ATLANTE
Cuadernos de Educación y Desarrollo (2º Época)

Marzo 2019 - ISSN: 1989-4155

DIFICULTADES EN LA APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE RECTA Y PLANO: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Virginia Laura Bravo Barletta[1]
Jefe de Trabajos Prácticos, Fundación Universidad Argentina de la Empresa, Argentina
vbravobarletta@uade.edu.ar

Gisele Hollisch[2]
Profesor Adjunto, Fundación Universidad Argentina de la Empresa, Argentina
ghollisch@uade.edu.ar

Ana María Rienda[3]
Profesor Adjunto, Fundación Universidad Argentina de la Empresa, Argentina
arienda@uade.edu.ar

Para citar este artículo puede utilizar el siguiente formato:

Virginia Laura Bravo Barletta, Gisele Hollisch y Ana María Rienda (2019): "Dificultades en la apropiación del concepto de recta y plano: una propuesta didáctica", Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo (marzo 2019). En línea:

https://www.eumed.net/rev/atlante/2019/03/concepto-recta-plano.html

RESUMEN

El presente estudio presenta una propuesta didáctica orientada a subsanar dificultades comunes en el aprendizaje de los conceptos de recta y plano en el nivel universitario. La propuesta es resultado del análisis sistemático de un corpus de errores recogido de exámenes parciales de alumnos universitarios de primer año. El corpus está formado por los errores típicos cometidos en evaluaciones parciales de distintas carreras de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas de la Universidad Argentina de la Empresa, sistemáticamente organizados por tipos e integrados en una taxonomía de categorías excluyentes y exhaustivas (Bravo & Patiño, 2016). Sobre la base de los tipos de errores detectados en este trabajo, se procedió a la elaboración de una propuesta didáctica fundada principalmente en la utilización de herramientas visuales y dinámicas para las que el uso de la computadora resulta primordial.

Palabras clave: Errores - didáctica - matemática - rectas y planos - enseñanza.

ABSTRACT

The present work presents a didactic plan that aims to solve common difficulties in the learning process of straight lines and planes at undergraduate level. The plan results from a systematic analysis of a set of errors collected from first year students examinations. The set gathers typical errors made in several college degrees inside the Faculty of Engeneering and Exact Sciences of the

---

[1]Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires
[2]Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática, Licenciada en Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires
[3]Especialista en Educación con Orientación en Gestión Educativa, Universidad de San Andrés

Universidad Argentina de la Empresa, systematically organised and integrated in a taxonomy containing exhausting and exclusionary categories (Bravo & Patiño, 2016). On the basis of the error types detected in this research, we proceeded to elaborate a didactic plan principally founded on the use of visual-dynamic tools for which the employ of computers becomes overrinding.

Keywords: Errors - didactic - mathematics - lines and planes – teaching

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo da continuación a una investigación llevada a cabo en el año 2016 por Bravo y Patiño (2016), en la que del análisis de los errores cometidos por los alumnos al realizar ejercicios sobre rectas y planos en la materia Álgebra y Geometría Analítica, correspondiente al primer año de carreras de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas de la Universidad Argentina de la Empresa, se elaboró una taxonomía que organizó la clasificación y permitió el estudio de los distintos tipos de errores. En aquella oportunidad, los ejercicios analizados formaban parte de los exámenes finales de los alumnos.

La actual investigación consta de una primera etapa en la que tomando una muestra de exámenes parciales y considerando la taxonomía de Bravo y Patiño (2016) observamos los errores cometidos de cada tipo. La finalidad de esta etapa es observar sobre qué errores es fundamental trabajar y si los tipos de errores más frecuenten en los parciales son también aquellos que habían aparecido en los finales y realizar quizás alguna comparación con los resultados de la muestra tomada oportunamente por Bravo y Patiño para la elaboración de su taxonomía.

Considerando los diferentes errores como fuente de conocimiento que nos posibilitan interpretar las falencias del proceso de enseñanza – aprendizaje, es que elaboramos en una segunda etapa de este trabajo la propuesta didáctica.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. ¿Para qué las evaluaciones?

La evaluación ha sido puesta en numerosas oportunidades como la finalización de un proceso teniendo como objetivo la acreditación -por parte de los alumnos- de los conocimientos y la valorización, mediante una calificación, del nivel de incorporación de los contenidos para la promoción de la asignatura.

> Apreciar, estimar, atribuir valor o juzgar han sido los conceptos que más se asociaron a la evaluación. Desde una perspectiva didáctica, el concepto implica juzgar la enseñanza y juzgar el aprendizaje; atribuirles un valor a los actos y las prácticas de los docentes y atribuirles un valor a los actos que dan cuenta de los procesos de aprendizaje de los estudiantes. (Litwin,2003:13).

Esta frase confirma la observación realizada al inicio de esta sección: la evaluación es utilizada para acreditar pero se introduce al mismo tiempo la idea de que se evalúa no solo el aprendizaje sino también el proceso de enseñanza. La evaluación pasa a tomar entonces un lugar no tradicional, abriéndose de esta manera todo un espacio de trabajo: el análisis de la evaluación.

Según Anijovich (20017), la evaluación permite a los estudiantes observar sus aciertos y fallas, sus debilidades y fortalezas en el proceso de aprendizaje. Visto de esta manera la evaluación es formativa. Agregamos a esto que el concepto de formativo es también para el docente dado que podrá revisar a través de los exámenes de sus alumnos, sus propias prácticas de enseñanza. El análisis de la evaluación toma, en consecuencia, un lugar fundamental en el proceso de enseñanza - aprendizaje, permitiéndonos obtener material para su revisión, tanto por parte del docente como del alumno.

En este sentido, el análisis de los errores cometidos en las evaluaciones se convierte en el puntapié inicial para una nueva jugada en la que se pretenderá subsanarlos. Por supuesto tanto docente como alumnos deberán estar comprometidos con este objetivo. Hay errores que necesitarán de la intervención del docente buscando alternativas en sus explicaciones que ayuden a una correcta apropiación y otros que están más asociados a la acción propia del alumno, cuyo compromiso es fundamental para el logro de cualquier acción. De esta manera el análisis del error, la puesta en evidencia de los mismos y la toma de conciencia por parte de ambas partes pasan a ser cuestiones importantes del proceso de enseñanza- aprendizaje.

2.2. ¿Qué miramos de las evaluaciones?

Miramos los errores. Astolfi (2004) afirma que el error es una forma de análisis del modelo pedagógico y permite mejorar el trabajo de quien enseña. No son faltas lamentables sino síntomas de las dificultades que encuentran sus alumnos en el proceso de su pensamiento.

Dado que miramos los errores y nuestro objetivo es elaborar una propuesta didáctica para superar los errores cometidos por los alumnos en los ejercicios vinculados al concepto de recta y plano, consideramos la clasificación realizada por Bravo y Patiño (2016) donde los mismos fueron diferenciados en nueve tipos, cada uno de los cuales es explicado brevemente a continuación:

- *Error de tipo 1*: vinculado a errores de cuentas.
- *Error de tipo 2*: vinculado a ejercicios incompletos, desarrollados a la mitad o hasta cierto instante.
- *Error de tipo 3*: vinculado a resolución correcta de procedimientos, pero con información no correcta (no tiene lógica de dónde sacan cierta información).
- *Error de tipo 4*: vinculado a la falta de conocimiento para abstraer información o buscar información de los enunciados.
- *Error de tipo 5*: vinculado a desconocimiento del tema.
- *Error de tipo 6*: vinculado a la forma de presentar las respuestas
- *Error de tipo 7*: vinculado a incoherencias o mezcla de conceptos sin sentido
- *Error de tipo 8*: vinculado a falta de conocimientos sobre procedimientos algebraicos para desarrollar ejercicios.
- *Error de tipo 9*: vinculado a la afirmación (o asimilación como verdaderas) de conceptos erróneos.

2.3. ¿Cómo actuamos los docentes frente a los errores?

Son dos los ángulos desde donde se pueden trabajar los errores para buscar subsanarlos: el del docente y el del alumno.

La relación de enseñanza-aprendizaje es un proceso complejo, dado que son varios los factores que influyen en el éxito (o no) del mismo; el currículum, los objetivos, la institución, los materiales disponibles, la disposición de los alumnos, su compromiso, sus saberes previos, la formación del docente, entre otros. En particular, destacaremos la gestión de la clase por parte del docente dado que "enseñar supone, también, una esfera que podríamos denominar "organizativa", ligada a la definición y el sostén de un encuadre de trabajo y al manejo o "gestión" de la clase" (Basabe y Cols, 2007: 155)

En este sentido, la propuesta didáctica que se presenta en este artículo apunta a contribuir en la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje, en lo que respecta a los conceptos de rectas y planos.

2.4. El uso de herramientas tecnológicas en la clase de matemática

La enseñanza de la matemática se ha limitado a un solo registro: el semiótico, reduciendo la enseñanza a procedimientos algebraicos formales y abstractos. Las herramientas tecnológicas amplían y a la vez complementan esta perspectiva, puesto que permiten la visualización para la apropiación del saber mediante varios registros (Gatica y Ares, 2012: 91).

Coincidimos con Hitt (2003) en que en la clase debería hacerse un uso reflexivo de la tecnología, dado que puede resultar una buena herramienta para la construcción de conceptos matemáticos mediante tareas en las que la actividad matemática requiera el uso coherente de diferentes registros de representación.

> Es importante promover el uso de varios sistemas de representación, y el uso reflexivo de las nuevas tecnologías que permitan dar significado concreto a las nociones matemáticas. Con ello, la construcción de un concepto se dará a través de la coordinación, libre de contradicciones, de diferentes sistemas semióticos de representación relacionados con el concepto en cuestión (Hitt, 1998: 42-43)

Drijvers (2013) realiza un estudio de seis casos para intentar dar respuesta a la pregunta de por qué funciona (o no) la tecnología digital en educación matemática, concluyendo que los factores fundamentales “[...] para el éxito de la tecnología digital en la educación matemática incluyen el diseño de la herramienta digital, y de las tareas apropiadas que exploren el potencial pedagógico de la herramienta, el papel del profesor y el contexto educativo.” (p.1)

En este sentido, Carrión y Zamudio (2015) plantean que los estudiantes, mediante un uso responsable, pueden profundizar su aprendizaje a través de los recursos digitales. A su vez, el docente también debe saber que, utilizado de manera conveniente y en el momento adecuado, contribuye a que los estudiantes logren una mejor visualización, exploración y adquisición de conceptos. (p.3)

El uso de computadoras ayuda a la comprensión en varios aspectos, según Novembre, Nicodemo y Coll (2015):

- permitiendo la visualización y transformando el registro gráfico en un soporte del razonamiento, además de ser una mera representación
- brindando la posibilidad de explorar, lo que dar lugar a la elaboración de conjeturas, pudiendo luego validarlas con lápiz y papel
- introduciendo una Matemática dinámica, ya que permite dinamizar un fenómeno y analizar cómo va evolucionando
- permitiendo el trabajo con grandes cantidades de datos (p. 24-26)

Asimismo, es necesario que, durante la actividad matemática, los estudiantes sean capaces de construir una coordinación interna entre los distintos sistemas de representación semiótica, de manera tal que les permita reconocer un mismo objeto matemático en diferentes contextos de representación, de lo contrario es posible que para ellos representen objetos diferentes (Duval, 2006: 145).

Gutiérrez y Jaime (2015) describen el modelo de Vinner según el cual si en clase se trabaja con algún soporte gráfico o visual, hay dos formas principales de recepción de la información por parte de los alumnos: verbal y gráfica.

La información verbal (definiciones de los conceptos, enunciados de propiedades, clasificaciones, entre otras) se almacena en la memoria de los estudiantes en lo que Vinner denomina definición del concepto.

Por otro lado, la información gráfica (dibujos o figuras que representan ejemplos concretos de conceptos matemáticos, diagramas, esquemas, entre otros) se almacena en la memoria de los estudiantes en lo que Vinner denomina imagen del concepto. La ausencia de consistencia entre los criterios utilizados por los estudiantes en la resolución de un problema y la justificación que verbalizan, evidencia una imagen del concepto pobre y una falta de conexión entre esta imagen y la definición del concepto.

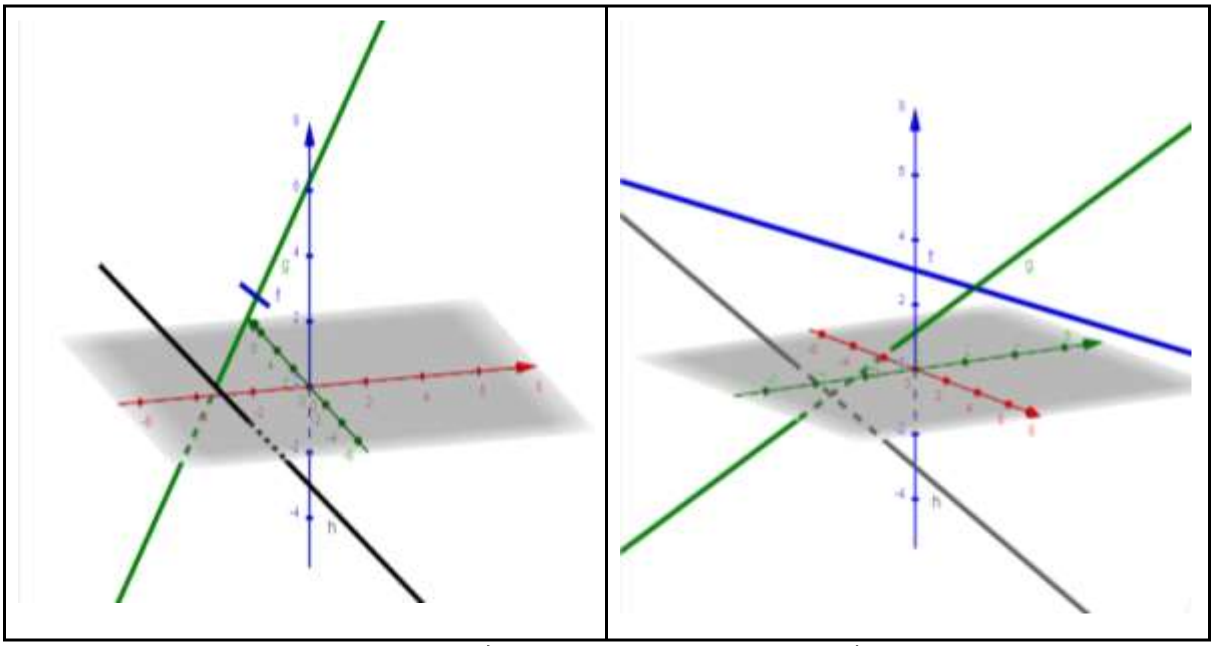
Gutiérrez y Jaime (2015) explican que, según este modelo, la enseñanza debe procurar la formación de imágenes conceptuales completas por parte de los estudiantes. Además, recomiendan que los estudiantes integren su imagen conceptual y su definición del concepto durante la resolución de problemas.

En el caso de la geometría espacial, es fundamental que los estudiantes logren construir imágenes conceptuales y que haya interacción entre éstas y la definición del concepto. Los autores encontraron en diversos estudios sobre el uso de programas de geometría dinámica espacial que aparecían dificultades vinculadas a la forma en que son representados los objetos espaciales en la pantalla y a la necesidad de poseer habilidades de visualización espacial.

En este sentido, Del Río (2017) menciona que la articulación de registros de representación se vuelve particularmente compleja al involucrar objetos tridimensionales, dado que conlleva su representación en el plano utilizando perspectiva. (p.3)

Por ejemplo, una dificultad de estos programas es la que surge de la aparente intersección entre rectas en el espacio que se observa en la pantalla, según cómo se haya rotado la vista. (Figura 1)

Figura 1. Ejemplo de aparente intersección entre rectas



Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica 3D

La utilización de programas de geometría dinámica espacial tiene un papel importante para promover en los estudiantes el desarrollo del razonamiento matemático y del aprendizaje de la demostración. Gutiérrez y Jaime (2015) mencionan algunos resultados al respecto:

> Mc Clintock et al. (2002) observaron que el uso del software facilitó la resolución de los problemas al permitir a los estudiantes confirmar o rechazar con facilidad sus conjeturas, ayudando a mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes. Mithalal (2010a, 2010b) observó que el uso de un programa de geometría dinámica 3-dimensional favoreció que los estudiantes empezaran a utilizar elementos del sistema axiomático de la geometría euclidiana en vez de solo elementos visuales. (p.57)

3. DESARROLLO DEL TRABAJO

3.1. Una primera aproximación

Nos encargamos, en esta primera parte del desarrollo del trabajo, del análisis de 46 exámenes parciales de la materia Álgebra y Geometría Analítica, correspondiente al primer año de las carreras de ingeniería, que nos permiten una primera aproximación a la realidad de cada alumno, a las dificultades que se le presentan en su proceso de pensamiento, en particular en lo relativo a rectas y planos.

Los errores de los alumnos fueron clasificados siguiendo la taxonomía propuesta por Bravo y Patiño (2016). El conteo de los errores se realizó constando como un solo error si éste aparecía al menos una vez en el examen es decir un 1 indica que, en determinado examen, el error correspondiente se manifestó (aunque haya aparecido una o más veces en esa evaluación).

El ejercicio observado para la detección de errores sobre el tema de recta y plano fue el siguiente (Figura 2):

Figura 2. Ejercicio tipo

Dadas las rectas

$$r: (x, y, z) = (1,3,0) + t(-1,0,2), t \in R$$

$$s: \; x + 2 = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Y los puntos $A = (-1,0,0), B = (1,3,0)$,

a) Indicar, justificando, si las rectas r y s son paralelas, alabeadas, coincidentes o concurrentes. b) Sea π el plano que es perpendicular a la recta s y pasa por el punto B. Calcular la distancia del punto A al plano π.

Fuente: Elaboración propia

Luego de recopilar y clasificar los errores cometidos por los alumnos en los exámenes analizados en esta oportunidad obtuvimos la siguiente tabla:

Tabla 1.

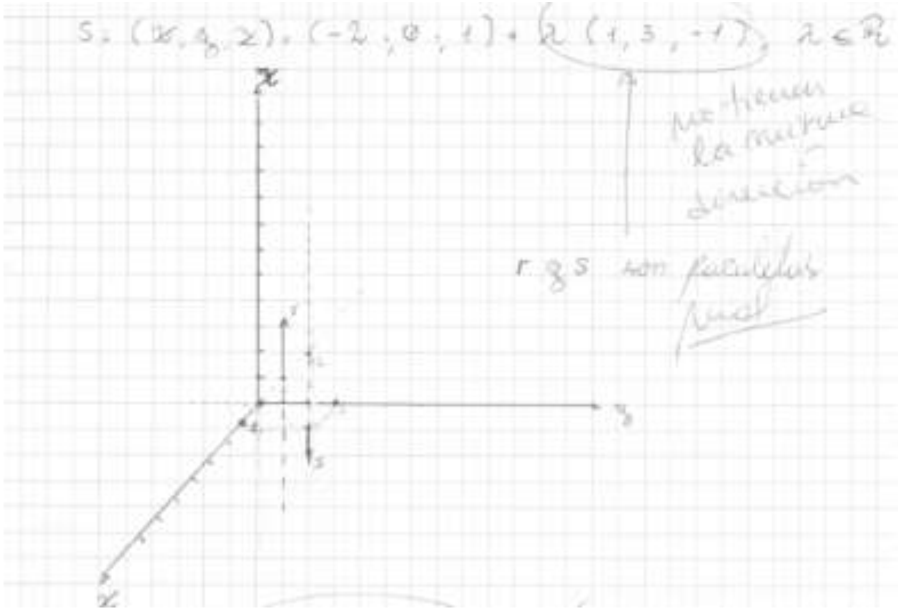
Tipo de error	Manifestación del error
E1	9
E2	3
E3	10
E4	9
E5	12
E6	7
E7	5
E8	1
E9	0

Fuente: Elaboración propia

Pudimos observar que los errores con mayor frecuencia de aparición continúan siendo los de Tipo 1, Tipo 3 y Tipo 5. Recordemos que los errores de tipo I están vinculados a errores de cuenta, los de tipo 3 a errores vinculados a resolución correcta de procedimientos, pero con información incorrecta (no tiene lógica de dónde sacan cierta información) y los de tipo 5 a errores relacionados con el desconocimiento del tema.

Aparece también con frecuencia relativamente alta el error de Tipo 4, vinculado a la falta de conocimiento para abstraer información. Por ejemplo, en uno de los exámenes analizados, para dar respuesta al ítem a), el alumno reconoce, a partir de la representación gráfica en el espacio, que dos rectas son paralelas cuando tienen la misma inclinación o dirección. Pero, el gráfico no representaba las rectas del problema y evidencia dificultades en la representación gráfica de vectores ya que, para graficar la recta r, ubicó el punto (-1,0,2) correspondiente al extremo final del vector director y, en lugar de trazar el vector con origen en el (0,0,0) y punto final en el (-1,0,2), trazó una recta vertical pasando por el punto (-1,0,2). Lo mismo hizo para graficar la recta s (Figura 3). En consecuencia, según su representación, ambas rectas resultaron ser paralelas. Sin embargo, esta conclusión no fue interpelada por las ecuaciones de las rectas y por la relación de paralelismo entre vectores directores para que las rectas sean paralelas. No logró establecer, al menos algebraicamente, que dichos vectores no eran paralelos.

Figura 3. Resolución de un alumno



Fuente: Ejemplo tomado de examen

El caso anterior pone en evidencia la necesidad de trabajar con distintos tipos de representación y la interacción entre ellos, que ayuden a detectar este tipo de inconsistencias. La capacidad de visualización en el espacio de objetos matemáticos ideales como lo son rectas y planos, y su correspondencia con sus ecuaciones será fundamental para trabajar sobre los errores detectados.

Cabe destacar que los exámenes analizados en esta ocasión corresponden a parciales, en tanto que los analizados en la investigación anterior de Bravo y Patiño (2016) correspondían a finales, donde los alumnos podrían haber realizado un trabajo más intenso sobre rectas y planos, sin embargo los errores más frecuentes coinciden y serán aquellos donde debemos trabajar en nuestra propuesta.

Es relevante aclarar que, en los cursos estudiados, la explicación del tema se realizó de manera "tradicional": consistió en el desarrollo de los conceptos vinculados a rectas y planos por parte del docente en el pizarrón, sin el uso de un graficador o algún apoyo tecnológico que facilitase la visualización de los contenidos teóricos.

Como afirma Hitt (1998), diversas "Investigaciones sobre visualización matemática y el papel de las imágenes mentales han puesto de manifiesto la importancia de las representaciones matemáticas para la formación adecuada de conceptos" (p.35).

Por otro lado creemos que también el trabajo con una herramienta tecnológica puede ser más movilizante para los alumnos en la actualidad y se facilite así la participación y el compromiso de los mismos con la actividad.

> Tienen una gran atención distribuida, a la que se suma su necesidad de zapping. El resultado es que necesitan cambiar su atención en tiempos breves. […] Poseen otra noción acerca del tiempo y el espacio, y su pensamiento pasó de ser secuencial a funcionar en red.(Lapalma, 2010:1)

En este sentido, el aula requiere ser un ambiente dinámico "donde haya rápida variación de actividades o enfoques, con intervención del alumno en interacción con el docente y las TIC. O sea, una real participación activa del alumno en la propuesta de aprendizaje"(Lapalma, 2010:2)

3.2. PROPUESTA DIDÁCTICA

En una segunda etapa de la presente investigación, basados en los errores que nos permiten identificar las dificultades de los alumnos, se comenzó a construir y elaborar el material necesario para la propuesta didáctica. Este material, contiene un apoyo visual que se obtiene a partir de la utilización de un elemento informático pues contiene simulaciones generadas en Geogebra (en su versión de computadora y como aplicación móvil). Consideramos que la posibilidad de visualizar lo descripto analíticamente, en estos temas de esta asignatura resultan de sumo interés porque permite comprender los conceptos desde otro nivel: la observación gráfica. A la vez esta aplicación permite rápidamente plantear diferentes situaciones, experimentar con diferentes elementos y sacar conclusiones que permiten llegar al concepto. Esta forma de abordaje del concepto donde no se determina el mismo sino que se construye a partir de la propia observación, atendiendo a diferentes propuestas y decidiendo cuáles son los elementos necesarios es la más adecuada para fijar definitivamente los mismos.

En la propuesta que presentamos a continuación, suponemos que el alumno tiene conocimientos previos acerca de vectores en el plano y en el espacio; en particular, la secuencia didáctica fue elaborada bajo el supuesto de que el alumno maneja las operaciones entre vectores (suma, resta, producto de un vector por un escalar) y las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre vectores.

La propuesta didáctica propiamente dicha está separada en dos partes principales: rectas y planos. Dentro de cada una de estas partes hay actividades –mediante las cuales se pretende la apropiación de los conceptos fundamentales de cada tema. En cada actividad se explicita el objetivo que persigue la misma y se describen las formas que, a nuestro entender, mejor se podrían utilizar los recursos en la clase, con sugerencias sobre cómo podría administrar los temas y las actividades el docente en su clase. En algunos casos, se sugiere el trabajo en pequeños grupos. La decisión de complementar esto con ejercicios adicionales para el trabajo dentro o fuera de la clase y la distribución concreta de los tiempos para cada actividad estará a cargo del docente que es quien conoce la dinámica de su clase y los estilos de sus alumnos.

En lo que respecta al material didáctico, el docente deberá contar con la aplicación o versión online de Geogebra (tanto 2D como 3D) en el aula. Por su parte, los alumnos deberán tener instalado en un dispositivo móvil la aplicación de Geogebra (Geogebra Calculadora Gráfica (Android, IOs), Geogebra 3D (Android) o Geogebra AR (IOs). Lápiz y papel son otras herramientas necesarias para los alumnos, así como pizarrón y marcadores lo son para el docente.

3.2.1. Rectas

Comenzaremos trabajando los conceptos relacionados a rectas en el plano.

<u>Actividad 1 propuesta:</u>

Objetivos: Que los alumnos construyan la ecuación vectorial de una recta en el plano.
Contenidos: Ecuación vectorial de una recta en el plano.

1. ¿Cuántos puntos determinan una recta en el plano?
2. Dados los puntos $A = (3,2)$ y $B = (1,1)$, trazar la recta que pasa por dichos puntos.
3. Trazar los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{OB}$, siendo $O = (0,0)$, el origen de coordenadas.
4. ¿Cómo podrías obtener el punto A utilizando los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{OB}$?

Luego de que los alumnos hayan trabajado con las consignas, sugerimos hacer una breve puesta en común con las producciones de los alumnos. Se podría mostrar utilizando Geogebra que la suma de los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{OB}$ da un nuevo vector cuyo extremo final es el punto A.

A continuación, proponemos las siguientes consignas para que los alumnos deduzcan que los puntos están alineados (en el ítem 5) mientras que el ítem 6 busca que puedan elaborar una estrategia que les permita obtener cualquier punto de la recta conociendo un punto perteneciente a la recta y un vector director de la misma.

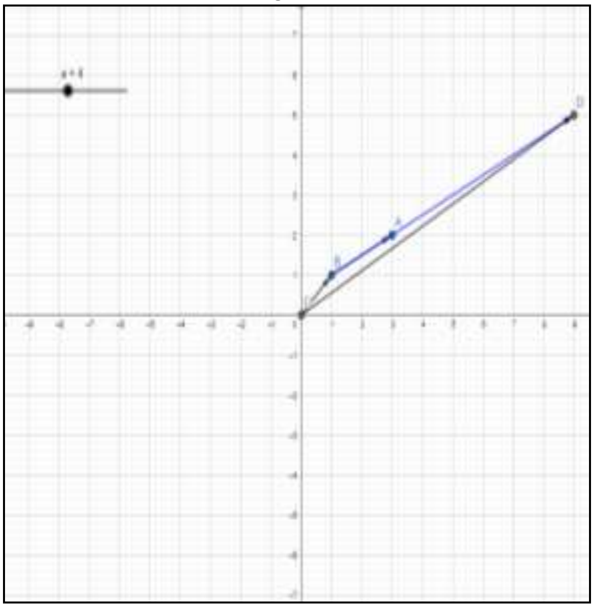
5. Considera el vector $\vec{v} = 2.\overrightarrow{BA}$, obtener el vector y $\vec{w} = \overrightarrow{OB}+\vec{v}$. Si C es el extremo final de $\vec{w}$, ¿observas alguna relación entre los puntos A, B y C?
6. Si D es un punto cualquiera de la recta graficada, ¿cómo podrías obtener el punto D a partir del punto B y el vector $\overrightarrow{BA}$?

Proponemos realizar una puesta en común de las propuestas de los alumnos. Pensamos que mostrar en Geogebra cómo la suma de los vectores $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{OB}$ genera un vector cuyo extremo final es el punto D y observando que el vector $\overrightarrow{BD}$ es un múltiplo del vector $\overrightarrow{BA}$ y que el vector $\overrightarrow{OB}$ lo podemos identificar con el punto B son cuestiones que ayudan al alumno en la construcción del concepto que estamos estudiando. El docente podría presentar luego una ecuación vectorial de la recta trabajada:

$$(x, y) = B + t.\overrightarrow{BA}, t \in R$$

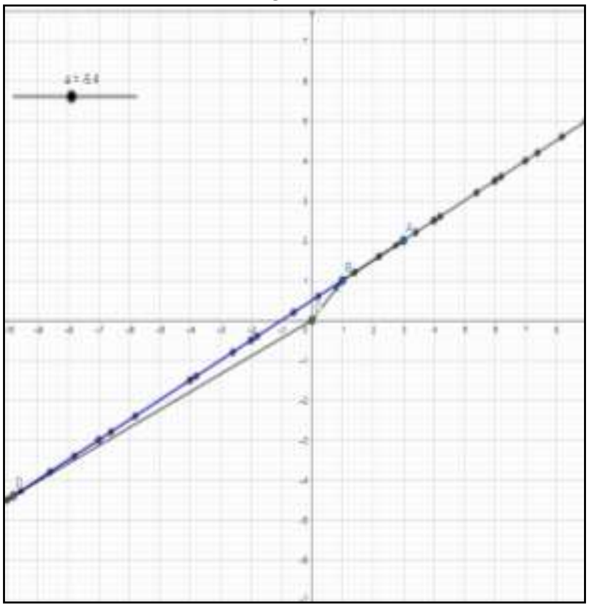
A continuación, se muestran algunos gráficos de rectas que el docente podría realizar a medida que avanza con los alumnos en la construcción de la ecuación:

Figura 4.



Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica

Figura 5.



Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica

Luego de trabajado el tema de rectas en el plano, proponemos el pasaje al espacio. Teniendo en cuenta lo trabajado en el plano para obtener la ecuación vectorial de la recta, sugerimos la siguiente actividad:

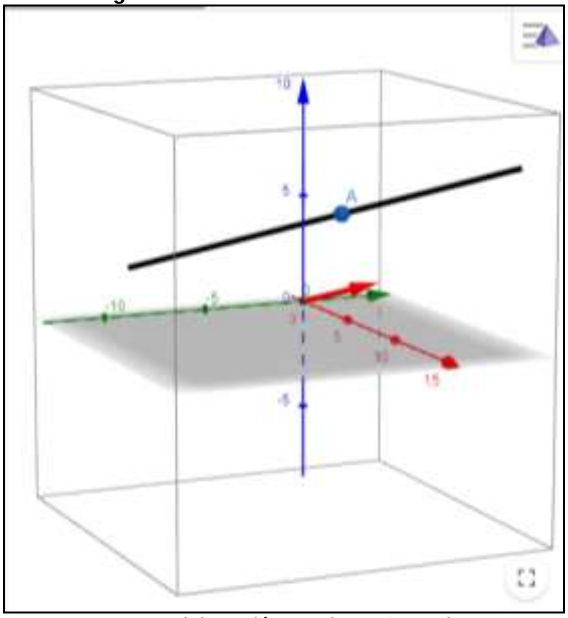
<u>Actividad 2 propuesta:</u>

Objetivos: Que los alumnos construyan la ecuación vectorial de una recta en el espacio y que establezcan la idea de que existen distintas formas de expresar una ecuación vectorial de una recta.
Contenidos: Ecuación vectorial de una recta en el espacio.

1. ¿Cuántos puntos determinan una recta en el espacio?
2. Dados el punto $A = (0,2,4)$ y el vector $\vec{v} = (2,3,1)$, ¿cómo podemos construir un punto cualquiera de la recta que pasa por el punto A y tiene dirección $\vec{v}$?

Resulta conveniente que el docente construya en Geogebra 3D puntos sobre la recta que pasa por el punto A y tiene dirección $\vec{v}$ para luego concluir con la ecuación vectorial de la recta en el espacio.

Figura 6. Construcción de ecuación vectorial



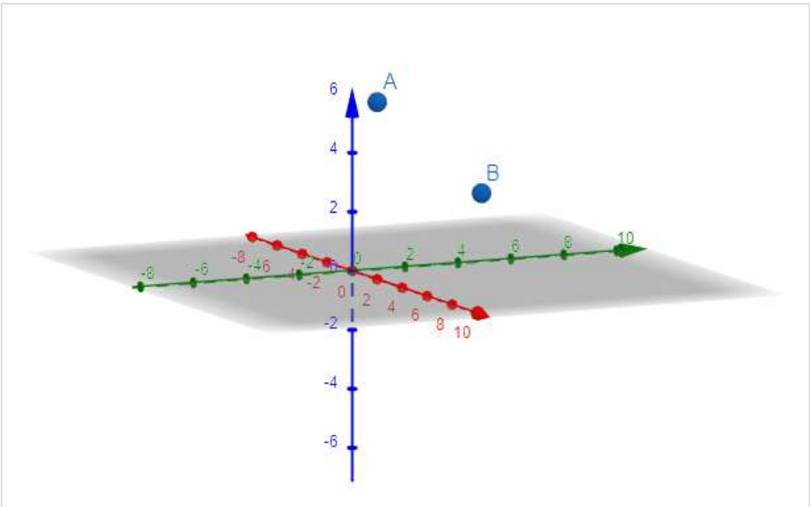
Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica 3D

Con la siguiente pregunta se busca que, dado que necesitan un vector, éste lo construyan a partir de los puntos A y B dados, es decir, que construyan el vector $\overrightarrow{AB}$ (o el vector $\overrightarrow{BA}$) y utilicen el punto A o B para armar la ecuación de la recta.

3. Si nuestros datos son los puntos $A = (0{,}2{,}4)$ y $B = (2{,}5{,}5)$ que pertenecen a la recta, ¿cómo construir una ecuación vectorial de la recta?

Figura 7. A partir de dos puntos de la recta

¿Cómo obtener la ecuación vectorial de una recta que pasa por dos puntos dados?



Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica 3D

A continuación se puede proponer un punto que quede fuera del campo de visión (la recta está graficada en Geogebra 3D y es visible para los alumnos en la pantalla).

4. ¿El punto $P = (112{,}170{,}60)$ pertenece a la recta que pasa por A y B? ¿Y el punto $(0{,}0{,}0)$?

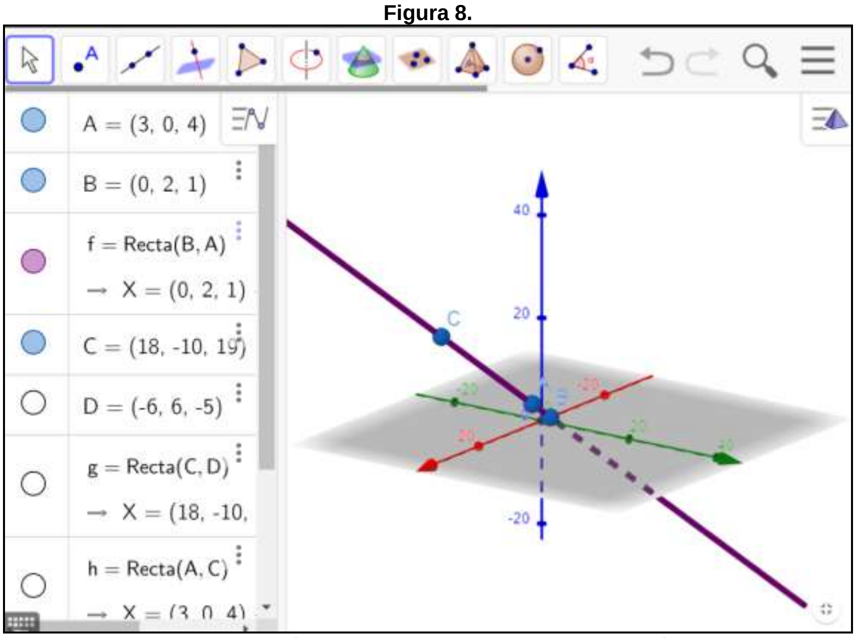
El docente podría utilizar la herramienta Zoom de Geogebra para verificar si el punto está o no en la recta. Además, podría preguntarles a los alumnos qué procedimiento algebraico pondrían en juego para verificar si un punto pertenece o no la recta.

Para trabajar con la siguiente consigna, proponemos dividir el curso en pequeños grupos. A cada grupo se le asigna un par de puntos y se les pide obtener una ecuación vectorial de la recta que pasa por dichos puntos. Aclaramos que todos los puntos corresponden a la misma recta.

Al escribir en el pizarrón las diferentes ecuaciones obtenidas, se les podría preguntar a los alumnos acerca de si existe alguna relación entre las ecuaciones escritas. De esta manera buscamos que relacionen los vectores directores de las rectas obtenidas, concluyendo que son paralelos.

5. Obtener la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos {A,B}, {C,D}, {A,C}, {B,D}.

Figura 8.



Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica 3D

Dado que comparten un punto y que dos puntos determinan una recta, mediante la aplicación de Geogebra el docente podría graficar la recta que pasa por A y B, e ingresar el punto C y verificar que pertenece a dicha recta y que, por lo tanto deberán ser la misma recta. Lo mismo podría analizarse para las otras rectas. A continuación, el docente graficará todas las ecuaciones propuestas, concluyendo que todas las ecuaciones representan la misma recta *r*.

La siguiente actividad tiene como objetivo que los alumnos trabajen con las posiciones relativas entre rectas en el espacio así como también que logren establecer la noción de que en el espacio dos rectas que no se cortan no son necesariamente paralelas, presentando así las rectas alabeadas. En la consigna 1, esperamos que grafiquen rectas paralelas. Aunque es posible que grafiquen un par de rectas que no se cortan dentro del recorte de la hoja.

<u>Actividad 3 propuesta:</u>

Objetivos: Que los alumnos elaboren una condición para rectas paralelas en el plano.
Contenidos: Ecuación vectorial de rectas paralelas en el plano.

1. En una hoja graficar dos rectas en R^2 que no se corten. ¿Existe alguna relación entre las rectas graficadas?
2. Sea la recta $r{:}(x,y,z) = (3,0,4) + t.(3,-2,3), t \in R$. Considerar la recta *s* que tiene dirección $\vec{v} = (6,-4,6)$ y pasa por el punto $H = (0,0,50)$. ¿El punto H pertenece a la recta r? ¿Qué podrían decir de las rectas *r* y *s*? ¿Qué relación existe entre ellas?

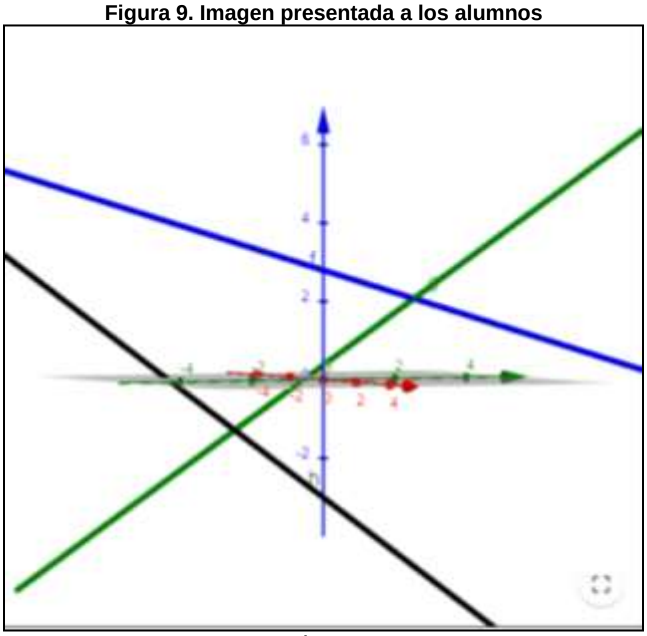
El docente podría realizar una puesta en común y concluir que si una recta s pasa por un punto exterior a la recta r y tiene como vector director un vector que es paralelo al de la recta r, entonces r y s serán paralelas.

Actividad 4 propuesta:

Objetivos: Que los alumnos establezcan condiciones sobre las posiciones relativas entre rectas en el espacio.
Contenidos: Posiciones relativas entre rectas en el espacio.

1. Dadas las siguientes rectas en el espacio, ¿las rectas f y g se cortan en algún punto? ¿y las rectas f y h?

Figura 9. Imagen presentada a los alumnos



Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica 3D

Dado que en el plano dos rectas no paralelas siempre se cortan, es posible que extiendan esta idea al espacio. Por otro lado, debido a la limitación que provoca visualizar rectas en el espacio en una pantalla plana, esperamos que los alumnos, a partir de la imagen que se les mostrará, conjeturen que tanto las rectas f y g como las rectas f y h se cortarán en un punto. Sin embargo, f y g sí se cortan en un punto pero las rectas f y h no se cortan. Puede que otros se limiten literalmente al recorte que les muestra la imagen y que, como no visualizan un punto de intersección, afirmen que las rectas f y h no se cortan. En este sentido, la siguiente actividad apunta a que los alumnos caigan en la cuenta de que los gráficos a veces resultan insuficientes y que es necesario el trabajo analítico: a partir de las ecuaciones podrían ver que las rectas no son paralelas, con lo cual podrían utilizar ése argumento válido en el plano para justificar que debería haber intersección. La resolución analítica debería confirmar lo anticipado en algunos casos o generarles una contradicción en otros.

2. Las rectas graficadas tienen las siguientes ecuaciones:

$$f:(x,y,z) = (-2,0,3) + \lambda.(1,3,-1), \lambda \in R$$

$$g:(x,y,z) = (-1,3,2) + t.(1,1,1), t \in R$$

$$h:(x,y,z) = (0,0,-3) + k.(-2,-2,2), k \in R$$

¿Existe alguna relación entre las direcciones de las rectas f y g? ¿Tendrán puntos en común? ¿Qué sucede en el caso de f y h? Mediante algún procedimiento algebraico, analiza si tienen algún punto en común los pares de rectas f y g, f y h.

En el caso de las rectas f y g, el sistema de ecuaciones que planteen tendrá solución, dado que estas rectas tienen un punto en común, y es único. En el caso de f y h, el sistema de ecuaciones no tendrá solución, dado que las rectas no tienen puntos en común, lo que refutará aquello que habían anticipado. Se podría resaltar el hecho de que, aún sin ser rectas paralelas, f y h no tiene puntos en común. El docente podría rotar la vista en Geogebra 3D para que observen que efectivamente las rectas f y h no se cortan, presentando así un par de rectas en el espacio que se denominan alabeadas.

<u>Actividad 5 propuesta:</u>

Objetivos: Que los alumnos anticipen y restrinjan a partir de la lectura de sus ecuaciones las posibilidades de posiciones relativas entre ellas: alabeadas, concurrentes, paralelas o coincidentes.
Contenidos: Posiciones relativas entre rectas en el espacio.

Analizar si los siguientes pares de rectas son paralelas, concurrentes, coincidentes o alabeadas:

a. $r_1: (x,y,z) = (2,1,1) + \alpha(1,-2,-4), \quad \alpha \in R$
$r_2: (x,y,z) = (3,0,2) + \beta(1,-1,1), \quad \beta \in R$

b. $r_1: (x,y,z) = (2,1,1) + \alpha(1,-2,-4), \quad \alpha \in R$
$r_3: (x,y,z) = (3,-1,-3) + \gamma(-2,4,8), \quad \gamma \in R$

c. $r_1: (x,y,z) = (2,1,1) + \alpha(1,-2,-4), \quad \alpha \in R$
$r_4: (x,y,z) = (3,0,2) + \delta(-2,4,8), \quad \delta \in R$

d. $r_1: (x,y,z) = (2,1,1) + \alpha(1,-2,-4), \quad \alpha \in R$
$r_5: (x,y,z) = (0,5,0) + \varepsilon(1,1,0), \quad \varepsilon \in R$

Proponemos a continuación trabajar el concepto de rectas ortogonales.

<u>Actividad 6 propuesta:</u>

Objetivos: Que los alumnos deduzcan la relación entre rectas ortogonales en el plano.
Contenidos: Posiciones relativas entre rectas en el plano.

Dada la recta de ecuación $r: (x,y) = (0,2) + t(1,3), t \in R$

a. Obtener una recta ortogonal a r. ¿Es única?
b. Obtener una recta ortogonal a r que pase por el punto (2,1) . ¿Es única?
c. ¿Existe alguna recta ortogonal a r que no la corte?

Trabajar con la noción de rectas ortogonales en el espacio nos permite introducir la noción de plano. A tal fin, pensamos la siguiente actividad. En particular, pensamos que es conveniente que los alumnos resuelvan el ítem b en pequeños grupos: así, cada grupo deberá proponer la ecuación de una recta que cumpla las condiciones pedidas en dicho apartado.

<u>Actividad 7 propuesta:</u>

Objetivos: Que los alumnos deduzcan la relación entre rectas ortogonales en el espacio.
Contenidos: Posiciones relativas entre rectas en el espacio.

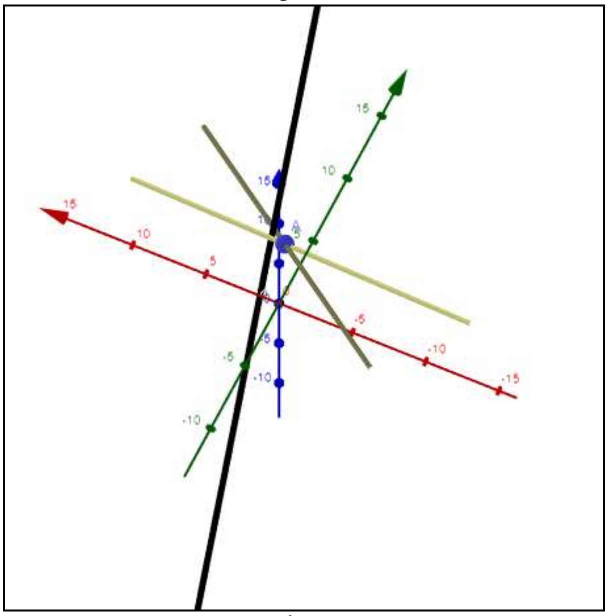
Dada la recta de ecuación $r: (x,y,z) = (2,1,1) + t(-2,4,1), t \in R$. Sea el punto $C = (1,1,6)$

a. ¿Cómo debe ser la dirección de una recta para que sea ortogonal a otra?
b. Obtener la ecuación de una recta ortogonal a r que pase por el punto $P = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$.
c. Si ahora se pide obtener la ecuación de una recta ortogonal a r que pase por el punto C, exterior a la recta ¿Existirá? ¿Será única?

A continuación del trabajo en grupos, el docente podría realizar una puesta en común: para destacar el hecho de que son infinitas las rectas que cumplen con lo pedido y que todas estas generarán un plano en el espacio puede graficar en Geogebra 3D las rectas propuestas.
En lo que se refiere al ítem c. el docente podría graficar r y las rectas propuestas en Geogebra 3D, resaltando que existen rectas ortogonales a r que pasan por el punto C pero que no la cortan.

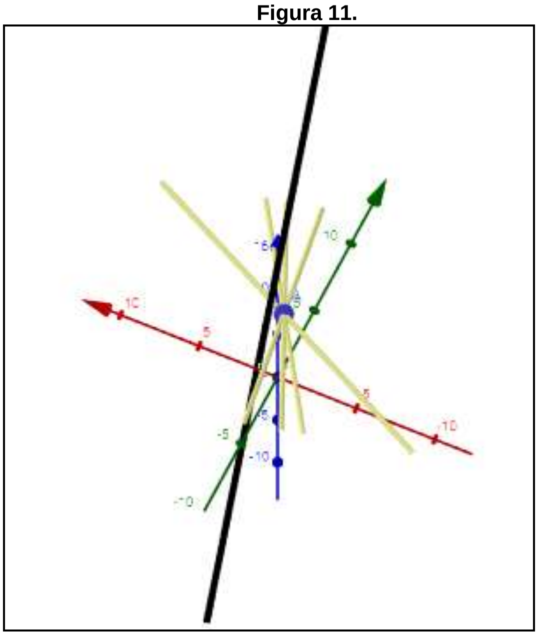
Los siguientes son algunos de los gráficos que el docente podría construir y trabajar con sus alumnos, concluyendo que dos rectas son ortogonales si y sólo si sus vectores directores lo son. Pueden ser concurrentes (si existe punto de intersección) o alabeadas (si no existe intersección).

Figura 10.



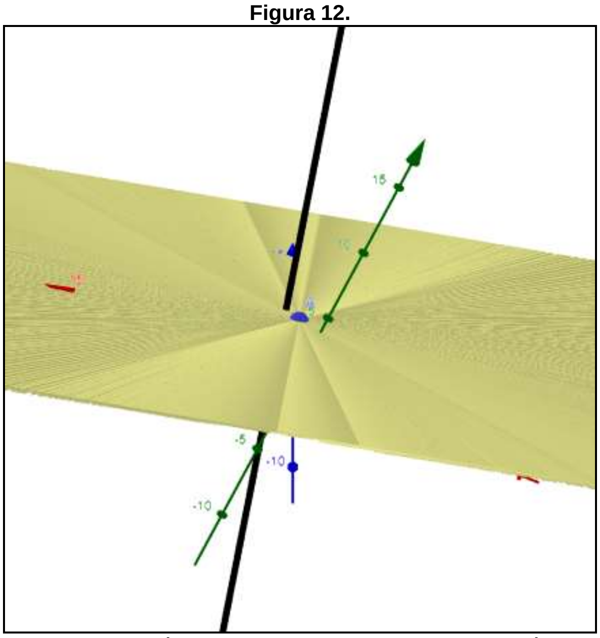
Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica 3D

Figura 11.



Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica 3D

Figura 12.

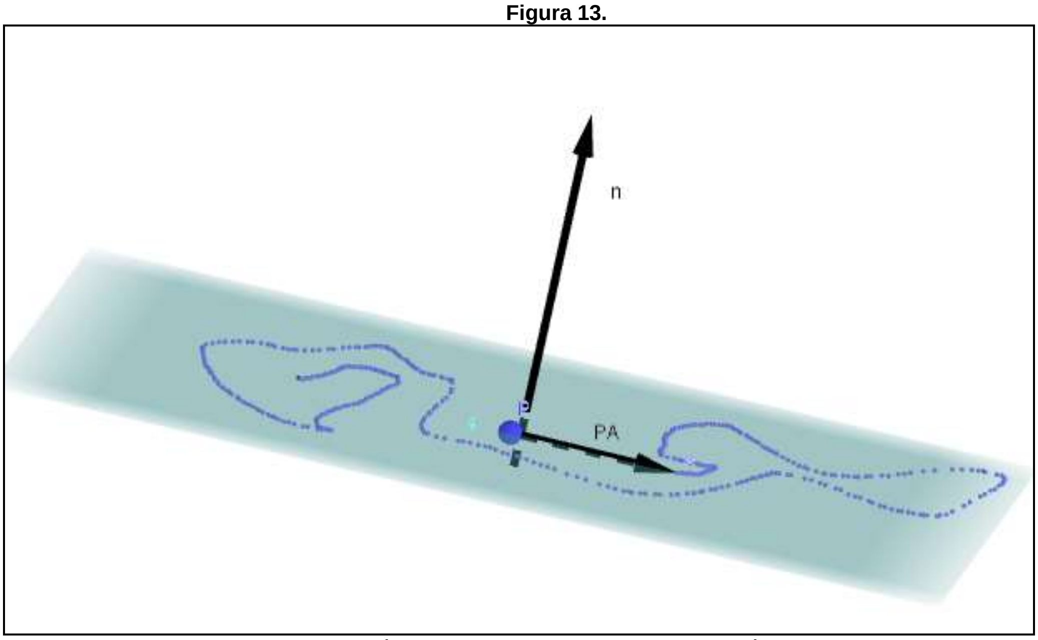


Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica 3D

3.2.2. Planos

El docente podría utilizar lo anterior para explicarles a los alumnos cómo obtener la ecuación normal del plano teniendo en cuenta la relación existente entre el vector formado por el punto del plano que se tiene como dato y cualquier punto A del plano y un vector normal al plano; se podría tomar un punto A perteneciente al plano y desplazarlo sobre el mismo, notando que el vector resultante siempre es ortogonal al vector normal.

Figura 13.



Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica 3D

Actividad 1 propuesta:

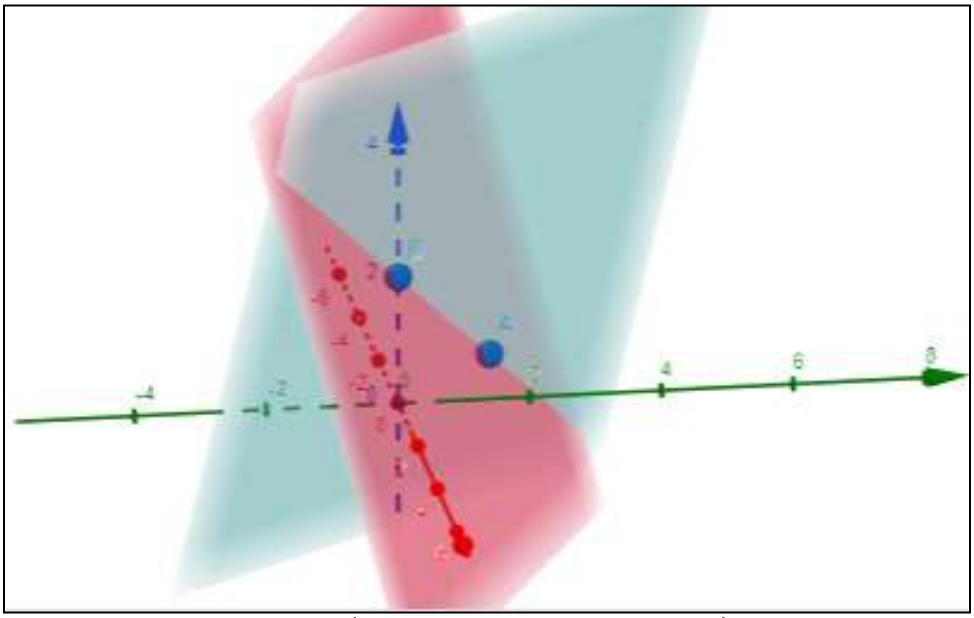
Objetivos: Que los alumnos extraigan información de la ecuación normal del plano.
Contenidos: Plano, ecuación normal del plano.

1. Dado el vector $\vec{n} = (-3,4,5)$ que es normal a un plano π. Si el punto $P = (2,1,0)$ pertenece a dicho plano, se pide:
   a. Obtener la ecuación normal de π.
   b. ¿El punto $A = (-1,5,-5)$ pertenece al plano π? ¿Y el punto $B = (0,2,-3)$?
   c. Obtener cuatro puntos que pertenezcan al plano π.

Pensamos que la puesta en común de las respuestas es el momento de la clase adecuado para que el docente le plantee a los alumnos el siguiente problema: Si no contamos con un vector normal al plano, ¿cómo podemos hacer para construir la ecuación del plano? ¿Cuántos puntos se necesitarán?

Es probable que respondan que se necesitarán 2 o 3 puntos. En este sentido, el docente podría utilizar Geogebra 3D para graficar los puntos A y B dados en el ítem b y un plano que pase por dichos puntos. Al preguntar si es el único posible, podría mostrar luego otros planos que pasan los por esos puntos, concluyendo que para determinar un único plano no bastan 2 puntos.

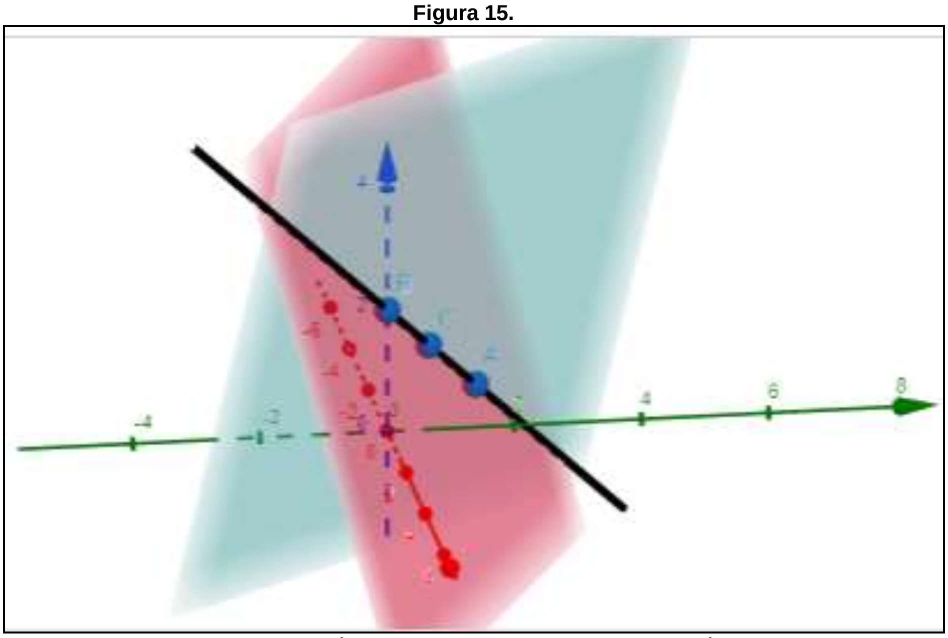
Figura 14.



Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica 3D

Surge entonces la pregunta acerca de si alcanzarán 3 puntos: el docente podrá graficar en Geogebra 3D los puntos A, B y D (alineados) a fin de que los alumnos observen que existe todo un haz de planos que pasan por dichos puntos.

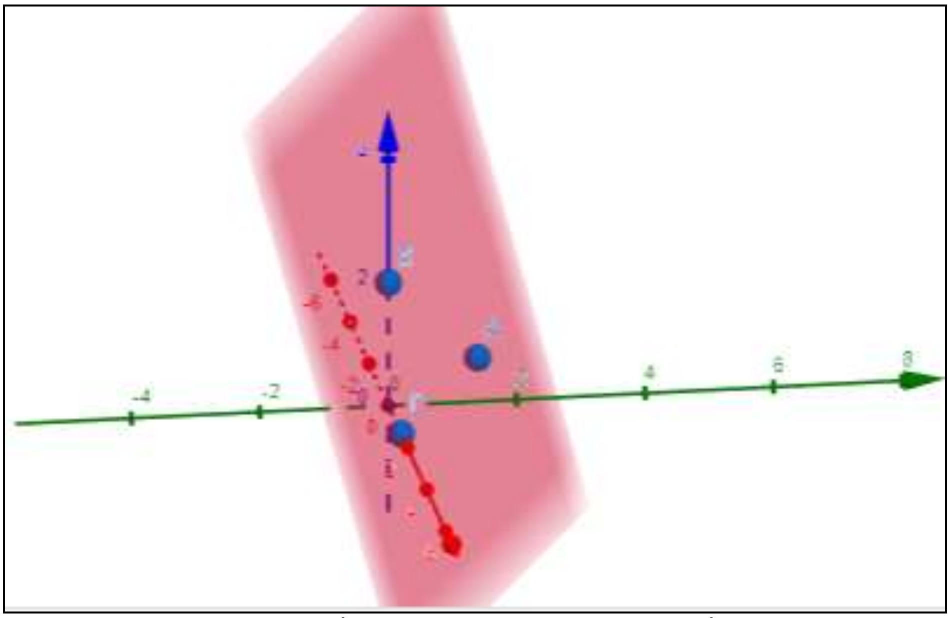
Figura 15.



Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica 3D

¿Cómo podrá fijarse uno de estos infinitos planos? Tomando un punto no alineado con A y B. En Geogebra se podrá visualizar que haciendo esto se obtiene un único plano.

Figura 16.

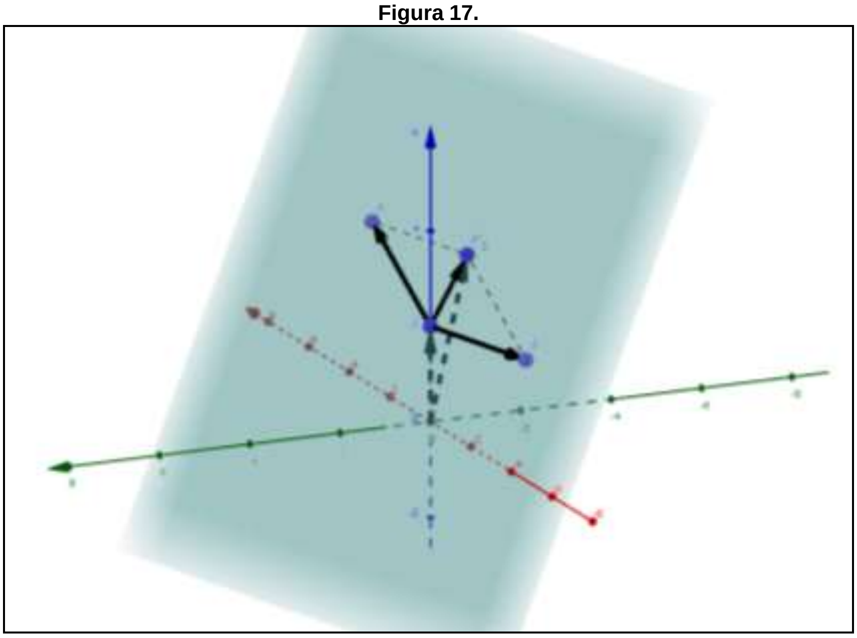


Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica 3D

Se podría introducir entonces la ecuación vectorial del plano. El docente podría mostrar que variando longitud y sentido de los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ es posible generar cualquier punto del plano, construyendo así la ecuación vectorial del plano:

$$\pi: (x, y, z) = P + t.\overrightarrow{PA} + k.\overrightarrow{PB}, \quad t, k \in R$$

Figura 17.



Fuente: Elaboración propia en Geogebra Calculadora Gráfica 3D

<u>Actividad 2 propuesta:</u>

Objetivos: Que los alumnos logren realizar el pasaje de una ecuación vectorial del plano a una ecuación cartesiana y viceversa.
Contenidos: Ecuaciones cartesiana y vectorial de un plano.

1. Sea el plano $\pi: (x, y, z) = (1,0,5) + t.(1, -1,3) + k.(2,3, -2), \quad t, k \in R$
   a. ¿Cómo podrías obtener un vector que resulte normal al plano π?
   b. Expresar la ecuación cartesiana del plano π.

2. Sea el plano $\pi: -3x + y - z = 2$
    a. Graficar en Geogebra 3D el plano π ingresando su ecuación cartesiana.
    b. Utilizando el comando obtener tres puntos del plano π.
    c. Los puntos obtenidos, ¿determinan un único plano? ¿Cómo deben ser los puntos?
    d. Si no contaras con el gráfico del plano, ¿cómo podrías obtener un punto del plano π?
    e. ¿Cómo podrías construir a partir de los tres puntos una ecuación vectorial del plano π?

En la puesta en común, el docente podría trabajar con los alumnos que los puntos no deben estar alineados. Una opción sería construir los vectores y ver que no sean paralelos.

La siguiente actividad tiene como objetivo que los alumnos trabajen con los conceptos relacionados a las posiciones relativas entre planos. Cada docente decidirá en qué momentos de la actividad le resulta conveniente realizar una puesta en común, dado que se trata de una actividad cuya resolución lleva tiempo.

<u>Actividad 3 propuesta</u>

Objetivos: Que los alumnos logren establecer condiciones para las posiciones relativas entre planos.
Contenidos: Posiciones relativas entre planos.

1. Graficar, utilizando Geogebra 3D, un plano paralelo a $\pi: 0.5x - 0.25y + z = 1$ que pase por el punto $A = (1,3,-1)$.
2. Observa en Vista Algebraica la ecuación del plano obtenido. ¿Encuentras alguna relación? ¿Cómo son los vectores normales?
3. Si un plano tiene como vector normal uno paralelo al normal del plano π y además pasa por un punto de π, ¿cómo serán dichos planos?
4. Si ahora consideras un plano cuyo vector normal no sea paralelo al normal de π, ¿cómo serán los planos entre sí? ¿Tendrán puntos en común?
5. Graficar en Geogebra 3D un plano cuyo vector normal no sea paralelo al de π. Graficar, además, el plano π. ¿Tienen puntos en común? Utiliza el comando que te permitirá identificar la curva intersección entre ambos planos. ¿Qué objeto geométrico representa?
6. Obtener algebraicamente la ecuación de la recta intersección entre ambos planos.
7. ¿Qué tendría que ocurrir para que los planos fueran ortogonales?

<u>Actividad 4 propuesta para los alumnos</u>

Objetivos: Que los alumnos logren establecer condiciones para las posiciones relativas entre recta y plano y entre planos.
Contenidos: Posiciones relativas entre rectas y planos y entre planos.

Sea α el plano que pasa por el punto $(4,3,1)$ y es perpendicular a la recta

$$r: (x, y, z) = (3,1,-2) + k(1,-2,2), \qquad k \in R$$

a. Hallar la ecuación cartesiana del plano α.
b. Hallar el punto de intersección entre la recta r y el plano α.
c. Sea el plano $\beta: -x + 2y - 2z = 3$. Hallar la intersección entre los planos α y β
d. Sea el plano $\pi: x + y + z = 3$. Hallar la intersección entre los planos α y π.
e. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,0,0)$ y contiene a la recta

$$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = z - 1$$

4. CONCLUSIONES

El uso de graficadores en la clase de matemática ayuda a los alumnos en varios aspectos:

- ✓ posibilitan una mejor comprensión de los conceptos pues permiten la visualización, transformando el registro gráfico en un soporte del razonamiento;

- ✓ ofrecen la posibilidad de explorar, lo que les posibilita la elaboración de conjeturas y permite el análisis de los elementos necesarios para definir recta y plano y las diferentes posiciones de los mismos tanto en el plano como en el espacio.

- ✓ ofrecen una posibilidad de validación de los procedimientos analíticos realizados con lápiz y papel a la vez que permiten anticiparlos según desde dónde se parta: lo analítico o lo gráfico.

- ✓ introducen una matemática dinámica, al dinamizar un fenómeno y analizar cómo va evolucionando, permitiéndole a los alumnos involucrarse con la actividad propuesta.

La secuencia didáctica presentada en este trabajo fue elaborada con el propósito de potenciar estas ventajas acerca del uso de un graficador 3D en la clase de álgebra, en particular en lo que respecta a las nociones de rectas y planos.

Goldenberg (2000) plantea que las investigaciones sobre la tecnología en clase de matemáticas resaltan que lo importante no es hacer uso de ésta sino cómo hacerlo. Además, afirma que ningún documento puede decir qué es una buena o mala práctica, dado que muchos aspectos continúan siendo juicio personal o de la comunidad.

Las causas de los errores cometidos por los alumnos en los parciales observados no ha sido motivo de nuestro estudio sino la detección de los errores existentes pero sabemos que para remediar los mismos el compromiso deberá estar tanto en la labor de los alumnos como en la labor docente. El docente deberá proponer alternativas diferentes que favorezcan la comprensión de los conceptos para los alumnos y los alumnos deberán comprometerse con el estudio. El aporte de lo visual y la forma de administrar los contenidos donde los alumnos participen activamente en la obtención de los mismos –cuestiones consideradas en nuestra propuesta- parece ser una forma que favorecerá la apropiación de los contenidos y estimulará a los alumnos mediante la acción.

Queda pendiente para futuras investigaciones el análisis acerca de la implementación en clase de la secuencia didáctica propuesta, de los aspectos que resultaron adecuados y aquellos que son posibles de mejorar.

5. BIBLIOGRAFÍA

ANIJOVICH, R. (2017) "La evaluación formativa en la enseñanza superior". En *Voces de la educación*. Año 2 Vol. 1. pp. 31-38. Disponible en https://www.revista.vocesdelaeducacion.com.mx/index.php/voces/article/view/32

ASTOLFI, J. P. (2004), "El error, un medio para enseñar". Diada Editora, México.

BASABE, L. y COLS, E. (2007): "La enseñanza". En: Camilloni, A., Cols, E. Basabe, L. y Feeney, S. *El saber didáctico.* Editorial Paidós. Buenos Aires, pp. 125-158. Disponible en http://www.academia.edu/17978543/A_Camilloni_El_saber_didactico_Cap_6

BRAVO BARLETTA, V. L. y PATIÑO ECHEVERRÍA, J. C. (2016): "Análisis de los errores de los alumnos en el concepto de recta y plano en álgebra y geometría analítica". En *Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo*. Noviembre 2016. Disponible en http://www.eumed.net/rev/atlante/2016/11/recta.html

CARRIÓN MIRANDA, V. y ZAMUDIO CORTÉS, P. (2015): Reforzamiento del pensamiento algebraico con base en tareas que requieren del pensamiento funcional, Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Disponible en http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1168/583. Consultado el 15/09/2018 a 15:09

DEL RÍO, L. S. (2016). “Enseñar y aprender cálculo con ayuda de la vista gráfica 3D de GeoGebra”. En *Revista Digital Matemática Educación e Internet*, Vol. 17. No. 1, septiembre 2017. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/308173172_Ensenar_y_aprender_calculo_con_ayuda_de_la_vista_grafica_3D_de_GeoGebra

DRIJVERS, P. (2013): “Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn’t)”. En *PNA*, Vol 8. No. 1, pp. 1-20. Disponible en http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Drijvers2013PNA8(1)Digital.pdf

DUVAL, R. (2006): Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. En *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 9. No. 1, 2006, pp. 143-168 Disponible en http://eudml.org/doc/44160

GATICA, S. N. y ENRIQUEZ ARES, O. (2012): La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. En *EDMETIC, Revista de Educación Mediática y TIC*, Vol. 1. N. 2, 2012, pp. 88-107. Disponible en http://www.uco.es/ucopress/ojs/index.php/edmetic/article/view/2853

GOLDENBERG, P. (2000): Thinking (and Talking) About Technology in Math Classrooms. Issues in Mathematics Education. Education Development Center, Inc. Disponible en http://ltd.edc.org/resource-library/thinking-and-talking-about-technology-math-classrooms Consultado el 24/11/2018 a las 20:15.

HITT, F. (1998): Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. En *Revista Educación Matemática*, Vol.10. No. 2, agosto 1998, pp. 23– 45. Disponible en http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol10/2/03Hitt.pdf

LAPALMA, F. (2010): “Los millenials, el nuevo niño, el docente y la educación”. En *Revista Iberoamericana de Educación,* Vol. *52,* No. 7, 2010*,* pp. 1-3. Disponible en https://rieoei.org/RIE/article/view/1759

LITWIN, E. (2003): “La evaluación: campo de controversias y paradojas o un nuevo lugar para la buena enseñanza”. En Camilloni, A., Celman, S., Litwin, E. y Palou de Maté, M. En *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*. Editorial Paidós, Buenos Aires, pp 11-33.

NOVEMBRE, A., NICODEMO, M. y COLL, P. (2015): “Matemática y TIC: orientaciones para la enseñanza”. ANSES. Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Disponible en https://www.academia.edu/10731240/Matem%C3%A1tica_y_TIC