



Marzo 2020 - ISSN: 1989-4155

## TITULO: RECURSO PEDAGÓGICO PARA LA MATEMÁTICA NUMÉRICA

**Autor: M. Sc. Ing. Pedro Jorge Mollinedo Nodarse**

profesor asistente.

pedromn@uclv.edu.cu. MES ULCV.

Para citar este artículo puede utilizar el siguiente formato:

Pedro Jorge Mollinedo Nodarse (2020): "Recurso pedagógico para la matemática numérica", Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo (marzo 2020). En línea:

<https://www.eumed.net/rev/atlante/2020/03/recurso-matematica-numerica.html>

<http://hdl.handle.net/20.500.11763/atlante2003recurso-matematica-numerica>

### Resumen:

El curso por encuentro en las carreras de ingeniería no es la excepción por la dificultades obtenidas en los resultados de Matemática, la inexistencia de la cantidad de computadoras requeridas y el tiempo de maquina por estudiantes, sumándole a esto la complejidad de la matemática numérica a partir de los anterior el claustro de profesores vuelca sus esfuerzos en proponer alternativas para aumentar la calidad en el proceso de enseñanza aprendizaje. De la anterior problemática se ha propuesto como objetivo realizar un recurso pedagógico para la Matemática Numérica. El recurso que se propone es un Libro Excel por su fácil acceso ya que se encuentra en Microsoft Office del ambiente Windows que ayude a resolver los SEL por métodos numéricos. Este libro electrónico propicia que los que la utilizan puedan resolver ejercicios en sus cuadernos y revisar las diferentes fases en ella. Los profesores podrán plantearse nuevos ejercicios y comprobarlos fácilmente. El libro consta de dos hojas de cálculo una para el método de Jacobi y otra para el de Gaus-Seidel. Este recurso pedagógico ofrece una herramienta más para elevar el aprendizaje en el proceso de enseñanza de la Matemática Numérica y por su fácil manejo e instalación es factible para todos los actores.

### Abstract:

The course per encounter in the engineering careers is no exception for the difficulties obtained in the Mathematics results, the lack of the amount of computers required and the machine time per students, adding to this the complexity of numerical mathematics from of the above, the faculty staff focuses its efforts on proposing alternatives to increase quality in the teaching-learning process. From the previous problem, it has been proposed as an objective to make a pedagogical resource for Numerical Mathematics. The proposed resource is an Excel Workbook for its easy access since it is in Microsoft Office of the Windows environment that helps to solve the SEL by numerical methods. This e-book allows those who use it to solve exercises in their notebooks and review the different phases in it. Teachers can consider new exercises and check them easily. The book consists of two spreadsheets, one for the Jacobi method and the other for Gaus-Seidel's. This pedagogical resource offers one more tool to increase learning in the process of teaching Numerical Mathematics and because of its easy handling and installation it is feasible for all actors.

Palabras claves: Matemática Numérica, recurso pedagógico, SEL, Jacobi y Gauss-Seidel.

Keywords: Numerical Mathematics, pedagogical resource, SEL, Jacobi and Gauss-Seidel.

### INTRODUCCIÓN

El proceso enseñanza-aprendizaje en el marco de los Centros Universitarios, pertenecientes a la Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas tiene instaurado la modalidad de estudio

semipresencial por el modo de asumir la relación estudiante-profesor, adecuada a las reales posibilidades de la población destinataria a la formación, propiciando un enfoque más individualizado de esa relación, a partir de las necesidades educativas individuales de cada estudiante. Con este modelo debe tenerse en cuenta muchos aspectos para su formación integral ya que la tendencia actual es propiciar un método que conlleve a las direcciones correctas y satisfaga los principios y las dimensiones propuestas por la educación superior donde el aprendizaje sea permanente y se potencie, haciendo que el estudiante participe activamente en él y sea sujeto de su propia instrucción con un concepto desarrollador apoyado en recursos.

El curso por encuentro en las carreras de ingeniería no es la excepción por la dificultades obtenidas en los resultados de Matemática, la inexistencia de la cantidad de computadoras requeridas, tiempo de maquina por estudiantes restringido y la complejidad de la Matemática Numérica son aspectos para que el claustro de profesores centre sus esfuerzos en proponer alternativas para aumentar la calidad en el proceso de enseñanza aprendizaje.

De la anterior problemática se ha propuesto como objetivo realizar un recurso pedagógico para la Matemática Numérica.

De los métodos, técnicas y procedimientos de investigación se utilizan: el enfoque sistémico estructural funcional en la orientación jerarquizada de los elementos que posibilitan la actividad de enseñanza-aprendizaje en la aplicación de un recurso pedagógico, sus componentes, estructura y argumento. El análisis y síntesis para descubrir la esencia del fenómeno objeto de estudio, Inducción y deducción es utilizado en la indagación de la solución al problema a partir de la información y situaciones que se fueron acopiando hasta llegar a generalizaciones y conclusiones.

La novedad científica está precisada por la necesidad de inferir un cambio en el aprendizaje de Matemática Numérica en el Centro Universitario, que modifique su estado actual en los resultados académicos de los estudiantes para cambiar de forma permanente la comprensión de la asignatura, elevando el nivel de participación y socialización en las clases, así como la realización del estudio independiente como consecuencia de su autoaprendizaje.

## **DESARROLLO**

### **Matemática numérica, Recurso pedagógico y Tecnologías de la información y la comunicación.**

En el presente trabajo combinamos tres aspectos para aumentar la eficiencia del proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes de ingeniería como son la asignatura de matemática numérica, recurso pedagógico y tecnologías de la información y las comunicaciones que presentamos a continuación.

Diferentes asignaturas conforman la disciplina de Matemática en las carreras de ingeniería de las universidades, en general, estudian uno o más objetos matemáticos. El Algebra Lineal estudia los espacios vectoriales y las aplicaciones lineales que se definen sobre ellos y el Análisis Matemático se dedica a las funciones numéricas. La matemática numérica según Alvarez, Guerra y Lau (2003):

...no se dedica al estudio de un objeto matemático específico, sino al desarrollo de métodos para la solución de problemas mediante una cantidad finita de operaciones numéricas. Esto indica que la esencia de la Matemática Numérica no es el problema que se ha de resolver, sino el método que se aplica.

A estos métodos se le llaman métodos numéricos que difieren de los empleados en las asignaturas anteriores llamados analíticos. Los últimos se obtienen resultados exactos como se desee, mientras en los numéricos tan exactos como sea necesario por lo que los resultados son aproximados, lo que los hace más generales que los primeros. Con los métodos numéricos se puede calcular rápidamente cualquier área bajo la curva por muy difícil que se la función a integral o calcular cualquier sistema de ecuaciones que cumpla con las condiciones de los métodos numéricos a emplear y que los resultados no sean exactos y el numero de ecuaciones e incógnitas sea elevado.

Estos métodos numéricos se pueden utilizar en una computadora digital, lo que simplifica el cálculo y evita la proliferación de errores. Estos métodos ganan rápidamente la aprobación y

uso en los ingenieros con la aplicación de la combinación Matemática Numérica-Computación-Inteligencia artificial en la era digital.

Esta necesidad de aprendizaje por parte de los estudiantes de ingeniería de la Matemática Numérica requiere, por parte de los profesores una gran flexibilidad interpretativa sobre las ideas previas de los estudiantes, capacidad para crear situaciones de aprendizaje significativo y recursos pedagógicos para corregir sobre la marcha las interpretaciones inadecuadas en el aprendizaje de los estudiantes.

Estos recursos necesarios conceptualizados por Bravo (1997) son:

Todo objeto, persona, situación que va a permitir la realización del proceso de aprendizaje del estudiante. Se convierte en recurso desde el mismo momento en que el facilitador lo aprovecha al máximo para el desarrollo integral del estudiante, es decir que un recurso no es solo aquel material especialmente concebido para lograr determinados aprendizajes, sino también toda situación de la vida del aprendiz que le permite prepararse para ella. Desde el punto de vista cognitiva estarán representados por todos aquellos materiales que estimulan el desarrollo de los procesos mentales: memoria, imaginación abstracción, funciones lógicas del pensamiento y otros. Dentro de estos materiales se destacan medios audiovisuales, juegos y otros.

Los estudiantes necesitan de todas las ayudas que puedan disponer en el curso por encuentro de varios tipos, ya sea personal, técnico o material con el fin de asegurar que estos se apropien de los objetivos propuestos.

Estas ayudas son fundamentales para el aprendizaje ya que este debe apropiarse de los conocimientos desarrollando un nivel de aprendizaje superior al inicial y en el rol de profesor facilitador este sin dejar de efectuar su misión en el proceso de enseñanza aprendizaje ha de proveer de ayudas para que se alcance esa zona de desarrollo próximo mencionada por Vigotski.

Partiendo de que los estudiantes para apropiarse de los objetivos de aprendizaje de la matemática numérica necesitan de ayudas o recursos pedagógicos proponemos que esta sea a través de las TIC.

Estas tecnologías de la información y la comunicación son un conjunto de servicios de redes y aparatos que tienen como objetivo optimizar y mejorar la calidad de vida del ser humano; compuestas por herramientas computacionales e informáticas y pueden ser una herramienta para que los estudiantes aumente la eficiencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje ya que permiten un flujo de información entre los diferentes actores en el aprendizaje desarrollador. Tienen un rol fundamental en el acceso universal a la educación, la igualdad en la instrucción, la enseñanza y el aprendizaje de calidad y la formación de docentes en el sistema educativo.

Pero es incuestionable las ventajas que trae para el proceso como pueden ser: suprimir restricciones de espacio y tiempo para la enseñanza, es un modelo educativo más enfocado en el estudiante, los ambientes educativos son más cómodos promoviendo grados de responsabilidad, actividad y participación, elevan la motivación y el interés de los estudiantes, fomentan la interdisciplinariedad, facilita la evaluación de los contenidos y una educación a distancia.

La necesidad en el aprendizaje de la Matemática Numérica y lo anterior planteado hace que usemos un recurso pedagógico que en nuestro caso son hojas Excel para usar en el cálculo de los métodos Jacobi y Gauss-Seidel para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

### **Métodos numéricos estudiados en la asignatura para los cuales se propone el recurso pedagógico.**

Para la solución de sistemas de ecuaciones lineales (SEL) a través de métodos numéricos se propone dos de estos, el método de Jacobi y el de Gauss-Seidel, que a continuación expondremos sus aspectos principales.

Los dos métodos deben cumplir los siguientes requisitos en el SEL:

Siendo el sistema de sistema de ecuaciones lineales  $A \cdot x = B$

Condiciones:

- Tiene la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas, o sea, A es una matriz cuadrada.
- Tiene solución única, o sea,  $|A| \neq 0$ .
- Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, o sea,  $a_{ii} \neq 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Analizar la convergencia de la solución para eso la matriz del sistema es de diagonal predominante.

Método de Jacobi

Supongamos que el sistema de ecuaciones lineales  $A \cdot x = B$ , el cual escrito en forma explícita es

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \quad (1)$$

Cumple las condiciones

Despejando la variable  $x_i$  en la ecuación  $i$ , el SEL (1) se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - 0x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - 0x_2 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \dots - 0x_n \end{cases} \quad (2)$$

La forma matricial de (2) es la siguiente

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Si denotamos por M la matriz del sistema (3) y por C su matriz de términos independientes, este se puede escribir en la forma

$$x = M \cdot x + C \quad (4)$$

El método de Jacobi consiste en tomar una aproximación inicial  $x^{(0)}$  y, a partir de ésta, generar una sucesión de soluciones aproximadas  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$  mediante la ecuación recursiva

$$x^{(k)} = M \cdot x^{(k-1)} + C \quad (5)$$

La sucesión (5) puede ser convergente o no. El siguiente teorema establece la condición de convergencia de la misma a la solución del sistema.

Teorema 1: La sucesión  $\{x^{(k)}\}$  converge a la solución del sistema de ecuaciones lineales (1), (2) ó (3), cualquiera que sea la solución inicial  $x^{(0)}$ , si se cumple una de las condiciones siguientes:

a) La matriz A tiene diagonal predominante.

b)  $\alpha = \|M\| < 1$  ( $\alpha$  es el factor de convergencia del método de Jacobi).

Las dos condiciones de convergencia dadas en el teorema anterior son equivalentes, así que una de ellas se cumple si y solo si se cumple la otra. En ese caso el error absoluto máximo de la aproximación  $x^{(k)}$  es

$$E_m(x^{(k)}) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \quad (6)$$

#### Método de Gauss - Seidel

Como acabamos de ver, en el método de Jacobi el valor de cada variable se calcula a partir de los valores de sus variables independientes en la iteración anterior. En cambio, en el método de Gauss–Seidel conforme se calcula el valor de una variable, se usa en la misma iteración. Esto mejora la convergencia con respecto al método de Jacobi.

Los dos métodos coinciden en las premisas y en las condiciones de convergencia. Los demás aspectos del método de Gauss–Seidel son los siguientes.

La fórmula general para el cálculo sucesivo de las soluciones es

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k-1)}$$

El factor de convergencia es

$$\beta = \max \left\{ \frac{q_1}{1-p_1}, \frac{q_2}{1-p_2}, \dots, \frac{q_n}{1-p_n} \right\}$$

donde

$$p_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \quad q_i = \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

El error absoluto máximo de la solución en la iteración k es

$$E_m(x^{(k)}) = \frac{\beta}{1-\beta} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Proponemos los ejemplos siguientes para demostrar la validez de la página Excel propuesta. Estos se encuentran en el libro de texto utilizado por las universidades cubanas (Álvarez Blanco, M., Guerra Hernández, A. & Lau Fernández, R. 2004) titulado Matemática Numérica.

Ejemplo 5 página 219 del libro de texto de la asignatura: resuelva con cuatro cifras decimales exactas el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método de Jacobi.

$$\begin{cases} 9x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 19 \\ x_1 - x_2 + 11x_3 = 10 \end{cases}$$

Este SEL cumple con las condiciones necesarias

Establecer la condición de parada para el método de Jacobi.

Como la solución se debe dar con cuatro cifras decimales exactas, el método debe llegar hasta iteración para la cual

$$E_m(x^{(k)}) \leq 0,00005$$

$$0,6 \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq 0,0005$$

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq 0,00008 \quad (\text{Condición de parada})$$

La solución del sistema con tres cifras decimales exactas es

$$\begin{cases} x_1 = 1,000002 \\ x_2 = 2,000004 \\ x_3 = 1,000001 \end{cases}$$

Ejemplo 9 página 230 resuelva con cuatro cifras decimales exactas el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método de Seidel. El sistema ya fue resuelto por el método de Jacobi en el ejemplo 5.

Como la solución se debe dar con tres cifras decimales exactas, el método debe llegar hasta iteración para la cual

$$E_m(x^{(k)}) \leq 0,00005$$

$$0,5 \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq 0,0005$$

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq 0,0001 \quad (\text{Condición de parada})$$

La solución del sistema con tres cifras decimales exactas es

$$\begin{cases} x_1 = 1,00000 \\ x_2 = 2,00000 \\ x_3 = 1,00000 \end{cases}$$

### Recurso pedagógico para la Matemática Numérica.

El recurso que se propone es un Libro Excel por su fácil acceso ya que se encuentra en Microsoft Office del ambiente Windows. Utiliza las formulas y libros estudiados por los alumnos en las asignaturas de informática propias de las diferentes carreras por lo que les resultara familiar. También es utilizable en los móviles ya que mediante una aplicación se pueden abrir y utilizar en ellos.

Este libro electrónico propicia que los que la utilizan puedan resolver ejercicios en sus cuadernos y revisar las diferentes fases en ella. Los profesores podrán plantearse nuevos ejercicios y comprobarlos fácilmente.

La versión propuesta solo es aplicable a los SEL de tres ecuaciones con tres incógnitas, pero considerando que es el sistema más adecuado para aprender el método y después aplicar a otros, se considera optimo para su utilización.

El libro consta de dos hojas de cálculo una para el método de Jacobi (figura 1) y otra para el de Gaus-Seidel (figura 2). Al abrir el libro aparecen en la parte inferior. El usuario deberá escoger la página en dependencia del método a utilizar. Por defecto el libro se abre en el método de Jacobi.

Figura 1 Libro Excel recurso pedagógico para la Matemática Numérica hoja 1  
Método de Jacobi



Figura 2 Libro Excel recurso pedagógico para la Matemática Numérica hoja 2  
Método de Gauss-Seidel



Ya dentro de cada hoja deberá entrar solo los datos para las celdas que aparecen en rojo y verde. Los datos de entrada necesarios son las ecuaciones y el número de cifras decimales exactas.

Existen tres tipos de celdas rellenas de colores rojo, azul y verde como se expone a continuación:



los valores en rojo son los datos de entrada



los valores en azul son para escoger el mayor modular



los valores en verde para entrar manualmente

Las celdas en rojo son para los datos de entrada. Solo deberán ponerse en ella los términos que acompañan a las variables del sistema y el término independiente de cada ecuación en el mismo orden que aparece en el SEL. Y en el caso de  $\varepsilon$  viene dado por la cantidad de cifras decimales exactas.

Las celdas azules son datos donde se debe escoger el factor de cada método según la metodología de resolución en este caso el mayor obviando que signo tienen; estas se utilizan para rellenar las verdes.

Las verdes es el dato escogido de las azules y debe entrarse manualmente resultante del factor escogido sea  $\alpha$  o  $\beta$  según el método utilizado.

Es importante que antes de comenzar a entrar datos en un nuevo ejercicio se borren las celdas en rojo y verde, esto para evitar confusiones. También que los sistemas SEL cumplan con las condiciones de los métodos numéricos.

El usuario debe conocer la metodología del método numérico a utilizar para visualizar los resultados que da el libro le ofrecerá como son:

- La matriz cuadrada A.
- El determinante de la matriz A.
- Las ecuaciones Xi.
- La matriz M.
- La tabla de resultados.

## CONCLUSIONES

- Este recurso pedagógico ofrece una herramienta más para elevar el aprendizaje en el proceso de enseñanza de la Matemática Numérica.
- Por su fácil manejo e instalación es factible para todos los actores.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvarez Blanco, M., Guerra Hernández, A. & Lau Fernández, R. (2004). Matemática Numérica. La Habana: Félix Varela.
- Bravo Jáuregui, L. (1997) Diccionario Latinoamericano de Educación. Material de tesis de MAA.
- Castellanos Simons, D. (2002). Aprender y enseñar en la escuela: una concepción desarrolladora. La Habana: Pueblo y Educación.
- Horruitiner Silva, P. (2008). La universidad cubana: el modelo de formación. Estrategias de aprendizaje en la universalización. La Habana: Universitaria.
- Vigotski, L. S. (1987). Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores. Habana: Científico – técnica.