realizar las actividades correspondientes a funciones.

Como menciona (Drouhard, 2013, p. 2):

En Didáctica de la Matemática es pertinente estudiar la naturaleza de los saberes debido a que conocer conceptos matemáticos, manejar los distintos sistemas de representación semiótica de los mismos, utilizar recursos tanto conceptuales como semióticos para resolver prácticamente problemas, conocer, y aceptar de seguir, las reglas que rigen la actividad matemática, se aprende – y por consecuencia, se enseña – de maneras muy diferentes.

Podría suceder que algunos docentes de matemática quizás en forma inconsciente en sus clases estén privilegiando en los alumnos el desarrollo de algunos saberes correspondientes a ciertas dimensiones de los conocimientos tratados en la Epistemografía y desalentando el desarrollo de otros.

Ser conscientes de los conocimientos involucrados en las tareas matemáticas de los estudiantes al inicio de la Universidad ayuda también al momento de pensar y hacer nuevas propuestas curriculares, a la vez que permite evaluar las propuestas de cambio en la enseñanza de la matemática en este nivel educativo.

2. MARCO TEÓRICO

Nos interesa el estudio de errores porque, como mencionan Abrate, Pochulu y Vargas (2006), “El análisis de los errores sirve para ayudar al docente a organizar estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades y contribuye a una mejor preparación de instancias de corrección”.

Creemos que, como señalan en su trabajo Del Puerto, Minnaard y Seminara (2004), el análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje provee una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático y, al mismo tiempo, constituye una excelente herramienta para realimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de mejorar los resultados.

En relación a la actividad algebraica Sessa (2005) considera al álgebra como un conjunto de prácticas asociadas a un espacio de problemas que se constituyen a partir de un conjunto de conceptos y propiedades. Estas prácticas se inscriben en un determinado lenguaje simbólico, con leyes de tratamiento específicas que rigen la configuración de un conjunto de técnicas. Todos estos elementos complejos –problemas, objetos, propiedades, lenguaje simbólico, leyes de transformación de la escritura, técnicas de resolución– producen un “entramado” que configura el trabajo algebraico.

En nuestro trabajo, nos centramos también en lo que Kieran (2004) define como la actividad transformacional del álgebra. En este sentido, haciendo foco en el aprendizaje y el manejo de las técnicas que menciona Sessa (2005) y en las ideas de Kieran (2004) para nuestra investigación definimos la actividad algebraica como el uso de instrumentos algebraicos para operar sobre objetos considerados desde el punto de vista algebraico o reducidos a su dimensión algebraica.

La “*actividad algebraica ligada al estudio de funciones*” sería, en este sentido, una actividad basada en el uso de instrumentos algebraicos para operar sobre funciones. Es decir, una actividad matemática que se caracteriza por el empleo de herramientas algebraicas para la resolución de problemas analíticos. La misma incluye acciones como: saber factorizar, desarrollar, simplificar, operar y trabajar con expresiones equivalentes.

Para realizar un trabajo adecuado sobre funciones los alumnos deben dominar todas estas acciones; de lo contrario, podrían convertirse en un obstáculo.

Como señalamos anteriormente, para llevar a cabo el estudio elegimos analizar el trabajo de los alumnos utilizando la división en capas de análisis del trabajo matemático y la categorización de los conocimientos desarrollada en el Análisis Epistemográfico (Drouhard, 2013) para la organización de los conocimientos científicos. Esta elección surge a partir de la necesidad de categorías de análisis más finas que “dificultades ligadas al trabajo algebraico” o “dificultades no ligadas al trabajo algebraico” (Benítez, Drouhard, 2015).

Según Drouhard (2014), la actividad matemática de los alumnos puede ser analizada desde cinco “capas”. Estas son: la capa del Contrato Pedagógico (capa CP), la capa del Contrato Didáctico (capa CD), la capa de Matematización y Modelización (capa MyM), la capa de los Discursos y del Razonamiento (capa DyR) y la capa de los Objetos de Saber y las Operaciones (capa OSO).

Al mismo tiempo, Drouhard (2014) distingue dos tipos de saberes: los relativos a *objetos* (función lineal, gráfico de una función, ecuación, etc.), y los relativos a las “*reglas del juego matemático*” (las soluciones obtenidas por cálculo deben ser exactas, las sacadas de una resolución gráfica tienen un cierto grado de aproximación, etc.).

El Análisis Epistemográfico considera que los saberes relativos a los “objetos matemáticos” se sitúan en un espacio de tres dimensiones principales: Nocional, Semio-lingüística e Instrumental.

Conocer un objeto matemático equivale a conocerlo en cada dimensión.

En la *dimensión Nocional* de los objetos se encuentran los saberes relativos a las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos y, más generalmente, a cómo los objetos matemáticos están relacionados entre sí.

En la *dimensión Semio-lingüística* se hallan, por un lado, los saberes relacionados con el funcionamiento de todo el sistema de representación semiótico, en particular, su semántica; es decir, la relación entre las representaciones y los objetos matemáticos. También encontramos en esta dimensión los saberes relativos a la representación de los objetos matemáticos particulares de dominio. Necesitamos aprender los saberes de esta dimensión para leer, interpretar, escribir, dibujar, entender, procesar representaciones (escrituras, esquemas, gráficos, etc.) de los objetos de saber.

La *dimensión Instrumental* incluye saberes relativos a cómo se usan los instrumentos, en qué medida vale la pena o no usarlos, o cuáles son los costos y beneficios de hacerlo. Es decir que esta dimensión trata sobre el “cómo hacer”, sobre las diferentes formas de hacer algo, las ventajas y los inconvenientes de usar tal o cual manera para hacer.

Los saberes relativos a las “Reglas del juego Matemático” tienen que ver con conocer las “reglas del juego”. Éstas son las que rigen la validez lógica de los razonamientos, la aceptabilidad de las representaciones semióticas, el uso legítimo de los instrumentos, etc.

Los saberes relativos a las reglas del juego matemático tratan sobre lo permitido y lo prohibido, a diferencia de los saberes instrumentales que tratan sobre lo posible y lo imposible (o lo fácil y difícil).

Además, es preciso saber nombrar e identificar las cosas (objetos, operaciones, reglas del juego), como, por ejemplo, fracción, numerador, denominador, etc. (Benítez, Drouhard, 2015).

3. CAMPO Y METODOLOGÍA

Para este trabajo se utilizó una muestra integrada por 79 alumnos pertenecientes a tres cursos de la materia Matemática Empresarial I de la Universidad Argentina de la Empresa, correspondientes al primer cuatrimestre del año 2016. Esta materia se cursa en el primer año de las distintas carreras que ofrece la Facultad de Ciencias Económicas (Contador Público, Administración de Empresas, Marketing).

Analizamos la resolución, por parte de los estudiantes, de un ejercicio (compuesto por tres ítems) del primer parcial y tres ejercicios del segundo parcial.

Ambos exámenes fueron propuestos por los docentes a cargo de los cursos. El equipo de investigación consideró analizar los ejercicios referidos al tema función en los que, para su correcta resolución, los estudiantes debieran poner en juego cuestiones relativas al trabajo algebraico.

Para realizar el análisis, en una etapa inicial, consideramos únicamente los ejercicios del primer parcial que cumplían con las condiciones descriptas. En esta instancia de evaluación, en lo que se refiere a funciones, fueron evaluados los primeros conceptos sobre el tema (dominio, conjunto de ceros, imagen).

El ejercicio considerado fue el siguiente:

Ejercicio:

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{-\frac{2}{3}(x+1)+2}}{x+2}$$

- a) Determinar el conjunto A, dominio de la función.
- b) Hallar analíticamente el conjunto de ceros de la función f.
- c) Hallar el conjunto solución de la ecuación $f(x) = 1$.

Posteriormente, realizamos el mismo análisis para los ejercicios del segundo examen, donde fueron evaluados los distintos tipos de funciones, así como el trabajo acerca de la resolución analítica de la intersección entre ellas.

Los ejercicios considerados fueron los siguientes:

Ejercicio 1

Dada la función $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \frac{x^2+3x-10}{x-2}$

Representarla gráficamente, indicando su dominio y calculando analíticamente su conjunto de ceros.

Ejercicio 2

Hallar analíticamente los puntos de intersección entre los gráficos de las siguientes funciones:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{5}{3} ; g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \frac{1}{x+3} - 2$$

Ejercicio 3

Sea:

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} - 1 & \text{si } x \geq -3 \\ (x+4)^2 - 9 & \text{si } x < -3 \end{cases}$$

Encontrar analíticamente las intersecciones del gráfico con los ejes coordenados.

En una primera instancia, analizamos todos los errores que cometieron los alumnos, distinguiendo entre dificultades de origen algebraico y no algebraico.

Para dicho análisis construimos una tabla para cada ejercicio realizando. Al mismo tiempo hicimos una breve descripción de cada error cometido y lo localizamos en la capa de análisis correspondiente.

Nº	Presenta errores en este ítem					No presenta errores en este ítem	No resuelve	Errores algebraicos
	Capa CP	Capa CD	Capa MyM	Capa DyR	Capa OSO			
1				X (incoherencia entre el resultado de la inequación y la respuesta de dominio dada)	X (hace una cuenta mal) X (no invierte el sentido de la desigualdad cuando corresponde)			1 error algebraico

Fig. N°1. Ejemplo de clasificación de errores según las capas de análisis, referido al 'ítem a' del primer parcial.

En una segunda etapa, realizamos un análisis por examen (es decir por alumno), tomando en cuenta únicamente aquellos errores que tuvieron origen algebraico.

Realizamos una descripción detallada de cada uno de los errores cometidos por los estudiantes e identificamos en qué dimensión del conocimiento, mencionada en la Epistemografía, tuvo dificultades el alumno al cometer dicho error.

La información sobre la localización de los errores en las dimensiones del conocimiento fue expresada en nuevas tablas (una para cada alumno).

Ítem	Capa OSO (si el ítem requiere contar con conocimientos algebraicos en esta capa de análisis)				El alumno comete errores correspondientes a capas de análisis que no involucran nociones algebraicas	El alumno no comete errores
	Dimensiones de los saberes relativos a los objetos matemáticos en que el alumno presenta dificultades		El alumno presenta deficiencias en los saberes relativos a las reglas del Juego			
	Nocional	Semio-lingüística	Instrumental			
a			X(no invierte el signo de la desigualdad)		X (DyR)	
b					X (OSO)	
c	X (desconoce que al elevar al cuadrado no se mantiene la equivalencia de ecuaciones)	X(factoriza mal la cuadrática, no tiene en cuenta el coeficiente a, parece una distracción)			X (DyR) X (error de cuenta, OSO)	

Fig. N°2. Ejemplo de análisis, por alumno, del ejercicio considerado del primer parcial.

En esta etapa pudimos detectar cuándo un error era por motivo de distracción, observando si en situaciones similares el alumno lo repetía o bien si se trataba de un hecho aislado. Estos errores fueron descartados para el análisis en las dimensiones por no ser considerados de origen algebraico.

4. RESULTADOS

4.1. Desempeño de los estudiantes

4.1.1. Primer parcial

Tabla 1

Resultados obtenidos en el primer parcial. Muestra de alumnos correspondiente al año 2016.

Ítem	Porcentaje de alumnos que tuvieron errores en su resolución	Porcentaje de alumnos que tuvieron errores relacionados con nociones algebraicas (sobre el total de alumnos de la muestra)	Porcentaje de alumnos que tuvieron errores relacionados con nociones algebraicas (sobre el total de alumnos que presentaron errores)
a	73 %	28%	38%
b	49%	17%	34%
c	82%	57%	69%

En los tres ítems del ejercicio considerado, existe un alto porcentaje de alumnos que presentan errores en su resolución. En el ítem c) es notorio el número de estudiantes que tienen dificultades relacionadas con nociones algebraicas (ya sea si lo calculamos sobre el total de estudiantes de la muestra o sobre la total de alumnos que presentaron errores en la actividad). Si bien, en los ítems a) y b) estos porcentajes son bastante menores, no dejan, de todas formas, de ser significativos.

Consideramos que en el ítem c) pueden observarse mayores dificultades relacionadas con el trabajo algebraico debido a que se trata del apartado que involucra en su resolución mayor cantidad de nociones ligadas al álgebra.

La dificultad más notoria en este apartado radica en que los alumnos parecen desconocer que al elevar al cuadrado ambos miembros de una igualdad no se mantiene siempre la equivalencia y dan, de este modo, soluciones que no verifican la ecuación original.

También aparecen en este ítem errores asociados al trabajo con el módulo: Ponen módulo al elevar al cuadrado una raíz, trabajan con módulo como si no afectara la expresión o no lo usan cuando corresponde.

Los errores de despeje aparecen como una constante a lo largo de los tres ítems del ejercicio: por ejemplo, “pasan” dividiendo expresiones que están dividiendo, “pasan” la raíz como una raíz o bien “pasan” multiplicando expresiones que están sumando. Es decir que despejan utilizando la operación incorrecta. En algunos casos también despejan en el orden incorrecto.

En lo que se refiere al primer ítem del ejercicio analizado, el error más común fue el de no invertir el sentido de la desigualdad cuando corresponde al resolver la inecuación que surge al hallar el dominio. En menor medida aparecen también errores como distribuir potencias respecto a la suma o aplicar mal la propiedad distributiva.

Para ser más precisos, de las 90 dificultades relacionadas con el trabajo algebraico encontradas en el primer parcial podemos destacar:

- 26 errores relacionados con problemas al despejar en una ecuación que contiene raíz cuadrada.
- 19 errores de despeje considerados más elementales (despejar en orden incorrecto o con la operación incorrecta)
- 13 errores relacionados con no invertir el sentido de la desigualdad cuando corresponde al resolver una inecuación.
- 10 errores relacionados con el módulo.

4.1.2. Segundo parcial

Tabla 2

Resultados obtenidos en el segundo parcial. Muestra de alumnos correspondiente al año 2016.

Ejercicio	Porcentaje de alumnos que tuvieron errores en su resolución	Porcentaje de alumnos que tuvieron errores relacionados con nociones algebraicas (sobre el total de alumnos de la muestra)	Porcentaje de alumnos que tuvieron errores relacionados con nociones algebraicas (sobre el total de alumnos que presentaron errores)
1	62 %	4%	6%
2	46%	27%	58%
3	56%	28%	50%

Podemos observar que en el ejercicio 1 es muy pequeño el porcentaje de alumnos que presentaron errores de índole algebraico. En general, en este ejercicio, los alumnos no demostraron tener grandes dificultades en lo referido al trabajo algebraico de la función (factorizar la expresión cuadrática y luego simplificar) sino que la mayor parte de los errores estuvieron asociados a no saber graficar correctamente este tipo de función.

Consideramos que el análisis de este ejercicio no es relevante para nuestro trabajo, aunque se trate del apartado en el que los estudiantes han cometido más errores.

En relación a los restantes ejercicios analizados, podemos afirmar que el porcentaje de alumnos que comete errores es bastante elevado y, en particular, el número de estudiantes que manifiestan tener dificultades relacionadas con el trabajo algebraico es alto y similar en ambos.

En el análisis de este examen encontramos numerosos errores en relación al concepto de módulo, los alumnos parecen no tener claro cuándo aplicarlo ni cómo hacerlo. Por ejemplo, en el tercer ejercicio, aquellos alumnos que deciden buscar los ceros de la ecuación cuadrática "pasando" el 9 sumando, no utilizan el concepto de módulo, y eso los lleva a encontrar una única solución.

También persisten errores básicos de despeje como realizar el pasaje de términos en el orden incorrecto. Por ejemplo, algunos alumnos plantean bien la ecuación del ejercicio 2 y pasan el denominador multiplicando cuando hay más de un término.

En menor medida observamos errores que surgen al no utilizar los paréntesis en expresiones algebraicas cuando corresponde y dificultades asociadas a la propiedad distributiva.

Para ser más precisos de las 54 dificultades en relación al trabajo algebraico destacadas en este examen:

- 15 están relacionados con el módulo
- 18 son errores de despeje considerados elementales (despejar en orden incorrecto, o con la operación que no corresponde).

4.2. Análisis según las capas de la actividad matemática

En este apartado, describiremos en qué capas de análisis (CP, CD, MyM, DyR, OSO), de las que menciona la Epistemografía, se localizaron los errores de los estudiantes. No hemos realizado aquí la distinción entre errores de naturaleza algebraica y no algebraica. Es decir, que las dificultades consideradas pueden estar relacionadas con el trabajo algebraico, o simplemente con cuestiones ligadas específicamente al análisis matemático.

Los siguientes gráficos muestran los resultados obtenidos:



Fig. N° 3. Distribución por capas de los errores encontrados en el primer parcial.



Fig. N°4. Distribución por capas de los errores encontrados en el segundo parcial.

En la totalidad de los ejercicios estudiados, la mayor parte de las dificultades de los alumnos fueron localizadas en las capas de análisis OSO y DyR. Al discriminar por ítem, pudimos observar que en los ítems b) y c) del primer parcial, y en el ejercicio 2 del segundo, son mayores las cantidades de errores de la capa OSO, mientras que en otros –ítem a) del primer parcial y ejercicio 1 del segundo– predominan las dificultades pertenecientes a la capa DyR.

A través del análisis detallado de los errores pudimos notar que las dificultades de carácter algebraico encontradas en los estudiantes de la muestra considerada se localizaron únicamente en la capa de análisis OSO.

Creemos que no hemos encontrado dificultades ligadas al trabajo algebraico en la capa de análisis DyR debido a que los alumnos, al realizar la actividad propuesta, están resolviendo ejercicios relacionados con el tema “funciones”. En este sentido, si bien al hacerlo deben poner en juego conocimientos algebraicos, pensamos que la parte del razonamiento como así también la de las formas discursivas usadas para expresar esos razonamientos están relacionadas con conocimientos que pertenecen al análisis matemático y no al álgebra.

4.3. Análisis según las dimensiones del conocimiento

Como ya hemos mencionado, para estudiar las dificultades según las dimensiones del conocimiento llevamos a cabo un análisis por examen (por alumno), teniendo en cuenta únicamente aquellos errores que fueron localizados en la fase anterior de la investigación en la capa de los objetos de saber y las operaciones (OSO) y que tienen origen algebraico.

Para el primer parcial, estas dificultades representaron un 36 % sobre el total de los errores encontrados, mientras que para el segundo examen este porcentaje fue del 28%.

A fin de ejemplificar el trabajo realizado, si consideramos el primer parcial, fueron ubicados en la dimensión nocional errores tales como desconocer que elevar al cuadrado ambos miembros de una ecuación no conserva la igualdad, aplicar la propiedad distributiva de la potencia con respecto a la suma, o bien usar módulo al elevar al cuadrado una expresión con raíz. En la dimensión semio- lingüística fueron ubicados errores como olvidarse de copiar términos de un paso a otro de una ecuación de términos, sumar variables con constantes y errores de cuentas. Por último, en la dimensión instrumental ubicamos los errores de despeje, no invertir el sentido de la desigualdad cuando corresponde y aplicar mal la propiedad distributiva, entre otros.

Si tenemos en cuenta el segundo parcial, errores como no usar correctamente el concepto de módulo, desconocer la fórmula para obtener la solución de las ecuaciones cuadráticas así como otros errores que aparecieron también en el primer parcial (como usar módulo al elevar al cuadrado una expresión con raíz) fueron ubicados en la dimensión nocional. En la dimensión semio- lingüística el error más frecuente fue no usar paréntesis cuando corresponde. Ubicamos en la dimensión instrumental errores como “pasar” multiplicando un factor al otro miembro de una igualdad pese a haber dos términos o “pasar” la raíz como raíz.

Luego de confeccionar las tablas de la *Fig. N°2* para cada alumno, y considerando únicamente las dificultades de origen algebraico, obtuvimos los siguientes resultados en relación a las dimensiones del conocimiento:

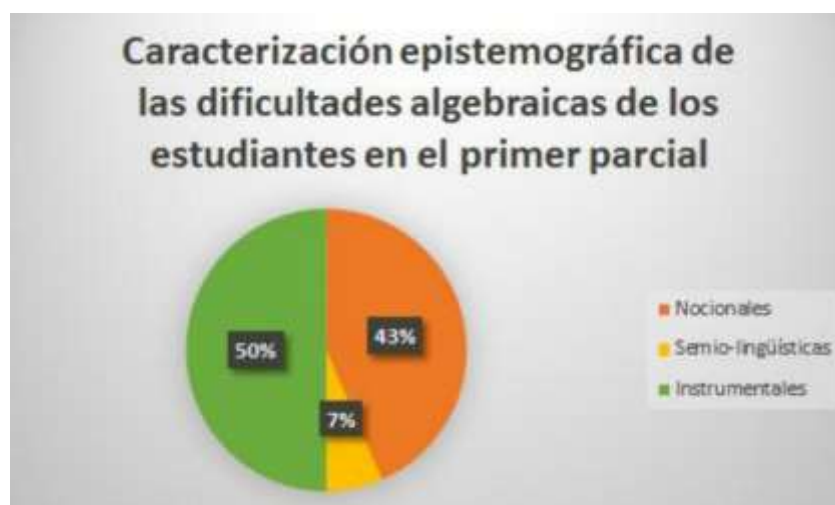


Fig. N°5. Distribución porcentual según las dimensiones de las dificultades encontradas en el primer parcial.



Fig. N°6. Distribución porcentual según las dimensiones de las dificultades encontradas correspondientes al segundo parcial.

Notamos que los porcentajes son similares para los dos exámenes. En ambos casos, la mayor parte de las dificultades se localizan en la dimensión instrumental, luego le siguen las de carácter nocional y, por último, las semio-lingüísticas.

Al hacer la distinción entre alumnos aprobados y desaprobados pudimos observar que los porcentajes de dificultades algebraicas que tuvieron ambos grupos resultaron similares.

En el primer parcial, del total de errores cometidos por los alumnos aprobados, un 35% están relacionadas con dificultades algebraicas, mientras que en los desaprobados este porcentaje llegó al 38%.

En relación al segundo examen, sobre el total de errores cometidos por los estudiantes que aprobaron, un 26 % están relacionados con las dificultades algebraicas y, considerando los desaprobados, el porcentaje resultó ser del 30%.

Sin embargo, cuando estudiamos la caracterización Epistemográfica de dichas dificultades, observamos ciertas diferencias entre las cometidas por los dos grupos.

Considerando los estudiantes que desaprobaron, podemos decir que, tanto en el primer como en el segundo parcial, éstos han tenido más dificultades relacionadas con la dimensión instrumental (63% para el primer parcial y 59% para el segundo)

En el caso de los alumnos aprobados observamos, en el segundo parcial, el mismo porcentaje de dificultades nocionales e instrumentales (40%), mientras que en el análisis del primer examen los estudiantes que aprobaron demostraron tener mayor cantidad de dificultades de tipo nocional representando éstas el 59% de las dificultades totales de los alumnos aprobados).

En ambos exámenes, tanto en el grupo de alumnos aprobados como en el de desaprobados, las dificultades semio-lingüísticas aparecen como las menos frecuentes.

5. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS CON LA INVESTIGACIÓN ANTERIOR

Los porcentajes de errores algebraicos, y no algebraicos, son bastante similares al comparar las tres instancias que se han observado: 1ra. Investigación, primer parcial de la 2da. Investigación, 2do. parcial de la 2da. Investigación

Tabla 3

Comparación de los resultados de la investigación desarrollada por Benítez (2014) y la investigación actual

	Total de alumnos			Alumnos Aprobados			Alumnos Desaprobados		
	1ª inv.	2ª inv (1er. parcial)	2ª inv (2do. parcial)	1ª inv.	2ª inv (1er. parcial)	2ª inv (2do. parcial)	1ª inv.	2ª inv (1er. parcial)	2ª inv (2do. parcial)
% de dif. algeb.	37%	36%	28 %	41%	35%	26 %	36%	38%	30%
% dif. no algeb.	63%	64%	72%	59%	65%	74%	64%	62%	70%
Dimensión predominante	Semio-lingüística	Instrumental	Instrumental	Nocional	Nocional	Instrumental y Nocional	Semio-lingüística	Instrumental	Instrumental

Si bien en el segundo parcial se observa una pequeña disminución del porcentaje de errores algebraicos, y un aumento de los no algebraicos, esto podría deberse a que en los ejercicios de este parcial se pusieron en juego cuestiones mayormente conceptuales sobre función; por ejemplo, en el ejercicio 1 era poco y bastante sencillo el trabajo algebraico a realizar.

Con respecto a las dimensiones, los resultados del segundo parcial han sido similares a los del primero en la segunda investigación. La única diferencia fue encontrada en el grupo de alumnos aprobados ya que, en el primer parcial, la dimensión predominante había sido la nocional y, en el caso del segundo examen, las dimensiones nocional e instrumental se encontraron en igualdad de condiciones.

Respecto a la investigación desarrollada por Benítez (2014) notamos algunas diferencias: En la investigación mencionada predominaban las dificultades ligadas a la dimensión semio-lingüística mientras que, en la segunda investigación, prevalecen las correspondientes a la dimensión instrumental. Pensamos que esto se debe a que en la segunda investigación hemos modificado la manera de ubicar los errores en las distintas dimensiones del conocimiento: en la primera investigación se localizaron algunos errores en más de una dimensión, con este criterio; por ejemplo, muchos errores se ubicaron tanto en la dimensión instrumental como en semio-lingüística.

En esta oportunidad, hemos decidido ubicar cada error en una única dimensión: aquella que, luego de un análisis y discusión, hemos considerado la dimensión predominante para el error en cuestión.

6. CONCLUSIONES

Comparando estos resultados con los obtenidos en el trabajo de la Mg. Natalia Benítez podemos concluir, en base a las muestras de exámenes consideradas, que las modificaciones realizadas en la estructura de la materia no han tenido como consecuencia un cambio profundo en lo que se refiere a la disminución de las dificultades algebraicas de los alumnos relacionadas con el trabajo con funciones.

Lo que podría estar sucediendo, desde nuestro punto de vista, es que, si bien el nuevo programa de la materia contempla la enseñanza de temas relacionados con el trabajo algebraico, como operaciones con expresiones algebraicas, ecuaciones, inecuaciones, el abordaje que se le está dando a estos temas en las clases puede no ser el apropiado.

El desafío, para todos los docentes y para nosotras como investigadoras, es pensar en una propuesta didáctica que contemple las dificultades detectadas en los estudiantes en la presente investigación; sobre todo las correspondientes a la dimensión instrumental que fueron las más relevantes para nuestro estudio. Atendiendo a las dificultades encontradas presentamos una propuesta para la Materia Matemática Empresarial 1 de la UADE. (Anexo)

Parecería que este tipo de dificultades relacionadas con la utilización correcta de los instrumentos (por ejemplo, al despejar) son las primeras con las que se enfrentan los estudiantes.

Una vez superadas éstas, aparecen como un obstáculo las dificultades de carácter nocional relacionadas con las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos y a cómo éstos se relacionan entre sí (errores relacionados con la definición de módulo que se manifiestan cuando los alumnos deben resolver una ecuación cuadrática, o propiedades de la potencia aprendidas en forma errónea como, por ejemplo, distribuirla respecto de la suma).

Para ser más precisos entre las dificultades encontradas en ambos exámenes, se destacan:

- Procedimientos incorrectos para despejar en ecuaciones e inecuaciones. Dificultades en el orden al despejar, operaciones incorrectas y mal uso de los paréntesis en las expresiones. Dificultades con el cambio del sentido de la desigualdad en las inecuaciones.
- Dificultades al resolver ecuaciones con raíces cuadradas.
- Dificultades con el módulo de un número real, el concepto y su utilización en la resolución de ecuaciones e inecuaciones.

Creemos que los alumnos continúan cometiendo este tipo de errores debido a que no comprenden por qué funcionan las herramientas utilizadas, memorizan técnicas (como por ejemplo: “si está multiplicando debe pasar dividiendo”) sin otorgarles ningún significado. Pensamos que en la clase habría que focalizar en estas cuestiones conceptuales para que los alumnos puedan darle un sentido a estas reglas lo que los ayudará a no olvidarlas o confundirlas.

Para colaborar en estos aspectos consideramos necesario agregar más ejercitación acerca de las principales dificultades que hemos detectado. Nos parece especialmente adecuadas propuestas en las que sean los alumnos quienes deban analizar en grupos resoluciones incorrectas (ver anexo). Pensamos que este tipo de ejercitación estimula el pensamiento crítico, favorece la discusión entre los alumnos y permite así generar aprendizajes más significativos.

Al tener que analizar las resoluciones de otros, los alumnos se sentirán obligados a debatir entre ellos, hacer referencia a las propiedades que estén involucradas, y generar argumentos para convencer al resto. En la puesta en común se pueden revisar las propiedades, los procedimientos válidos y los que no lo son y tratar los errores más frecuentes. También puede ser una estrategia que los alumnos pasen al pizarrón a resolver algunos ejercicios y entre todos corregir la resolución.

7. APORTES DE NUESTRA INVESTIGACIÓN AL ANÁLISIS EPISTEMOGRÁFICO

Nuestro estudio permitió, a través del intercambio de opiniones entre las integrantes del equipo al intentar localizar las dificultades de los estudiantes en las distintas categorías, obtener definiciones más refinadas de las capas y dimensiones mencionadas en la Epistemografía.

Pusimos a prueba el modelo de las tablas de análisis para localizar errores, utilizado por primera vez en la tesis de Benítez (2014), obteniendo resultados satisfactorios. Comprobamos que éste pudo ser utilizado en una nueva experiencia para analizar errores de una muestra diferente.

Al estudiar las dificultades del primer parcial, utilizando la metodología diseñada en la investigación anterior, pudimos aplicarla, entenderla y en cierto modo perfeccionarla, lo que nos permitió hacer un estudio mucho más ágil al analizar los errores del segundo examen.

Creemos que, a través de este estudio, hicimos una contribución interesante a la Didáctica de la Matemática y, por qué no, a la de otras ciencias. El modelo utilizado con las

tablas de análisis, usando la Epistemografía, podría aplicarse en otros estudios sobre análisis de errores de diferentes temas de Matemática. Un desafío (un poco ambicioso quizás) en este sentido sería extender el modelo al análisis de errores en temas de otras disciplinas.

Nuestro interés es seguir trabajando con el Análisis Epistemográfico en futuras investigaciones para continuar estudiando cuáles son sus potenciales y limitaciones.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrate, R., Pochulu, M., Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajos*. Universidad Nacional de Villa María. Argentina. Disponible en: <http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf>
- Alvarez, F., Benítez, N., Bolívar, M., Hollisch, G., (2016) *Análisis Epistemográfico sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en primer año de la universidad*. Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional – edUTecNe. ISBN: 978-987-1896-57-8. Argentina. Disponible en http://www.edutecne.utn.edu.ar/cieciba_2016/Articulos_Eje01.pdf
- Benítez, N. (2014). *Una mirada epistemográfica sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en el ingreso a la universidad*. Tesis de maestría. Neuquén UNComa. Argentina
- Benítez, N., Drouhard, J-Ph. (2015). *Una mirada epistemográfica sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en el ingreso a la universidad*. En: *Actas de las IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el Campo de las Ciencias Exactas y Naturales*. Universidad Nacional de la Plata. ISSN 2250-8473. Argentina. Disponible en: <http://jornadasceyn.fahce.unlp.edu.ar/convocatoria/actas-2015/trabajos-matematica/Benitez.pdf/view>
- Del Puerto, S., Minnaard, C., Seminara, S. (2004). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas*. *Revista Iberoamericana en Educación*. (ISSN: 1681-5653). Disponible en: <http://www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf>
- Drouhard, J-Ph. (2013). *El análisis epistemográfico: un análisis multidimensional de los saberes para la didáctica de la matemática*. Comunicación en las XXIV Jornadas de Epistemología e Historia de la Ciencia, La Falda, Córdoba. Universidad Nacional de Córdoba. DOI: 10.13140/2.1.4417.6645. Argentina. El texto completo se encuentra en: http://www.researchgate.net/publication/266079746_El_analisis_epistemografico_un_analisis_multidimensional_de_los_saberes_para_la_didactica_de_la_matematica
- Drouhard, J-Ph. (2014). *Breve presentación de la epistemografía, versión provisoria*. Artículo no publicado. Disponible en: http://www.researchgate.net/publication/237020908_Breve_presentacin_de_la_Epistemografa_%28versin_provisoria%29
- Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflexions on its Main Activities. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra; The 12th ICMI study*. (21-33). Norwood, MA: Kluwer.
- Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas*. Libros del Zorzal. Buenos Aires. Argentina.

9. ANEXO

Propuesta didáctica:

Atendiendo a las dificultades encontradas podrían agregarse los siguientes ítems a la guía de la materia Matemática Empresarial 1 de UADE⁵:

Ejercicio 1- ¿Para qué valores de x se verifica la igualdad $\sqrt{x} = x$? ¿y $\sqrt{3x+1} = 3x+1$?

Ejercicio 2- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{4x-1} + 5 = 0$

b) $\frac{\sqrt{x}}{x-2} = 1$

c) $\frac{2}{x-3} - 4 = x - 2$

d) $x^2 + 7 = 2$

e) $(3x - 1)^2 = 4$

f) $(-x + 5)^2 - 8 = 1$

Ejercicio 3- Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{5} \leq 4(x - 1)$

b) $(2 - 3x)^2 - 8 > 0$

Ejercicio 4- Encontrar los errores en cada ítem, indicando los procedimientos incorrectos y cómo lo resolvería en forma correcta.

a)

$$\begin{aligned} 2 - \frac{x+3}{x-1} = 0 & \quad -\frac{x+3}{x-1} = -2 & \quad -x+3 = -2(x-1) & \quad -x+3 = -2x+2 \\ & & -x+2x = 2-3 & \quad x = -1 \end{aligned}$$

b)

$$2 - \frac{x+3}{x-1} = 0 \quad 2 - x + 3 = 0 \quad 5 = x$$

c)

$$x^2 - 16 = 0 \quad x^2 = 16 \quad x = 4$$

d)

$$\sqrt{x+1} = 1$$

⁵Considerar que los ejercicios presentados son complementarios a los que incluye la guía de trabajos prácticos actual de la materia Matemática Empresarial 1.

$$|x + 1| = 1^2 \quad \text{entonces:} \quad x + 1 = 1 \quad \text{ó} \quad x + 1 = -1$$

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = -2$$

e)

$$(x + 4)^2 - 9 = 0 \quad (x + 4)^2 = 9 \quad x + 4 = \sqrt{9} \quad x = 3 - 4 \quad x = -1$$

$$\text{f) } \frac{-1}{6}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{x+3} \quad \frac{-1}{6}x + \frac{1}{2}(x + 3) = 1 \quad \frac{-1}{6}x + \frac{1}{2}x + 1 = 1 \quad \frac{1}{6}x + 1 - 1 = 0$$

$$\frac{1}{6}x = 0 \quad x = 6$$

El ejercicio que se muestra a continuación nos parece especialmente adecuado para proponer a los alumnos para trabajar en clase de forma grupal. Se podría dar a todos los grupos las dos resoluciones y pedir a algunos grupos que analicen una y el resto de los grupos la otra. Al tener que analizar las resoluciones de otros, los alumnos se sentirán obligados a debatir entre ellos, hacer referencia a las propiedades que estén involucradas, y generar argumentos para convencer al resto. La puesta en común se puede aprovechar para repasar las propiedades, los procedimientos válidos y los que no lo son y para alertar sobre los errores más frecuentes. Seguramente los distintos grupos observarán diferentes cuestiones lo que llevará a un nuevo análisis entre todos con la guía del docente.

Ejercicio 5- El siguiente ejercicio fue evaluado en un primer parcial de Matemática 1. Te mostramos dos resoluciones que hicieron del mismo dos alumnos distintos. Te pedimos que las corrijas mostrando todos los errores que encuentres (si es que hubiera) o indicando que la resolución es correcta:

Enunciado: Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación: $\frac{\sqrt{-\frac{2}{3}x+2}}{x+2} = -1$

Resolución A:

$$\text{Restricciones: } x + 2 \neq 0, \quad x \neq -2$$

$$\frac{\sqrt{-\frac{2}{3}(x+1)+2}}{x+2} = -1$$

$$\sqrt{-\frac{2}{3}(x+1)+2} = -1(x+2)$$

$$\sqrt{-\frac{2}{3}(x+1)+2} = -x+2$$

$$-\frac{2}{3}(x+1)+2 = (-x+2)^2$$

$$-\frac{2}{3}(x+1)+2 = x^2+4$$

$$-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + 2 = x^2 + 4$$

$$-x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{8}{3}$$

$$-x^2 - x = \frac{8}{3} \div \frac{2}{3}$$

$$-x - x = \sqrt{4}$$

$$-2x = 2$$

$$x = 2 \div (-2)$$

$$x = -1$$

$$S = \{-1\}$$

Resolución B:

$$\frac{\sqrt{-\frac{2}{3}(x+1)+2}}{x+2} = -1$$

$$\sqrt{-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}} = -1(x+2)$$

$$-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = (-x-2)^2$$

$$-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = x^2 + 4x + 4$$

$$0 = x^2 + 4x + 4 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$0 = x^2 + \frac{14}{3}x + \frac{8}{3}$$

$$S = \left\{-\frac{2}{3}, -4\right\}$$