



Mayo 2018 - ISSN: 1989-4155

NUEVAS HERRAMIENTAS DIDÁCTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA: SIMULACIONES Y GRÁFICOS POR COMPUTADORA.

Juan Carlos Patiño Echeverría¹

CEO

www.ingooz.com

juan@ingooz.com

Para citar este artículo puede utilizar el siguiente formato:

Juan Carlos Patiño Echeverría (2018): "Nuevas herramientas didácticas en la enseñanza de la matemática: simulaciones y gráficos por computadora.", Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo (mayo 2018). En línea:

<https://www.eumed.net/rev/atlante/2018/05/estrategias-ensenanza-matematica.html>

RESUMEN

El trabajo realizado refleja la labor de encontrar nuevas herramientas o maneras de enseñar conceptos matemáticos clásicos pero de una forma moderna y sofisticada, basándose principalmente en las herramientas informáticas de la actualidad, en particular el uso de simulaciones creadas por computadora y el video digital. El interés particular en la creación de estas herramientas didácticas surge de la necesidad de buscar herramientas que ayuden a los alumnos con dificultades o deficiencias en conceptos matemáticos básicos que inciden negativamente en su rendimiento durante la cursada regular de las materias de matemática en las cuales la visualización de objetos geométricos es fundamental. El uso de herramientas audiovisuales tiene la ventaja de facilitar la manera en que los alumnos reciben la información, estamos en época de una generación de alumnos que reciben los mensajes visuales mucho más rápido que los mensajes escritos, en palabras de Giovanni Sartori (1998) "estamos en la transición del homo sapiens, producto de la cultura escrita a un homo-videns para el cual la palabra ha sido destronada por la imagen". Es por ello que la propuesta didáctica esta centrada en el uso de material audiovisual, porque permite de alguna manera cerrar esta brecha en la interpretación de conceptos y ayudará en alguna medida a generar un interés de parte del alumno por aprender matemática. Entre las herramientas tecnológicas que se usaron para la creación de las simulaciones y los gráficos está *grapher* un programa informático para la plataforma MacOSX con una alta capacidad de cálculo y un manejo simple. Se espera con este trabajo el motivar a docentes y a alumnos para masificar y mejorar el uso de la tecnología en favor de la enseñanza, en particular de la matemática.

Palabras clave: Didáctica de la matemática - simulaciones - grapher - modelación - tecnología.

¹ Licenciado en Matemática, Universidad de Cundinamarca. // CEO: www.ingooz.com

ABSTRACT

The work carried out reflects the task of finding new tools or ways of teaching classical mathematical concepts but in a modern and sophisticated way, based mainly on the computer tools of today, in particular, the use of computer-generated simulations and digital video. The particular interest in the creation of these didactic tools arises from the need to look for tools that help students with difficulties or deficiencies in basic mathematical concepts that negatively affect their performance during the regular course of mathematics subjects in which the visualization of geometric objects is fundamental. The use of audiovisual tools has the advantage of facilitating the way in which students receive information, we are in the time of a generation of students who receive visual messages much faster than written messages, in the words of Giovanni Sartori (1998) " we are in the transition from homo sapiens, the product of written culture to a homo-videns for which the word has been dethroned by the image ". That is why the didactic proposal is focused on the use of audiovisual material because it allows in some way to close this gap in the interpretation of concepts and will help in some way to generate an interest on the part of the student to learn mathematics. Among the technological tools that were used to create the simulations and graphics is a computer program for the MacOSX platform with a high calculation capacity and simple operation. It is expected with this work to motivate teachers and students to massify and improve the use of technology in favor of teaching, particularly mathematics.

Keywords: Didactics of mathematics - simulations - grapher - modeling - technology.

INTRODUCCIÓN

Desde hace muchos años y con el impacto que ha desarrollado la tecnología en la sociedad, el conjunto de personas abocadas a la educación ha intentado utilizarla como herramienta para intentar mejorar la experiencia de aprendizaje del alumno en el aula. Por supuesto, ha sido un arduo trabajo y un punto de discusión entre varios investigadores del área. En particular, la matemática, como ciencia básica, abstracta, y en algunos sentidos rígida, ha hecho de las computadoras su aliada para generar conocimiento impensable años atrás; pero, desafortunadamente, su uso como herramienta de enseñanza para conceptos básicos ha estado muy limitada. Dentro del universo de herramientas informáticas que contamos para la enseñanza de la matemática, tenemos aplicaciones que permiten graficar, hacer cálculos numéricos, procesos algebraicos, entre muchos otros más, y van desde los más básicos (como el muy conocido Excel) hasta los más completos y complejos (Matlab, Mathematica) pasando por algunos programas con entornos mucho más amigables o accesibles al manejo de los estudiantes (Geogebra, Grapher). El siguiente trabajo nace de la necesidad de investigar sobre el uso de herramientas informáticas en la enseñanza de la matemática. El proyecto pretende dar una primera mirada sobre la utilidad de los medios digitales en la enseñanza de la matemática, en particular el uso de simulaciones y gráficos generados por computadora como apoyo a la cursada; gráficos que en algunos casos resulta "imposible" dibujar de forma tradicional, como son algunos gráficos de superficies tridimensionales, o algunos gráficos de campos vectoriales. Además también el uso de simulaciones, permite apreciar de una manera más sencilla la interpretación física que se le puede otorgar a las funciones vectoriales. En una época donde la tecnología está tan apegada a la sociedad, se hace evidente la importancia de adaptar algunas herramientas utilizadas en el aula a la actualidad y sobre todo como aplicarlas.

El trabajo comienza haciendo una recopilación sobre investigaciones anteriores afines. Durante esta primera etapa de investigación, se conocerá sobre la gama de programas que existen en la actualidad y sus posibles usos en el aula. La información recopilada servirá para determinar las ventajas y desventajas de la aplicación de algunos de estos programas en los cursos y además permitirá encontrar los aspectos clave a tener en cuenta para la elaboración de una propuesta didáctica.

En una segunda etapa, se elaborará el material (simulaciones y gráficos) utilizando como programa principal *grapher*. *Grapher* es un programa preinstalado en las computadoras Mac que hace énfasis en el aspecto geométrico aunque también cuenta con herramientas algebraicas y de cálculo. Recopilando todas las simulaciones y diferenciándolas dependiendo de su nivel, se asocian a diferentes cursos de matemática

y se elabora una propuesta didáctica. Esta propuesta está planeada para utilizar como apoyo a la cursada de materias cuya importancia visual o gráfica sea de alta relevancia, en la que el uso de la computadora en el aula pueda significar un aporte diferencial.

La experiencia desarrollada y la elaboración del material tuvo sus orígenes en el Laboratorio de Medios Audiovisuales de la Universidad de Barcelona, en el cual se compartió con investigadores especializados en el ámbito de la educación y los medios de la información y la comunicación, partiendo en cinco campos clave: arte e imagen, educación, tecnología, comunicación, trabajo y acción social. Luego su aplicación áulica se dio en la Universidad Argentina de la Empresa, para cursos de Matemática Empresarial, Análisis Matemático y Álgebra y Geometría Analítica.

1. MARCO TEÓRICO

En un principio, la creación de herramientas que permitan aumentar la comprensión de temas de matemática es de gran utilidad. La dificultad de los cursos de matemática viene de la mano del desarrollo de un lenguaje abstracto (o pensamiento abstracto) sumado a un pensamiento geométrico o espacial que en el momento de iniciar la cursada suele ser deficiente. Dar el primer paso para la formación de estos tipos de pensamientos necesario para comprender la mayoría de los temas de matemática suele ser para algunos alumnos complicado.

Goldenberg [2] hace referencia a la importancia que tiene la visualización de objetos matemáticos en el momento de la apropiación de conceptos. [...] En los grados de básica primaria, elementos físicos manipulables con frecuencia ofrecen a los niños este apoyo visual y experimental. Sirven como soportes temporales de ideas matemáticas, objetos que los niños pueden ver y manipular con sus propios ojos y manos, mientras aprenden a ver y manipular mentalmente ideas matemáticas. En los grados superiores muchas ideas matemáticas no cuentan con esos modelos físicos. Los computadores, pueden ofrecer "manipulables virtuales" interactivos, cuando los elementos físicos no existen. Como siempre, el valor de una herramienta depende del uso que se le dé. Si los manipulables físicos o electrónicos están bien diseñados y se utilizan adecuadamente, pueden incrementar la cantidad de problemas que pueden pensar y resolver los estudiantes. [...]

El uso de herramientas didácticas informáticas tiene la ventaja de facilitar la manera en que los alumnos reciben la información, estamos en época de una generación de alumnos que reciben los mensajes visuales mucho más rápido que los mensajes escritos, en palabras de Giovanni Sartori (1998) "estamos en la transición del homo sapiens, producto de la cultura escrita a un homo videns para el cual la palabra ha sido destronada por la imagen". Basados en esta idea, son muchos los creadores de contenidos educativos especializados en matemática que han intentado desarrollar material apropiado para el apoyo a la cursada.

Salman Khan, creador de Khan Academy (<https://es.khanacademy.org/>), uno de los sitios webs más importantes sobre educación virtual, argumenta que la importancia del uso de videos, por ejemplo, es que "el contenido del video se puede pausar y repetir según sea necesario. Los estudiantes pueden centrarse exactamente en lo que necesitan saber. Ellos no tienen que tener vergüenza de llenar los vacíos correctivos. No tienen que tomar notas. Fundamentalmente, las conferencias se pueden dar por excelentes comunicadores, con una comprensión profunda, intuitiva del material. Diez años a partir de hoy, los estudiantes van a aprender a su propio ritmo. El aula será un lugar para la interacción activa, no la escucha pasiva y el soñar despierto. El papel del profesor será el de un mentor o entrenador en oposición a un conferenciante, escritor de ensayo, y grado. Las instituciones que siguen siendo pertinentes serán las que aprovechan este paradigma, no luchar contra el"

Al igual que Khan, Bell y Bull [1], agregan ciertas ventajas que tiene el uso de video en la enseñanza que van más allá de la simple transmisión de información. El video digital puede ser superpuesto o emparejado con datos gráficos o numéricos y analizado en combinación con otras herramientas.

2. DESARROLLO DEL TRABAJO

El trabajo tuvo por objetivo el investigar y desarrollar nuevas herramientas didácticas para la enseñanza de la matemática. Se buscaba principalmente el generar material novedoso que ayudara a la comprensión de conceptos gráficos o de alto contenido visual dada la complejidad de su representación, por ejemplo: figuras (curvas o superficies) en 3D, simulaciones de curvas dadas como imagen de funciones

vectoriales, campos vectoriales, entre otros. A su vez, era de importancia estudiar como una herramienta como el video digital podía ayudar a los alumnos durante la cursada, sea como un recurso extra a la explicación de los temas en clase o como propio material de consulta. La importancia del estudio radica principalmente por actualizar las formas en las que se enseñan conceptos matemáticos en el aula, en una época donde la tecnología está tan apegada a la sociedad, es por eso que se hace evidente la importancia de adaptar algunas herramientas utilizadas en el aula a la actualidad y sobre todo como aplicarlas.

El proyecto tuvo una primera fase de recopilación de información sobre investigaciones realizadas sobre el uso de herramientas tecnológicas para la educación (entre ellas el video digital) en el Laboratorio de Medios Audiovisuales de la Universidad de Barcelona. En ella se trabajaron sobre algunas experiencias previas realizadas y además sobre el uso de nuevos programas informáticos para la enseñanza. Interesaba en esta primera parte, el conocer cuales eran las ventajas y desventajas de la aplicación de medios audiovisuales en los cursos, además de conocer los aspectos primordiales a considerar para la futura creación de las herramientas didácticas. En una segunda etapa de investigación, junto con el departamento de matemática y métodos cuantitativos de la Universidad Argentina de la Empresa (UADE), se realizó una selección de materias y de temas particulares para las cuales empezar a crear materiales didácticos novedosos donde el uso de la tecnología fuera esencial, dentro del grupo de materias seleccionadas se encuentra Matemática Empresarial, Álgebra y Geometría Analítica y Análisis Matemático.

Luego de la selección de las materias y los temas a considerar se comenzó con la elaboración de material acorde a las necesidades, teniendo como eje principal la noción de manipulación de objetos, interacción, visualización y dinamismo. En este punto, y aunque en un comienzo la investigación apuntaba más hacia el uso del video digital, terminamos por desarrollar más material de tipo simulación dado que nos brindaba una mejor manera de transmitir conocimiento a los alumnos. Estas simulaciones hacen parte del material de los profesores para explicar en clase y también como recurso a los alumnos para usar en cualquier momento. Como parte final del proyecto, se llevó a cabo un curso/seminario, apoyados por el sector de Calidad Académica de la universidad, para mostrar y enseñar a los profesores de las materias foco de la investigación la forma de usar las simulaciones y además de como crearlas, para a futuro generar una red de conocimiento que pueda abarcar más temas de importancia para el departamento de matemática.

2.1 Grapher Como Herramienta Didáctica

Grapher es un programa de computación de Mac OS X capaz de crear gráficos en 2D y 3D a partir de simples y complejas ecuaciones. También soporta múltiples ecuaciones en un gráfico. Grapher se caracteriza por ser una calculadora gráfica, capaz de crear gráficos tanto en 2D incluyendo coordenadas cartesianas y polares, así como gráficos en 3D incluyendo sistema de coordenadas cartesiano, cilíndrico y esférico. Es un programa de gráficos sofisticado capaz de realizar y exportar fácilmente imágenes para su uso en los documentos impresos. También permite la exportación de animaciones de gráficos en 2D y 3D en formato de video mediante un archivo QuickTime.

A continuación se presenta una serie de ejemplos de diferentes simulaciones para utilizar en variadas materias de matemática para explicar ciertos conceptos.

Desplazamiento del gráfico de una función escalar utilizando parámetros

Una de las aplicaciones que le dimos al grapher como herramienta didáctica, fue el uso para poder graficar funciones en forma canónica utilizando parámetros. Es decir, se buscaba la forma de que el alumno pudiese apreciar de una manera sencilla las diferentes modificaciones que se obtienen en el gráfico de una función escalar de la forma $y=f(x)$ al modificar algunos valores constantes a, h, k : desplazamientos horizontales al modificar la función como $y=f(x-h)$, desplazamientos verticales $y=f(x)+k$, o modificaciones de la forma $y=a.f(x)$.

Estos valores para los cuales los parámetros se vean modificados, podían determinarse y modificarse cómodamente mientras la curva gráfica de la función se veía desplazada en tiempo real. Esta interacción inmediata permite al alumno apreciar fácilmente como los parámetros modificaban la curva.

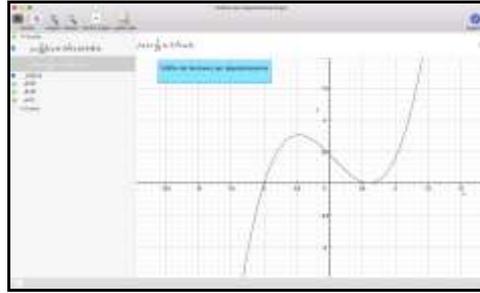


Figura 1. Vista general del entorno grapher. Se aprecia el gráfico de una función escalar cualquiera, la cuál esta modificada según algunos parámetros.

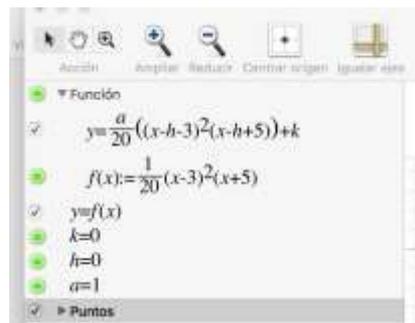


Figura 2. Sección de funciones y/o parámetros usados. Se puede ver en una parte de la aplicación las funciones y los parámetros con los que se está trabajando en pantalla, teniendo la posibilidad de mostrarlos o no.

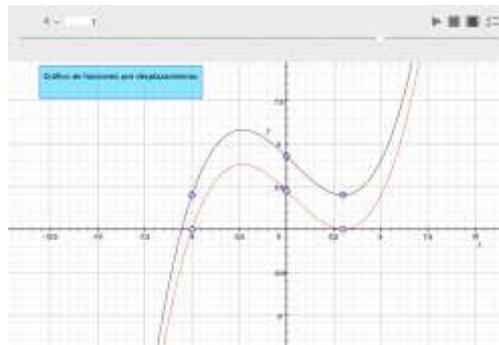


Figura 3. Módulo o barra de animación de parámetros. En la imagen se puede apreciar en la parte superior la barra dónde se modifican los diferentes parámetros. En el gráfico se observa la función original (roja) y la resultante al modificar algún parámetro (negra), además de algunos puntos sobre los gráficos.

Animación de la variación de un parámetro sobre la imagen de una función vectorial

Uno de los conceptos más difíciles de comprender para los alumnos, y que resulta para el profesor prácticamente dibujar, es el concepto de función vectorial. En particular, si se asocia con el concepto de partícula que recorre una curva (imagen de la función vectorial) en un instante t . Esto debido a la imposibilidad del profesor de generar un gráfico dinámico en el pizarrón en el que se logre apreciar la evolución del parámetro y como este va "dibujando o recorriendo" a la curva imagen. Con grapher, creamos diferentes simulaciones que permiten visualizar el vínculo entre el parámetro y la curva imagen, a la vez que observan de manera dinámica como interactúan estos dos elementos, pudiendo dar conjeturas por anticipado recurriendo a la visualización antes que la parte operativa.

$$\begin{aligned}
 & \checkmark \text{ Actividad 3 (Móviles)} \\
 & \checkmark \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, t=0 \dots 4\pi \\
 & \checkmark \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ 1+\sin t \end{bmatrix}, t=0 \dots 4\pi \\
 & \checkmark \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\cos k \\ \sin k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & \blacktriangleright k \\
 & \checkmark \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k \\ 1+\sin k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Figura 4. Ecuaciones paramétricas de dos funciones vectoriales y de dos parámetros que recorren las curvas imágenes correspondientes.

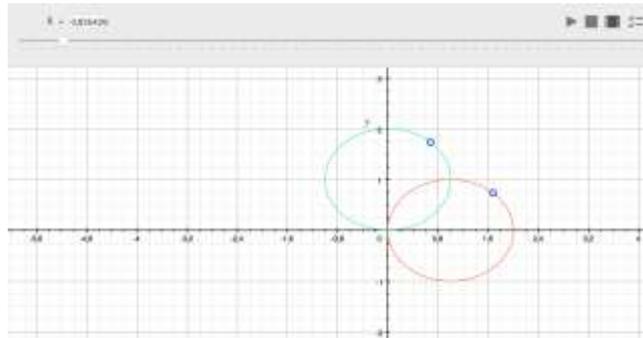


Figura 5. Curvas imágenes de dos funciones vectoriales y dos partículas que la recorren. Se puede apreciar en el gráfico como a medida que el parámetro va cambiando, la posición de las partículas varía sobre la curva imagen de la función vectorial correspondiente.

Visualización de integral de superficie de un campo vectorial (integral de flujo)

El concepto de integral de flujo es un concepto que a nivel geométrico es complicado de explicar a los alumnos de manera tradicional. Principalmente, encontramos la dificultad de graficar de manera precisa los campos vectoriales. Grapher, es una excelente herramienta que permite el gráfico de campos vectoriales junto con superficies en 3D. De esta manera, dar una explicación del concepto de integral de superficie de un campo vectorial resulta mucho más completo y más interesante para el alumno, porque permite comprender la interacción que existe entre el campo vectorial y la superficie.

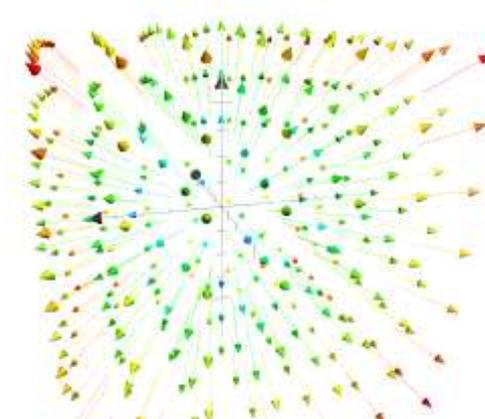


Figura 6. Representación gráfica de un campo vectorial.

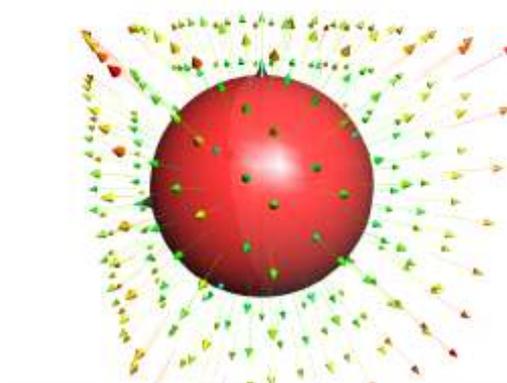


Figura 7. Representación de una superficie y un campo vectorial. En la imagen se puede apreciar la interacción entre una superficie esférica y un campo vectorial. Esta gráfico podría dotarse de significado y representar una integral de flujo.

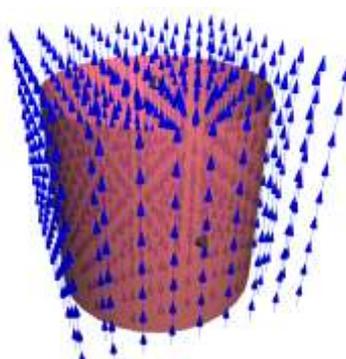


Figura 8. Representación de una superficie y un campo vectorial. En algunas situaciones, como la de la imagen anterior, es posible apreciar situaciones en las que el flujo sea nulo por simple inspección geométrica. Situación que los estudiantes logran entender con facilidad utilizando el software.

3. Discusión

Respecto del uso de la tecnología y de las herramientas informáticas en la enseñanza de la matemática existen diferentes posturas. Quienes están a favor no dudan de la facilidad con la que la máquina logra mostrar ciertos resultados o ciertas visualizaciones de manera mucho más clara que la tradicional. Por otro lado, quienes no están muy de acuerdo con su uso, manifiestan de manera general, que si bien el uso de la tecnología puede ayudar a la comprensión, estas herramientas pueden restringir la experimentación del estudiante y la limitación de desarrollar ciertas habilidades necesarias para la completa adquisición de determinados conocimientos matemáticos.

La discusión estaría entonces, en que si bien el uso de las herramientas informáticas puede ayudar a la comprensión de ciertos aspectos en matemática, ¿cómo debe hacerse? ¿En qué momento puede realizarse? Para responder estas cuestiones es de gran utilidad el análisis de casos sobre la experiencias realizadas y en la creación de materiales propios para adueñarse o apropiarse de las diferentes herramientas.

Otro punto a considerar, es que si bien las herramientas son fáciles de usar, es necesario el formar al cuerpo docente para que tenga un manejo eficiente sobre los softwares a utilizar. Es un tiempo que debe considerarse para que el profesor se sienta cómodo con el entorno para que su futura implementación en el aula de clases resulte natural y beneficie al desarrollo de los temas, y no por el contrario, resulte en algo molesto o complicado de entender.

4. Conclusión

El proyecto realizado permitió dar de una manera satisfactoria una nueva mirada al uso de las computadoras en el aula de clase. El uso de herramientas informáticas como apoyo de cursadas de matemática resulta de gran ayuda para la explicación de conceptos en los que la carga visual es de gran interés y en la que algunos casos la realización de manera tradicional puede ser imposible.

Durante la realización de las herramientas didácticas, en particular resultaron de interés aspectos relacionados a la reducción de la sobrecarga cognitiva; esta sobrecarga se refiere al límite que tienen las personas en relación a la cantidad de información que pueden procesar a la vez a través de los canales visual y auditivo, que son precisamente los canales que trabajan simultáneamente durante una instrucción multimedia.

Desde hace varios años, una de las preocupaciones de los profesores de matemática a nivel superior, ha sido el poder enseñar de una manera más práctica y sencilla temas que conllevan un alto nivel de abstracción a sus alumnos. Es conocida la "mala reputación" que tiene la matemática entre un significativo número de alumnos que ingresan a la universidad. Esta mala reputación, viéndose dada en gran medida por todas las dificultades que han tenido a lo largo de la educación primaria y secundaria.

Las dificultades para abstraer conceptos, interpretar consignas, seguir reglas, y de unir todas estas, requiere por parte del alumno un gran esfuerzo y un tiempo de apropiación del aprendizaje que muchas veces puede ser superior al tiempo que se requiere en una clase determinada que tiene fecha de inicio y fecha de fin. Todas estas dificultades resultan en un alto número de desaprobados. El impacto de la propuesta didáctica resulta de alto interés dado que está enfocada en sumergir a la enseñanza de la matemática en el mundo actual, deberíamos estar en la capacidad de enseñar matemática del siglo XVII con herramientas del siglo XXI.

A lo largo del desarrollo de todo el trabajo, pudimos apreciar como era bien recibido entre los alumnos el uso de la tecnología en el aula, reflejado en interés, participación y en muchos casos, el uso del material didáctico daba lugar a discusiones conceptuales que no ocurrían con anterioridad.

Para terminar, invito a todos los docentes para que se den la oportunidad de dar una mirada a las diferentes posibilidades tecnológicas que se brindan en la actualidad, y también a usarlas en las aulas de clase, aunque en un comienzo pueda parecer agotador o incluso difícil de aplicar, el tiempo y la dedicación logran la experticia y en un momento la aplicación de la tecnología será tan natural como siempre lo ha sido la tiza y el pizarrón.

5. Referencias

[1] Bell, L., Bull, G. (2010). Digital video and teaching. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*.

[2] E. Paul Goldenberg. (2000) Thinking (and talking) about technology in Math classrooms. *Issues in Mathematics Education*.