GEOMETRIA ESPACIAL: UMA ABORDAGEM SOBRE O MODELO DO SÓLIDO CÔNICO ENQUANTO ALTERNATIVA DIDÁTICA PARA O ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

Marcelo Santos Chaves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA)
modelo.doma@gmail.com

Resumen

Imagine un estudiante en el grado sexto o segundo año de la escuela secundaria, en Brasil, se ven obligados a realizar el cálculo del volumen de un cono recto de las declaraciones de la geometría euclidiana, que figura en su clásico The Elements? A lo largo de la evolución histórica del estudio de la geometría, sería posible establecer una forma simplificada de realizar este cálculo sin utilizar el euclídea postulados?

En este trabajo se propone hacer una aproximación a la evolución histórica de la geometría del espacio, que comprende más de este proceso evolutivo, ¿por qué han constituido el modelo brasileño educación básica estándar para calcular el volumen de un sólido geométrico, que para efectos ejemplificación ilustran el caso del cono. En este mismo instrumento también tratar de entender por qué este tipo de cálculo, de los Elementos de Euclides se han modificado para los fines de la enseñanza en la educación básica. En esta vía de razonamiento, vamos a disfrutar de la oportunidad de discutir los conceptos y fundamentos teóricos de la transposición didáctica, mientras la herramienta indispensable para convertir este conocimiento en la escuela científica enseñar conocimientos. Además, vamos a tratar al final, identificar los posibles obstáculos para el fracaso de la enseñanza de la geometría en la educación brasileña.

Palabras-clave: Geometría del espacio - Educación Básica

Resumo

Imagine um aluno do 6º ano do ensino fundamental ou do 2º ano do ensino médio, no Brasil, sendo obrigado a proceder o calculo do volume de um Cone reto, a partir das demonstrações geométricas de Euclides, contidas em sua clássica obra *Os Elementos*? Ao longo da evolução histórica do estudo da geometria, seria possível estabelecer uma forma simplificada de se proceder tal calculo, sem fazer uso dos postulados euclidianos?

O presente trabalho se propõe a fazer uma abordagem sobre a evolução histórica da Geometria Espacial, compreendendo ao longo deste processo evolutivo, o porquê de ter se constituído na educação básica brasileira um modelo padrão para o calculo do volume de um sólido geométrico, que para fins de exemplificação ilustraremos o caso do Cone. Neste mesmo instrumental, também tentaremos compreender, o porquê deste tipo de calculo, a partir dos *Elementos* de Euclides, ter sofrido modificações para fins de ensino na educação básica. Nesta esteira de raciocínio, aproveitaremos o ensejo para discutir os conceitos e fundamentações teóricas da transposição didática, enquanto ferramenta indispensável para conversão deste conhecimento cientifico em conhecimento escolar ensinável. Além disso, trataremos ao final, de identificar os possíveis entraves para o fracasso do ensino da Geometria na educação básica brasileira.

Palavras-chaves: Geometria Espacial – Educação Básica

Abstract

Imagine a student in the 6th grade level or 2nd year of high school, in Brazil, being forced to carry the calculation of the volume of a cone straight from statements from Euclidean geometry, contained in his classic work The Elements? Throughout the historical development of the study of geometry, it would be possible to establish a simplified way to carry this calculation without using the Euclidean postulates?

This paper proposes to make an approach on the historical evolution of the Space Geometry, comprising over this evolutionary process, why have constituted the Brazilian basic education standard model for calculating the volume of a geometric solid, which for purposes exemplification illustrate the case of the cone. In this same instrumental also try to understand why this kind of calculation, from Euclid's Elements have been modified for the purposes of teaching in basic education. On this track of reasoning, we will enjoy an opportunity to discuss the concepts and theoretical foundations of the didactic transposition, while indispensable tool for converting this knowledge into scientific knowledge teachable school. In addition, we will treat the end, identify potential barriers to the failure of the teaching of Geometry in Brazilian education.

Key-words: Space Geometry - Basic Education

1. INTRODUÇÃO

A Geometria é um ramo milenar da matemática que exercer grande influencia na vida de nossa civilização. Não restam duvidas quanto à relevância da Geometria na vida humana. A construção do conhecimento geométrico revolucionou o saber matemático, convertendo-se em um estudo primordial na busca de grandes feitos nas áreas da arquitetura, edificações, construção civil, assim como na partição geográfica de terras. Além disso, sua importância é incomensurável e indiscutível para o pleno desenvolvimento e construção do saber matemático na educação básica.

Agora, em se tratando de pratica de ensino, imagine um aluno do 6º ano do ensino fundamental ou do 2º ano do ensino médio, no Brasil, sendo obrigado a proceder o calculo do volume de um Cone reto, a partir das demonstrações geométricas de Euclides contidas em sua obra *Os Elementos*? Ao longo da evolução histórica do estudo da geometria, seria possível estabelecer uma forma simplificada de se proceder tal calculo, sem fazer uso dos postulados euclidianos?

É sobre estas inquietações que o presente trabalho se propõe a constituir uma abordagem sobre o modelo do sólido Cônico enquanto alternativa didática para o ensino na educação básica. Para este fim, o presente artigo se estrutura da seguinte maneira: em um primeiro momento traçaremos a evolução histórica da Geometria Espacial, enquanto ramo do saber matemático. No segundo momento, refletiremos sobre o papel da Geometria Espacial na educação básica, identificando a necessidade de modificações no saber cientifico (postulados de Euclides) para fins de ensino, além de discutir conceitos e fundamentações teóricas da transposição didática, enquanto ferramenta indispensável para conversão deste conhecimento cientifico em conhecimento escolar ensinável. E por fim, teceremos considerações finais, evidenciando a importância das transformações ocorridas no conhecimento cientifico sobre Geometria Espacial, para fins de educação escolar. Além disso, trataremos ao final, de identificar os possíveis entraves para o fracasso do ensino da Geometria na educação básica brasileira.

2. UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA DA GEOMETRIA ESPACIAL

Em termos gerais, a geometria examina as posições e medidas dos corpos, assim como o espaço e suas formas. Trata-se do mais antigo ramo da Matemática, datada da época do homem do paleolítico, em 20.000 A.C, em sua necessidade de desenhar a natureza a sua volta. O estímulo para seu desenvolvimento decorre das relações mais diretas que o homem tem com o meio a sua volta, por exemplo, o domínio de dimensões físicas como áreas, volumes e distância, o desenvolvimento de ferramentas e objetos de grande utilidade no cotidiano, às construções em geral, as caricaturas da natureza e as demonstrações artísticas.

Em um caráter mais particular, o estudo da Geometria Espacial, enquanto ramo da geometria, data de 2.000 mil anos antes de Cristo. Neste período longínquo, o estudo deste ramo da geometria fora verificado na Mesopotâmia, compreendida pelos povos situados no Oriente Médio, mais precisamente no vale dos rios Eufrates e Tigre. Tal fato é sustentado por evidencias arqueológicas, tais como os documentos que atualmente denominamos de *Papiros*. E dentre estas evidencias, podemos destacar o *Papiro de Rhind* e o *Papiro de Moscou*.

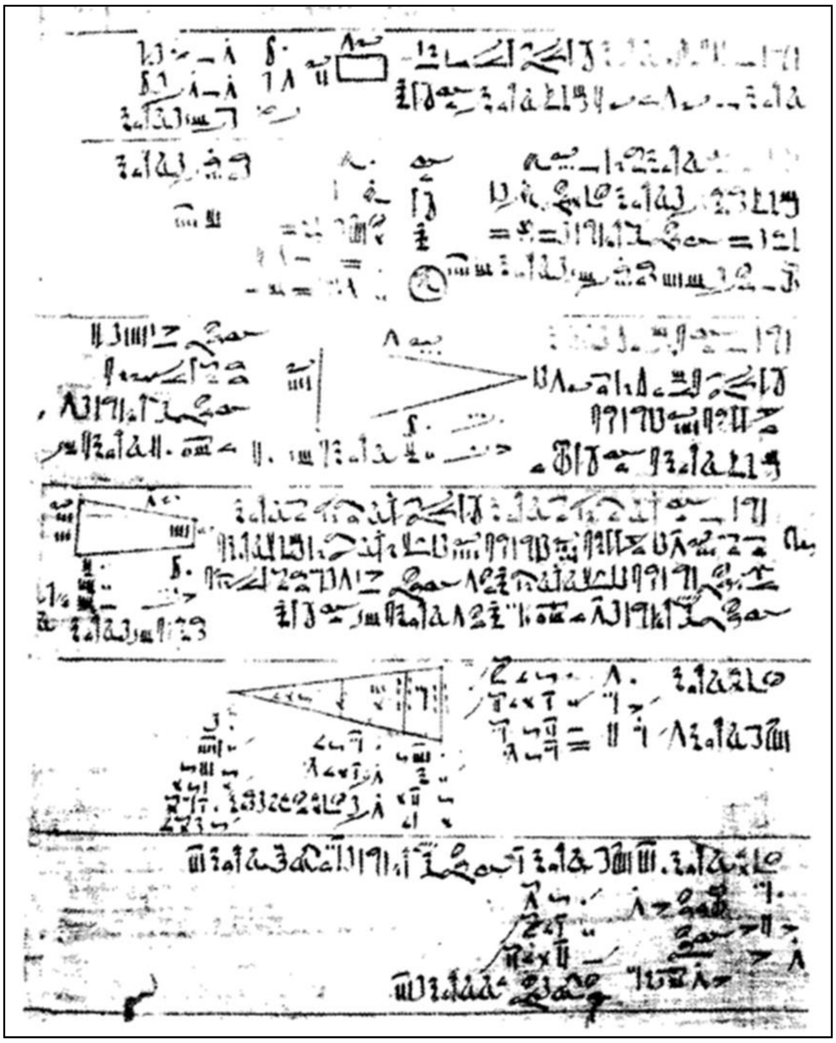


Figura 1 – parte do *Papiro de Rhind* [1](Museu Britânico).

Fonte: figura extraída de EVES, Howard; tradução Hygino H. Domingues. **Introdução à história da matemática**. 5º ed. – Campinas – SP. pág. 74 - Editora da Unicamp - 2011.

[1] *Papiro de Rhind* é uma cópia feita pelo escriba egípcio Ahmes em escrita hierática, em 1650 antes de Cristo.

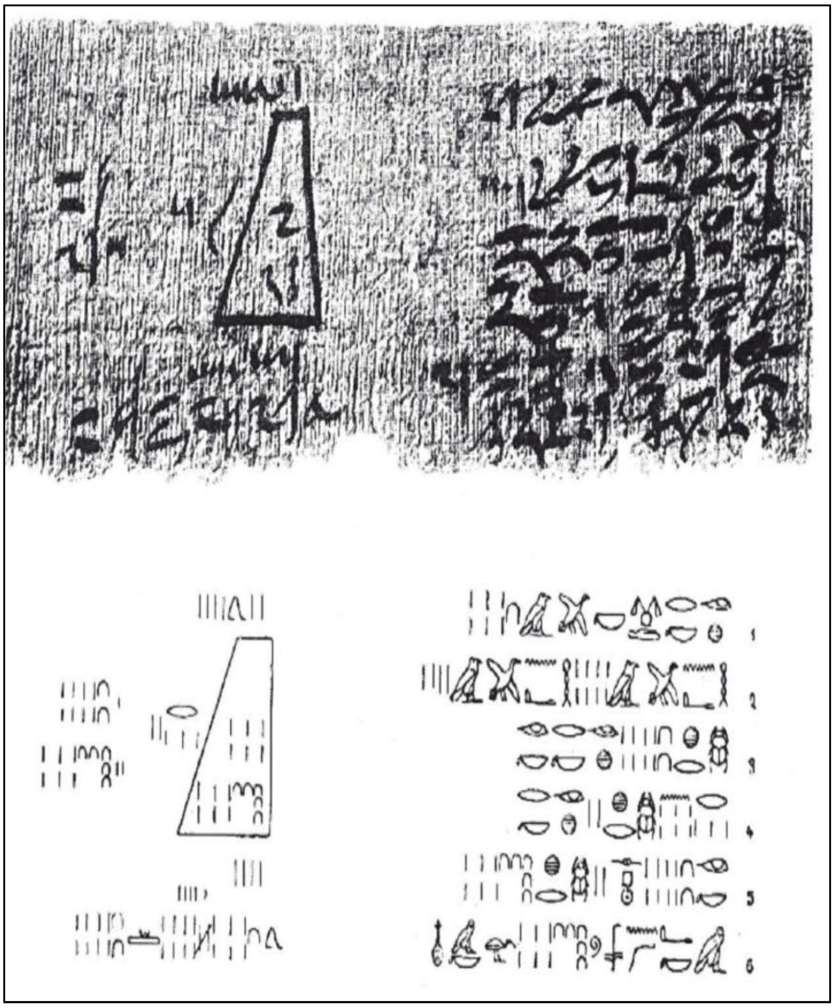


Figura 2 – *Papiro Moscou* [2], com a transcrição hieroglífica do texto hierático. (Museu de Belas-Artes de Moscou).

Fonte: figura extraída de EVES, Howard; tradução Hygino H. Domingues. **Introdução à história da matemática**. 5º ed. – Campinas – SP. pág. 86 - Editora da Unicamp - 2011.

[2] *Papiro de Moscou*, datado de 1850 antes de Cristo, é um texto matemático que contém 25 problemas já antigos quando o manuscrito foi compilado.

Eves (2011), nos apresenta com precisão uma síntese do conteúdo destes *Papiros*, *in verbs*:

> "26 dos 110 problemas dos papiros Moscou e Rhind são geométricos. Muitos deles decorrem de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras e volumes de grãos. (...)".
>
> (EVES, 2011. p. 74).

Daí por diante, os gregos, ao perceberem que os orientais eram suficientemente capazes de executarem cálculos e medições para o dimensionamento da terra e da natureza que os cercavam, passaram então a denominar esta pratica de medições de *Geometria* (medida da terra). E em se tratando de Geometria Espacial, Pitágoras (século VI antes de Cristo) e Platão (século V antes de Cristo) passaram a associar o estudo da Geometria ao estudo da religião e da metafisica, face às formas abstratas que os sólidos geométricos apresentavam. Mas a Geometria encontra seu apogeu no mundo antigo no embalo das obras dos denominados Geômetras Alexandrinos, e dentre eles podemos destacar Arquimedes (século III antes de Cristo) com seus postulados sobre as esferas e o cilindro, e Euclides (século II antes de Cristo) com sua obra intitulada *Os Elementos*, onde sistematizava todos os conhecimentos acumulados até então, fornecendo desta forma ordenação ao estudo da Geometria através de uma linguagem científica.

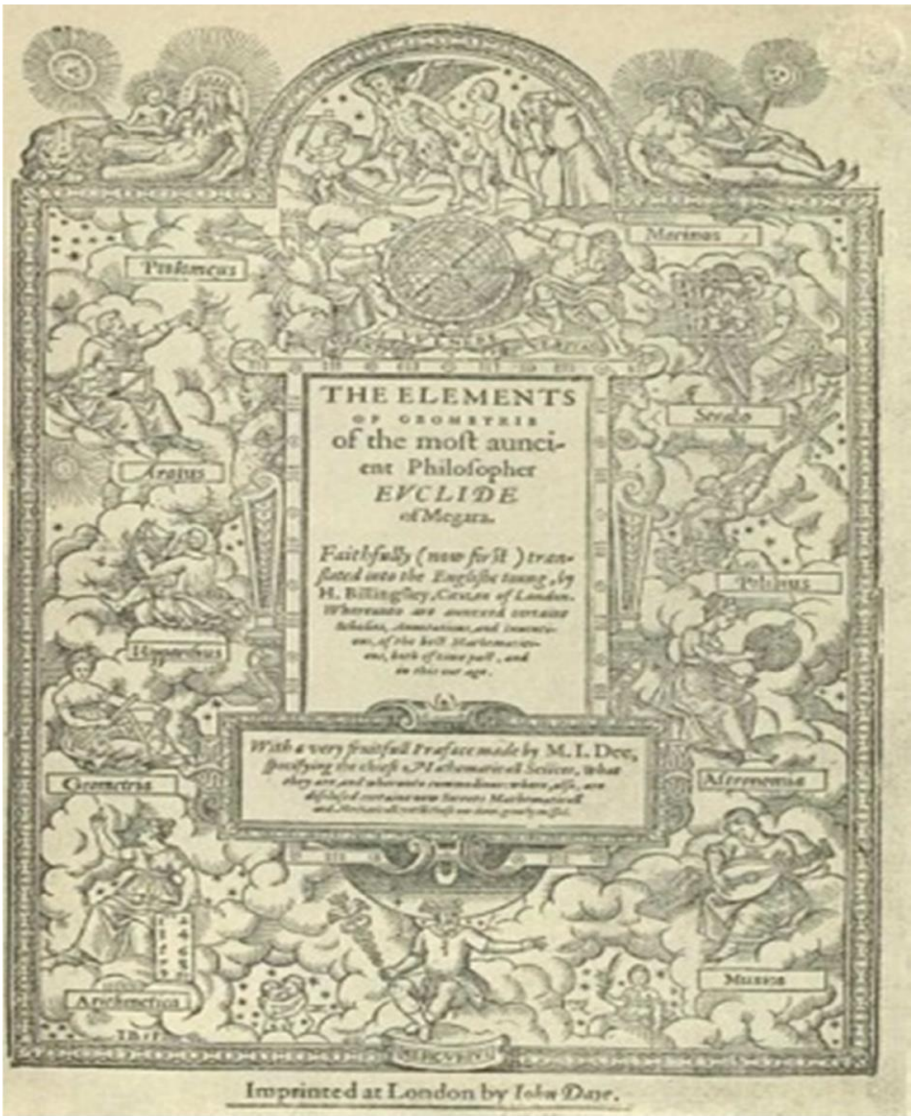


Figura 3 – Página de rosto (em tamanho reduzido) da tradução para o inglês dos *Elementos* de Euclides, feita por Billingsley em 1570.

Fonte: figura extraída de EVES, Howard; tradução Hygino H. Domingues. **Introdução à história da matemática**. 5º ed. – Campinas – SP. pág. 172 - Editora da Unicamp - 2011.

Com o advento da Idade Média na Europa, por aproximadamente 10 séculos o estudo sobre Geometria Espacial permanece estagnado e limitaram-se as teorias da Geometria grega, e somente no século XIII depois de Cristo é que teremos Leonardo Fibonacci retomando o estudo da Geometria Espacial, publicando em 1220 sua *Practica Geometriae*, uma coletânea que versa sobre Geometria e Trigonometria (discussão sobre um análogo tridimensional do teorema de Pitágoras e as teorias de Euclides). (EVES, 2011).

As portas do período que ficou conhecido como o *Renascimento* (a parti do século XIV depois de Cristo), o estudo da Geometria Espacial ganhou novo impulso. No ano de 1615 Joannes Kepler classifica o *Steometria* (stereo-volume/metria-medida) o cálculo de volume. Já no ano 1669 o físico e matemático Inglês Isaac Newton cria os métodos de cálculo diferencial e integral. Desta maneira tornou-se provável calcular a área e o volume de uma figura geométrica qualquer, no espaço ou no plano seja qual fosse sua forma. Antes de Newton os cálculos de volume se limitavam a descoberta de fórmulas diferentes para cada forma de figura.

Os Elementos de Euclides tornou-se um marco histórico na sistematização dos estudos sobre Geometria, porém foram necessários transcorrer 20 séculos para que Carl Friedrich Gauss viesse a provar, no século XIX, a impossibilidade de demonstração do 5º postulado da obra euclidiana, e também inaugurar a constituição de uma geometria não euclidiana. Contemporaneamente, o húngaro Janos Boulay e o russo Nicolai Ivanovich Lobachevsky, trabalhando ambos de forma independente, elaboraram uma geometria na qual a premissa da paralela não fosse mais válida. Precisamente no ano de 1826 Lobachevsky dar vida a geometria não euclidiana, convencionando que, para os teoremas de Euclides serem verdadeiros é dispensável supor que só poderíamos construir uma paralela em relação a outra reta passando por um ponto fora do perímetro desta mesma reta. Este novo ramo da geometria passou a ser estudado somente na educação superior, face a suas aplicações a Física, como por exemplo, a *Teoria da Relatividade Restrita* e *Geral* de Albert Einstein.

Depois de toda essa evolução da geometria, seja ela euclidiana, ou não euclidiana, uma alternativa praxeológica para o ensino do calculo de volumes dos sólidos geométricos, como o Cone por exemplo, foram construídas para o ensino escolar. E torna-se indispensável, pensar, discutir e debater os termos desse modelo de calculo, objetivando testar sua praticidade enquanto produto de uma transposição didática válida, capaz de colaborar para construção do saber matemático e, consequentemente, para o processo de ensino-aprendizagem.

3. A GEOMETRIA ESPACIAL E A EDUCAÇÃO BÁSICA

Eves (2011) informa que os cálculos de área ou volume de sólidos geométricos, antes das inovações newtonianas, se limitavam a descoberta de fórmulas diferentes para o calculo de cada tipo de figura geométrica. Ou seja, seria preciso constituir variadas deduções matemáticas para obtenção de um modelo matemático capaz de calcular, apenas, uma forma de um dado sólido geométrico. Tendo em vista está falta de praticidade, de plano, resta claro que a tomada dos 13 postulados euclidianos, para fins de demonstração na educação básica, tornaria inviável a construção do saber matemático no que diz respeito à Geometria Espacial, face ao exagero de conceitos, demonstrações e deduções. O que resultaria em um previsível fracasso escolar.

Diante deste cenário fora necessário, ao longo dos anos, encontrar uma forma praxeológica, capaz de transpor este conhecimento cientifico, para um conhecimento escolar. Ou seja, era imperativo encontrar uma formar de calcular o volume de um sólido geométrico, de forma pratica e objetiva, através de um modelo simplificado (generalização). Neste sentido façamos um breve resgate dos exatos dizeres de Mello (2013), no tocante a relevância da transposição didática, *in verbs*:

> “A necessidade de se ensinar o conhecimento leva à necessidade de modificá-lo - e essa modificação é chamada de transposição didática. Ao entrarem para a escola, os objetos de conhecimento – o saber científico ou as práticas sociais – convertem-se em “objetos de ensino”, isto é, em conteúdo curricular. É preciso modificar o saber para que este se transforme em objeto de ensino "ensinável", isto é, em condições de ser aprendido pelo aluno. (...)”.
>
> (DE MELLO, 2013. p. 02).

Ainda nesta mesma trajetória de raciocínio, cabe trazer ao plano os escorreitos dizeres de Yvens Chevallard, grande autoridade sobre a temática transposição didática, *in verbs*:

> “Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática”.
>
> (CHEVALLARD, 1991 apud PAIS, 2002, p. 19).

A problemática é: para ensino na educação básica, haveria uma ‘formula’ capaz de oferecer, com precisão, o volume de um sólido geométrico, para qualquer tipo de dimensão que este venha a possuir?

Sendo ainda mais especifico na problematização: haveria uma única ‘formula’ capaz de oferecer, com precisão, o volume de um Cone, seja ele reto ou obliquo?

Para o calculo do volume de um sólido Cônico quaisquer, é normativo e consenso geral nos livros didáticos brasileiros, a proposição da seguinte formula abaixo descrita:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Onde, ***r*** corresponde ao raio da base do Cone e ***h*** a altura do mesmo.

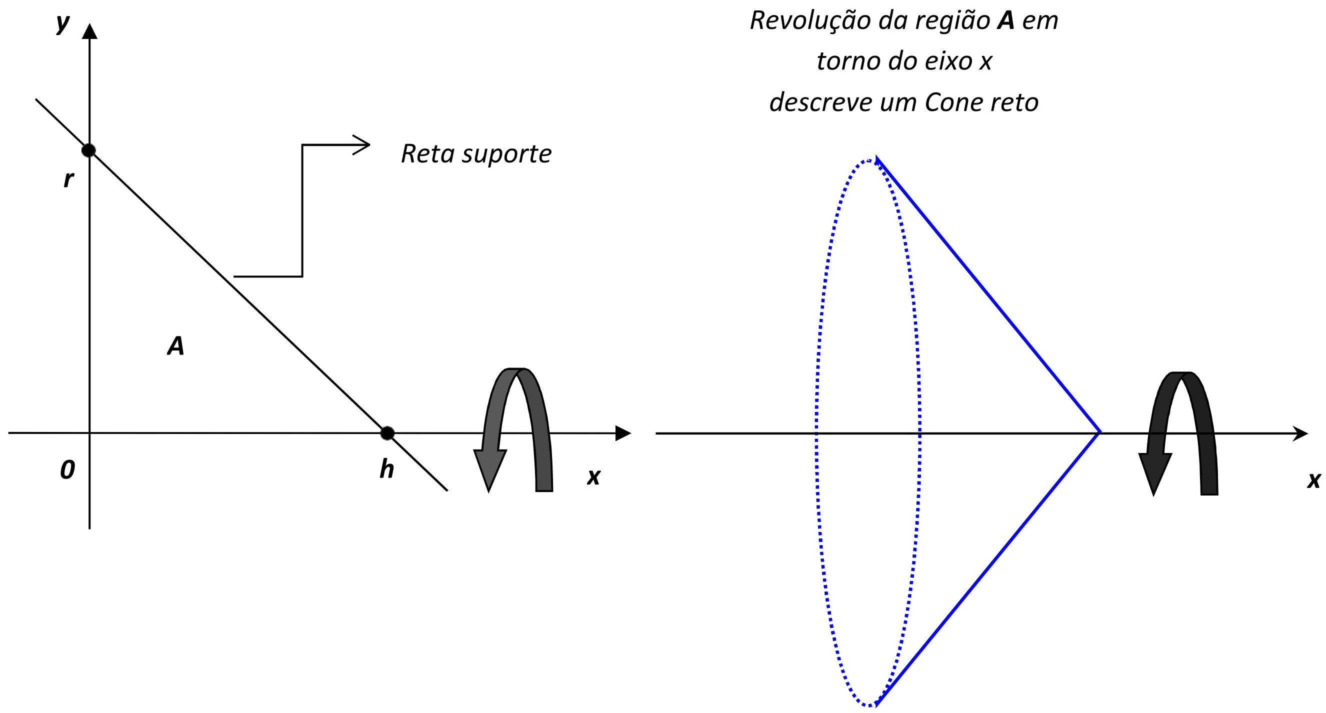
Dessa forma, surgem novos questionamentos: esta formula é valida? É capaz de calcular o volume de um Cone de qualquer dimensão? Facilita ou não a construção do conhecimento matemático? Transpôs-se ou não em um conhecimento em condições de ser aprendido pelo aluno?

Antes de testar na pratica este modelo, vejamos a partir das inovações newtonianas de calculo diferencial e integral, como foi possível obter tal generalização do calculo do volume de um sólido Cônico.

4. O MODELO CÔNICO

Vamos a seguinte questão:

Calcule o volume do sólido, obtido pela rotação do seguimento de reta suporte abaixo, em torno do eixo ***x***.



Obtendo a equação segmentária da reta suporte, teremos:

$$\frac{x}{h}+\frac{y}{r}=1$$

$$\frac{y}{r}=1-\frac{x}{h}$$

$$y=\left(1-\frac{x}{h}\right)\cdot r$$

$$y=r-\frac{rx}{h}$$

$$f(x)=r-\frac{rx}{h}$$

Aplicando o método do disco circular para revolução da região ***A*** sob a função $f(x) = r - \frac{rx}{h}$, obtemos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^h \left[r - \frac{rx}{h} \right]^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^h \left[r^2 - 2 \cdot r \cdot \frac{rx}{h} + \left(\frac{rx}{h} \right)^2 \right] dx$$

$$V = \pi \int_0^h \left[r^2 - \frac{2r^2 \cdot x}{h} + \frac{r^2 x^2}{h^2} \right] dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\int_0^h r^2 dx - \int_0^h \left(\frac{2r^2 \cdot x}{h} \right) dx + \int_0^h \left(\frac{r^2 \cdot x^2}{h^2} \right) dx \right]$$

$$V = \pi \cdot \left[r^2 x - \frac{2r^2 \cdot x^2}{2h} + \frac{r^2 \cdot x^3}{3h^2} \right]_0^h$$

$$V = \pi \cdot \left[r^2 h - \frac{r^2 \cdot h^2}{h} + \frac{r^2 \cdot h^3}{3h^2} \right]$$

$$V = \pi \cdot \left[r^2 h - r^2 h + \frac{r^2 \cdot h}{3} \right]$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{r^2 \cdot h}{3} \right]$$

$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}}$$

Como se nota, a generalização $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ fora obtida a partir de um processo de modelagem newtoniana. Neste sentido, espera-se que este modelo final obtido, que a partir daqui chamaremos de *Modelo Cônico*, seja capaz de simplificar todo e qualquer calculo de volume de sólidos Cônicos, sejam eles: Cones oblíquos ou Cones retos. E para fins de ratificação, vamos testá-lo a partir da proposição de problemas, onde previamente já tomaremos conhecimento do volume do Cone a ser estudado.

4.1 RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS

1. Um Cone oblíquo possui 56,5 cm³ de volume. Sabendo que o mesmo tem **6 cm** de altura e raio de base igual a **3 cm,** confirme, com base no *Modelo Cônico*, o volume do sólido em questão. Dado: π = 3,14.

Solução:

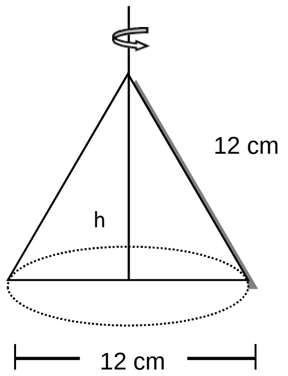
$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{3,14 \cdot 3^2 \cdot 6}{3}$$

$$V = 56,52\ cm^3$$

2. Um triângulo equilátero de **12 cm** de lado faz uma rotação de **180º** em torno de seu eixo. Sabendo que o volume do sólido geométrico gerado é de $72\pi\sqrt{3}\ cm^3$, teste a validade do *Modelo Cônico*?

Solução:



$$h = \frac{\lambda\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{12\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 6\sqrt{3}\ cm$$

$$V = \frac{\pi . r^2 . h}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3}}{3}$$

$$V = 72\pi\sqrt{3}\ cm^3$$

3. Um Cone reto possui 314 cm³ de volume. Sabendo que o mesmo tem **12 cm** de altura e raio de base igual a **5 cm,** confirme, com base no *Modelo Cônico*, o volume do sólido em questão. Dado: π = 3,14.

Solução:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 12}{3}$$

$$V = 314 \ cm^3$$

Como se nota, a partir dos problemas propostos, todos validaram o *Modelo Cônico* obtido pela modelagem newtoniana, seja para Cones oblíquos ou Cones retos. Acertadamente este modelo é apresentado nos livros didáticos como alternativa simplificada, capaz de proporcionar a resolução de problemas de Geometria Espacial, com eficiência e precisão, consolidando assim uma transposição didática conveniente, que consistiu em passar o conhecimento cientifico contido em os *Elementos* de Euclides, para o *Modelo Cônico* (conhecimento escolar), e contribuindo dessa forma para construção do saber matemático.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Imagine um aluno do 6º ano do ensino fundamental ou do 2º ano do ensino médio, no Brasil, sendo obrigado a proceder ao calculo do volume de Cone reto, a partir das demonstrações geométricas de Euclides em sua obra *Os Elementos*? Não restaria a menor duvida do quanto inviável seria a pratica do ensino-aprendizagem, se este tipo de conhecimento (cientifico) fosse inserido na educação básica. Neste sentido, não restam duvidas quanto à extrema necessidade de se constituir um modelo simplificativo, capaz de ilustrar com precisão, um dado fenômeno observado, sem precisar fazer uso de uma parafernália de demonstrações geométricas, que em nada contribuem para tornar a matemática mais atrativa e de fácil aprendizagem.

Ante aos testes desenvolvidos, restou claro a eficácia e praticidade para se calcular o volume de Cones, a partir do *Modelo Cônico*, que sabidamente é apresentado nos livros didáticos da rede de ensino brasileira. Tal instrumento, além de simplificar as resoluções para mensuração de volumes de sólidos Cônicos, pode ser facilmente aplicado por alunos da educação básica, facilitando a interatividade e o interesse pelo estudo da geometria, face a sua aplicabilidade a realidade concreta.

E aproveitando o ensejo, cabe aqui destacar que existem alguns problemas que corroboram para o fracasso escolar, no que tange o ensino da Geometria Espacial. A adoção, por exemplo, da necessidade de se expor detalhadamente, em sala de aula, a dedução de uma dada formula a ser aplicada, é um fator problema para o processo de ensino-aprendizagem. Este tipo de prática no ensino está na contra mão dos conceitos de transposição didática aqui mencionados, pois o educador passa a transferir o conhecimento cientifico (acadêmico) para a educação escolar, sem ter consciência do quanto isto é prejudicial para o aluno. Neste sentido, vamos aqui epigrafar as conclusões de Pereira (2001), que em sua revisão de literaturas sobre as causas do abandono do ensino da geometria na educação básica brasileira, identifica que:

> “(...) o despreparo dos docentes, em todos os níveis de ensino, conduziu escola a ministrar apenas conteúdos que elaboram um raciocínio mais algébrico (...)”. (PEREIRA, 2001. p. 57).

Acreditamos que, mesmo que o professor não exija um maior rigor algébrico no trato com a geometria em suas avaliações (provas), ainda sim as complexas manobras algébricas efetuadas, em sala de aula, para se chegar a uma formula, desenvolve no aluno um senso de inferioridade e complexidade (onde tudo na matemática parece ser difícil), por não conseguirem entender e compreender o que observam, e tão pouco estabelecer uma relação entre a teoria e a natureza que o cerca. E este senso de inferioridade e complexidade tende a se ampliar mais ainda quando o próprio professor erra, diante do aluno, no traquejo da dedução da formula a ser observada. Imaginemos um aluno da educação básica ter que ser obrigado a deduzir o *Modelo Cônico*, seja pelo *Principio de Cavalieri* (que demanda vários conceitos dos *Elementos* de Euclides); ou seja pelo método de modelagem newtoniana?

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTE, Luiz R.: **Matemática: Contexto & Aplicações – Vol 2**. São Paulo. Ed. Ática – 2011.

DE MELLO, Guiomar Namo. **Transposição Didática, Interdisciplinaridade e Contextualização**. Artigo – Universidade Federal do Ceará - 2013.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N.: **Fundamentos de Matemática Elementar**: **Geometria Espacial (posição e métrica) – Vol 10**. São Paulo. Ed. Atual – 2008.

EVES, Howard; tradução Hygino H. Domingues. **Introdução à história da matemática**. 5º ed. –, Campinas - SP: Editora da Unicamp - 2011.

LORENZATO, Sérgio. **Por que não ensinar Geometria**, Educação em Revista – Sociedade Brasileira Matemática – SBM, ano 3, n. 4 – 13, 1º sem. 1995.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 2º ed. Belo Horizonte: Autêntica - 2002.

PEREIRA, Maria Regina O. **A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino**. Dissertação de Mestrado, PUC/SP – 2001.

YOUSSEF, Antônio N.; SOARES, Elizabeth; FERNANDEZ, Vicente P.: **Matemática – Ensino Médio/Volume Único**. PNLEM – FNDE. São Paulo. Ed. Scipione – 2011.