ATLANTE
Cuadernos de Educación y Desarrollo
(2ª Época)

Marzo 2020 - ISSN: 1989-4155

TÍTULO: PROCEDIMIENTO PARA FAVORECER EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO CON RADICALES EN LOS ESTUDIANTES DE DÉCIMO GRADO

MSc. Neisy Caridad Rodríguez Morales[1]

Profesora Auxiliar Universidad de Sancti Spíritus José Martí, Cuba
ncrodriguez@uniss.edu.cu

Lic.Deinier Álvarez Quintero[3]

Profesor Matemática de la Escuela Militar Camilo Cienfuegos de Sancti-Spíritus

Dr. Andel Pérez González[2]

Profesor Titular Universidad de Sancti Spíritus José Martí, Cuba
apgonzález@uniss.edu.cu

Para citar este artículo puede utilizar el siguiente formato:

Neisy Caridad Rodríguez Morales, Deinier Álvarez Quintero y Andel Pérez González (2020): "Procedimiento para favorecer el aprendizaje del cálculo con radicales en los estudiantes de décimo grado", Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo (marzo 2020). En línea:

https://www.eumed.net/rev/atlante/2020/03/aprendizaje-calculo-estudiantes.html
http://hdl.handle.net/20.500.11763/atlante2003aprendizaje-calculo-estudiantes

RESUMEN

El artículo presenta el resultado de una investigación que centró su atención en la búsqueda de una respuesta a las dificultades de aprendizaje de los estudiantes de décimo grado en el cálculo con radicales. En él se fundamenta, teóricamente desde las posiciones del proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador y a partir de las exigencias más actuales de la Didáctica de la Matemática, un procedimiento didáctico que puede favorecer el aprendizaje del cálculo con radicales. Para su elaboración fue necesario utilizar métodos teóricos, empíricos y estadísticos- matemáticos que facilitaron el estudio de la bibliografía especializada y de las principales manifestaciones del aprendizaje de los estudiantes durante la investigación.

PALABRAS CLAVES: Proceso de enseñanza-aprendizaje – desarrollador - Didáctica de la Matemática, Cálculo con radicales - Procedimiento didáctico.

SUMMARY

The article presents the result of an investigation that focused its attention on the search for an answer to the learning difficulties of tenth grade students in the calculation with radicals. It is based on, theoretically from the positions of the teaching-learning process developer and from the most current demands of Mathematics Didactics, a didactic procedure that can favor the learning of calculation with radicals. For its elaboration it was necessary to use theoretical, empirical and statistical-mathematical methods that facilitated the study of specialized bibliography and the main manifestations of student learning during research.

KEY WORDS: Teaching-learning process - developer - Didactics of Mathematics, Calculation with radicals - Didactic procedure.

INTRODUCCIÓN:

Los pilares básicos que determinara la UNESCO como vía necesaria para la formación integral de las nuevas generaciones destacan por su contribución al perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje. Aunque la interrelación entre ellos es imprescindible; en la enseñanza de la Matemática, por la naturaleza de sus contenidos, acentúa el hecho de que los estudiantes logren aprender a hacer, de ahí el valor de ofrecer procedimientos que exijan a los estudiantes la organización de sus formas de trabajo y de pensamiento durante la solución de diversos tipos de tarea.

Actualmente hay muchos especialistas preocupados por perfeccionar las formas métodos y vías para desarrollar el aprendizaje en los estudiantes. En Cuba, la preparación para el estudio del cálculo con radicales comienza desde la enseñanza primaria con el cálculo con números naturales. El desarrollo de las habilidades en el cálculo constituye un objetivo fundamental en la enseñanza de la matemática debido a la importancia del desarrollo de las habilidades en el mismo para el trabajo con ecuaciones e inecuaciones, funciones, el trabajo con variables, magnitudes y demostraciones.

En este sentido, resaltan los estudios de Didáctica de la Matemática que se preocupan por actualizar el enfoque del proceso de enseñanza-aprendizaje de esta asignatura. En efecto se plantea que es importante potenciar el desarrollo de los estudiantes hacia niveles superiores de desempeño cognitivo mediante la realización de tareas cada vez más complejas y se recomienda darles la posibilidad de que construyan y apliquen sus propios procedimientos. (Álvarez, Villegas y Almeida, 2014)

Por otra parte En la escuela cubana la preparación para el estudio del cálculo con radicales comienza desde la enseñanza primaria con el cálculo con números naturales. El desarrollo de las habilidades en el cálculo constituye un objetivo fundamental en la enseñanza de la matemática debido a la importancia del desarrollo de las habilidades en el mismo para el trabajo con ecuaciones e inecuaciones, funciones, el trabajo con variables, magnitudes y demostraciones.

A pesar del sostenido trabajo que realizan los profesores y la atención esmerada que desde las enseñanzas precedentes, se brinda al cálculo; en la práctica cuando los estudiantes se enfrentan al cálculo con radicales manifiestan insuficiencias como las siguientes: no siempre identifican las operaciones con radicales a realizar, con frecuencia no aplican las reglas o propiedades necesarias para efectuar el cálculo con radicales e intentan reproducir pasos de un procedimiento dado pero no conocen el significado de sus operaciones.

Por lo antes expuesto se puede asegurar que es limitada la búsqueda de procedimientos para aprender y planificar las acciones por parte de los estudiantes, no razonan sus respuestas y dependen mucho del profesor y de otros compañeros. Al conocer estas deficiencias se hace necesario iniciar justificados trabajos científicos que aporten nuevos accesos y permitan estructurar soluciones cuya aplicación resulte factible.

1. EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DESARROLLADOR. EXIGENCIAS DESDE LA ASIGNATURA MATEMÁTICA

Durante los últimos años se ha desarrollado en Cuba un enfoque al que han dado en llamar “proceso de enseñanza aprendizaje desarrollador”, el cual responde a los cambios sociales y tecnológicos de cada contexto, y tiene la intención de promover aprendizajes cada vez más duraderos y aplicables a nuevas situaciones de la realidad cubana.

El aprendizaje desarrollador garantiza en el individuo la apropiación activa y creadora de la cultura, propiciando el desarrollo de su autoperfeccionamiento constante, de su autonomía y autodeterminación, en íntima conexión con los necesarios procesos de socialización, compromiso y responsabilidad social.

En la enseñanza de las ciencias, abarca las concepciones pedagógicas contemporáneas, basadas en la necesidad de un aprendizaje desarrollador y formativo, donde es necesario aprender a aprender, situación planteada mundialmente por muchos pedagogos y en específico por eminentes pedagogos cubanos, que vieron la necesidad de transformaciones trascendentales en los sistemas educacionales, con vistas a lograr que se diera al estudiante el papel que le corresponde dentro del aprendizaje, en contraposición con las tendencias clásicas centradas en la actividad del profesor.

En la última década, se insiste en considerar a los alumnos como sujetos activos en la construcción de conocimientos, en la necesidad de promover aprendizajes en sentido amplio y en asignar un nuevo rol al docente como mediador y facilitador del aprendizaje.

Para ello es necesario tener principios básicos como: promover el desarrollo integral de la personalidad del estudiante, es decir, activar la apropiación de conocimientos, destrezas y capacidades intelectuales en estrecha armonía con la formación de sentimientos, motivaciones, cualidades, valores, convicciones e ideales. En otras palabras, tiene que garantizar la unidad y equilibrio de lo cognitivo y lo afectivo valorativo en el desarrollo y crecimiento personal de los aprendices. Potenciar el tránsito progresivo de la dependencia a la independencia y a la autorregulación, así como el desarrollo en el sujeto de la capacidad de conocer, controlar y transformar creadoramente su propia persona y su medio. Desarrollar la capacidad para realizar aprendizajes a lo largo de la vida, a partir del dominio de las habilidades y estrategias para aprender a aprender, y de la necesidad de una autoeducación constante.

Desde esta posición se analiza el proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador como:

El proceso sistémico de transmisión y apropiación de la cultura en la institución escolar en función del encargo social, que se organiza a partir de los niveles del desarrollo actual y potencial de los estudiantes y las estudiantes, y conduce al tránsito continuo hacia niveles superiores de desarrollo, con finalidad de formar una personalidad integral y autodeterminada, capaz de transformarse y transformar su realidad en un contexto histórico concreto. (Castellanos, 2002:42)

También resultan de interés los estudios que plantean que el proceso de enseñanza-aprendizaje:

Constituye un sistema donde tanto la enseñanza como el aprendizaje, como subsistemas, se basan en una Educación desarrolladora, lo que implica una comunicación y actividad intencionales, cuyo accionar didáctico genera estrategias de aprendizajes para el desarrollo de una personalidad integral y autodeterminada del educando, en los marcos de la escuela como institución social transmisora de la cultura. (García, 2004: 54)

Los autores del artículo asumen los criterios de (Soto y García, 2012) cuando destacan que para que un proceso de enseñanza-aprendizaje sea desarrollador, tendría que cumplir con cuatro dimensiones básicas:

- Promover el desarrollo integral de la personalidad del educando.
- Potenciar el tránsito progresivo de niveles de dependencia a la independencia y a la autorregulación.
- Desarrollar en los escolares la capacidad de conocer, controlar y transformarse a sí y a su medio creadoramente.
- Desarrollar la capacidad para realizar aprendizajes a lo largo de la vida, a partir de poseer habilidades, hábitos y estrategias para aprender.

2 EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA. EL ENFOQUE METODOLÓGICO ACTUAL

La enseñanza de la ciencia, en particular de la Matemática, abarca las concepciones pedagógicas contemporáneas basadas en la necesidad de un aprendizaje desarrollador. Entonces es necesario potenciar el aprender a hacer, aspecto que analizan con marcado énfasis los investigadores en Didáctica de la Matemática.

La enseñanza de la Matemática escolar juega un papel importante en la formación integral de los estudiantes para que estos sean capaces de asumir los retos científicos y técnicos que demanda el actual desarrollo social. En este sentido, es necesario que la escuela los prepare para aprender y aprender a hacer. En correspondencia con lo anterior, la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje debe lograr en los estudiantes una verdadera disposición para aprender de forma activa y estratégica, enfrentar las tareas y mantener la concentración y los esfuerzos por lograr los objetivos propuestos y en particular el desarrollo de las habilidades matemáticas correspondientes.

Siendo consecuente con las ideas expresadas, se insiste en que el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática es desarrollador si cada uno de los estudiantes logra:

- La adquisición de los conocimientos, las habilidades y las capacidades matemáticas requeridas para realizar aprendizajes durante toda su vida.
- El tránsito progresivo de la dependencia a la independencia y a la autorregulación durante la realización de diversas tareas docentes.
- El desarrollo integral de la personalidad. (Leiva, 2007)

Sobre este particular se plantea que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se encuentra en un proceso de renovación de sus enfoques, que persigue que los estudiantes adquieran una concepción científica del mundo, una cultura general integral y un pensamiento científico que los habitúe a cuantificar, estimar, extraer regularidades, procesar informaciones, buscar causas y vías de solución, incluso de los más simples hechos de la vida cotidiana, y en consecuencia, los prepare para la actividad laboral y mantener una actitud comprometida y responsable ante los problemas, científicos, tecnológicos a nivel, nacional y mundial (Álvarez, Villegas y Almeida, 2014); aspecto que es posible lograr si se potencia la búsqueda sistemática de los conocimientos en integración con otras asignaturas y, particularmente su comprensión.

De ahí que los autores asuman que el aprendizaje desarrollador de la Matemática es el aquel que:

Garantiza en el individuo la apropiación activa y creadora del saber matemático propiciando la adquisición de los procesos de pensamiento y las formas de trabajo propias de la Matemática, su simbología, así como destrezas, capacidades, hábitos, convicciones que al ser estructurados en forma de sistema, le permitan comprender y transformar el mundo que le rodea y a su vez transformarse, potenciando el desarrollo de su independencia cognoscitiva en estrecha relación con los necesarios procesos de socialización. (Gibert y Ballester, 2010:7)

La enseñanza de la Matemática con esta concepción desarrolladora, tiene que promover un aprendizaje interactivo, reflexivo y cooperativo en todos los estudiantes, sin el cual este pierde su sentido. Por otra parte el aprendizaje de las matemáticas es concebido como el proceso mediante el cual se desarrollan las habilidades necesarias para realizar un conjunto de prácticas actuativas y discursivas útiles para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de problemas reconocidos como problemas de matemáticas, así como para comunicar soluciones y describir y argumentar métodos y procedimientos (Ávila, Ibarra y Grijalva, 2015).

- Unido al propósito instructivo del proceso de enseñanza-aprendizaje, no se puede subestimar su contribución a la educación y a la estimulación del desarrollo intelectual; es por ello que se destacan entre los aspectos que caracterizan el enfoque metodológico general de la asignatura la idea de que es necesario sistematizar continuamente conocimientos, habilidades y modos de la actividad mental, tratando además que se integre el saber de los alumnos procedente de distintas áreas de la Matemática e incluso de otras asignaturas. (Álvarez, Villegas y Almeida, 2014)

3 EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO EN LA ESCUELA CUBANA

El aprendizaje es considerado como una actividad social y no únicamente como proceso de realización individual. Así es entendido como actividad de reproducción y producción del conocimiento mediante la cual el niño asimila los modos sociales de actividad y de interacción, primeramente, y luego en la escuela, las bases del conocimiento científico en condiciones de orientación e interacción social. (Castellanos, 2002)

Para Bermúdez. R: “El aprendizaje es el proceso de modificación de la actuación, por parte del individuo, el cual adquiere experiencia en función de su adaptación a los contextos en los que se concreta el ambiente con el que se relaciona.”(Bermúdez, 1996: 87)
Según Silvestre. M: “El aprendizaje es un proceso en el que participa activamente el alumno, dirigido por el docente, apropiándose el primero de conocimientos, habilidades y capacidades, en comunicación con los otros, en un proceso de socialización que favorece la formación de valores” (Silvestre, 2000: 8)
Los autores del trabajo asumen el concepto de aprendizaje de Doris Castellano como: “El proceso dialéctico de apropiación de los contenidos y las formas de conocer, hacer, convivir y ser, construidos en la experiencia socio-histórica, en el cual se producen, como resultado de la actividad del individuo y de la interacción con otras personas, cambios relativamente duraderos y generalizables, que le permiten adaptarse a la realidad, transformándola y crecer como personalidad”. (Castellanos, 2002: 24)
Teniendo en cuenta el interés del autor, a continuación, se profundiza en el aprendizaje del cálculo y los elementos metodológicos más importantes para su desarrollo.
Calculus en su traducción del latín significa ¨cuenta con piedras¨, … investigación del resultado
En el presente trabajo se asume el concepto de calcular: “Calcular, es una forma existencial de un algoritmo que puede llevarse a cabo de forma manual, verbal (oral o escrita), mental y mediante el uso de tablas, calculadoras u ordenadores “. (Delgado, R., 1998: 22)
El cálculo está presente de una u otra forma en las líneas directrices, aunque está más presente en la línea” Dominios Numéricos” y se manifiesta de modo diferente en cada grado.
Esta línea directriz posee especial significación para el desarrollo de la personalidad de los alumnos como recurso para fundamentar con análisis cuantitativos disímiles hechos y fenómenos de la realidad objetiva, pues ofrece recursos cognitivos a los alumnos para hacer valoraciones de carácter económico, político y social, particularmente en los que se demuestra la obra de la Revolución Cubana. Además, a través de las relaciones que se establecen entre la aritmética, el álgebra y la

geometría contribuye a la comprensión y utilización sistemática de los conocimientos dentro de cada una de las áreas matemáticas.
La numeración se comienza a trabajar desde el primer grado, en función de las necesidades para la enseñanza del cálculo sobre la base de la comprensión de los principios del Sistema Decimal. Con el fin de resolver problemas relacionados con situaciones vinculadas a su entorno más cercano, los niños comparan, ordenan, representan números en la tabla de posición decimal o en el rayo numérico, escriben y leen números, cuentan, calculan y formulan y resuelven problemas sobre la base de los significados prácticos de las cuatro operaciones básicas.

Mientras que en los primeros dos grados se trabaja con el cálculo mental, en tercer grado, los niños aprenden los procedimientos escritos de cálculo con números naturales. Además se familiarizan con el concepto de fracción como parte de una unidad y como parte de un conjunto. En cuarto grado comparan fracciones y llegan al concepto de fracciones equivalentes. Posteriormente, en quinto grado, se profundizan los conocimientos sobre la numeración, los niños aprenden a realizar las operaciones de adición y sustracción con fracciones y expresiones decimales, hasta llegar al concepto de número fraccionario en sexto grado y dominar las operaciones básicas con números fraccionarios.

En séptimo grado se introducen los números racionales y en octavo, los números reales. El trabajo con números reales se continúa en grados superiores a través del trabajo con radicales y logaritmos, y en el último grado o año de su preparación matemática en la educación media superior se introducen los números complejos.

Los alumnos comprenden desde sexto grado la necesidad de introducir procedimientos de aproximación ilimitada en problemas aritméticos, por ejemplo, cuando dividen expresiones decimales y más adelante al conocer la existencia de números irracionales.

Entre los objetivos del primer ciclo de la Enseñanza Primaria con respecto a esta línea directriz están los siguientes:

- Representar, leer, escribir, contar, ordenar, comparar, elegir y desarrollar procedimientos de cálculo oral y escrito con números naturales hasta 1000 000 de acuerdo con los requerimientos de situaciones con sentido para ellos, para aplicar conscientemente los principios del sistema de posición decimal.
- Reconocer la necesidad de estimar los cálculos que realizan para garantizar tanto su corrección, como su carácter racional de acuerdo con la situación planteada.

Contenidos a desarrollar en ese ciclo para alcanzar los objetivos:
Adición, sustracción y multiplicación. Propiedades: conmutativa de la adición y la multiplicación y asociativa de la adición. Relación entre la adición y la sustracción.
Ejercicios básicos de adición y sustracción sin sobrepaso. Transferencia de los ejercicios básicos al cálculo hasta 20 sin sobrepaso y de múltiplos de diez.
Formulación y resolución de ejercicios con texto y problemas, fundamentalmente en forma oral. Operaciones en el intervalo de 0 a 100. División. Relación entre la multiplicación y la división.
Ejercicios básicos de adición y sustracción con sobrepaso. Ejercicios básicos de multiplicación y división.
Propiedades: asociativa de la multiplicación y distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Resolución de combinadas, con y sin paréntesis.
Números naturales hasta 10 000 y su orden. Cálculo oral con las cuatro operaciones. Procedimientos escritos de las cuatro operaciones con números naturales (División por números de 2 lugares). Redondeo. Estimación de los cálculos. Fracción como parte de una unidad y de un conjunto (denominador hasta 10).
Números naturales hasta el millón y su orden. Cálculo oral con las cuatro operaciones de cálculo con números naturales hasta el millón.
Procedimientos escritos hasta el millón. Adición con más de dos sumandos. Multiplicación de números de dos lugares por números de varios lugares.
División por divisores de tres lugares. Concepto de "es múltiplo de" y de "es divisor de". Reglas de divisibilidad por 2, 3, 5, 10, 100 y 1 000.
Dentro de los objetivos de la línea directriz en el segundo ciclo Enseñanza Primaria los alumnos deben ser capaces de:
Leer, escribir, ordenar, comparar, elegir y desarrollar procedimientos de cálculo oral y escrito con números fraccionarios y pasar de una representación (decimal, operacional o gráfica) a otra de estos números de acuerdo con la situación planteada para comprender el significado de los números, sus relaciones y el significado práctico de sus operaciones.

Reconocer la necesidad de introducir procedimientos de aproximación ilimitada, por ejemplo, cuando dividen expresiones decimales, y de estimar los cálculos que realizan para racionalizar el cálculo y auto controlar los resultados.
Contenidos a desarrollar en ese ciclo para alcanzar los objetivos**:**
Números naturales mayores que el millón y su orden. Cálculo en este dominio. Potenciación y radicación. Memorización de algunas potencias y raíces. Operaciones combinadas.
Adición y sustracción de fracciones comunes y expresiones decimales.
Cálculo en el dominio de los números fraccionarios. Introducción del cálculo aproximado.
Entre los objetivos de la directriz en la Enseñanza Media Básica se encuentran:

- Resolver y formular problemas que exigen la comparación de números enteros y racionales y la realización de estimaciones y cálculos con estos números en sus diferentes representaciones, sobre la base de la sistematización de los conocimientos y habilidades que se han desarrollado a través del trabajo con números fraccionarios.
- Reconocer la existencia de números no racionales, su notación decimal, operatoria y gráfica y conocer que la unión de los números racionales e irracionales da lugar al dominio de los números reales.

Contenidos a desarrollar en esta enseñanza para alcanzar los objetivos:
Sistematización de los dominios numéricos estudiados con anterioridad. Criterios de divisibilidad. Números racionales. Comparación y orden. Representación en la recta numérica. Densidad del dominio de los números racionales. Operaciones de cálculo. Potencias de exponente entero. Propiedades de las potencias y su aplicación al cálculo. Notación científica. Cálculo aproximado de raíces cuadradas y cúbicas, utilizando tablas.
Existencia de números racionales que no tienen raíz cuadrada en Q. Introducción de los números reales.
Entre los objetivos de la directriz en la Enseñanza Media Superior se encuentran:
Resolver y formular problemas que exigen la comparación de números reales y la realización de operaciones racionales e irracionales con estos números en sus diferentes representaciones y la estimación de los cálculos.
Aplicar las operaciones con números complejos en distintas representaciones a la interpretación, descripción de situaciones y al cálculo de cantidades de magnitud.
Contenidos a desarrollar en esta enseñanza para alcanzar los objetivos:
Potencias de exponente racional. Cálculo con potencias y radicales aplicando definiciones y propiedades, y de logaritmos, aplicando la definición.
En otras líneas directrices el cálculo se manifiesta de forma implícita por ejemplo en la línea directriz magnitudes se observa en el aprendizaje de las magnitudes, su medición, conversión, estimación, cálculo y aplicación son objetivos de la enseñanza de la Matemática en los diferentes grados.
De quinto a sexto grados amplían el estudio de las magnitudes (masa, longitud, tiempo, superficie, volumen y capacidad), profundizan en los procesos de medición, estimación y conversión utilizando los conocimientos sobre los dominios numéricos y la estructura del Sistema Internacional, obtienen fórmulas, por ejemplo, para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos y las aplican a la resolución de problemas.

En el nivel medio básico y superior profundizan en los procesos de medición, estimación y conversión, utilizando los conocimientos sobre los dominios numéricos y la estructura del Sistema Internacional y de otras unidades de uso frecuente en nuestro país, obtienen fórmulas, para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos más complejos y las aplican a la resolución de problemas, incluso de proporcionalidad geométrica.

En el estudio del trabajo con variables, ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones e inecuaciones los niños hallan el valor que satisface una determinada igualdad mediante reflexiones lógicas mientras aprenden en la primaria el significado y las propiedades de las operaciones de cálculo en los diferentes dominios numéricos. En sexto grado desarrollan un procedimiento algorítmico para resolver ecuaciones lineales muy elementales, donde el dominio de definición de las variables es el dominio de los números fraccionarios o un subconjunto de este.

En el estudio de correspondencias y funciones los trabajos preparatorios para el tratamiento de las funciones se inician en la primaria, desde que los niños asocian a un conjunto su cardinal, a un par de números el resultado de una operación aritmética.
Operaciones racionales (suma, resta, producto y cociente) con funciones numéricas.
En el estudio de la geometría está presente el cálculo de cuerpos.
En el aprendizaje de la combinatoria y probabilidades en la primaria los niños ordenan y reordenan conjuntos finitos, seleccionan elementos de ellos atendiendo a determinadas condiciones, resuelven

problemas sencillos de conteo y distribución de naturaleza aritmética o geométrica, lo cual continúa a través de todos los grados, hasta que en grado 12 se familiarizan con los principio de la teoría combinatoria, lo que les permite abordar problemas más complejos y aplicar estos conocimientos al cálculo de probabilidades.

En el tratamiento de datos/Estadística.
Desde tercer grado los alumnos deben resolver problemas que impliquen la recogida, descripción, representación e interpretación de datos cuantitativos en tablas y gráficos de barras, más el cálculo de promedios.

Existen diferentes tipos de cálculo como aritmético, trigonométrico, con radicales, logaritmos, de cuerpos, porcentual y otros
En el presente trabajo profundizaremos en el estudio del cálculo con radicales

4. LOS RADICALES EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

El concepto de radical se ha encontrado en la bibliografía consultada algunas cuestiones interesantes que a continuación se exponen.

¿Cómo surgió el signo de radical?

El símbolo radical que se emplea en la notación actual es varias veces centenario pero el concepto de radical es bastante más antiguo. Este símbolo aparece por primera vez en las obras de los hindúes. El símbolo radical √ fue introducido en 1525 por Christoff Rudolff en su libro "Die Coss", libro que tuvo enorme influencia en Alemania en el siglo XVI y en 1552 se publicó por el matemático alemán Michael Stifel (1483-1567) una nueva edición mejorada de la obra de Rudolff. Se supone que adoptó el símbolo porque semeja una **r** minúscula, inicial de la palabra raíz. Campistrous (1989, 84).

La notación de potencia sugiere el concepto de raíz, es decir el de una cantidad que multiplicada por si misma un cierto número de veces produzca como resultado otra cantidad determinada. De esta forma, se debe entender la radicación como una operación inversa de la potenciación y el profesor no debe dejar de aprovechar la oportunidad para dejar claro que al igual que la sustracción es la operación inversa de la adición y la división es la operación inversa de la multiplicación también la potenciación tiene operación inversa, sin dejar de declarar que no es solo una y que en otros curso estudiarán otra operación inversa. Por tanto la nueva operación a estudiar permite que dada la potencia y el *exponente* se debe encontrar la base de la potencia. Ahora esos términos recibirán un nuevo nombre. La denominación de los términos de la radicación es de significativa importancia al igual que en las operaciones estudiadas anteriormente, ya que en lo adelante en los distintos procedimientos para el cálculo se mencionarán los nombres correspondientes (índice, *radicando, raíz, radical).*

El significado de la radicación como operación inversa de la potenciación queda expresado en la definición: $\sqrt[n]{a} = X \Rightarrow X^n = a$ lo que debe retomarse en todas las oportunidades posibles con los estudiantes.

La radicación puede entenderse como una potencia de exponente racional, introduciendo por definición la siguiente notación $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, para $n \geq 2$ y a≥ 0.

En la educación secundaria básica el alumno debe aprender a calcular la raíz cuadrada y cúbica de números positivos, por simple inspección o por tablas.

En décimo grado profundiza este estudio. Debido a que $a^{\frac{m}{m}} = \sqrt[n]{a^m}$ para a>0, los radicales cumplen propiedades que son consecuencia inmediata de de las propiedades de las potencias de exponente racional.

Estas propiedades son de mucha aplicación en las operaciones con radicales, en la introducción de factores en el radical, en la racionalización de denominadores y en la simplificación de radicales.

En la práctica se hace necesario calcular con radicales que tienen índices diferentes y para hacerlo, en muchas ocasiones es necesario reducirlo a un índice común lo que a su vez permite compararlos.

De grados anteriores al décimo, los alumnos conocen los términos semejantes. Cuando los términos con que se trabajan son radicales se tiene un caso especial de términos semejantes que se llaman radicales semejantes.

Para sumar y restar radicales semejantes se procede igual que cuando se reducen términos semejantes. A menudo es preciso simplificar previamente cada sumando, antes de reducir los radicales semejantes.

En la multiplicación y división de radicales se aplican las propiedades, por tanto es necesario que los radicales tengan el mismo índice.

En la unidad temática Radicales. Operaciones con radicales se distinguen dos puntos esenciales. Campistrous Pérez, (1989).

- Simplificación de radicales.

- Cálculo con radicales.

En lo misma se hace un estudio más profundo de los radicales del que se ha hecho hasta el momento.

En el trabajo con los radicales es conveniente trabajar con ellos simplificados; por lo que los alumnos deben ser capaces de reconocer si un radical está o no simplificado, y en este último caso simplificarlo, así como que puedan introducir factores en un radical y reducir radicales a un índice común.

Para poder simplificarlos deben conocer previamente las propiedades, la extracción de factores del radical. Como un procedimiento inverso de la extracción de factores del radical puede explicar la introducción de factores en l radical.

Otro de los procedimientos para el trabajo con radicales es reducción de radicales a un índice común y la comparación de radicales.

Se considera el aprendizaje del cálculo con radicales cuando los estudiantes sean capaces de identificar el tipo de cálculo, aplicar reglas y procedimientos asociados a éste y simplificar tanto como sea posible.

5. PROCEDIMIENTO DIDÁCTICO PARA FAVORECER EL CÁLCULO CON RADICALES EN LOS ESTUDIANTES DE DÉCIMO GRADO. EJEMPLOS RESUELTOS

Para presentar la propuesta que realizan los autores del presente artículo se tiene en cuenta que los procedimientos son: “herramientas que le permiten alcanzar un fin a partir del cumplimiento de una secuencia de pasos con un orden lógico y coherente”. (Zilberstein y Silvestre, 2004: 20)

De igual forma se analiza que los procedimientos didácticos constituyen:

> Herramientas que le permiten al docente orientar y dirigir la actividad del alumno, de modo tal que la influencia de los "otros", propicie el desarrollo individual, estimulando el pensamiento lógico, el pensamiento teórico y la independencia cognitiva, motivándolo a "pensar" en un "clima favorable de aprendizaje. (Zilberstein y Silvestre, 2004: 99)

De ahí que el procedimiento didáctico que se propone para el cálculo con radicales consista en:

1. Identificar las operaciones a realizar en el cálculo con radicales

Durante esta acción los estudiantes deben reconocer cuáles de las diferentes operaciones de cálculo están presentes en el ejercicio.

2. Transformar los radicales tanto como sea posible.

El estudiante debe transformar los radicales tanto como sea posible. Para esto es necesario que conozca cuando un radical está simplificado, lo cual ocurre cuando no existen raíces exactas, cuando no existen factores comunes entre el índice de la raíz y el exponente del radicando y cuando no existen raíces en el denominador. En el caso de no tener el mismo índice se halla su mínimo común múltiplo y luego se multiplican el índice y el exponente del radicando de cada uno por este, de esta forma se pueden realizar las operaciones de multiplicación y división.

3. Realizar las operaciones según su orden.

En esta acción los estudiantes deben realizar las operaciones según su orden, primero la potenciación. Luego eliminar los signos de agrupación por su orden. Después la multiplicación y división en el orden que aparezcan. Por último se realiza la adición y la sustracción de los radicales semejantes, en este caso deben conocer que dos radicales son semejantes cuando tienen el mismo índice y el mismo radicando.

4. Simplificar si es posible el resultado final.

En esta acción los estudiantes deben tener presente que en algunos ejercicios después de realizadas las operaciones es posible volver a simplificar por lo que es necesario hacerlo para tener un resultado más exacto.

6. APLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO AL CÁLCULO CON RADICALES

Calcula teniendo en cuenta el procedimiento propuesto anteriormente

Ejemplo 1 $\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{xy}\right)^2$ (xy>0)

Paso 1: En este ejercicio los estudiantes deben reconocer en primer lugar la presencia de una potencia. En este caso es necesario aplicar la formula del binomio $(a – b)^2$.

Paso 2: Los estudiantes deben transformar la expresión dada aplicando el producto notable. Posteriormente procederán a eliminar los radicales

$$= \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{xy} + \left(\sqrt{xy}\right)^2$$

En este ejercicio no se puede simplificar por lo que se procede a efectuar la potencia del binomio y así realizar la acción tres del procedimiento.

$$= \frac{x}{y} - 2\sqrt{\frac{x}{y} * xy} + xy$$

Luego de la eliminación de los signos de agrupación se continúa con el resto de las operaciones según su orden.

$$= \frac{x + xy^2}{y} - 2\sqrt{x^2}$$

$$= \frac{x + xy^2}{y} - 2x$$

$$= \frac{x + xy^2 - 2xy}{y}$$

Para concluir con el ejercicio y dando cumplimiento a la cuarta acción se busca alguna simplificación pero en este caso no la hay.

Ejemplo 2) $\left[\left(\frac{\sqrt{a}}{b} + \frac{\sqrt{b}}{a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b}}{a} - \frac{\sqrt{a}}{b}\right)^2\right]\sqrt{ab}$ (a>0, b>0)

En este caso el alumno debe reconocer la potencia, la multiplicación, los distintos signos de agrupación y la adición y sustracción de fracciones donde aparecen radicales.

$$= \left[\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)^2 + 2\frac{\sqrt{ab}}{ab} + \left(\frac{\sqrt{b}}{a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b}}{a}\right)^2 + 2\frac{\sqrt{ab}}{ab} - \left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)^2\right]\sqrt{ab}$$

El ejercicio queda de esta forma al efectuar la potencia y eliminar los paréntesis trabajando ya en la segunda acción.

$$=\left[\frac{a}{b^2}+2\frac{\sqrt{ab}}{ab}+\frac{b}{a^2}-\frac{b}{a^2}+2\frac{\sqrt{ab}}{ab}-\frac{a}{b^2}\right]\sqrt{ab}$$

Luego se realiza la adición y sustracción de las fracciones dentro del corchete y posteriormente se realiza la multiplicación.

$$=\frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{ab}}{ab}\cdot\sqrt{ab}$$

$$=\frac{4\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}}{ab}$$

En este caso si se puede simplificar por lo que se pasa a la acción cuatro y se concluye el ejercicio.

$$=\frac{4ab}{ab}=4$$

Ejemplo 3 $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ (|x|<a, x≠0)

Aquí el estudiante debe reconocer la adición y sustracción así como la división de radicales.

$$=\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}\cdot\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$$

Dando salida a la segunda acción se simplifica y en el caso particular de este ejercicio se racionaliza, por lo que se multiplica por la conjugada.

$$=\frac{\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\right)^2}{\left(\sqrt{a+x}\right)^2-\left(\sqrt{a-x}\right)^2}$$

$$=\frac{a+x+2\sqrt{(a+x)(a-x)}+a-x}{a+x-a+x}$$

Como parte de la tercera acción se reducen los términos semejantes.

$$=\frac{2a+2\sqrt{a^2-x^2}}{2x}$$

Para dar cumplimiento a la cuarta acción el estudiante primero debe extraer 2 como factor común para luego simplificarlo con el del denominador y así dar por concluido el ejercicio

$$=\frac{2\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)}{2x}=\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

Ejemplo 4 $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}-2\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ |a|>b

En la primera acción de este ejercicio el estudiante debe reconocer la adición y sustracción de fracciones con radicales. Como parte de la segunda acción se realiza la simplificación en el segundo radical, quedando de esta forma

$$=\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}-\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$$ mcm: $\sqrt{(a+b)(a-b)}$

Como parte de la tercera acción se realiza la adición y sustracción de las fracciones.

$$=\frac{\left(\sqrt{a-b}\right)^2-2a+\left(\sqrt{a+b}\right)^2}{\sqrt{(a+b)(a-b)}}=\frac{0}{\sqrt{(a+b)(a-b)}}=0$$

En este caso no fue necesario llegar a la cuarta acción pues no hay simplificación.

Ejemplo 5 $\dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}$ (x>0, y>0)

Este ejercicio es similar al anterior en relación con las operaciones a realizar, por lo que esta primera acción se debe tener en cuenta la adición, la sustracción y la división.

$$=\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}\cdot\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}$$

Aquí también se racionaliza para simplificar la expresión y así se cumple la segunda acción. Luego se realiza la potencia que aparece en el numerador teniendo en cuenta así la tercera acción y por último para concluir el ejercicio se pasa a la cuarta acción y se simplifica.

$$=\frac{\left(x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\right)^2}{x^2y-y^2x}=\frac{x^2y-2xy\sqrt{xy}+y^2x}{xy(x-y)}=\frac{xy\left(x-2\sqrt{xy}+y\right)}{xy(x-y)}=\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x-y}$$

Ejemplo 6 $\sqrt{\dfrac{a-x}{x-b}}+\sqrt{\dfrac{x-b}{a-x}}$ (a<x<b)

En el presente ejercicio el estudiante debe identificar la adición de radicales, pero además que dentro de estos existen fracciones.

$$=\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x-b}}+\frac{\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}}$$ mcm: $\sqrt{(x-b)(a-x)}$

Según lo analizado en la primera acción se puede por propiedades de los radicales escribir el ejercicio de esta forma, luego hay que hallar el mínimo común múltiplo entre los denominadores para de esta forma poder efectuar la adición de fracciones.

$$=\frac{\sqrt{(a-x)(a-x)}+\sqrt{(x-b)(x-b)}}{\sqrt{(x-b)(a-x)}}$$

$$=\frac{a-x+x-b}{\sqrt{(x-b)(a-x)}}=\frac{a-b}{\sqrt{(x-b)(a-x)}}$$

Como parte de la cuarta acción para simplificar se debe racionalizar y de esta forma damos por concluido el ejercicio.

$$\frac{a-b}{\sqrt{(x-b)(a-x)}}\cdot\frac{\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}=\frac{(a-b)\sqrt{(a-x)(x-b)}}{(x-b)(a-x)}$$

Ejemplo 7 $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}-2\sqrt{\dfrac{a^2}{a^2-b^2}}+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ |a|>b

En la primera acción de este ejercicio el estudiante debe reconocer la adición y sustracción de fracciones con radicales. Como parte de la segunda acción se realiza la simplificación en el segundo radical, quedando de esta forma

$$= \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} - \frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}} + \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} \qquad \text{mcm: } \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

Como parte de la tercera acción se realiza la adición y sustracción de las fracciones.

$$= \frac{\left(\sqrt{a-b}\right)^2 - 2a + \left(\sqrt{a+b}\right)^2}{\sqrt{(a+b)(a-b)}} = \frac{0}{\sqrt{(a+b)(a-b)}} = 0$$

En este caso no fue necesario llegar a la cuarta acción pues no hay simplificación.

Ejemplo 8 $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (|x|<1)

Durante la aplicación de la primera acción el estudiante debe identificar que esta en presencia de una adición de fracciones con radicales. Como este ejercicio es similar con el anterior no es imprescindible la simplificación por lo que pasamos a la tercera acción.

$$= \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 - 2}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{mcm: } \sqrt{1-x^2}$$

durante la aplicación de la tercera acción al llevar a cabo la adición de las fracciones obtenemos como resultado cero, por lo que la aplicación de la cuarta acción no es necesaria.

$$= \frac{1+x+1-x-2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Ejemplo 9 $\left[1 + \frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] : \left(x + \sqrt{a^2+b^2}\right)$ (a≠0, b≠0)

En este ejercicio como parte de la primera acción el estudiante debe identificar la adición, la división y la presencia de signos de agrupación. En el caso particular de este ejercicio no se desarrollará la segunda acción pues nos permitirá su realización de una forma más racional.

$$= \left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}+x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] \cdot \frac{1}{x+\sqrt{a^2+b^2}}$$

En la aplicación de la tercera acción, se realiza la adición que aparece dentro del corchete y la división se convierte en multiplicación pues estamos en presencia de fracciones. Después nos percatamos que podemos simplificar.

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Para concluir el ejercicio pasamos a la cuarta acción y racionalizamos para de esta forma dar por concluido el ejercicio.

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$$

CONCLUSIONES:

En la revisión bibliográfica sobre el tema se puede afirmar que existen las orientaciones y exigencias metodológicas necesarias para perfeccionar el cálculo con radicales, para ello se realizó la propuesta de un procedimiento que puede ser utilizado por los estudiantes para la realización exitosa de las diferentes operaciones y la combinación entre ellas. La aplicación del procedimiento en la práctica pedagógica permitió obtener una mejora en el cálculo con radicales donde las operaciones que aparecen son combinadas.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, M, Almeida, B y Villegas, E. (2014). El proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Matemática. Documentos metodológicos. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Ávila, R. G. (2015). La enseñanza de las funciones matemáticas en la educación preuniversitaria. Ponencia presentada en el Evento Internacional Pedagogía 2015.

Ballester Pedroso, S., Santana de Armas, H., Hernández Montes de Oca, S., Cruz, I., Arango González, C., García García, M.,…, Torres Fernández, P. (1992). Metodología de la enseñanza de la Matemática: 2 Tomos. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Ballester, S. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática* .Editorial Pueblo y Educación. Tomo 1. Ciudad de la Habana.

Batrina, J. M. *Aritmética*. Barcelona. España. Segundo curso. Imprenta Bayer. 1922.

Bencomo Pérez, A. (2009).*Sistema de actividades para fortalecer el desarrollo de la habilidad calcular en los estudiantes del primer semestre de la FOC "Francisco Vales Ramírez*. Tesis en opción al título de máster en Ciencias de la Educación. Sancti Spíritus: UCP. Cap."Silverio Blanco Núñez".

Bermúdez Sarguera, R. (1996). *Teoría y metodología del aprendizaje*. La Habana:

Bernabeu Plous,M. (2004).*La transferencia aplicada al tratamiento del cálculo aritmético en las edades de seis a nueve años*. Tesis en opción al título de doctora en Ciencias de la Educación. La Habana: UCP. "Enrique José Varona"

Blanco Martínez, D. (2010). *Tareas docentes para la formación y desarrollo de la habilidad calcular con radicales en estudiantes del décimo grado*. Tesis en opción al título de máster en Ciencias de la Educación. Sancti Spíritus: UCP. Cap."Silverio Blanco Núñez".

Campistrous Pérez, L. & Rizo, C. (1989). Aprende a resolver problemas aritméticos. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Castellano Simón, D. y otros. (2002). Aprender y Enseñar en la Escuela. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Delgado J. Raúl. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficiencia: La estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de habilidades generales matemáticas*. Tesis Doctoral. La Habana, Cuba.

Delgado J. Raúl. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficiencia: La estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de habilidades generales matemáticas*. Tesis Doctoral. La Habana, Cuba.

Delgado J. Raúl. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficiencia: La estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de habilidades generales matemáticas*. Tesis Doctoral. La Habana, Cuba.

Diccionario Enciclopédico Grijalbo, (1998).

Doris Castellanos Simona, B. C. (2002). Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador Centro de Estudios Educacionales del ISP "Enrique José Varona". . La Habana, Cuba.

Editorial Pueblo y Educación.

Editorial Pueblo y Educación.

Fernández Agüero, B. (2009).*Acciones metodológicas para preparar a los profesores generales integrales de octavo grado en las operaciones de cálculo con números racionales.* Tesis en opción al título de máster en Ciencias de la Educación. Sancti Spíritus: UCP. Cap."Silverio Blanco Núñez".

García Muñoz, J. (2004).*Modelo Teórico-Metodológico para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo aritmético en el primer ciclo de la enseñanza primaria.* Tesis en opción al título de máster en Ciencias de la Educación. Sancti Spíritus: UCP. Cap."Silverio Blanco Núñez".

Gibert, E. M y Ballester, S. (2010). Una alternativa desarrolladora para la estructuración de la clase de matemática de la secundaria básica. Ponencia presentada en el evento provincial Didáctica de las Ciencias. Material en Soporte Digital.

Guétmanova, A. (1989). *Lógica*. Moscú. Editorial Progreso.

Leiva, C. S. (2007). La Evaluación de los Conocimientos y Habilidades en los Contenidos Didácticos en la Formación Inicial de los Profesionales de la Educación. Tesis en opción al título académico de Máster en Educación. Holguín: UCP José de la Luz y Caballero.

Lorente, G. (1977). *Matemática. Décimo grado. Orientaciones metodológicas*. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

MINED, Cuba (1989). *Programa de Matemática para el décimo grado*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Morgado Carbonell, C. (2010). *Actividades variadas para potenciar las habilidades de cálculo con los productos básicos en los alumnos del tercer grado de la escuela "7 de diciembre."* Tesis en opción al título de máster en Ciencias de la Educación. Sancti Spíritus: UCP. Cap."Silverio Blanco Núñez".

Navarro Gutiérrez, R. (2012). *Habilidades de cálculo en la asignatura Mecánica Técnica en estudiantes de Ciencias Pedagógicas de Sancti Spíritus mediante solución de problemas.* Tesis en opción al título de máster en Ciencias de la Educación. Sancti Spíritus: UCP. Cap."Silverio Blanco Núñez".

Orellana Pérez, Ela y Cuello G, S (2000). *Nuevo enfoque para obtener procedimientos algorítmicos en la Matemática escolar. Revista Pedagogía y Sociedad*. ISP. Silverio Blanco Núñez.

Porcegué Jiménez, A. (2010). *Juegos didácticos para el desarrollo del cálculo con números racionales en los estudiantes atletas de octavo grado de la EIDE provincial "Lino Salabarría Pupo".* Tesis en opción al título de máster en Ciencias de la Educación. Sancti Spíritus: UCP. Cap."Silverio Blanco Núñez".

Ramos Peci, C. (2009). *Tareas de aprendizaje dirigidas al desarrollo de habilidades de cálculo escrito de división con números naturales en los alumnos de quinto grado de la escuela Otto Parellada.* Tesis en opción al título de máster en Ciencias de la Educación. Sancti Spíritus: UCP. Cap."Silverio Blanco Núñez".

Rico, P (2003): *La zona de desarrollo próximo. Procedimientos y tareas de aprendizaje.* Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Rosental, M y Iudin. (1981). *Diccionario Filosófico*. Editora Política, La Habana.

Sergio Ballester Pedroso, y. o. (2002). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo II.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Silvestre Oramas, M. y José Zilberstein Toruncha. (2000) *¿Cómo hacer más eficiente el aprendizaje?* Investigación del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Cuba (ICCP). La Habana.

Soto Díaz M, García Gutiérrez A. El aprendizaje escolar: un reto para la escuela contemporánea. Pedagogía 2013. La Habana: 2012. p. 10.

Talizina, Nina F (1987). *La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares*. Universidad de la Habana. MES.

Torres, P. (2000). *La instrucción heurística de las Matemáticas escolares*. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, Ciudad de La Habana.

Vidarte Alonso, N. (2011).*Ejercicios con enfoque ciencia tecnología y sociedad dirigidas a la motivación por el aprendizaje del cálculo aritmético*. Tesis en opción al título de máster en Ciencias de la Educación. Sancti Spíritus: UCP. Cap.”Silverio Blanco Núñez”.

Zilberstein, J. y Silvestre, M. (2004). Didáctica desarrolladora desde el enfoque histórico cultural. México: Ediciones CEIDE.

Zillmer, W. (1990). *Complementos de metodología de la enseñanza de la matemática.* Editorial Pueblo y Educación, La Habana.