



Julio 2019 - ISSN: 1989-4155

TÓPICOS DA GEOMETRIA DOS FRACTAIS COMO SITUAÇÃO GENERALIZÁVEL PARA A UTILIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA FEDATHI

Prof. M. Sc. Antonio Furtado Landim Neto¹
Prof. M. Sc. Rickardo Léo Ramos Gomes²

Para citar este artículo puede utilizar el siguiente formato:

Antonio Furtado Landim Neto y Rickardo Léo Ramos Gomes (2019): "Tópicos da geometria dos fractais como situação generalizável para a utilização da sequência FEDATHI", Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo (julio 2019). En línea:

<https://www.eumed.net/rev/atlante/2019/07/utilizacao-sequencia-fedathi.html>

RESUMO

O presente artigo aborda a experimentação de alguns conceitos explorados pela geometria dos fractais, na efetiva construção do conhecimento matemático, mediada pela sequência Fedathi. Tal mediação mostra-se promissora e importante, como subsídio para a elaboração e aplicação de sessões didáticas que permitam uma maior dinamicidade e, por consequência, uma resposta positiva ao processo de ensino. O potencial dos fractais em criar algoritmos que modelam estruturas e em apontar novos caminhos mais dinâmicos e criativos para a experimentação de conhecimentos matemáticos, na construção de resultados, aplicações e soluções, foram as condições que elegemos para que esta geometria pudesse ser utilizada junto à sequência Fedathi. Bem mais que um experimento teórico, o uso desta metodologia mostra-se promissora e já colhe resultados positivos, frente aos desafios nos quais a educação, e especialmente a matemática, encontram-se inseridos. Propondo uma metodologia voltada ao professor, essa sequência pretende como condição indissociável à figura do mestre, que o aluno, durante a resolução de problemas, reproduza os passos que uma investigação científica realizaria ante às suas descobertas. Traz-se aqui, apenas uma amostra da potencialidade que a junção deste conteúdo (Geometria Fractal) e esta metodologia (Sequência Fedathi) podem trazer para assuntos como: geometria plana e espacial, progressão aritmética e geométrica, área e perímetro de figuras planas, volume de sólidos, logaritmo, noções de

¹ Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará - UECE (2007). Técnico em Telecomunicações pelo Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE (2007). Especialista em Gestão Escolar pela Universidade Federal do Ceará - UFC (2014). Mestre em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará no curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede ofertado pela Sociedade Brasileira de Matemática - SBM/UECE (2015). Atualmente é Coordenador da Escola de Ensino Médio Liceu do Conjunto Ceará e Professor Efetivo da Prefeitura Municipal de Fortaleza.

² Professor da Disciplina de Metodologia do Trabalho Científico (Orientador) – Centro Universitário UNIATENEU; Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE); Instituto Euvaldo Lodi (IEL); Centro Universitário Farias Brito (FBUNI); Dr. (Tít. Cult.) em Ciências Biológicas pela FICL; M. Sc. em Fitotecnia pela Universidade Federal do Ceará (UFC); Spec. em Metodologia do Ensino de Ciências pela Universidade Estadual do Ceará (UECE); Spec. (Tít. Cult.) em Paleontologia Internacional pela Faculdade Internacional de Cursos Livres (FICL). Graduado em Agronomia pela Universidade Federal do Ceará (UFC); Licenciado nas disciplinas da Área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias pela Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA); Consultor Internacional do BIRD para Laboratórios Científicos. Conveniado com a ABNT.

limite e outros. Neste estudo, apresentam-se alguns tópicos desta geometria que irão nos auxiliar na elaboração de uma sequência didática e um compêndio, mostrando as quatro etapas que devem ser observadas durante o planejamento e a execução destas sessões, com a mediação pedagógica proposta por esta sequência, a saber: tomada de posição, maturação, solução e prova, bem como alguns dos seus princípios. Oferece-se, neste artigo, uma proposta de sessão didática que, se utilizando de uma situação generalizável abalizada num tópico da geometria dos fractais, aponte uma situação matemática que leve o aluno a uma aprendizagem efetiva.

Palavras-chave: Fractal. Fedathi. Matemática. Didática. Ensino.

RESUMEN

El presente artículo trata sobre la experimentación de algunos conceptos explorados por la geometría de los fractales, en la construcción efectiva del conocimiento matemático, mediado por la secuencia de Fedathi. Esta mediación ha demostrado ser prometedora e importante, como soporte para el desarrollo e implementación de sesiones educativas que permitan a más dinámica y, por tanto, una respuesta positiva al proceso de enseñanza. El potencial de los fractales en la creación de algoritmos que estructuras de modelos y para indicar formas nuevas y más dinámicas y creativas para experimentar con los conocimientos matemáticos en la construcción de los resultados, aplicaciones y soluciones, eran las condiciones que hemos elegido para esta geometría podría ser utilizado por la secuencia Fedathi. Más que un experimento teórico, el uso de esta metodología resulta ser prometedor y ya obtiene resultados positivos, enfrentando los desafíos en los que se inserta la educación, y especialmente las matemáticas. Proponer una metodología para el profesor, esta secuencia prevista como una condición inseparable de la figura principal, el estudiante durante la resolución de problemas, jugar los pasos que la investigación científica podría realizar en sus hallazgos. se entiende aquí, sólo una muestra de la posibilidad de que la adición de este contenido (Fractal Geometry) y esta metodología (secuencia Fedathi) puede traer a cuestiones tales como la geometría plana y espacial, aritmética y progresión geométrica, área y perímetro de figuras planas, volumen De sólidos, logaritmos, nociones de límite y otros. En este estudio, presentamos algunos temas en esta geometría que nos ayudarán en el desarrollo de una secuencia didáctica y un compendio que muestra los cuatro pasos que deben observarse durante la planificación y ejecución de estas sesiones, con la mediación propuesto por esta secuencia, A saber: posicionamiento, maduración, solución y prueba, así como algunos de sus principios. Este artículo propone una propuesta de sesión didáctica que, utilizando una situación generalizable basada en un tema de geometría fractal, señala una situación matemática que lleva al estudiante a un aprendizaje efectivo.

Palabras clave: Fractal. Fedathi. Las matematicas Didáctica La enseñanza.

ABSTRACT

The present article approaches the experimentation of some concepts explored by the geometry of the fractals, in the effective construction of mathematical knowledge, mediated by the Fedathi sequence. Such mediation proves to be promising and important, as a subsidy for the elaboration and application of didactic sessions that allow a greater dynamicity and, consequently, a positive response to the teaching process. The potential of the fractals to create algorithms that model structures and to point out new and more dynamic and creative ways for the experimentation of mathematical knowledge in the construction of results, applications and solutions were the conditions that we chose so that this geometry could be used together with Fedathi sequence. More than a theoretical experiment, the use of this methodology, in the face of the challenges, in which education and especially mathematics, is immersed, is promising. Proposing a methodology aimed at the teacher, this sequence intends as a condition inseparable from the figure of the master, that the student during the resolution of the problems, can reproduce the steps that a scientific investigation would carry out before their discoveries. Here, only a sample of the potentiality of this content (Fractal Geometry) and this methodology (Fedathi Sequence) can bring to subjects such as: flat and spatial geometry, arithmetic and geometric progression, area and perimeter of flat figures, volume of solids, logarithm, notions of limit and others. In this study, we present some topics of this geometry that will help us in the elaboration of a didactic sequence and a compendium showing the four stages that must be observed

during the planning and execution of these sessions with the pedagogical mediation proposed by this sequence, namely : positioning, maturation, solution and proof, as well as some of its principles. This article proposes a didactic session that, using a generalizable situation based on a topic of fractal geometry, points out a mathematical situation that leads the student to an effective learning.

Keywords: Fractal. Fedathi. Mathematics. Didactics. Teaching.

1 INTRODUÇÃO

Durante o final do século XIX e início do século XX, alguns matemáticos desenvolveram trabalhos que contrariavam as noções comuns de infinito e que, para a época, não havia aplicações imediatas. Esses trabalhos traziam objetos que foram rotulados de “monstros matemáticos” dados o seu caráter, à época, não intuitivo.

Contemporâneo a isso, alguns estudos apontavam para a necessidade de outros padrões geométricos que não fossem os euclidianos. Trabalhar com formas geradas pela natureza foi uma das motivações que fizeram grandes matemáticos acreditar que havia uma ordem no caos e que esta poderia ser descrita por funções e ideias matemáticas bem definidas.

Compilada e difundida pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot (1924-2010), a geometria fractal – ou geometria da natureza – tem sido objeto de vários estudos cujas aplicações dão-se em vários campos como: ciências, artes, educação, tecnologia, medicina, engenharia e arquitetura. O interesse científico volta-se a ela, pois os fractais exercem um verdadeiro fascínio quanto à versatilidade da aplicação de sua teoria e quanto à beleza de suas formas.

Basicamente a geometria dos fractais é um ramo da matemática que estuda objetos gerados a partir de padrões de repetições, com processos recorrentes ou iterativos. Esses padrões se repetem em qualquer escala de observação do objeto, ou seja: cada parte é uma representação semelhante do objeto original.

Trataremos de explorar alguns estudos que embasam nossas reflexões, como os propostos por Mandelbrot (1982), Falconer (2003), Moreira (2003), Barbosa (2005), Nunes (2006), Lima (2011) e outros, acerca da geometria dos fractais.

Características como: complexidade infinita, auto-similaridade, uso de recorrência, iteração e dinamicidade, fizeram com que esse tópico da matemática fosse escolhido, por nós, para uma “costura” entre conteúdo e metodologia.

Elegemos a sequência Fedathi como metodologia a nos guiar na exploração da geometria dos fractais em sala de aula. Sendo esta, apresentada como proposta para a elaboração e desenvolvimento de situações de investigação, em sessões didáticas que objetivem seguir os passos que um matemático realizaria durante seus experimentos.

Impregnada pelas etapas do método científico e elaborada e difundida pelo matemático e professor cearense Hermínio Borges Neto, a sequência Fedathi encontra-se em permanente atualização, trazendo para si ferramentas tecnológicas, princípios epistemológicos e atuações significativas junto ao ensino da matemática e a outros saberes, dentro e fora do país.

Trata-se de uma sequência de quatro etapas integradas e de princípios que os consubstanciam com a proposta de simular a formulação e a elaboração de um novo saber, para o aluno, através do fomento ao espírito investigativo e à formulação de conceitos para a resolução de problemas.

Direcionada à atuação do professor, a sequência Fedathi, aponta para um horizonte necessário e urgente dentro dos espaços de educação: a quebra de antigos paradigmas educacionais, para os quais o docente e sua aula são as únicas fontes do conhecimento e o aluno apenas uma folha em branco a ser escrita de forma passiva.

Traremos, à luz dos nossos estudos, trabalhos que foram importantes para o desenvolvimento de Fedathi – sua criação, princípios, concepções e atuações – tais como: Borges Neto (2013), Sousa (2010), Pinheiro (2018) e outros.

Por fim, apresentaremos uma proposta de sessão didática, cujos conteúdos abordados serão explorados a partir da geometria dos fractais, utilizando como estratégia metodológica a sequência Fedathi.

Pretendemos assim, apresentar contribuições a estes dois tópicos que enriquecem a matemática e a tornam atraente, sem perder seu rigor e beleza original; sendo pois, este o grande desafio ao professor que se lance a lecioná-la. E, neste sentido, este artigo aponta uma ferramenta a mais no leque de opções didático-pedagógicas essenciais à aprendizagem matemática.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Concepções de Fractal

Segundo Moreira (2003), a origem do termo *fractal*, criado por Mandelbrot, tem sua base no radical *fractus*, derivado do verbo latino *frangere*, que significa quebrar, produzir pedaços irregulares; do mesmo modo, o verbo fragmentar, em português, também faz uso dessa mesma origem.

Para Mandelbrot (1982), as formas apresentadas pela natureza não podiam, simplesmente, ser representadas pelas figuras geométricas pré-estabelecidas na geometria tradicional; e, para tanto, havia a necessidade de novos parâmetros, estatísticos ou não, que possibilitassem a representação dessas formas que agora, mais do que nunca, lhes saltavam aos olhos e à mente, trazendo consigo elementos novos.

Matemáticos conceituados, do final do século XIX e início do século XX, começaram a investigar algumas formas, construções e objetos e perceberam que suas características e propriedades não podiam ser completamente explicadas pela geometria euclidiana. Mais tarde, Mandelbrot sintetizou essas composições, denominando-as de fractais.

Para Jens Feder “Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos” (Feder, 1988 *apud* Barbosa, 2005, p.15).

Apesar dos esforços de grandes matemáticos contemporâneos em contribuir com nova geometria, ainda não se chegou a uma definição única ou exata para denominar os fractais.

Para Landim Neto (2015), as estruturas dos fractais são compostas por imagens reduzidas si mesmas, ou seja, suas partes lhes são semelhantes. Estas formas podem ser obtidas através de processos recursivos que gerarão, a cada nova iteração, uma melhor aproximação do fractal real, que somente poderá ser alcançada no limite deste processo, isto é, quando o número de etapas geradoras tender ao infinito.

2.2 Alguns Fractais Clássicos

A matemática, ciência historicamente construída, ao longo do seu desenvolvimento sempre foi o foco da atenção de grandes pensadores, que no decorrer de suas vidas deram contribuições fundamentais para novas descobertas com a quebra e a criação de novos paradigmas.

Em alguns casos, tais contribuições não eram bem vistas dentro da sociedade científica por destoarem de conceitos consolidados e por apresentarem, em suas conclusões, objetos matemáticos ditos “patológicos” para a época. Alguns desses estudos, assinados por grandes matemáticos, formaram a base, ou foram exemplos, para a estruturação da geometria dos fractais.

Apresentaremos algumas estruturas geradas no final do século XIX e início do século XX, que foram consagradas, por Mandelbrot (1982) e outros matemáticos, como clássicas. Para um melhor entendimento, traçaremos um breve histórico relatando o autor e obra de acordo com o ano de publicação de seus trabalhos, segundo Nunes (2006):

1. 1883 – o matemático russo George Ferdinand Ludwing Philipp Cantor (1845-1918) desenvolve seu “monstro matemático” intitulado de “Conjunto ou poeira de Cantor”.
2. 1890 – o italiano Giuseppe Peano (1858-1932) cria, proposta para cobrir a superfície plana de um quadrado, a curva intitulada de “Curva de Peano.”
3. 1891 – o alemão David Hilbert (1862-1943) publica a “Curva de Hilbert”, cujo objetivo também era o de percorrer a superfície plana de um quadrado. Este trabalho é hoje utilizado em técnicas de compressão de imagem.
4. 1904 – o sueco Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924) cria a forma que conhecemos como “Curva de Koch”.

5. 1916 – o polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969) estrutura o que chamamos de “Triângulo de Sierpinski.”.
6. 1926 – o matemático austríaco Karl Menger (1902-1985) apresenta a “Esponja de Menger”, um fractal construído a partir de uma figura em três dimensões.

Para este artigo, escolhemos a curva de Koch como objeto a ser explorado na sessão didática elaborada de acordo com a sequência Fedathi.

2.2.1 A Curva de Koch

Elaborada pelo matemático sueco Helge von Koch, a curva que leva seu nome também foi caracterizada como patológica por suas peculiaridades matemáticas. Para Nunes (2006), outras derivações desta curva foram apresentadas sob o título de ilha ou floco de Koch, por obedecerem aos mesmos processos recursivos; diferenciando-se apenas quanto ao fato de que a curva de Koch se inicia com um segmento de reta unitário e a ilha ou floco de Koch ter como figura inicial um triângulo equilátero de lado unitário.

Mandelbrot em 1967, ao sintetizar e exemplificar conceitos fractais, questionava-se sobre qual o real comprimento da linha da costa da Grã-Bretanha. Tal pergunta levantou questões acerca dos métodos de medida, do erro ao tentar calcular, dos agrimensores de tal linha e da “rugosidade” existente nela. A curva de Koch se tornou necessária para compreender o dimensionamento fractal das linhas costeiras e de tantas outras envolvendo medidas na natureza. Deste modo, a curva de Koch é vista como um meio de se compreender o cálculo de perímetros com alta “rugosidade”.

A curva de Koch é construída a partir da seguinte função iterada:

1. Tome inicialmente um segmento de reta unitário;
2. Divida-o em três partes de mesma medida;
3. Construa um triângulo equilátero, utilizando como medida o terço médio do segmento, e omita a sua base de acordo com a Figura 1. Observe que a nova figura terá quatro segmentos de reta.



Figura 1 – Nível 01 da Curva de Koch

Fonte: Elaborada pelos autores

1. Repita indefinidamente os passos 2 e 3 para os segmentos de reta gerados, como mostrado na Figura 2

Na Figura 2, podemos observar os 4 primeiros níveis da curva de Koch que será obtida no limite deste processo recursivo.

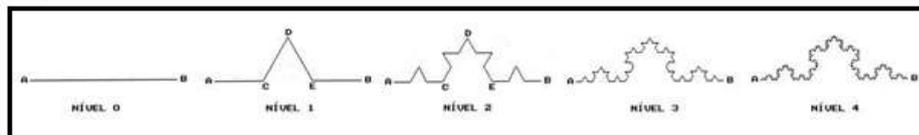


Figura 2 – Níveis 0,1,2,3 e 4 da Curva de Koch

Fonte: Elaborada pelos autores

Ao realizarmos uma análise das medidas apresentadas na curva de Koch, podemos observar, de acordo com a Tabela 1, que após n iterações temos o número de segmentos gerados $n_N = 4^n$ segmentos de reta medindo $c = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ cada e que o comprimento total desta curva será $C_t = \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

Tabela 1 – Valores das interações da Curva de Koch

NÍVEL (N)	NÚMERO DE SEGMENTOS GERADOS (n_N)	COMPRIMENTO DE CADA SEGMENTO (c)	COMPRIMENTO TOTAL DA CURVA (C_i)
1	4	$\left(\frac{1}{3}\right)$	$4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$
2	4^2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$
3	4^3	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$4^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$
4	4^4	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$4^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$
...
n	4^n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$4^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Fonte: Elaborada pelos autores

A curva de Koch é exemplo de uma curva contínua em todo o seu intervalo não sendo diferenciável em nenhum ponto. Observamos ainda que, no limite das iterações, esta curva terá o comprimento infinito.

Ao analisarmos a linha n da Tabela 1, observamos que o número de segmentos, o comprimento de cada um deles e o comprimento total da curva é dado em função do número n de iterações. O número de segmentos da curva $n_N = 4^n$ é uma sucessão monótona crescente de potências cuja base é maior que 1; a medida de cada segmento $c = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é uma sucessão monótona decrescente de potências, cuja base encontra-se no intervalo]0,1[e o comprimento total desta curva $C_i = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ é uma sucessão monótona crescente de potências, cuja base é maior que 1; o que nos leva a concluir que: se $n \rightarrow \infty$, as sucessões $n_N \rightarrow \infty$, $c \rightarrow 0$ e $C_i \rightarrow \infty$ ou seja: a curva de Koch (real) terá perímetro infinito.

2.2.2 O Triângulo de Sierpinski

Produzido a partir dos estudos do matemático Waclav Sierpinski, segundo Almeida (2007), trata-se de uma generalização do Conjunto de Cantor; recebe o nome de Triângulo de Sierpinski e é obtido no limite de um processo recursivo que se inicia com um triângulo equilátero de lado unitário.

Iniciamos a construção do triângulo de Sierpinski a partir da seguinte função iterada:

1. Dado um triângulo equilátero de lado unitário;
2. Construa suas bases médias;
3. Ficam determinados 4 triângulos congruentes;
4. Omita o triângulo central como mostrado na Figura 3;
5. Dos triângulos restantes, repita indefinidamente os passos 2, 3 e 4 (Figura 4).

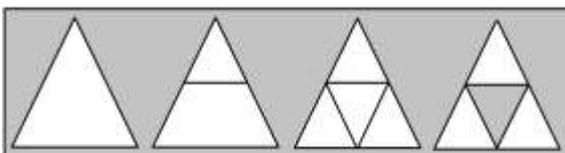


Figura 3 – Nível 01 do Triângulo de Sierpinski
Fonte: Elaborado pelos autores

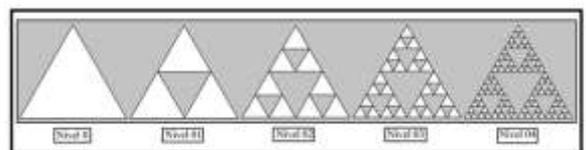


Figura 4 – Nível 4 do Triângulo de Sierpinski
Fonte: Adaptado de <https://bit.ly/2Enq12f>

A Tabela 2, retrata a evolução das medidas de área e do perímetro do triângulo de Sierpinski, ao observarmos, perceberemos que a área da figura no nível 0 é $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e que, a cada iteração,

esta área é reduzida pelo fator $\frac{3}{4}$, o que nos faz concluir que na iteração n teremos $S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ ou seja: S_n é uma sequência monótona decrescente de potências cuja base encontra-se no intervalo $]0,1[$ o que nos faz concluir que: se $n \rightarrow \infty$, teremos $S_n \rightarrow 0$.

Ao analisarmos o perímetro de tal figura, notamos que, a cada nova iteração, teremos o perímetro da iteração anterior acrescida pelo fator $\frac{3}{2}$, o que nos faz perceber que como resultado da iteração n teremos $2P = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ou seja: $2P$ é uma sequência monótona crescente de potências cuja base é maior que 1, o que nos leva a concluir que, se $n \rightarrow \infty$, teremos $2P \rightarrow \infty$.

Tabela 2 – Valores das n iterações do Triângulo de Sierpinski

NÍVEL (N)	NUMERO DE TRIÂNGULOS FORMADOS	MEDIDA DO LADO DE CADA TRIÂNGULO	ÁREA TOTAL (S)	PERÍMETRO (2P)
0	1	1	$1 \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3 \cdot 1 = 3$
1	3	$\frac{1}{2}$	$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$
2	3^2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{9}{2} + 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{4}$
3	3^3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{27}{4} + 27 \cdot \frac{1}{8} = \frac{81}{8}$
4	3^4	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{81}{8} + 81 \cdot \frac{1}{16} = \frac{243}{16}$
...
N	3^N	$\left(\frac{1}{2}\right)^N$	$\left(\frac{3}{4}\right)^N \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^N$

Fonte: Elaborado pelos autores

Como o triângulo de Sierpinski (real) é alcançado no limite das iterações, teremos uma figura fechada cuja área é zero e seu perímetro infinito.

2.3 Características dos Fractais

Apresentaremos, agora, algumas características que irão nos auxiliar durante a sessão didática. São elas: auto-similaridade e complexidade infinita.

A auto-semelhança ou auto-similaridade é uma característica dos fractais, perceptível durante sua construção ou em uma observação mais detalhada de sua estrutura. Trata-se do fato em se ter uma parte definida do fractal, respeitando as escalas, igual ao todo de onde ela foi retirada; ou seja, em qualquer escala de ampliação, obtemos cópias do objeto inicial.

Uma figura que tenha esta característica apresenta sempre o mesmo aspecto visual em qualquer escala, podendo ser observada de duas maneiras:

- 1) Auto-semelhança exata: estrutura própria das figuras geradas por processos matemáticos, cujo objeto final se forma por infinitas réplicas perfeitas, em diferentes escalas, através de processos recursivos. Tal iteração, durante a construção da figura, garante a exatidão da auto-semelhança, visto que, a mesma regra de construção será aplicada durante todo o processo (Figuras 6 e 7).

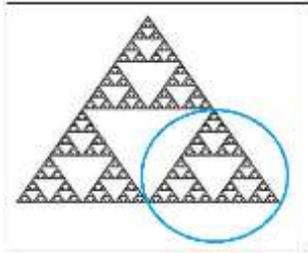


Figura 6 - Triângulo de Sierpinski em detalhe parte de sua auto-semelhança.

Fonte: Adaptado de <https://bit.ly/2Enq12f>

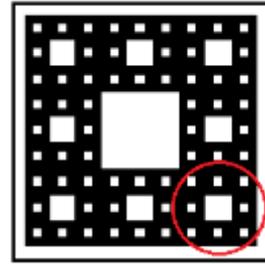


Figura 7 - Tapete de Sierpinski e, em detalhe, uma parte de sua auto-semelhança.

Fonte: Adaptado de <https://bit.ly/2Enq12f>

2) Auto-semelhança aproximada ou estatística: particularmente observadas nas figuras e objetos cujas partes se aproximam similarmente; ou seja, apresentam alguma semelhança, mas que, em diferentes escalas e observadas rigorosamente, não são iguais em seu todo.

Alguns autores como Janos (2008) e Barbosa (2005) consideram que determinadas forma e objetos, como: as folhas de algumas árvores, as nuvens, o brócolis, a couve-flor e outros mais, trazem como característica a auto-semelhança aproximada e, por isso, podem ser denominados de fractais naturais. A exemplo, temos as Figuras 8 e 9.



Figura 8 – Brócolis e, em detalhe, uma parte de sua auto-semelhança aproximada.

Fonte: Adaptado de <https://bit.ly/2G8V3Dq>



Figura 9 – Folha composta e, em detalhe, uma parte de sua auto-semelhança aproximada.

Fonte: adaptado de <https://bit.ly/2G8V3Dq>

Dizemos que um fractal, gerado a partir de uma função iterativa, descreve objetos de complexidade infinita; já que, na prática, não há como representar por completo um objeto fractal. Sua criação é fruto de um processo recursivo infinito e, por isso, quanto maior o número de iterações, maior será a riqueza de detalhes observada na representação, tornando impossível uma reprodução completa desses infinitos detalhes; por exemplo o Floco de Koch, representado na Figura 10.

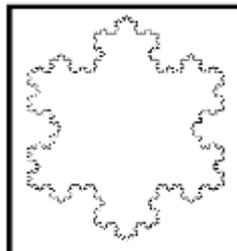


Figura 10 - Floco de Koch na sua 5ª iteração.

Fonte: Adaptado de <https://bit.ly/2Enq12f>

Os fractais, obtidos através desses processos, só serão alcançados no limite do processo iterativo; por isso, são dotados de complexidade infinita.

Ao aluno, deve ser apresentado o encanto desta geometria, suas formas, evolução histórica, princípios e construções. Trazer a beleza destas formas para a sala de aula, ou para outros ambientes de aprendizagem, é levar o aluno a perceber a matemática com outros olhos. Porém, não

podemos simplesmente expor tais saberes e esperar que a “mágica” aconteça; para tal, necessitaremos de uma metodologia que envolva o aluno na busca pelo desenvolvimento do conhecimento e que reposicione o professor no seu verdadeiro lugar durante este processo.

Ao final deste artigo, iremos apresentar uma sessão didática que contemple os objetivos aqui destacados e, para tal, precisaremos entender como funciona e sobre quais princípios se alicerçam a metodologia escolhida.

2.4 Sequência Fedathi

A investigação dentro do processo de ensino e aprendizagem, tem sido uma ferramenta essencial à eficácia da aprendizagem de conceitos matemáticos. A Educação Matemática, por muito tempo, baseou-se apenas em treinos de algoritmos; geralmente, sem ocupar-se de discussões ou reflexões acerca dos motivos que levaram os procedimentos adotados aos seus resultados; de modo que, os professores restringiam-se apenas à comunicação dos resultados, sem realizar uma análise crítica do método aplicado ou dos valores obtidos por ele.

Ao aluno, cabia manter-se passivo durante essa “transferência” de informações; sujeito a uma relação hierárquica, na qual o mestre detinha o conhecimento e o método; enquanto que ele, estudante, ia sendo relegado ao posto de mero receptáculo de tais conhecimentos; fazendo jus a definição da palavra aluno, do latim *alumnus*, que significa “criança de peito, lactente”. A ideia do termo sugere “aquele que está sendo nutrido ou criado”, visto que *alumnus* é o particípio substantivado do verbo latino *alere*, que quer dizer “alimentar” ou “nutrir” o que absorve o sentido de “discípulo”. De qualquer maneira, o termo aluno sugere o ato de ser alimentado com a sabedoria de outro que possua o conhecimento; no caso, o professor, figura inquestionável e inabalável em seus métodos.

Os exercícios propostos por esses professores desempenhavam apenas o papel de repetição de procedimentos, gerando assim uma preocupação com a eliminação do erro: ao aluno, não lhe era permitido discutir a questão, pois a mesma estava certa em absoluto ou errada por completo.

O uso contínuo e repetitivo de métodos como esse, acarreta prejuízos irreparáveis ao ensino da matemática, castrando o espírito investigativo do aluno e impedindo assim o desenvolvimento, apropriação e a elaboração de diferentes estratégias e raciocínios.

Nessa perspectiva, torna-se necessária o uso de novos métodos e estratégias que oportunizem ao aluno o protagonismo de sua própria aprendizagem. Usando métodos investigativos, experimentais, tecnológicos e inovadores que despertem no estudante a curiosidade e, por conseguinte, o interesse em aprender cada vez mais. Nessa ótica, o professor assume funções outras que vão além do simples papel de facilitador. Sua maior incumbência agora é a de problematizar, é a de propor desafios que levem o aluno a participar ativamente da construção do conhecimento; sua atuação passa a ser, então, vital na condução da investigação e na produção do conhecimento.

O objetivo do ensino da matemática é “identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática.” (BRASIL, 1997, p.33), o documento destaca ainda a importância de aspectos que estimulem, no aluno, o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver situações que envolvam diversos problemas. E, para tais premissas eleitas como essenciais ao desenvolvimento dos objetivos e direitos de aprendizagem, propomos o uso didático e pedagógico da sequência Fedathi.

Segundo Souza (2013), a sequência foi formalizada em 1996 quando o professor, pesquisador e matemático cearense Hermínio Borges Neto concluiu o seu Pós-Doutorado na Université de Paris VII, França, na área de Ensino da Matemática. Desde 1997, Hermínio Borges é professor adjunto da Universidade Federal do Ceará; onde fundou e coordena o laboratório de pesquisas Multimeios e o grupo de pesquisa Fedathi.

Inicialmente, a sequência foi pensada e desenvolvida para o ensino da matemática; todavia esses estudos extrapolaram os limites desta disciplina e, hoje, encontramos alusão a ela em trabalhos publicados em diversas outras áreas como pedagogia, física, medicina e outros.

Fundamentada no livro de Inre Lakatos, intitulado *A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações*, publicado em 1978, e tendo como principal estratégia inserir o

aluno em situações que promovam o processo de resolução de situações problemas, na perspectiva epistemológica do desenvolvimento do conhecimento matemático; a sequência apresenta na base de sua elaboração uma proposta metodológica que orienta concepções e princípios a serem destacados na postura do professor frente aos alunos.

Situando o professor como mediador entre o problema, os saberes a serem explorados e a resolução, a Sequência Fedathi se apresenta em quatro fases que, de maneira indissociável aos princípios que serão elencados, auxiliará o professor a proporcionar um ambiente mais favorável ao ensino e, por consequência, à aprendizagem.

Segundo Borges Neto (2018), foram definidas quatro fases para a sequência Fedathi, a saber: Tomada de posição, Maturação, Solução e Prova; e sete princípios: Mão no bolso, Situação adidática, Pergunta, Mediação, Contraexemplo, Acordo didático e Concepção do erro.

Princípios e fases são indissociáveis em Fedathi e deverão conduzir a sessão didática. Lembrando sempre de que o objetivo do ensino só se concretiza na aprendizagem e a aprendizagem significativa só se concretiza na utilização do conhecimento de forma prática.

Destacar inicialmente a **mediação** como base para o desenvolvimento de todas as fases. Para Pinheiro (2018, p.41), “Em um processo dialético, as mudanças na vida mental articulam-se com mudanças na vida social e material, e a interação é compreendida como um comportamento mediado.” Em Fedathi, a mediação é encarada como ação docente que tem como objetivo a imersão do aluno na prática do pesquisador, quando este toma para si o papel de cientista na busca das soluções dos problemas.

Antes de iniciar qualquer movimento, devemos realizar um diagnóstico que avalie se a sistemática, o tema proposto e a metodologia se encaixam no grupo. Esta avaliação deverá preceder a iniciação do processo e poderá ser feita no formato de questionamentos, sondagens ou simples questões que abordem os pré-requisitos pensados pelo professor. Para Souza (2013), neste momento o professor apresenta uma postura de investigador, observando os pontos fortes e fracos da turma.

Para Bezerra (2017), a estes conjuntos de conhecimentos, observado nos alunos e dominado pelo professor, dá-se o nome de Plateau. O resultado observado não deve se voltar apenas ao conhecimento que o aluno carrega e, sim, como as possibilidades e potencialidades a serem exploradas pelo professor no transcorrer da atividade.

O estabelecimento das regras que irão conduzir os passos dos alunos e do professor, também deve preceder à apresentação do problema. Esse **acordo didático**, um dos princípios da sequência Fedathi, deverá conter as possíveis situações, a divisão da turma e a metodologia a ser aplicada de forma clara e objetiva. A postura dos alunos esperada pelo professor e a postura do professor esperada pelos alunos devem constar nesse “documento”, bem como os princípios da mediação do professor durante a sessão didática.

2.4.1 Tomada de Posição

Mais complexo do que a simples apresentação de um problema a ser resolvido ou uma situação a ser enfrentada, a tomada de posição consiste basicamente em trazer o aluno à reflexão de uma problemática e neste contexto despertar nele o espírito investigativo.

Para Silva (2018), a situação desafiadora deve ser apresentada ao aluno de maneira que o possibilite ter acesso ao conhecimento a ser explorado, não podendo ser algo muito simples ao ponto de não representar um desafio, nem algo tão complexo que lhe pareça inacessível, fazendo-o perder, assim, a motivação para a resolução.

Podemos iniciar as discussões de forma a, primeiramente, tangenciar a situação problema para situar o aluno junto aos saberes que ainda serão explorados, orienta-se que sejam iniciadas as discussões de forma a, primeiramente, tangenciar a situação problema e, logo que se obtiver a concentração do grupo, a problemática deve ser inserida de forma oral, escrita, com a manipulação de objetos; utilizando recursos tecnológicos, jogos ou qualquer outro meio que possibilite a exposição de ideias e a integração do grupo.

2.4.2 Maturação

Nesta etapa, o professor assume uma postura de mediação pedagógica entre o aluno, seus questionamentos, os saberes envolvidos e as técnicas de resolução. Durante esta fase, deve-se promover a maturação do problema.

Após iniciada uma discussão ampla acerca da problemática proposta; deve-se intensificar o bom entendimento das conjecturas apresentadas na fase de Tomada de posição. No caminhar destas discussões, cabe ao professor administrar os questionamentos dos alunos sobre a ótica do problema apresentado, de maneira progressiva e construtiva, não só da solução, mas também dos caminhos e alternativas para tal.

É interessante que o professor adote uma postura mais observadora do processo, com vistas ao alcance de seus objetivos ou para garantir um redirecionamento quando da fuga dos propósitos traçados. Aqui, o ideal é que os questionamentos partam dos alunos; o que não impede de o professor incitar as discussões com questionamentos motivadores. **A pergunta** faz-se princípio de toda esta sequência e, aqui, se faz presente com ênfase em guiar passos e reflexões.

Durante a realização desta etapa e a partir das dúvidas que os alunos apresentarem, o professor deve elaborar questionamentos esclarecedores que obtenham, como devoluta, a reflexão do aluno acerca do problema e da organização dos saberes ou da lógica que o levará à solução.

Concluída a reflexão inicial, o professor deverá intervir, se necessário, com perguntas que estimulem a proposição de soluções. Inicialmente de forma hipotética, mas que obtenha certa coerência com os propósitos. Por fim, o professor deverá lançar questionamentos que orientem ou suscitem, com base nas estratégias discutidas pelos alunos, a solução final.

Nesta perspectiva, outro princípio entra em cena: **a situação adidática**. Nela, o aluno precisa agir sem a intervenção direta do professor. O fomento a essa independência tem por objetivo gerar protagonismo, propiciando ao aluno a sensação de desafio a ser enfrentado. Para Mendonça (2018), a situação adidática encontra-se e se identifica com esta fase; pois, embora exista a intencionalidade de ensinar os conteúdos, o aluno trabalha de forma autônoma na resolução da situação-problema.

O processo de maturação ocorre, dentro da perspectiva pedagógica de que os atos da personalidade profissional do professor dar-se-ão de forma intencional ao desenvolvimento do conteúdo, sobre a ótica discursiva dos questionamentos levantados por ele ou pelos alunos.

Analisando estas premissas, o professor sairá da condição de mero repassador de conteúdos à problematizador de contextos previamente elaborados e planejados.

Nesta fase do desenvolvimento de Fedathi, lançamos mão de um outro princípio norteador da sequência: a **“mão no bolso”**. Para Santana (2018), mais do que uma postura adotada pelo professor durante a mediação entre conhecimento, problema e aluno, a “mão no bolso” mostra-se como proposta metodológica que potencializa, dinamiza e oportuniza ainda mais a reflexão, o raciocínio e a criação de hipóteses, por parte dos alunos. Encarado também como pedagogia, este princípio não se faz presente apenas nesta fase do desenvolvimento de Fedathi mas perpassa por todo o processo de desenvolvimento das fases.

Ressaltamos aqui que o objetivo desta proposta é fazer o aluno pôr a “mão na massa” e, para que isso ocorra, muitas vezes precisaremos que o professor coloque a “mão no bolso”; eximindo-se sem, no entanto, se omitir de divulgar resultados antes de propor, mediar e sistematizar as reflexões necessárias à elaboração do raciocínio.

2.4.3 Solução

Nesta fase, o professor deverá propor aos alunos que organizem, de forma sistemática e estrutural, as suas respostas. Mais do que o resultado final pensado pelo aluno, o professor deve observar e dar ênfase à discussão do caminho percorrido, através do raciocínio lógico utilizado para o alcance da resposta.

Debater os percursos, pelos quais o aluno passou para a obtenção do resultado, possibilita ao professor lançar mão de outro princípio da sequência: o **contraexemplo**.

Para Ferreira (2018), neste momento o professor deve “desequilibrar” o estudante, frente aos resultados obtidos ou aos percursos traçados. Lança-se então um contraexemplo às afirmativas do estudante ou do grupo, como tentativa de se testar a solidez do resultado apresentado, fazendo-o voltar à reflexão do problema e, como consequência, à aprendizagem.

O contraexemplo mostra-se importante em todas as fases do desenvolvimento de Fedathi, com vistas a aproveitar o seu caráter estritamente reflexivo para o desenvolvimento da aprendizagem efetivada na construção do conhecimento. Para Ferreira (2018), devem-se apresentar, aos envolvidos no processo, contraexemplos cuja essência seja a reflexão e a análise das afirmações e/ou negações; a fim de ratificar, ou não, os resultados obtidos.

Outro princípio a ser trabalhado, principalmente nesta fase, é a **concepção do erro**. Em Fedathi, utiliza-se o erro como oportunidade para a reconstrução do conhecimento, de forma a oportunizar ao aluno que o mesmo reflita sobre o “equivoco” e reconstrua o caminho certo.

Este caminho realizado pelo aluno e observado pelo professor, deve ser encarado como forma de recomeço do raciocínio e, sobre esta perspectiva, o professor deverá sugerir vários testes para validar o que foi percorrido e as soluções encontradas. Nesta fase, deve-se sempre filtrar o que há de positivo para a construção de um caminho genérico que envolva todas as situações.

Para Menezes (2018), trabalhar com esta concepção de erro, forma, nos alunos, estruturas cognitivas que são geradas a partir das diversas análises apresentadas por outros alunos ou fomentadas pelo professor.

2.4.4 Prova

Nesta etapa, o professor assume um papel mais atuante no que diz respeito a sua fala e à importância do que vai ser dito durante a sessão didática. É o momento em que o docente irá sintetizar as soluções elaboradas e discutidas, pelos grupos de estudantes, estruturando, com a formalidade matemática, a solução. Neste contexto de finalização, serão apresentados de forma mais elaborada, rigorosa e sistematizada, a solução e a resolução do problema. Para Menezes (2018), a Prova mostra-se como o momento da ação docente em sintetizar ou modelar a situação apresentada na tomada de posição.

Durante esta etapa, não podemos abrir mão do rigor matemático; é o momento de se utilizar da linguagem própria da disciplina com seus símbolos e sequências. Apesar deste rigor, é preciso não esquecer do público para o qual estamos apresentando a solução. Não se trata aqui de diminuir o nível e a linguagem utilizada, e sim em adequá-los, de forma pedagógica, ao nosso esquema didático de apresentação da solução, sem perder a qualidade que a aprendizagem requer.

Importante se faz também, a bagagem acumulada pelo profissional que conduz esta fase; pois, será necessário o uso dela, durante a abordagem, para alcançar o maior número de alunos. Quanto maior a capilaridade ou entendimento desta solução dentre os alunos, maior será o sucesso da aula; uma vez que, não há como conceber o processo de ensino sem o processo de aprendizagem.

Em se tratando de uma fase de “fechamento” da discussão, é importante que se tenha uma atenção redobrada; pois, todo o sucesso da aula vai depender do nível de entendimento que o aluno vai ter ao confrontar suas estratégias, caminhos e soluções com a apresentação feita pelo professor. Se não houver uma boa condução do processo, no final teremos apenas uma explicação carregada de formalismos e sem nenhum alcance dos objetivos traçados.

O processo não se encerra nesta fase, pois nela deve-se buscar, junto ao aluno, as possíveis aplicabilidades desta solução, apresentada pelo professor, em várias outras situações. É importante que o professor avalie o grau de entendimento do aluno, através de exercícios que o leve a aplicação dos conceitos trabalhados, por meio de atividades ou projetos que diversifiquem esta aplicação em outras situações.

3 METODOLOGIA

3.1 Sessão Didática

O uso da investigação, como ferramenta para o desenvolvimento de conceitos, é citado por Ponte (2005) como o envolvimento ativo do aluno numa condição fundamental da aprendizagem, destacando que, na busca por um objetivo, o aluno aprende quando mobiliza seus recursos cognitivos e afetivos. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações.

Sendo assim, com o objetivo de desenvolver o raciocínio dedutivo e intuitivo através da experimentação e investigação, utilizaremos esta parte do nosso artigo para apresentar sugestão de uma sessão didática referente à construção e análise de um fractal, mediado pela sequência Fedathi.

Como premissa, destacamos que o modelo de sessão didática apresentado neste artigo não tem, sob nenhuma hipótese, o objetivo de funcionar como receita pronta para a aplicação desta sequência; muito menos, pretendemos servir como modelo fechado e inflexível. Todavia, a autonomia pedagógica em modificar e readaptar os modelos apresentados, ao sabor e às necessidades do sistema de ensino vigente, deve observar os limites estabelecidos pelas fases e princípios da sequência, não lhe sendo permitida a escolha de uns em detrimento de outros. Não se deve, pois, utilizar a sequência *à la carte*, já que suas fases e princípios são indissociáveis.

De início, sugerimos que, ao propor uma atividade que envolva a geometria dos fractais, o professor aproxime dos seus alunos o conteúdo a ser visto através de uma contextualização histórica dos fatos matemáticos envolvidos na criação dessa nova geometria. A beleza de suas formas deverá ser um atrativo para que os alunos motivem-se a pesquisar, construir e observar os objetos fractais.

Quanto à metodologia aqui sugerida, inicialmente será proposta, para alunos de qualquer série do ensino médio, uma atividade que envolva a curva de Koch. Após uma contextualização histórica, o professor deverá iniciar a sessão didática com uma análise sobre alguns conhecimentos prévios que os alunos deverão apresentar. Neste momento, é importante observar as lacunas a serem preenchidas e as potencialidades a serem exploradas nos estudantes.

Como se trata de uma construção geométrica seguida por uma análise algébrica, precisaremos basicamente que o aluno saiba construir, com régua e compasso, um segmento de reta, triângulos equiláteros, além de saber operar também com expoentes de mesma base.

Depois de feita esta análise e identificadas as lacunas e potencialidades, iniciaremos o contrato didático. Além de receber folhas de ofício, régua milimetrada e compasso, a turma deverá ser dividida em duplas e/ou trios, quantidade suficiente para tentar evitar a ociosidade entre os alunos. Devem também ser expostas, de forma clara e objetiva, as regras para o uso e devolução do material; bem como, a dinâmica e atuação do professor e da turma.

É necessário ainda que sejam construídas as regras de convivência e a projeção para a duração de cada etapa. Sugerimos aulas de 100 minutos, reservando um tempo de 15 a 20 minutos para a análise a priori e a tomada de posição; de 30 a 40 minutos, para a maturação e solução do problema; de 15 a 20 minutos para a prova e considerações finais; e o restante do tempo para a apresentação do floco do Koch, atividade a ser desenvolvida pelo aluno em casa e devolvida ao professor como parte da avaliação da aula.

A duração acima descrita para o desenvolvimento da sessão didática é apenas uma sugestão/previsão, visto que a turma irá definir seu próprio tempo; cabendo ao professor a responsabilidade por marcar esse ritmo, sem queimar etapas ou prolongar discussões que não agreguem ao que foi proposto.

Feito isso, apresenta-se o seguinte problema:

Descobrimo a curva de Koch.

- 1) Ponha a folha sobre a mesa na posição paisagem e, com um lápis e régua, trace um segmento de reta medindo 27 cm na parte inferior da folha;
- 2) Divida o segmento de reta em 3 partes iguais;
- 3) Com a ajuda da régua e um compasso, construa um triângulo equilátero cuja base seja o seguimento do meio que você definiu no passo 2;

- 4) Com o auxílio da borracha, apague a base desse triângulo, vamos chamar essa etapa de nível 1;
- 5) Você agora tem quantos segmentos de reta?
- 6) Quanto mede cada um?
- 7) Em cada novo segmento, repita os passos 2,3 e 4, vamos chamar essa etapa de nível 2;
- 8) Você agora tem quantos segmentos de reta?
- 9) Quanto mede cada um?

Vamos completar a tabela abaixo:

Nível	Número de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento da curva
0	1	27	27
1			
2			

Se você fosse repetir novamente os passos 2,3 e 4, ou seja: construir o nível 3, teríamos quantos segmentos de reta?

Quanto mediria cada um?

Qual seria o novo comprimento da curva?

Vamos pensar mais um pouco!

Complete a tabela abaixo:

Nível	Número de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento da curva
0	1	27	27
1			
2			
3			
4			
...
N			

Observe que a última linha desta tabela corresponde ao nível “n”, discuta com seus colegas o que significa este nível e tente descobrir quais expressões matemática devem ser escritas nas células correspondentes ao número de segmento, comprimento de cada segmento e comprimento total no nível n.

Durante a realização da fase de maturação, alguns questionamentos podem ser levantados para que o aluno observe o comportamento da curva a cada iteração. Matematicamente,

o que acontece com o número de segmentos? E o tamanho de cada um? E o tamanho total da curva?

Caso algum aluno não consiga apresentar uma solução que satisfaça o que foi proposto, o professor deve lançar mão do artifício do contraexemplo para que o aluno teste a expressão por ele encontrada no nível "N" da tabela. O Professor pode pedir-lhe, por exemplo, para que teste a expressão com os valores do nível 1 e 2.

O professor irá perceber que durante toda a execução da sessão didática, irão aparecer oportunidades, muitas vezes únicas, de se exercitar os princípios da sequência. É com cuidado que ele deve estar atento para não cometer o erro de manipular a turma, visto que seu papel é o de conduzir.

A realização de uma sessão didática afinada com a sequência Fedathi, requer uma vigilância constante. Não raramente, encontramos situações onde responder uma pergunta do aluno com uma afirmação, compromete parte do nosso objetivo; visto que, ao responder os questionamentos, vamos matando aos poucos o espírito investigativo que estávamos tentando suscitar.

Durante a fase da prova, devemos validar as soluções corretas alcançadas pelos alunos; porém, devemos valorizar o erro como estratégia de recondução à linha de raciocínio que em algum ponto se partiu. Essa "volta ao caminho correto" deve ser ponto fundamental na aula; pois, é neste momento que o professor deverá trazer, para junto do grupo, os alunos que não alcançaram ou alcançaram parcialmente o resultado.

Este momento de recondução é importante por levar o aluno a ganhar confiança de que ele poderá se lançar na busca por resultados sem se importar em errar.

Terminada a prova, o professor pode apresentar o floco de Kock e pedir que os alunos, em casa, refaçam a atividade considerando, como figura inicial, um triângulo equilátero e solicitar que os resultados sejam apresentados a ele sob a forma de trabalho dirigido, na próxima aula. Desta maneira, poderá observar se houve aprendizagem, validando a avaliação feita, por ele, no momento da aula, de forma continuada, através de suas observações e conclusões.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por tratar de conceitos relativamente novos, a apresentação da geometria dos fractais, em sala de aula, revela ao aluno e ao professor que a matemática, apesar de ser uma ciência exata, não está totalmente acabada; evidenciando, assim, a cada nova descoberta ou advento, a sua capacidade de surpreender e inovar.

De um modo especial, ao tratar do tema em questão, observamos a facilidade em compreender os conceitos por perceber as semelhanças existentes entre os diversos elementos gerados a partir de formas da natureza e os elementos construídos a partir de ferramentas matemáticas, isto posto, aponta que a matemática estudada tem sua aplicação, provocando, em quem a estuda, uma ampliação da sua visão de mundo.

Concluimos que o estímulo ao uso de novas tecnologias é capaz de produzir no aluno um maior interesse para os tópicos abordados; que a geometria dos fractais abre novas portas a estes estímulos; e que, em meio a discussões sobre reformas curriculares, devemos ousar e propor a inserção dessa ferramenta organizada de forma didática, com o objetivo pedagógico de ampliar o estudo da matemática básica e mostrar ainda mais sua beleza.

O mesmo deslumbramento pode ser percebido no olhar do aluno, quando este, situado historicamente acerca dos conteúdos explorados, se percebe protagonista na construção do seu conhecimento.

Ao iniciar o trabalho com os fractais e a sequência Fedathi, o professor perceberá que muitos outros conteúdos podem e devem ser abordados; e que a apresentação de fatos curiosos, voltados à aplicabilidade destes tópicos, despertará, no aluno, um maior interesse por estes e outros fatos matemáticos.

Pudemos observar que a sequência Fedathi tem ainda muito a contribuir com o ensino, especialmente da matemática; não por se tratar apenas de um recurso didático organizado e aplicável, mas por mostrar que mudanças, muitas vezes pequenas, na postura do professor, resultam em ganhos incomensuráveis ao aprendizado do estudante.

É preciso ressaltar que, muito embora se tenha uma quantidade significativa de trabalhos acadêmicos relacionados à geometria fractal, muitos deles se detêm apenas à parte clássica deste estudo; sem promover um aprofundamento maior de sua aplicabilidade, principalmente quando o objetivo é adequar o tema à sala de aula.

Quando entramos em contato com os estudos realizados pelo laboratório de pesquisas Multimeios da Universidade Federal do Ceará, de pronto pudemos observar a viabilidade em unir a geometria dos fractais à sequência Fedathi.

O desenvolvimento desta sequência é objeto de muitos estudos e, hoje, encampa toda uma linha de pesquisa, desde a graduação até os mais altos níveis acadêmicos, não ficando restrita apenas à Universidade Federal do Ceará, nem muito menos ao Brasil.

A propagação de ideias como essa, precisa dar-se com maior veemência, a fim de que a matemática possa se reinventar em si mesma; sem, no entanto, perder o rigor dos seus métodos e sem deixar de buscar uma abordagem mais construtivista, tornando-se assim mais acessível e atualizada aos novos padrões de qualidade educacional.

Esperamos seguir nesta linha, com o objetivo de descobrir novos recursos e aplicações da geometria dos fractais e da sequência Fedathi. Julgamos ter contribuído para a difusão destes conhecimentos e para o apoio a sua prática efetiva em sala de aula. Acreditamos ter somado ideias e servido de ponto de apoio para outros estudiosos que venham a desenvolver tais temas ou temas correlatos a esses. Deixamos este artigo aberto para atualizações.

Ao final deste artigo, conseguimos absorver a essência do pensamento de Barnsley (1988), quando este afirma que a geometria fractal fará com que vejamos as coisas diferentes. É perigoso ler muito. Arriscaríamos perder a visão infantil de nuvens, florestas, flores, galáxias, folhas, penas, rochas, montanhas, torrentes de água, tijolos e muito mais. Nunca mais interpretaremos estes objetos da mesma forma.

REFERÊNCIAS

Almeida, S.D.C.F. (2007). *Utilização de Maple para a interpretação gráfica de Sistemas de Lindenmayer*. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Departamento de Matemática Pura da Universidade do Porto, Porto.

Barbosa, R. M. (2005). *Descobrimo a Geometria Fractal - Para a sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Bezerra, A. M. A. (2017). A Compreensão do Plateau no Campo do Ensino das Ciências. In: Borges Neto, H. (Org). *Sequência Fedathi além das Ciências Duras*. Curitiba: CRV.

Borges Neto, H. et al. (2013). *Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de matemática e de ciências*. Fortaleza: Edições UFC.

_____. H.(Org). (2018). *Sequência Fedathi: Fundamentos*. Curitiba: CRV.

Brasil. (1997). Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Falconer, K. (2003). *Fractal geometry – mathematical foundations and applications*. Chichester: John Wiley and Sons.

Ferreira, F. D. C. (2018). Contraexemplo. In: Borges Neto, H. *Sequência Fedathi: Fundamentos*. Curitiba: CRV.

Janos, M. (2008). *Geometria Fractal*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Lakatos, I. (1978). *A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações*. Rio de Janeiro: Zahar.

- Landim Neto, A. F. (2015). *Tópicos da Geometria Fractal e Aplicações*. 96f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza.
- Lima, E. L., E. L. (2011). *Análise real: volume 1* – Coleção matemática universitária. 11ª ed. Rio de Janeiro: IMPA.
- Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman. New York.
- _____. (1991). *Objetos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão*. Lisboa: Gradiva.
- Mendonça, A. F. (2018). Situação adidática. In: Borges Neto, H. *Sequência Fedathi: Fundamentos*. Curitiba: CRV, 2018.
- Menezes, D. B. (2018). Prova. In: Borges Neto, H. *Sequência Fedathi: Fundamentos*. Curitiba: CRV.
- _____. (2018). Solução. In: Borges Neto, H. *Sequência Fedathi: Fundamentos*. Curitiba: CRV.
- Moreira, I. C. (2003). *Fractais. Complexidade e Caos*. Rio de Janeiro: Editora UFRJ/COPEA.
- Nunes, R. S. R. (2006). *Geometria Fractal e Aplicações*. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto.
- Pinheiro, A. C. M. (2018). A Mediação. In: Borges Neto, H. *Sequência Fedathi: Fundamentos*. Curitiba: CRV.
- Santana, A. C. D. S. (2018). Mão no bolso: postura, metodologia ou pedagogia? In: Borges Neto, H. *Sequência Fedathi: Fundamentos*. Curitiba: CRV, 2018.
- Silva, M. A. D. (2018). Tomada de posição. In: Borges Neto, H. *Sequência Fedathi: Fundamentos*. Curitiba: CRV.
- Souza, M. J. A. (2010). *Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da Geometria mediado por tecnologias digitais*. 230f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- _____. (2018). Sequência Fedathi: Apresentação e caracterização. In Borges Neto, H. et al. (Org.). *Sequência Fedathi: uma proposta Pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática*. Fortaleza: Edições UFC.