



Febrero 2020 - ISSN: 1989-4155

ATIVIDADES COM O GEOGEBRA PARA O ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES – UM ELO ENTRE A EDUCAÇÃO BÁSICA E O ENSINO SUPERIOR

Rubens Saviano,

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo/SP, rubens.saviano@oi.com.br

Profa. Dra. Cíntia Aparecida Bento dos Santos,

Professora Permanente do Programa de Doutorado/Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Cruzeiro do Sul em São Paulo/SP, cintia.santos@cruzeirosul.edu.br

Prof. Dr. Juliano Schimiguel,

Professor Permanente do Programa de Doutorado/Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Cruzeiro do Sul em São Paulo/SP, juliano.schimiguel@cruzeirosul.edu.br

Para citar este artículo puede utilizar el siguiente formato:

Rubens Saviano, Cíntia Aparecida Bento dos Santos y Juliano Schimiguel (2020): "Atividades com o geogebra para o ensino de sistemas de equações lineares – um elo entre a educação básica e o ensino superior", Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo (febrero 2020). En línea:

<https://www.eumed.net/rev/atlane/2020/02/ensino-sistemas-equacoes.html>

RESUMO

O conteúdo de Álgebra Linear se faz presente em vários cursos de graduação ligados às ciências exatas, destacando-se, de forma especial, na resolução de Sistemas Lineares, que se inicia nos estudos relacionados à Educação Básica, através de métodos tradicionais. Da nossa prática de sala de aula, que já perdura por alguns anos, percebemos as dificuldades apresentadas pelos nossos alunos naquilo que se refere a sua resolução e ao entendimento da representação gráfica desta. Neste sentido, buscamos uma forma alternativa para abordarmos esse assunto de forma mais simples, através de uma sequência de atividades utilizando o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, tendo como referencial teórico as idéias de Raymond Duval e sua teoria dos Registros de Representação Semiótica, tendo como metodologia empregada a Engenharia Didática de Michèle Artigue tendo como objetivo a análise de episódios de sala de aula face à utilização de mídias interativas utilizados na plotagem, no tratamento e na abordagem de conteúdos de Álgebra Linear através da interação entre a Educação Básica e o Ensino Superior.

Palavras-Chave: Registros de Representação Semiótica; Engenharia Didática; GeoGebra; Sistemas Lineares.

Introdução

Como motivação pessoal para a construção da nossa pesquisa, cito de forma resumida a minha trajetória profissional como docente. Por ser professor de escolas estaduais durante treze anos, lecionando Matemática e Física para alunos do Ensino Médio, sempre observei as dificuldades dos estudantes na compreensão de certos conteúdos matemáticos, destacando, entre eles, os conteúdos relacionados ao estudo dos Sistemas Lineares, desenvolvidos inicialmente no sétimo ano do Ensino Fundamental, englobando os sistemas de duas equações e duas variáveis, assunto este retomado na segunda série do Ensino Médio, abrangendo também os sistemas com três equações e três variáveis.

Em minha prática percebi a grande dificuldade apresentada pelos alunos naquilo que se referem à Representação Gráfica dos sistemas do tipo três equações e três variáveis e, pela minha formação matemática, muitas vezes sou questionado a respeito de como tratar e compreender essas dificuldades.

Com o objetivo de refletir sobre questões relacionadas ao objeto matemático Sistemas Lineares e aprimorar minha formação, ingressei no Programa de Mestrado em Educação Matemática da Universidade de Vassouras, sediada no Município de mesmo nome no Estado do Rio de Janeiro e, após diversas leituras realizadas e das discussões realizadas entre os alunos e professores do referido curso, tive contato com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995, 2000 e 2006), que é largamente utilizada em pesquisas na área de Educação Matemática, o que me levou a refletir sobre a importância de tratar um conteúdo matemático, explorando – suas várias representações, desencadeando assim, a necessidade de elaboração de um estudo científico envolvendo essa teoria.

Antes de darmos continuidade ao nosso trabalho, optamos em desvendar o significado da palavra **semiótica**. Para **SANTAELLA** (1983), semiótica é a ciência que tem como objeto de pesquisa **todas** as linguagens possíveis, ou seja, tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção, significação e de sentido (SANTANELLA, 1983, P.13).

Para Duval, toda e qualquer possível processo de aprendizagem está relacionado aos processos de semiósis, que é a produção de uma representação semiótica e da noésis que é a sua compreensão conceitual e, sendo assim, não é possível adquirir um conhecimento sem utilizarmos os sistemas de representação semiótica.

Na busca de dados teóricos para fundamentar nossa pesquisa, nos aprofundaremos nos estudos sobre as Tendências Metodológicas da Educação Matemática, em especial, nos estudos sobre o uso de Mídias Tecnológicas no ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, fundamentando nossa pesquisa na utilização de Informática na Educação, em especial, na utilização do **software GeoGebra**, unido com a Investigação Matemática em sala de aula.

As mídias tecnológicas sugerem que “os ambientes” gerados por algum tipo de aplicativo ligado à informática dinamizam os conteúdos curriculares da matemática e, além disso, potencializam o processo de ensino-aprendizagem.

Destacamos que, voltados para o ensino de matemática, temos a possibilidade de usar vários recursos midiáticos, tais como as calculadoras, a televisão, o projetor multimídia, as planilhas eletrônicas, o computador e uma infinidade de *softwares*, destacando-se a importância de utilizarmos, de forma adequada e coerente, com objetivos definidos para que nossos alunos não vejam a utilização desses recursos como uma forma de passar tempo e visualizem um novo componente das nossas aulas que veio para auxiliar no processo de ensino aprendizagem de alguns conteúdos que apresentem certo nível de dificuldade.

Fundamentação Teórica e Metodologia

Utilizamos como **Referencial Teórico** as idéias de **Raymond Duval filósofo e psicólogo e sua Teoria dos Registros de Semiótica que versava sobre as diferentes formas de representação de um objeto matemático tais como as representações numéricas, as representações algébricas, as representações geométricas, e as representações gráficas.**

Duval enfatizou em sua teoria sobre os Registros de Representação Semiótica a importância que deve ser dada a diferentes formas de registros e a articulação entre estes nas diferentes atividades de se fazer matemática afirmando ainda que, para analisarmos os problemas de compreensão de um objeto em matemática, é necessário observarmos os trabalhos desenvolvidos pelos estudantes, através da resolução de situações contextualizadas e também da observação de uma sequência de atividades desenvolvidas em sala de aula, estando o pesquisador atento aos diferentes tipos de situações didáticas submetidas aos estudantes para que sua pesquisa seja eficiente.

Em seus estudos, frisou que a mobilização simultânea de diferentes registros de representação possa ser um fator necessário para a compreensão de um Objeto Matemático, destacando ainda que a compreensão e a originalidade da atividade matemática supõem a coordenação de, pelo menos, dois registros de representação semiótica, questionando qual o tipo de formação matemática devemos dar aos nossos alunos para que possam, de uma forma geral, interagir em um mundo onde existe um avanço tecnológico crescente e complexo.

Para ele, o objetivo do ensino da matemática não é formar futuros matemáticos e sim, desenvolver as habilidades de pensamento, e de habilidades que serão exigidas em suas vidas social e profissional.

As representações definidas por Duval passam por dois tipos de transformação, ou seja, os **tratamentos** (que são as transformações de representação em outra representação que permanece no mesmo sistema, ou seja, uma transformação interna de um registro).

Como exemplo, citamos uma transformação de escalonamento de um Sistema Linear, ou seja,

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \text{ao somarmos a segunda linha com a primeira, obtemos um sistema}$$

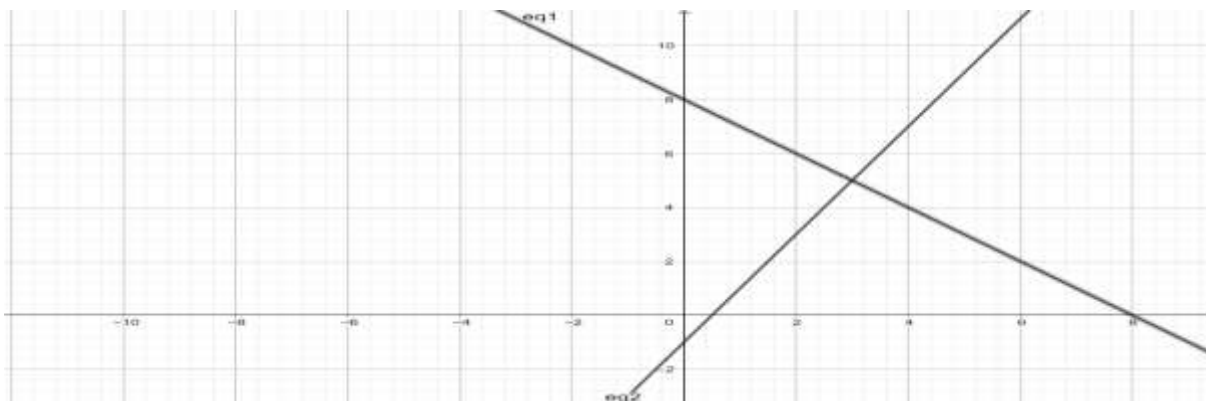
equivalente, ou seja:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x = 9 \end{cases} \quad \text{que é um sistema equivalente ao primeiro, ocorrendo assim uma}$$

transformação de representação sem mudança de registro.

E as **conversões**, definidas por Duval (2003) como um tipo de transformação de representação que muda o registro, conservando os mesmos objetos, tal como passar da escrita algébrica de uma equação para a sua representação gráfica e vice-versa.

Como exemplo temos a Representação no Registro Simbólico –Algébrico de um Sistema Linear, tal como $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ e a sua representação no Registro Gráfico que nos dará a representação do mesmo sistema em outro registro, diferente daquele que partimos.



A metodologia empregada foi a de Michele Artigue e sua Engenharia Didática que é uma teoria que busca unir a pesquisa com a prática.

Artigue (1966) afirma que a Engenharia Didática foi construída como um trabalho didático comparado ao:

[...] ofício do engenheiro que, para realizar um projeto precioso, se apóia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita

submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto a enfrentar [...] problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta (Artigue, 1996, p.193).

Sendo assim, é possível construirmos uma relação entre o trabalho de um pesquisador com as ações desenvolvidas por um engenheiro, pois ambos precisam estar prontos a fazer pontes entre os problemas reais e a ciência acadêmica.

Para Artigue (1996) a Engenharia Didática veio objetivando a realizar, observar e analisar as possíveis situações didáticas compreendendo quatro fases, ou seja, **os estudos preliminares**, onde se faz uma revisão bibliográfica das condições e situações presentes nos diferentes níveis de produção didática, **a análise a priori**, onde são apontados problemas referentes ao objeto em estudo, construindo hipóteses a ser verificadas no decorrer do desenvolvimento da prática, **a experimentação**, que é a fase onde o pesquisador irá tomar aplicar as atividades de pesquisa junto aos alunos e a quarta fase que é **análise a posteriori** também conhecida como fase de validação, que é o momento onde o pesquisador se apóia nos dados coletados na experimentação fazendo uma análise dos mesmos.

Segundo Artigue (1996), a Engenharia Didática tem como finalidade analisar situações didáticas da matemática que estejam relacionadas à parte experimental em sala de aula buscando entender todas e possíveis relações entre à investigação e a ação do sistema de ensino.

Em Duval (2012) encontramos a informação sobre a possibilidade de ser possível observarmos o desenvolvimento de uma seqüência didática em três níveis de tempos diferentes, ou seja, durante uma aula durante o transcorrer de uma seqüência de atividade, durante o transcorrer de um ano escolar ou ainda sobre o currículo. Optamos em desenvolver nossa atividade através da observação de uma seqüência didática desenvolvida em um período de aproximadamente um mês, tempo este que consideramos suficiente para o desenvolvimento de atividades referentes a sistemas lineares.

Atividades Desenvolvidas

Para alcançarmos nosso objetivo tomamos por base às pesquisas de Borba e Penteadó (2007) e Araújo (2002) no que se refere ao entendimento da construção da linguagem matemática e o dia-a-dia dos nossos alunos.

A organização das atividades se deu através de:

a) Uma atividade de familiarização com o *software* GeoGebra sendo necessária aqui uma dedicação maior de tempo, pois os alunos costumam apresentar dificuldades básicas por não conhecerem o aplicativo;

b) Uma atividade onde será abordada a resolução de Sistemas Lineares e, como normalmente os alunos já adquiriram algum conhecimento sobre o conteúdo, teve uma distribuição menor de tempo;

Vamos agora falar das atividades:

A atividade de familiarização com o GeoGebra

Dentre os vários *softwares* livres presentes no mercado, escolhemos o Geogebra que é um programa que nos oferta recursos de **geometria, álgebra, cálculo**, entre outras possibilidades, tendo sido desenvolvido em 2001 pelo austríaco Markus Hohenwater da Universidade de Salzburg, projeto este que continua sendo desenvolvido na Florida Atlantic University contando com colaboradores de vários países que já o traduziram para mais de trinta e cinco idiomas, sendo que para o idioma português teve a participação de Hermínio Borges Neto, Luciana de Lima, Alana Paula Araújo e Alana Souza de Oliveira, estando disponível em português no endereço eletrônico <https://www.geogebra.org/>

O GeoGebra é um *software* livre e, sendo assim, é permitido fazer download, utilizar e distribuir o aplicativo através de cópias, desde que não sejam para fins comerciais – desta forma, constitui-se em um importante aliado dos professores como recurso didático e metodológico. Possibilita a abordagem de diversos conteúdos trabalhados na educação básica, principalmente geometria e funções.

O GeoGebra é um *software* de Geometria Dinâmica – nome este largamente utilizado para especificar a geometria implantada em computador, a qual permite que objetos sejam movidos mantendo-se todos os vínculos estabelecidos inicialmente na construção, escrito na linguagem Java, que pode ser utilizado nas escolas de ensino fundamental, médio e superior, apresentando duas janelas de visualização: a janela algébrica e a geométrica – cada objeto visualizado na janela geométrica terá sua representação algébrica mostrada na janela algébrica. O Geogebra é pouco conhecido entre os professores da educação básica sendo, através dele, possível fazer conexões entre a informática educacional e os conteúdos matemáticos.

Na construção do GeoGebra aliou-se o conhecimento matemático, a informática e o educador matemático, em função do aluno que, dessa forma, passou a ser o centro da ação – na resolução de uma situação proposta, o aluno pode buscar informações no conhecimento já adquirido e aplicá-lo ao ambiente informatizado, com ou sem o auxílio do professor.

Destacamos o Instituto GeoGebra brasileiro – idealizado por Humberto Bertolazi, professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal Fluminense – que apresenta o propósito de polarizar os usuários do GeoGebra, criar e divulgar material didático sobre o *software*. A criação deste instituto incentivou a divulgação do programa e a troca de experiências entre os educadores.

Após a atividade de familiarização com o *software* GeoGebra, iremos relatar a atividade onde foi abordada a resolução de sistemas lineares e, como normalmente os alunos já adquiriram algum conhecimento sobre o conteúdo, recebeu uma distribuição menor de tempo.

A atividade foi elaborada tendo como finalidade fornecer aos participantes da oficina uma ferramenta a ser incluída nas suas atividades e, além disso, a possibilidade de fortalecer a aprendizagem no que se refere aos conceitos de Sistemas Lineares e visualização através de sua resolução gráfica.

Foi realizada em aproximadamente duas horas de duração em um sala de aula de uma instituição de ensino superior com acesso computadores cedidos pela própria instituição tendo os participantes trabalhado em alguns momentos em grupo e, em outros, em separado.

A ideia central da oficina ofertada não era apenas a resolução de um sistema de equações lineares de forma literal, obtendo com isso o seu resultado numérico final, mas também o de trabalhar com o campo visual dos alunos buscando a solução do sistema linear em questão, mais também entender algumas importantes características do tema em questão.

PROPOSTA DE ATIVIDADE

Um dos objetivos deste estudo é uma elaboração e a aplicação de uma sequência didática desenvolvida em um ambiente computacional visando um melhor desempenho dos nossos alunos no que se refere ao aprendizado, tendo como recurso central a visualização. A atividade visa a resolução de sistemas de equações lineares, conceito este presente nos cursos de Álgebra Linear, buscando trabalhar estes conceitos apoiados na solução algébrica e na solução gráfica, simultaneamente, utilizando como ferramenta o *software* GeoGebra.

Após a introdução dos conceitos básicos de como operar com o *software*, buscamos, no primeiro momento, descobrir como estavam os conhecimentos dos participantes da oficina sobre o conteúdo em questão.

Para possibilitar a familiarização dos participantes da oficina com o programa, utilizamos , como exemplo, a equação $x + y = 1$, com sua respectiva tabela de valores.

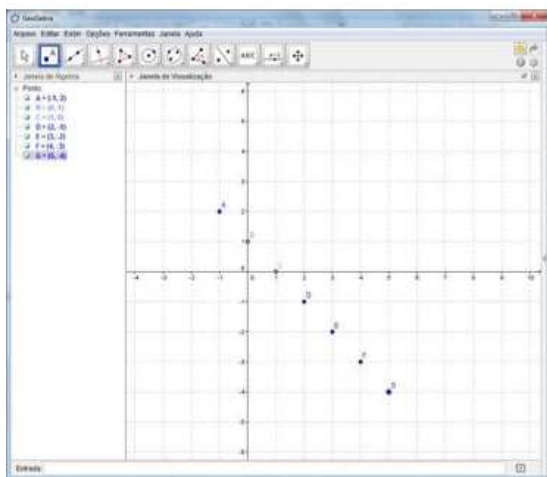
Tabela 1 - Pares ordenados da função $x+y=1$

X	-1	0	1	2	3	4	5
Y	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Com isso, foi possível obter os pares ordenados $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, -1)$, $(3, -2)$, $(4, -3)$, $(5, -4)$, sendo estas soluções viáveis para a equação dada já que tornam a sentença verdadeira,

trabalhando, em seguida, com a idéia de representação de pares ordenados, construídos no plano cartesiano conforme a figura abaixo:

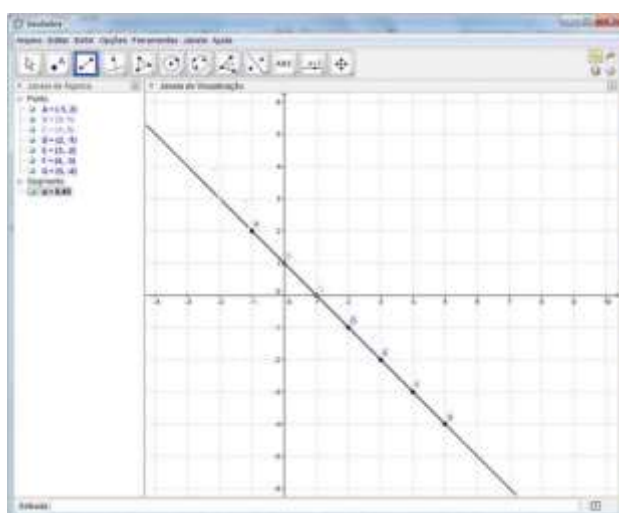
Figura 1: Pontos obtidos a partir da equação $x+y=1$



Fonte: Autor, 2019.

Solicitando, em seguida que fosse feita a ligação destes pontos obtendo a representação de uma reta , conforme a figura abaixo.

Figura 2: Reta obtida a partir da equação $x+y=1$



Fonte: Autor, 2019.

Destacamos que os participantes chegaram à conclusão que a reta acima representada, na verdade, representa o gráfico da equação $x + y = 1$ e que todos os pontos

pertencentes à reta construída são soluções daquela equação e que os pontos fora da reta, não pertencem à solução da mesma.

Concluímos, de forma conjunta, que as soluções de equações lineares podem ser representadas, por meio do plano cartesiano, pois seu conjunto solução é formado por pares ordenados.

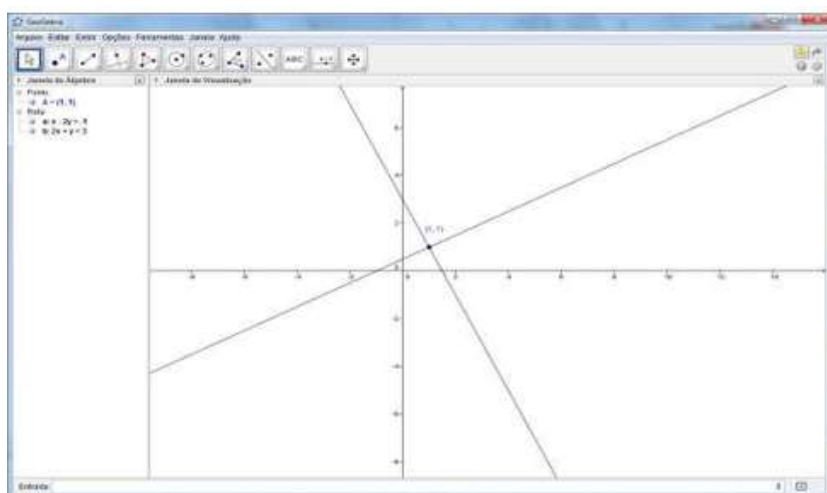
Em seguida, partimos para a atividade que envolvia o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Esse sistema de equações lineares proposto aos participantes da oficina é definido por duas equações e duas incógnitas existindo diferentes métodos de resolução, não sendo nosso objetivo resolvê-lo de forma algébrica, sendo aqui, interessante, trabalharmos com duas equações de forma simultânea.

Partimos de um sistema de equações lineares possível e determinado onde, construímos sua representação geométrica buscando obter suas raízes.

Figura 3: Sistema linear Possível e determinado proposta na atividade



Fonte: Autor, 2019.

Após a postagem da figura acima, obtivemos várias respostas tais como a raiz do sistema é igual a (1,1), pois as duas contêm o mesmo ponto, assim como (1,1) é raiz porque é a única solução possível, pois é onde as duas funções se cruzam, etc.

Após tal etapa, partimos para o estudo dos sistemas lineares impossíveis e os possíveis e indeterminados através do *software* GeoGebra de forma similar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa proposta inicial, quando montamos a oficina foi o de saber se era (ou não) possível trabalhar com os sistemas de equações lineares de forma algébrica e gráfica, analisando ambas as situações buscando ter mais ferramentas na abordagem do conteúdo e, desta forma, possibilitar ao nosso aluno ter mais chances de entender o assunto.

Estudamos as diferentes formas de registro de representação semiótica, ou seja, a representação gráfica, a língua materna e a representação algébrica, relacionados a Teoria de Raymond Duval, buscando trabalhar, da melhor forma possível, as formas de se passar de um registro para outro procurando obter melhores resultados no âmbito da assimilação de conteúdos relacionados ao assunto levantado, ressaltando que, no decorrer da oficina, notamos muitas dificuldades apresentadas, relacionadas a deficiência apresentada pelos alunos vinculados a educação básica.

Ressaltamos ainda que o programa escolhido foi uma ferramenta significativa para o desenvolvimento do conteúdo pois possibilitou a interpretação geométrica das possíveis soluções dos sistemas lineares e também das funções de primeiro grau relacionadas a este conteúdo, sendo portanto, necessário que o docente saiba exatamente o momento adequado para a sua utilização como um recurso tecnológico utilizado de forma a auxiliar as aulas de matemática nos diferentes níveis de ensino.

REFERÊNCIAS

- ANTON, H. RORRIS, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2002.
- ARAÚJO, J. de L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos**. Rio Claro, 2002. Doutorado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista;
- ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 196, p. 193-218, 1996;
- BORBA, M. C; PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007;
- CHAVES, R. **Por que anarquizar o ensino de matemática intervindo em questões socioambientais**. 2004. 223 p. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista;

DUVAL, R. **Ver e Ensinar Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os Registros de Representação Semiótica**. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. **Quais Teorias e Métodos para a Pesquisa sobre o Ensino de Matemática**. Tradução de Luciano Oliveira. Ponta Grossa: Prática educativa, 2012, v.7, nº 2, p.266-297.

SANTANELLA, M.L.B. **O que é Semiótica?** São Paulo: Brasiliense, 1983.

