# O FRACASSO NA APRENDIZAGEM DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA ABORDAGEM SOBRE AS SÉRIES DE FOURIER.

**Marcelo Santos Chaves**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA)
modelo.doma@gmail.com

## Resumen

A finales de 1970, la tasa de fracaso en las disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral constituye uno de los principales problemas de la educación superior brasileña. Aunque muchos educadores atribuyen el problema a la falta de preparación de los estudiantes, no impide que los maestros buscan alternativas en praxiológicas capaces de sortear y minimizar este problema, desde la propuesta de las transposiciones didácticas convenientes y apropiadas para el contexto social que vive el alumno.

Este artículo trata de abordar una alternativa praxiológicas de entender la enseñanza de las series de Fourier, ya que este tema se ha constituido uno de los más grandes "villanos" en la enseñanza de la disciplina Cálculo diferencial e integral IV. En este sentido, el objetivo que se persigue es proporcionar un guión didáctico que permite al estudiante a través de aplicaciones y solución de problemas, comprender la construcción del conocimiento matemático por medio de manipulaciones algebraicas de este problema, que actualmente despierta en los estudiantes de mayores temores y miedos cara educación sus características "mitológica".

**Palabras clave:** Cálculo - Series de Fourier - Aprendizaje

## Resumo

No final da década de 1970, o elevado índice de reprovação nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral constituiu-se em um dos maiores problemas do ensino superior brasileiro. Apesar de muitos educadores atribuírem o problema à falta de preparo dos alunos, isso não impede os docentes em buscarem alternativas praxeológicas capazes de contornar e minimizar este problema, a partir da proposição de transposições didáticas convenientes e adequadas ao contexto social vivenciado pelo educando.

O presente artigo pretende a abordar uma alternativa praxeológica de se compreender o ensino das *Séries de Fourier*, uma vez que tal temática constituiu-se em uma das maiores “vilãs” no ensino da Disciplina *Cálculo Diferencial e Integral IV*. Neste sentido, o objetivo pretendido é constituir um roteiro didático que permita ao discente, através de aplicações e resoluções de problemas, compreender a construção do conhecimento matemático por meio das manipulações algébricas desta temática, que atualmente desperta em discentes da educação superior medos e temores face as suas características “mitológicas”.


**Palavras-chave:** Cálculo – Séries de Fourier – Aprendizagem

## Abstract

In the late 1970s, the high failure rate in the disciplines of Differential and Integral Calculus constituted one of the major problems of Brazilian higher education. Although many educators attribute the problem to lack of preparation of students, it does not prevent teachers seek alternatives in praxeological able to circumvent and minimize this problem, from the proposition of didactic transpositions convenient and appropriate to the social context experienced by the learner.

This article seeks to address an alternative praxeological to understand the teaching of Fourier series, since this topic was constituted one of the greatest "villains" in the teaching of Discipline Differential and Integral Calculus IV. In this sense, the intended goal is to provide a didactic script that allows the student through applications and troubleshooting, understand the construction of mathematical knowledge by means of algebraic manipulations of this issue, which currently awakens in students of higher education face fears and fears their characteristics "mythological".



**Key Words**: Calculus - Fourier Series - Learning


## 1. INTRODUÇÃO

É bastante comum observamos em diversos cursos de ensino superior disciplinas que passam a assumir a posição de “símbolos” do curso. Tal fato pode ser explicado, seja pelo seu grau de dificuldade e complexidade algébrica, seja por se constituírem em modelos de conhecimento bastante distantes daquelas a que as pessoas estão habituados a observar na educação básica. No curso de matemática essas disciplinas “símbolos” tem um nome. E são as de *Cálculo Diferencial e Integral*.

Em função de suas peculiaridades, um tanto que “mitológicas”, essas disciplinas configuram-se em um eminente desafio para os discentes do ensino superior, onde cíclicos relatos sobre as “dificuldades encontradas” são transmitidos de turma em turma, de forma a amplificar sensacionalistamente o nível de dificuldade supostamente contido nessas disciplinas, e isso contribui para incrementar o caráter de mitológico das mesmas. Dessa forma os discentes, inevitavelmente, começam por entender ser “natural” o fracasso nessas disciplinas, e nesta mesma faixa de sintonia, os professores instituem uma espécie de “zona de conforto” praxeológica ante ao elevado índice de reprovação então tido como “normal”. Como consequência lógica, esta “zona de conforto” torna, a principio, dispensável qualquer reflexão sobre modelos de transposição didáticas capazes de tornar possível o aprendizado, uma vez que o elevando índice de fracasso na aprendizagem das disciplinas de cálculo encontra-se “dentro da normalidade”. (MELLO et al., 2001).

Ante a estas breves considerações, o presente artigo pretende a abordar uma alternativa praxeológica de se compreender o ensino das *Séries de Fourier*, uma vez que tal temática constituiu-se em uma das maiores “vilãs” no ensino da Disciplina *Cálculo Diferencial e Integral IV*. Neste sentido, o objetivo pretendido é constituir um roteiro didático que permita ao discente, através de aplicações e resoluções de problemas, compreender a construção do conhecimento matemático por meio das manipulações algébricas desta temática, que atualmente desperta em discentes da educação superior medos e temores face as suas características “mitológicas”.

## 2. UM CÁLCULO, UM FRACASSO

Os indicadores de fracasso nas disciplinas de *Cálculo Diferencial e Integral* são, em termos gerais, elevados ocasionando visíveis prejuízos no aproveitamento de discentes, ao ponto de leva-los a sucessivas reprovações ou até mesmo ocasionando o seu jubilamento (desligamento definitivo do curso). Entre os estudiosos brasileiros Barufi (1999) e Rezende (2003) preocupam-se com o ínfimo rendimento dos discentes em *Cálculo Diferencial e Integral*, mas tal fato não é exclusividade dos acadêmicos brasileiros. Tem-se atualmente uma preocupação no âmbito mundial em relação ao fracasso em *Cálculo Diferencial e Integral*, dando origem a um movimento social conhecido na década de 80 como *Calculus reform* (Reforma do Cálculo). (NASSER, 2007).

Na compreensão de Vinner (1983), as pesquisas atinentes ao fracasso em *Cálculo Diferencial e Integral* concentram-se especialmente nos problemas de compreensão das definições de função. Vianna (1998), por outro lado, infere o domínio do *Teorema Fundamental do Cálculo* como problemática central. Já para Meyer e Igliori (2003) as dificuldades centram-se no estudo de limite e derivada. Contudo, Frota (2001) compreende ser a forma como os alunos estudam o principal problema no processo de ensino-aprendizagem.

A titulo de ilustração deste cenário desfavorável na aprendizagem da disciplina *Cálculo Diferencial e Integral*, trazemos ao sol dados de 2000 a 2003 desta disciplina, ministrada no Curso de Matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF), a saber:

**Tabela 1**
Índice de Reprovações em Cálculo Diferencial e Integral na UFF

| Ano | Semestre | IR (%) |
|---|---|---|
| 2000 | 1 | 24,4 |
| 2000 | 2 | 85,4 |
| 2001 | 1 | 59,5 |
| 2001 | 2 | 71,1 |
| 2002 | 1 | 69,5 |
| 2002 | 2 | 93,2 |

Legenda:
IR – Índice de Reprovação
Fonte: adaptado de Rezende (2003).

A tabela 1 é bastante caricatural ao ilustrar o nível insuportável a que chegou o nível de reprovações nesta disciplina na UFF, ao ponto de ostentar no 2º semestre de 2002 a marca de 93,5% de reprovações. Na Universidade de São Paulo (USP) este cenário não é diferente. Em sua tese de doutorado Barufi desvela dados altamente preocupantes na aprendizagem do *Cálculo Diferencial e Integral*, *in verbs*:

> O índice de não-aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos, por exemplo, aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%, enquanto que no universo dos alunos do Instituto de Matemática e Estatística o menor índice não é inferior a 45% - isto é, não se aprova mais do que 55% em uma turma de Cálculo.
>
> (BARUFFI, 1999 apud REZENDE, 2003, p. 01)

Ante aos resultados apresentados, verificou-se na UFF um quadro bem mais alarmante face a performance dos discentes da USP. Porém, ostentar tetos de 75% de reprovação, como os verificados na USP, não nos parece motivo para comemorar.

## 3. AS SÉRIES DE FOURIER E AS PRATICAS DE ENSINO

No capitulo anterior discorremos sobre os problemas enfrentados pelos discentes quanto ao aprendizado nas disciplinas de *Cálculo Diferencial e Integral*. Ante ao exposto, trataremos neste trabalho de proceder uma transposição didática que seja suficientemente capaz de consolidar um instrumental praxeológico de ensino, de forma a permitir ao discente do ensino superior compreender as técnicas necessárias para o calculo de *Séries de Fourier*. Tal intervenção faz necessária, por compreendermos que o estudo destas Séries figura-se entre as principais temáticas complexas na pratica do ensino superior da disciplina *Cálculo Diferencial e Integral IV*.

### 3.1 Um pouco da História

As *Séries Fourier* possuem este nome em homenagem ao matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

**Imagem 1 – Joseph Fourier**

Extraído de The MacTutor History of Mathematics archive

Esta expressão do pensamento matemático do século XIX foi o responsável por dar inicio as investigações sobre a decomposição de funções periódicas na forma de séries trigonométricas convergentes, ora denominada *Séries de Fourier* e a sua aplicação aos problemas da condução do calor. Em termos gerais, Fourier constatou que qualquer movimento periódico pode ser descrito como uma sobreposição de vibrações senoidais e cossenoides.

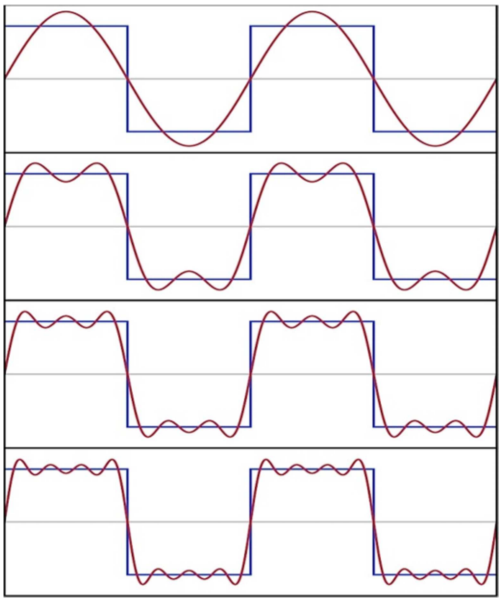


**Imagem 2**

As primeiras quatro somas da séria de Fourier de uma onda quadrada

Seu envolvimento no movimento revolucionário francês do século XVIII lhe rendeu influência politica suficiente para torna-se um dos conselheiros mais próximos de Napoleão Bonaparte. Face a tal status, em 1798 galgou a condição de governador do Instituto do Egito, fundado na capital Cairo por Bonaparte, quando de sua vitória na *Batalha das Pirâmides* no Egito.

**Imagem 3**

*Batalha das Pirâmides* de 1798 em óleo sobre tela, por François Louis Joseph Watteau

Daí por diante, ante a altos e baixos momentos de conturbação politica na Europa, em 1801 foi nomeado por Bonaparte prefeito do departamento *Isère* na região dos Alpes franceses, onde posteriormente veio a se tornar prefeito de Grenoble, cidade universitária, localiza-se no sopé dos Alpes franceses. Foi exatamente em Grenoble que Fourier elaborou a maior parte de sua teoria sobre a propagação do calor. A exatos 1822, nesta cidade, Fourier escreveu a *Theorie analytique de la chaleur* (Teoria Analítica do Calor). Neste trabalho passou a modelar a evolução da temperatura através de séries trigonométricas (Séries de Fourier) fazendo uso de equações diferenciais e integrais, o que veio a se tornar um marco histórico na física-matemática.

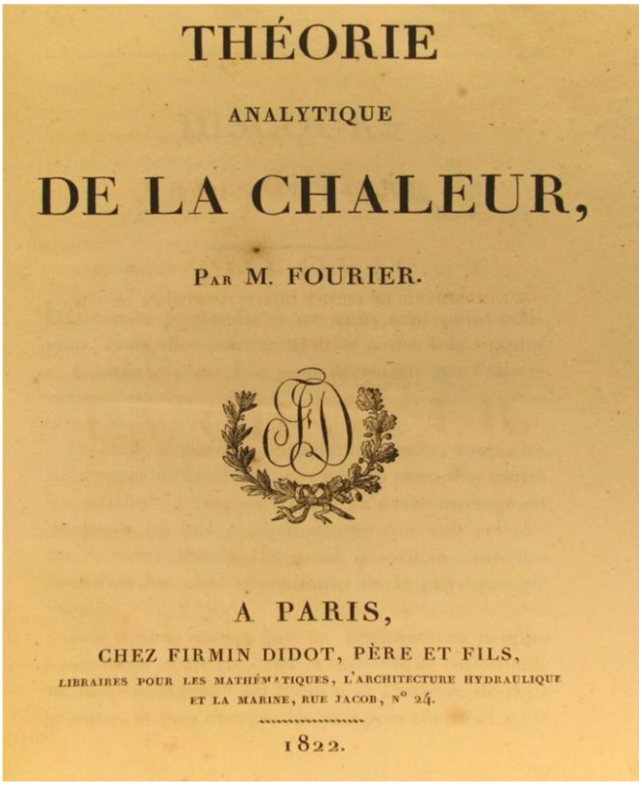



**Imagem 4**

Capa do livro *Teoria Analítica do Calor*, publicado 1822 por *Et La Marine e Rue Jacob* nº 24

## 3.2 Técnicas para resolução de problemas

### 3.2.1 Séries de Fourier para período não arbitrário

As Séries de Fourier são utilizadas na análise de sinais periódicos.

Sejam $a_n, n \geq o$ e $b_n, n \geq 1$ números reais dados. Suponha que a série trigonométrica dada em:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cdot Cos(nx) + b_n \bullet Sen(nx) \right] \qquad (1)$$

Se a representação sequencial (1) converge uniformemente em $[-\pi, \pi]$, podemos afirmar que á de fato uma função f.

Logo, é provável ser:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot dx \qquad (2)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot Cos(nx) \bullet dx, \quad se\ x \geq 1 \qquad (3)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot Sen(nx) \bullet dx, \quad se\ n \geq 1 \qquad (4)$$

Daí, dizemos que (1) é uma *Série de Fourier* para um período não arbitrário, e que (2), (3) e (4) nada mais são que o cálculo de seus coeficientes. Perceba neste capítulo que, até o presente momento, toda linguagem utilizada é o que chamo de linguagem formal (erudita) da matemática. E infiro que seja exatamente esse tipo de abordagem que dificulta o discente perceber que, ele só precisa calcular os coeficientes de (1) para obter a resolução do problema. Para fins de aprendizado, vejamos como resolver, passo a passo, problemas envolvendo Séries de Fourier.

**Exemplo 1**

Determine o gráfico e a Série de Fourier de $f(x) = x, -\pi \leq x \leq \pi$ .

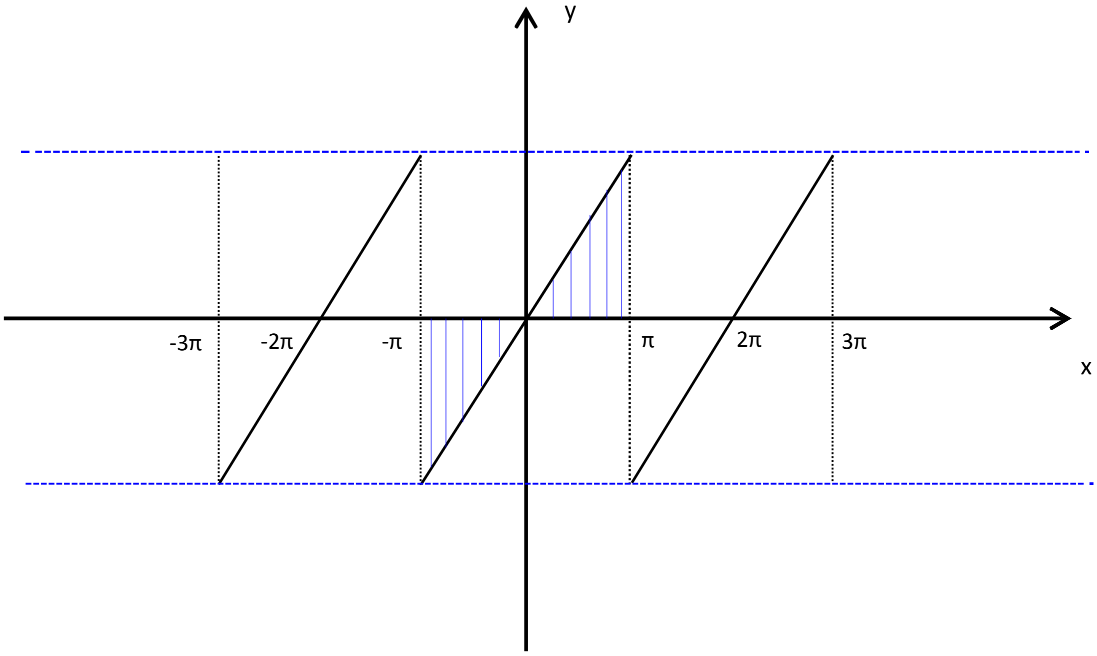
Resolução:

Representação gráfica de $f(x) = x, -\pi \leq x \leq \pi$ .

Calculemos o que chamamos de período fundamental da função:

$$f(x) = x, -\pi \leq x \leq \pi$$
$$T = \pi - (-\pi)$$
$$T = 2\pi$$

Sendo $T = 2\pi$ o período fundamental da função, descrevemos então:




Passemos agora para o cálculo da Série de Fourier da função f(x) = x.

$$f(x) = x \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot Cos(nx) + b_n \bullet Sen(nx)\right]$$

Façamos o calculo dos coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot dx = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot dx = 0$$

Note que f(x) = x é uma função ímpar, logo, a integral de uma função ímpar é igual a zero.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot Cos(nx) \bullet dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot Cos(nx) \bullet dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot 0$$

$$a_n = 0$$

Perceba que f(x) = x é uma função ímpar e f(x) = Cos(nx) é uma função par. Daí, como o produto entre uma função par com outra função ímpar tem como resultado uma função ímpar, logo, a integral de uma função ímpar é igual a zero.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot Sen(nx) \cdot dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot Sen(nx) \cdot dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \bullet \int_{0}^{\pi} x \cdot Sen(nx) \bullet dx$$

Sabemos que o produto entre a função ímpar f(x) = x com a f(x) = Sen(nx), que também é uma função ímpar, resulta em uma função par. Logo, sendo a resultante uma função par, devemos proceder o calculo da integral:

$$\int_{0}^{\pi} x \cdot Sen(nx) \cdot dx \qquad (5)$$

Ao procedermos em (5) o calculo de integração por partes, obteremos o seguinte resultado:

$$-\frac{\pi \cdot Cos(n\pi)}{n} \qquad (6)$$

Substituindo (6) em $b_n$, teremos:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot Sen(nx) \cdot dx$$

$$bn = \frac{2}{\pi} \cdot \left[ -\frac{\pi \cdot Cos(n\pi)}{n} \right]$$

$$bn = -\frac{2}{n} \cdot Cos(n\pi)$$

Note que para $Cos(nx) \neq 0$ deveremos considerar:

$$Cos(nx) \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases} \qquad (7)$$

Assim:

$$Cos(nx) = (-1)^n \qquad (8)$$

Pois, para qualquer valor que ***n*** assumir na expressão (8), atenderemos as condições da restrição apresentada em (7).

Logo:

$$bn = -\frac{2}{n} \cdot Cos(n\pi)$$

$$bn = -\frac{2}{n} \cdot (-1)^n$$

$$bn = -(-1)^n \cdot \frac{2}{n}$$

$$bn = -1 \cdot (-1)^n \cdot \frac{2}{n}$$

$$bn = (-1)^1 \cdot (-1)^n \cdot \frac{2}{n}$$

$$bn = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}$$

Fazendo a substituição dos coeficientes $a_0$, $a_n$ e $b_n$ na função f(x), teremos:

$$f(x) = x \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cdot Cos(nx) + b_n \cdot Sen(nx)\}$$

$$f(x) = x \sim \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 0 \cdot Cos(nx) + \left[ (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \right] \cdot Sen(nx) \right\}$$

$$f(x) = x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \right] \cdot Sen(nx)$$

$$f(x) = x \sim 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right] \cdot Sen(nx)$$

Daí, se atribuirmos para n = {1, 2, 3, 4...} na função f(x), teremos finalmente a seguinte Série de Fourier:

$$f(x) = x \sim 2 \cdot \left[ Senx - \frac{1}{2} \cdot Sen(2x) + \frac{1}{3} \cdot Sen(3x) - \frac{1}{4} \cdot Sen(4x) + ... \right]$$

Como se pode inferir, foi bastante simples a operacionalização algébrica dos cálculos. Com explicações detalhadas sobre os procedimentos e definições utilizados.

**Exemplo 2**

Determine a Série de Fourier de $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi$ .

Resolução:

$$f(x) = x^2 \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot Cos(nx) + b_n \bullet Sen(nx)\right]$$

Façamos o calculo dos coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot dx$$

Note que f(x) = $x^2$ é uma função par, logo, a integral desta função pode ser obtida da seguinte maneira:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \bullet \int_{0}^{\pi} x^2 \cdot dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \bullet \frac{x^3}{3}$$

$$a_0 = \frac{2}{3} \cdot \pi^2$$

Passemos agora para o cálculo do próximo coeficiente:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot Cos(nx) \bullet dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot Cos(nx) \cdot dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \bullet \int_{0}^{\pi} x^2 \cdot Cos(nx) \bullet dx \qquad (9)$$

Perceba que f(x) = $x^2$ é uma função par e f(x) = Cos(nx) também é uma função par. Daí, como o produto entre uma função par com outra função par tem como resultado uma função par, logo, calculando a integral contida na expressão (9), utilizando a técnica de integração por partes, obteremos a seguinte expressão:

$$\int_{0}^{\pi} x^2 \cdot Cos(nx) \cdot dx = \frac{2\pi \cdot Cos(n\pi)}{n^2}$$

Substituindo em (9), teremos:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \frac{2\pi \cdot Cos(n\pi)}{n^2} \right]$$

Como já sabemos que $Cos(n\pi) = (-1)^n$, façamos:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \frac{2\pi \cdot (-1)^n}{n^2} \right]$$

$$a_n = \frac{4}{n^2} \bullet (-1)^n$$

Passemos agora para o cálculo de $b_n$:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot Sen(nx) \bullet dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot Sen(nx) \bullet dx$$

Note que $f(x) = x^2$ é uma função par, porém f(x) Sen(nx) é uma função ímpar, logo, a integral do produto entre elas é igual a zero. Daí:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \bullet \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot Sen(nx) \cdot dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot 0$$

$$b_n = 0$$

Fazendo a substituição dos coeficientes $a_0$, $a_n$ e $b_n$ na função f(x), teremos:

$$f(x) = x^2 \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cdot Cos(nx) + b_n \bullet Sen(nx)\}$$

$$f(x) = x^2 \sim \frac{\left(\frac{2}{3} \cdot \pi^2\right)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{4}{n^2} \bullet (-1)^n \cdot Cos(nx) + 0 \cdot Sen(nx)\right\}$$

$$f(x) = x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n \cdot Cos(nx)$$

Daí, se atribuirmos para n = {1, 2, 3, 4...} na função f(x), teremos finalmente a seguinte Série de Fourier:

$$f(x) = x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \left[ -Cosx + \frac{1}{4} \cdot Cos(2x) - \frac{1}{9} Cos(3x) + \frac{1}{16} Cos(4x) - \ldots \right]$$

### 3.2.2 Séries de Fourier para período arbitrário

Até o presente momento trabalhos a manipulação algébrica das *Séries de Fourier* a partir de um período “T” fixo igual a 2π. Agora, como proceder para um período “T” qualquer?

A passagem de funções que possuem um período de 2π para funções que possuem um período “T” qualquer, pode ser efetuada da seguinte maneira:

$$x = \frac{2\pi \cdot t}{T}$$

Onde:

$$T = 2\pi \therefore \pi = \frac{T}{2}$$

Assim, suponha a série trigonométrica dada em:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot Cos\left(\frac{2n\pi}{T}\cdot t\right)+b_n\cdot Sen\left(\frac{2n\pi}{T}\cdot t\right)\right] \qquad (10)$$

No conjunto de valores de *x* para os quais a série (10) converge, ela define uma função periódica *f* de período *T*. Dizemos então que a expressão (10) é a uma Série de Fourier para *f* .

Logo, é provável ser:

$$a_0=\frac{2}{T}\bullet\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot dt \qquad (11)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\cdot\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot Cos\left(\frac{2n\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \qquad (12)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\bullet\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot Sen\left(\frac{2n\pi}{T}\cdot t\right)\cdot dt \qquad (13)$$

Daí, dizemos que (10) é uma *Série de Fourier* para um período arbitrário "T", e que (11), (12) e (13) correspondem ao cálculo de seus coeficientes.

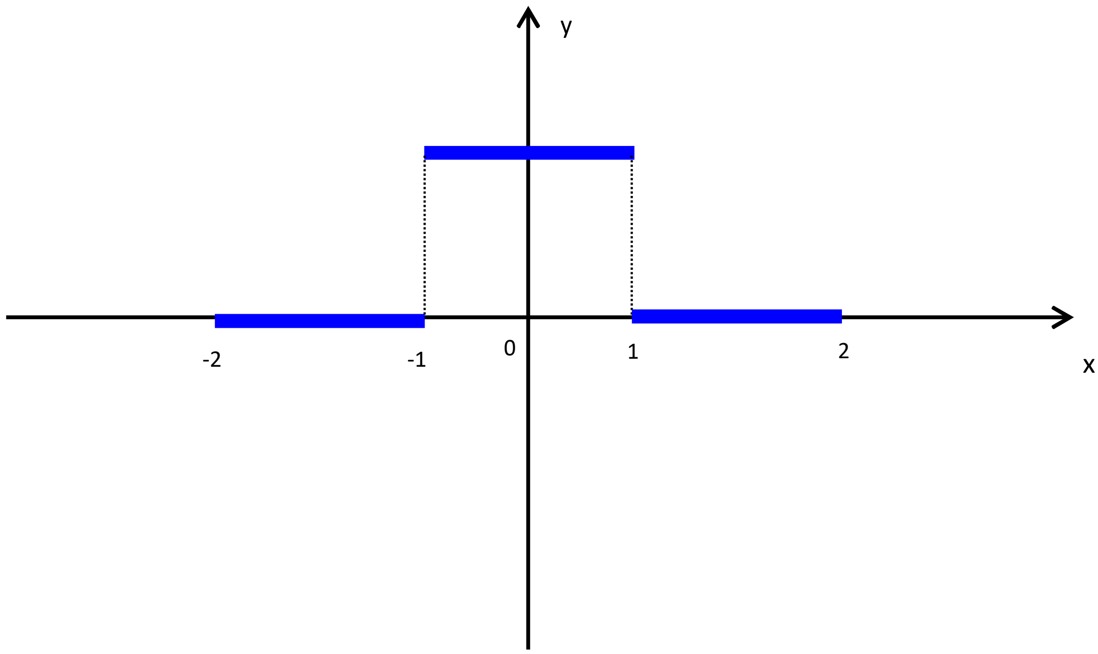
**Exemplo 3**

Determine o gráfico e a *Série de Fourier* para a seguinte função:

$$f(t)=\begin{cases}0, \text{ quando } & -2<t<-1\\ k, \text{ quando } & -1<t<1 \quad \Rightarrow com\ T=4\\ 0, \text{ quando } & 1<t<2\end{cases}$$

Resolução

Descrição gráfica:




Passemos agora para o cálculo da *Série de Fourier* da função f(t):

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot Cos\left(\frac{2n\pi}{T} \cdot t\right) + b_n \cdot Sen\left(\frac{2n\pi}{T} \cdot t\right)\right]$$

Façamos o calculo dos coeficientes:

$$a_0 = \frac{2}{T} \bullet \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot dt$$

$$a_0 = \frac{2}{4} \cdot \int_{-4/2}^{4/2} f(t) \cdot dt$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^{2} f(t) \cdot dt$$

Note que a função f(t) é par, logo caberá procedemos sua integração a partir da decomposição de seu intervalo [-2, 2]. Veja:

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^{2} f(t) \cdot dt$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \left[ \int_{-2}^{-1} 0 \cdot dt + \int_{-1}^{1} k \cdot dt + \int_{1}^{2} 0 \cdot dt \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} k \cdot dt$$

$$a_0 = \frac{k}{2} \bullet [t]_{-1}^{1}$$

$$a_0 = \frac{k}{2} \bullet [1 - (-1)]$$

$$a_0 = \frac{k}{2} \bullet 2$$

$$a_0 = k$$

Passemos para o cálculo do próximo coeficiente:

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot Cos\left( \frac{2n\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt$$

$$a_n = \frac{2}{4} \cdot \int_{-4/2}^{4/2} f(t) \cdot Cos\left( \frac{2n\pi}{4} \bullet t \right) \cdot dt$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^{2} f(t) \cdot Cos\left( \frac{2n\pi}{4} \cdot t \right) \cdot dt \qquad (14)$$

Observe que na integral da expressão (14) temos o produto de duas funções pares. Logo, façamos sua integração decompondo seu intervalo [-2, 2]. Veja:

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot\int_{-2}^{2} f(t)\cdot Cos\left(\frac{2n\pi}{4}\cdot t\right)\cdot dt$$

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot\left[\int_{-2}^{-1} 0\cdot Cos\left(\frac{2n\pi}{4}\bullet t\right)\cdot dt + \int_{-1}^{1} k\cdot Cos\left(\frac{2n\pi}{4}\bullet t\right)\cdot dt + \int_{1}^{2} 0\cdot Cos\left(\frac{2n\pi}{4}\bullet t\right)\cdot dt\right]$$

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot\left[\int_{-1}^{1} k\cdot Cos\left(\frac{2n\pi}{4}\bullet t\right)\cdot dt\right]$$

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot k\cdot\left[\int_{-1}^{1} Cos\left(\frac{2n\pi}{4}\bullet t\right)\cdot dt\right]$$

$$a_n = \frac{k}{2}\cdot\left[\int_{-1}^{1} Cos\left(\frac{2n\pi}{4}\cdot t\right)\cdot dt\right] \qquad (15)$$

Note que na expressão (15) á apenas uma função par. Logo, façamos a integração da mesma. Veja:

$$\int_{-1}^{1} Cos\left(\frac{2n\pi}{4}\cdot t\right)\cdot dt$$

$$2\cdot\int_{0}^{1} Cos\left(\frac{n\pi}{2}\cdot t\right)\cdot dt$$

$$= 2\cdot\left[\frac{Sen\left(\frac{n\pi}{2}\cdot t\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^1$$

$$= 2\cdot\left[\frac{Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right]$$

$$= 2\cdot Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\frac{2}{n\pi}$$

$$= \frac{4}{n\pi}\cdot Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad (16)$$

Substituindo (16) na expressão (15), teremos:

$$a_n = \frac{k}{2} \cdot \left[ \int_{-1}^{1} Cos\left( \frac{2n\pi}{4} \cdot t \right) \cdot dt \right]$$

$$a_n = \frac{k}{2} \cdot \left[ \frac{4}{n\pi} \cdot Sen\left( \frac{n\pi}{2} \right) \right]$$

$$a_n = \frac{2k}{n\pi} \cdot Sen\left( \frac{n\pi}{2} \right)$$

Passemos agora para o cálculo do próximo coeficiente:

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot Sen\left( \frac{2n\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt$$

$$b_n = \frac{2}{4} \cdot \int_{-4/2}^{4/2} f(t) \cdot Sen\left( \frac{2n\pi}{4} \cdot t \right) \cdot dt$$

$$b_n = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^{2} f(t) \cdot Sen\left( \frac{2n\pi}{4} \cdot t \right) \cdot dt$$

$$b_n = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^{2} f(t) \cdot Sen\left( \frac{2n\pi}{4} \cdot t \right) \cdot dt \qquad (17)$$

Observe que á um produto de uma função par e outra ímpar na composição da integral da expressão (17). Logo, a mesma será igual a zero. Veja:

$$b_n = \frac{1}{2}\cdot\int_{-2}^{2} f(t)\cdot Sen\left(\frac{2n\pi}{4}\cdot t\right)\cdot dt$$

$$b_n = \frac{1}{2}\cdot 0$$

$$b_n = 0$$

Fazendo a substituição dos coeficientes $a_0$, $a_n$ e $b_n$ na função f(t), teremos:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot Cos\left(\frac{2n\pi}{T}\cdot t\right) + b_n\cdot Sen\left(\frac{2n\pi}{T}\bullet t\right)\right]$$

$$f(t) \sim \frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2k}{n\pi}\bullet Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot Cos\left(\frac{2n\pi}{4}\bullet t\right) + 0\cdot Sen\left(\frac{2n\pi}{4}\bullet t\right)\right]$$

$$f(t) \sim \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot Cos\left(\frac{n\pi}{2}\bullet t\right)\right]$$

Daí, se atribuirmos para n = {1, 2, 3, 4...} na função f(t), teremos finalmente a seguinte *Série de Fourier*:

$$f(t) \sim \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\cdot\left[Cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) - \frac{1}{3}\cdot Cos\left(\frac{3\pi}{2}\bullet t\right) + \frac{1}{5}\cdot Cos\left(\frac{5\pi}{2}\bullet t\right) - \frac{1}{7}\cdot Cos\left(\frac{7\pi}{2}\bullet t\right) + \cdots\right]$$

## 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

É um tanto simplório abordar a dificuldade em Matemática sob a ótica da complexidade do tema ou pela falta de afinidade com a mesma. Muitas dessas dificuldades podem ocorre por fatores mentais, psicológicos e pedagógicos. (MELLO et al., 2001).

Muitos dos problemas encontrados nas disciplinas de *Cálculo Diferencial e Integral* decorrem da falta de capacidade em se constituir uma praxeologia que permita ao professor alcançar o aprendizado dos discentes. Selecionando de forma adequada o conteúdo a ser ministrado. Discorrendo com riqueza de detalhes na resolução de problemas. Isto sugeri a necessidade de uma preparação específica para professores das áreas de exatas, e mais particularmente para aqueles que são responsáveis pelas turmas de primeiro período.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999.

FROTA, M. C. R. **Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de Cálculo**. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (orgs.). Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC – 2001.

MELLO, J. C. C.; MELLO, M. H. C.; FERNANDES, A. J. S. **Mudanças no ensino de Cálculo I: histórico e perspectivas**. In: COBENGE. Rio de Janeiro – RJ: UFF, 2001.

NASSER, L. **Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte – MG: SBEM, 2007.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.** Tese (Doutorado em Educação). USP, São Paulo, 2003.

TEIXEIRA, Leny. R. M.**Dificuldades e erros na Aprendizagem da Matemática**. In: VII EPEM - Encontro Paulista de Educação Matemática - São Paulo - 2004.

VIANNA, C.S. **Students' Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: an exploration of definitions, theorems and visual imagery**. Tese de doutorado apresentada à Universidade de Londres. 1998.

VINNER, S. **Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent.** In: Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education, 6, 1983, Antuérpia. Proceedings - Antuépia: Antwerp University - 1983.

ZATTI, Fernanda; AGRANIONIH, Nélia T.; ENRICONE, Jaqueline R. B. **Aprendizagem matemática: desvendando dificuldades de cálculo dos alunos**. Revista *Perspectiva* v. 34, nº 128, p. 115-112 – UNICER - 2010.