Mayo 2018 - ISSN: 1989-4155

TRATAMIENTO ANALÍTICO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES NO HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES COMO UN CASO ÚNICO

*Rómel Insuasti
rminsuasti@yahoo.es
**Javier Mendoza C.
mendoza9000@yahoo.es

*Magíster en Matemática Básica, docente investigador de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo – Ecuador, Facultad de Mecánica, Carrera de Ingeniería Automotriz
**Magíster en Matemática Básica, docente investigador de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo – Ecuador, Facultad de Ciencias Pecuarias, Carrera de Ingeniería en Industrias Pecuarias.

Para citar este artículo puede utilizar el siguiente formato:

Rómel Insuasti y Javier Mendoza C. (2018): "Tratamiento analítico de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes constantes como un caso único", Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo (mayo 2018). En línea:

https://www.eumed.net/rev/atlante/2018/05/ecuaciones-diferenciales.html

Resumen

La metodología de resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) lineales no homogéneas de coeficientes en lo que respecta a la determinación de las soluciones particulares presenta el hecho de memorizar ciertos casos de la forma de dicha ecuación, principalmente de la forma que presente *R(x),* la cual proporciona la solución particular de la EDO. La presente investigación, trata de exponer un criterio generalizado para la obtención de estas soluciones particulares, a partir de la forma de la función *R(x).* Para lo cual se hace referencia a la forma general de la solución particular y la presencia de la raíz implícita en *R(x),* la cual se debe comparar con las raíces presentes en la ecuación característica de la EDO, lo que permite encontrar la solución particular y_p, el tratamiento analítico de esta generalización hace más fácil la comprensión, la metodología de resolución se mantiene bajo el concepto de que se encuentra una solución particular y_p y esta debe cumplir en la EDO original. La comprensión de este tratamiento analítico facilita a los estudiantes la comprensión del proceso de resolver las EDO, sin hacer uso de la memoria de algunos casos y formas que presenta *R(x),* lo cual hace de este aporte un hecho de indudable apoyo.

Palabras claves: Ecuaciones diferenciales, Lineales no homogéneas de coeficientes constantes, solución particular.

Abstract

The methodology of solving Ordinary Differential Equations (EDO) linear non-homogeneous coefficients with regard to the determination of particular solutions presents the fact of memorizing certain cases of the form of said equation, mainly the form that presents *R (x),* which provides the particular solution of the EDO. The present investigation tries to expose a generalized criterion for the obtaining of these particular solutions, from the form of the function *R (x).* For which reference is made to the general form of the particular solution and the presence of the implicit root in *R (x),* which must be compared with the roots present in the characteristic equation of the ODE, which allows finding the solution particular and y_p, the analytical treatment of this generalization makes understanding easier, the resolution methodology is maintained under the concept that a particular solution is found and yp and this must be fulfilled in the original ODE. The comprehension of this analytical treatment facilitates the students' understanding of the process of solving the ODE, without making use of the memory of some cases and forms presented by *R (x),* which makes this contribution a fact of undoubted support.

Keywords: Differential equations, Linear nonhomogeneous constant coefficients, particular solution.

INTRODUCCIÓN

La resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Figueroa, 2018, pág. 1), Lineales no Homogéneas de Coeficientes Constantes (EDOLnHCC) (Kiseliov, Krasnov, & Makarenko, 1984) (Espinoza, 2008), son ecuaciones que se estudian en los diferentes cursos de nivel superior, las cuales presentan un procedimiento de resolución que el estudiante debe tenerlo claro para no incurrir en errores u obtener soluciones también erradas o inconsistentes. Varios autores abordan este tema a partir de un estudio de varios casos (Jiménez, 2008), (Abello, 2009) (Espinoza, 2008), (Bronson, 2008), presentándose principalmente la dificultad en la selección de la solución particular de este tipo de ecuación, esta investigación aporta una metodología generalizada para la obtención de dicha solución, lo que simplifica sustancialmente los criterios de observación de la forma que tiene la ecuación diferencial.

Una EDOLnHCC, es una ecuación que tiene la forma general (Kiseliov, Krasnov, & Makarenko, 1984, pág. 112):

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = R(x) \tag{1}$$

Donde: $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son coeficientes constantes y $a_0 \neq 0$

$y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y'$, las derivadas de orden $n, n-1, \ldots, 1$ de la función y.

La ecuación característica de esta es (Zill, 1997):

$$P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0 \tag{2}$$

De la solución de esta ecuación se obtiene *n* raíces, que tienen la forma general

$$r_k = \alpha_k \pm \beta_k i \tag{3}$$

Estas raíces definen la solución de la ecuación homogénea (Rainville & Bedient, 1997), presente en la EDOLnHCC:

$$y_g = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\alpha_k \pm \beta_k i} \tag{4}$$

Para determinar la solución particular se debe tomar en cuenta la forma de la función *R(x)* (Kiseliov, Krasnov, & Makarenko, 1984), que es:

$$R(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sen\beta x) \tag{5}$$

Donde: *α, β*, son escalares

$P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios de grado *n* y *m* respectivamente.

A partir de esta forma de ecuación se puede determinar la solución particular y_p , que tiene la forma general (Kiseliov, Krasnov, & Makarenko, 1984):

$$y_p = x^s e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_k(x)cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)sen\beta x\right) \tag{6}$$

Donde: *s* es el orden de multiplicidad de la raíz, $r = \alpha \pm \beta i$

$\tilde{P}_K$ y $\tilde{Q}_K$ son polinomios de coeficientes indeterminados de grado k = max (*m, n*)

Como se dijo anteriormente la solución y_p, es una solución que depende de la forma de *R(x)*, lo cual genera casos para poder determinarlos. En esta investigación se lo trata como un único caso general, constituyéndose en una alternativa muy importante que simplifica los casos planteados por otros autores.

La solución citada por algunos autores, se la ha podido resumir en los siguientes casos: (Kiseliov, Krasnov, & Makarenko, 1984) (Espinoza, 2008) (Rainville & Bedient, 1997) (Bronson, 2008)

Caso 1) Si $R(x) = P_n(x)$ (Madoz, 2009)

a) Si $r = 0$ no es raíz de la ecuación característica entonces la solución particular es:

$y_p = \tilde{P}_n(x)$

b) Si $r = 0$ es raíz de la ecuación característica entonces la solución particular es:

$y_p = x^s\tilde{P}_n(x)$ donde: *s* – es la multiplicidad de $r = 0$

Caso 2) Si $R(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$

a) Si $r = \alpha$ no es raíz de la ecuación característica entonces la solución particular es:

$y_p = e^{\alpha x}\tilde{P}_n(x)$

b) Si $r = \alpha$ es raíz de la ecuación característica entonces la solución particular es:

$y_p = x^s e^{\alpha x}\tilde{P}_n(x)$ donde: *s* – es la multiplicidad de $r = \alpha$

Caso 3) Si $R(x) = (P_n(x)\cos\beta x + \ Q_m(x)\,sen\beta x)$

a) Si $r = \pm\,\beta i$ no es raíz de la ecuación característica entonces la solución particular es:

$y_p = (\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \ \tilde{Q}_k(x)\,sen\beta x)$ donde: k = max (m,n)

b) Si $r = \pm\,\beta i$ es raíz de la ecuación característica entonces la solución particular es:

$y_p = \ x^s(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \ \tilde{Q}_k(x)\,sen\beta x)$ donde: s – es la multiplicidad

de $r = \pm\,\beta i$
k = max (m,n)

Caso 4) Si $R(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + \ Q_m(x)\,sen\beta x)$

a) Si $r = \alpha \pm \beta i$ no es raíz de la ecuación característica entonces la solución particular es:

$y_p = e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \ \tilde{Q}_k(x)\,sen\beta x)$ donde: k = max (m,n)

b) Si $r = \alpha \pm \beta i$ es raíz de la ecuación característica entonces la solución particular es:

$y_p = \ x^s e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \ \tilde{Q}_k(x)\,sen\beta x)$ donde: s – es la multiplicidad de $r = \alpha \pm \beta i$

k = max (m,n)

Finalmente, la solución general de la ecuación EDOLnHCC es la suma de la solución homogénea y_g y la solución particular y_p:

$$y = \ y_g + y_p \tag{7}$$

Donde la solución particular, por superposición de soluciones (Madoz, 2009) (Becerril & Elizarraraz, 2004), si R(x) es una combinación de los casos citados es:

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + \cdots + y_{p3} \tag{8}$$

Una vez determinada la solución particular se debe comprobar que es solución de la ecuación diferencial, derivando las veces que sean necesarias y remplazándolas en la misma.

Como hemos dicho en esta investigación se intenta dar un método general y único de análisis para la determinación de la solución particular de una EDOLnHCC, abreviando los casos planteados. En resumen, lo que hay que tener presente para determinar la solución particular es la forma general de *R(x)* y la forma general de y_p comparando la raíz presente en *R(x)* y comparándola con las raíces presentes en la ecuación características para determinar *s*, la multiplicidad de *r.* al realizar este proceso se logra obtener un procedimiento más eficiente evitando la proliferación de casos y centrando más bien en un análisis directo y conciso de la ecuación diferencial, para la obtención de la solución. Por lo tanto, en este artículo se va a determinar el procedimiento de como plantear la solución particular como un caso único, mientras que el procedimiento general de solución se mantendrá en todas sus partes. Se logra con la aplicación de este procedimiento la eficacia del método y el mejor desempeño del individuo que se empeña en resolver este tipo de ecuaciones.

2. ANÁLISIS Y PROPUESTA

El análisis de la metodología de resolución de las EDOLnHCC, se presenta en forma ordenada y secuencial para obtener los mejores resultados, así:

Se parte de la forma general de R(x) definida en la ecuación:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = R(x) \qquad (9)$$

Se encuentra las raíces de la ecuación característica:

$$P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0 \qquad (10)$$

De la cual se obtiene n raíces, la k-esima raíz tienen la forma:

$$r_k = \alpha_k \pm \beta_k i \qquad (11)$$

Se determina la solución homogénea de la EDOLnHCC, teniendo en cuenta el tipo de raíz (real o imaginaria) y si estas se repiten se incluirá como factor *x* y su exponente se incrementará de acuerdo con el número de repeticiones, la solución homogénea tiene la forma general:

$$y_g = \sum_{k=1}^{n} C_k x^z e^{\alpha_k \pm \beta_k i} \qquad (12)$$

Donde: *z* es el número creciente de raíces repetidas, *z = 0* si no se repiten las raíces.

2.1. Propuesta

La solución particular se determina de la siguiente manera:

Si *R(x)* de la EDOLnHCC está dada en la forma general:

$$R(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) cos\beta x + Q_m(x) sen\beta x) \qquad (13)$$

Esta expresión contiene implícitamente una raíz con los valores específicos de *R(x)*, es decir $r = \alpha \pm \beta i$, valor que se debe verificar si existe en las raíces de la ecuación característica, además hay que definir los grados de los polinomios es decir los valores de n y m, determinado el valor de $k =$

$$y_p = x^s e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_k(x) cos\beta x + \tilde{Q}_k(x) sen\beta x\right) \qquad (14)$$

max (*m,n*), con estos valores se determina la solución particular:

Donde: *s* es la multiplicidad de $r = \alpha \pm \beta i$ en ecuación característica *P(r) = 0*

Tabla 1. Valores posibles de *R(x)* para armar la solución particular

R(x)	***α***	***β***	***r = α ± βi***	***n***	***m***	***k* = max (*m,n*)**
$P_n(x)$	*0*	*0*	*r = 0 ± 0i = 0*	*n*	-	*k=n*
$e^{\alpha x}\left(P_n(x)\right)$	*α*	*0*	*r = α ± 0i = α*	*n*	-	*k=n*
$(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sen\beta x)$	0	*β*	*r = 0 ± βi = ± βi*	*n*	*m*	*k* = max (*m,n*)
$e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sen\beta x)$	α	*β*	*r = α ± βi*	*n*	*m*	*k* = max (*m,n*)

Con los valores de la tabla se arma la solución particular que siempre tiene la forma general, en donde se debe remplazar los diferentes valores obtenidos de *R(x)*, así la solución particular será:

$$y_p = x^s e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_k(x)cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)sen\beta x\right) \qquad (15)$$

El valor de *s* se determina en función de la multiplicidad de la raíz presente en *R(x)*, en la ecuación característica P(r) = 0, la no presencia de raíces iguales en la ecuación característica indica que el valor es *s = 0*

Una vez determinado la solución particular se debe derivar las veces necesarias dependiendo del orden de la EDOLnHCC, y de esta manera con la igualdad obtenida encontrar los valores de los coeficientes indeterminados de los polinomios presentes en la solución particular logrando de esta manera la solución particular. Esto implica la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

Encontrando la solución general que será:

$$y = y_g + y_p \qquad (16)$$

Como se puede observar es un solo caso y más bien hay que definir los valores de *α, β, n, m, k, r,* y *s* en función de *R(x)* y *P(r).*

3. Aplicación

En este apartado ejemplificamos el procedimiento para obtener las Soluciones particulares en el tratamiento analítico de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes constantes.

Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 4y' = xe^{4x}$$

La ecuación característica de esta ecuación diferencial es:

$$P(r) = r^2 - 4r = 0$$

De donde se obtiene, como raíces*: r = 0* y *r = 4.* Por lo tanto, la solución homogénea es:

$$y_g = C_1e^{0x} + C_2e^{4x}$$

La solución particular aplicando el procedimiento, se tiene:

$$R(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sen\beta x) = xe^{4x}$$

Donde: $\alpha = 4$, $\beta = 0$, $n=1$

La raíz presente en *R(x)* es $r = 4 \pm 0i$, consecuentemente el valor de $s = 1$ puesto que esta raíz

está presente en la ecuación característica una vez, por lo tanto, la solución particular es:

$$y_p = x^1e^{4x}(Ax + B)$$

Derivando y remplazado en la ecuación diferencial se obtiene los valores de $A = \frac{1}{8}$ y $B = -\frac{1}{16}$

Por lo tanto, la solución general será:

$$y = C_1 + C_2e^{4x} + x^1e^{4x}\left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\right)$$

4. Conclusiones

La metodología generalizada para la obtención de la solución particular a partir de los valores que se obtienen de la forma que tiene *R(x)* simplifica sustancialmente los criterios de observación de la forma que tiene la ecuación diferencial, obteniendo una metodología o procedimiento único para definir la solución particular, generando confianza en el tratamiento analítico de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes.

La aplicación de esta metodología permite un aprendizaje más conciso, que permitirá a los interesados de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas de coeficiente constante, de la herramienta fácil y apropiada para su comprensión, sin tener que recordar muchos casos, sino más bien con único caso.

Referencias

Abello, C. (2009). *Conceptos básicos de ecuaciones diferenciales .* Armenia: Ediciones Elizcom.

Becerril, J., & Elizarraraz, D. (2004). *Becerril, Jose; Elizarraraz, David.* Mexico: Universidas Autonoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco.

Bronson, R. (2008). *Ecuacionesa difrenciales.* McGraw Hill.

Espinoza, E. (2008). *Análisis Matemático IV, para estudiantes de ciencias e ingeniería.* Espinoza Ramos Eduardo .

Figueroa, M. S. (06 de 05 de 2018). *Ecuaciones Diferenciales*. Obtenido de tecdigital: https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/cursos-linea/EcuacionesDiferenciales/EDO-Geo/edo-cap1-geo/node3.html

Jiménez, V. (2008). *Ecuaciones diferenciales, cómo aprenderlas, cómo enseñarlas.* Murcia: Universidad de Murcia.

Kiseliov, A., Krasnov, M., & Makarenko, G. (1984). Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En A. Kiseliov, M. Krasnov, & G. Makarenko, *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias* (pág. 112). Moscú: MIR.

Madoz, C. (08 de 05 de 2009). *Ecuaciones diferenciales de orden superior.* Obtenido de Ecuaciones diferenciales de orden superior: https://matap.dmae.upm.es/WebpersonalBartolo/EDOs/3_Ecuaciones_diferenciales_orden_superior.pdf

Rainville, E., & Bedient, P. (1997). *Ecuaciones diferenciales.* México: Interamericana.

Zill, D. (1997). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado.* México: International Thompson Editores.