COMPARACIÓN DE METODOLOGÍAS PARA FAVORECER EL PROCESO DE ENSEÑANZA EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES, MEDIANTE OPERADORES INVERSOS

José del Carmen Aréchiga Maravillas[1]
jarechiga03@gmail.com
Instituto Tecnológico de Colima

Johann Mejías Brito[2]
jbrito@itcolima.edu.mx

RESUMEN

La implementación de nuevas metodologías y estrategias para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje, surge como un requisito fundamental para el desarrollo de la docencia. Esta investigación pretende demostrar que la aplicación de los métodos abreviados con base en operadores inversos para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, produce mejores resultados en el aprendizaje en comparación de los métodos tradicionales de coeficientes indeterminados y variación de parámetros. Para desarrollar este objetivo se aplicó un diseño cuasi experimental con grupos: control y experimental, aplicando al primero los métodos tradicionales de coeficientes indeterminados y variación de parámetros y al segundo los métodos abreviados con operadores inversos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. En el estudio participaron 80 estudiantes de las carreras de Ingeniería Bioquímica y Mecatrónica del Instituto Tecnológico de Colima.

Palabras Clave: *Enseñanza de las matemáticas*, *Ecuación diferencial, Métodos abreviados, Operadores diferenciales inversos.*

Clasificación JEL: A22

ABSTRACT

The implementation of new methods and strategies to enhance the teaching and learning processes is emerging as a fundamental requirement for the development of teaching. This research aims to demonstrate that the application of shortcuts based on inverse operators for solving linear differential equations of higher order, produces better results in learning compared to traditional methods of undetermined coefficients and variation of parameters. To develop this aim, a quasi experimental groups: control and experimental, applying the first traditional methods of undetermined coefficients and variation of parameters and the second with shortcuts inverses for solving linear differential equations of higher order. The study included 80 students from the Mechatronics Engineering and Biochemistry Engineering of Instituto Tecnológico de Colima.

Keywords: *Mathematics education, differential equation, shortcuts, inverse differential operators.*

1. INTRODUCCIÓN

---

[1] Licenciado en Matemática, Maestro en Ciencias de la Educación, profesor e Investigador del Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Colima, México.

[2] Ingeniero en Mecanización Agropecuaria, Ingeniero Mecánico, Maestro en Ciencias, profesor e Investigador del Departamento de Ingeniería Industrial y Mecatrónica del Instituto Tecnológico de Colima, México.

La enseñanza de las matemáticas se ha convertido en un espacio de gran importancia para la humanidad y a la vez de gran interés científico. Según plantea González (2000), la sociedad reclama el tener conocimientos matemáticos, resulta difícil encontrar áreas del saber en las que no hayan hecho su aporte las matemáticas. Estudios realizados (Lapointe, Mead y Philips, 1989) muestran cómo la mayoría de las personas que no alcanzan el nivel de alfabetización mínimo como para desenvolverse en una sociedad moderna, encuentran las matemáticas aburridas y difíciles y se sienten inseguras a la hora de resolver problemas aritméticos sencillos; por otra parte, el tener conocimientos matemáticos se convierte en un importante filtro selectivo del sistema educativo, (González 2000).

Por lo tanto el desarrollo de nuevas metodologías para fortalecer los procesos de enseñanza, surge como una necesidad para el fomento de la investigación matemática, tomadas desde el razonamiento lógico, que permita al estudiante no solo memorizar instrucciones sino entender y comprender su amplio sentido. Según expresa Whitehead (1965), “Uno de los mayores problemas con que se enfrentan las matemáticas es el de explicar a los demás de qué tratan. Los aderezos técnicos de esta materia, su simbolismo y expresiones formales, su desconcertante terminología, su aparente deleitarse con cálculos larguísimos: todo ello tiende a ocultar su auténtico carácter”.

Unidad	Temas	Subtemas
2	Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.	2.1 Teoría preliminar- 2.1.1 Definición de ED de orden ***n***. 2.1.2 Problemas de valor inicial. 2.1.3 Teorema de existencia y unicidad de solución única. 2.1.4 EDL homogéneas. 2.1.4.1 Principio de superposición. 2.1.5 Dependencia e independencia lineal, wronskiano. 2.1.6 Solución general de las EDL homogéneas. 2.1.6.1 Reducción de orden de una EDL de orden dos a una de primer orden, construcción de una segunda solución a partir de otra ya conocida. 2.2 Solución de EDL homogéneas de coeficientes constantes. 2.2.1 Ecuación característica para EDL de segundo orden (raíces reales y distintas, raíces reales e iguales, raíces complejas conjugadas). 2.3 Solución de las EDL no homogéneas. 2.3.1 Método por coeficientes determinados. 2.3.2 Método de variación de parámetros. 2.4 Aplicaciones.

Figura 1. Contenidos de la unidad 2 del Programa de Ecuaciones Diferenciales ACF-0905, común para las carreras de Ingeniería Bioquímica e Ingeniería Mecatrónica del Instituto Tecnológico de Colima.

Las ecuaciones diferenciales son de importancia capital en todas las esferas de las ciencias, puesto que todas las leyes fundamentales tienen que ver con la característica más importante de la materia: el movimiento. El plan de estudios 2010 para las carreras de ingeniería en los Institutos Tecnológicos incluye la asignatura de Ecuaciones Diferenciales con clave ACF-0905. El contenido de esta materia está organizado en cuatro unidades, el contenido de la segunda unidad; “Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior”, se muestra en la Figura 1. Como se puede observar, en la segunda unidad de este programa de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes no homogéneas, vigente para las diferentes carreras (ingenierías) en

los Tecnológicos no incluye los métodos abreviados como una opción pertinente para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales (EDL) con coeficientes lineales no homogéneas, limitándose solo a los métodos de variación de parámetros y coeficientes indeterminados. Los métodos abreviados representan la ventaja metodológica de ser más cortos, rápidos y de una sencilla aplicación que al alumno representará una opción más versátil para la solución de EDL.
El curso de ecuaciones diferenciales es un campo fértil de aplicaciones ya que una ecuación diferencial describe la dinámica de un proceso; el resolverla permite predecir su comportamiento y da la posibilidad de analizar el fenómeno en condiciones distintas. En esta asignatura el estudiante consolida su formación matemática como ingeniero y se potencia su capacidad en el campo de las aplicaciones; aportando a su perfil una visión clara sobre el dinamismo de la naturaleza; habilidades para adaptarse a las diferentes áreas laborales de su competencia, dando respuesta a los requerimientos de la sociedad; el desarrollo de un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico al modelar sistemas dinámicos; un lenguaje y operaciones simbólicas que le permitirán comunicarse con claridad y precisión, hacer cálculos con seguridad y manejar representaciones gráficas para analizar el comportamiento de sistemas dinámicos. El presente trabajo consiste en una propuesta que vincula el conocimiento previo de las transformaciones lineales tratado en la asignatura de álgebra lineal con estos métodos abreviados bajo el enfoque de transformaciones lineales inversas.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Ecuaciones Diferenciales, competencias previas y sugerencias didácticas del programa de Ecuaciones Diferenciales

En la actualidad son numerosas son las definiciones que se aportan de ecuaciones diferenciales, según lo planteado por Varona (1996), se denomina ecuación diferencial (E. D.) a una ecuación que relaciona una función (o variable dependiente), su variable o variables (variables independientes), y sus derivadas. Si la ecuación contiene derivadas respecto a una sola variable independiente entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (E. D. O.); y si contiene las derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes se llama ecuación en derivadas parciales (E. D. P.).
Otros autores definen una ecuación diferencial (ED) es una ecuación que relaciona de manera no trivial a una función desconocida y una o más derivadas de esta función desconocida con respecto a una o más variables independientes. Si la función desconocida depende de una sola variable la ecuación diferencial se llama ordinaria, por el contrario, si depende de más de una variable, se llama parcial. Sin embargo todos coinciden en que las ecuaciones diferenciales son una herramienta básica en las ciencias y las ingenierías para el estudio de sistemas dinámicos

El programa de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales con clave ACF-0905 de la DGEST, establece como competencias previas las siguientes:

- Modelar una relación entre variables a través de funciones.
- Construir e interpretar gráficas de funciones típicas.
- Reconocer y aprovechar las propiedades de una función (simetría, periodicidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, entre otros).
- Leer e interpretar funciones en diferentes contextos. Extrapolación de conocimientos.
- Derivar e integrar funciones de una o más variables independientes.
- Interpretar a la derivada como una razón de cambio y expresar una razón de cambio como una derivada.
- Determinar e interpretar límites al infinito.
- Manejar un número complejo en sus diferentes representaciones.
- Calcular determinantes.
- Determinar y comprender la dependencia e independencia lineal de un conjunto de funciones.

Propone como sugerencias didácticas para la impartición del mismo que:

- El estudiante, con base en sus conocimientos previos, tiene la posibilidad de construir módulos matemáticos de una situación específica de ingeniería. Se sugiere que el profesor aproveche esta situación para orientar al estudiante en la consolidación de conceptos ya estudiados y en la formalización de otros, presentes en el modelo.
- Introducir métodos de solución de ecuaciones diferenciales propiciando la discusión y el análisis de situaciones problémicas que conlleven a la construcción de modelos, apoyándose en las leyes de la física (segunda de ley de Kirchhoff, segunda ley de Newton, ley de Hooke, ley de enfriamiento de Newton, entre otras).
- Para aprovechar las características de este curso, es conveniente ir y venir constantemente de la situación concreta al modelo, con la intención de elevar la capacidad de abstracción del estudiante.
- Diseñar proyectos cuya elaboración y desarrollo demanden del alumno.
- Proponer problemas que con su análisis y solución permitan vincular los contenidos de la asignatura, con los de otras asignaturas del plan de estudio, para desarrollar una visión interdisciplinaria en el estudiante.
- Promover el aprendizaje cooperativo con actividades de trabajo en equipo buscando que, en la discusión, el alumno pueda integrar, conceptualizar, relacionar, generalizar, estructurar y diferenciar ideas sobre los temas de estudio. Una manera de diseñar proyectos o problemas interesantes consiste en tomar problema típico complementarlo con actividades que busquen desarrollar algunas de las competencias mencionadas.
- Por las características de este curso se recomienda que constantemente el salón de clases se transforme en un laboratorio de matemáticas, para esto es necesario que el profesor diseñe las prácticas correspondientes, en este programa y a manera de ejemplo se presentan dos.
- Es conveniente generar un entorno propicio en el aula o laboratorio que promueva en el estudiante el uso de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (Mathcad, Mathematica, Maple, Matlab o calculadoras gráfico-simbólicas) que al ahorrar el trabajo operativo le permitan experimentar con la situación en estudio bajo distintas condiciones.
- Evitar exponer aquellos conceptos que puedan ser deducidos por los estudiantes, en su lugar, guiarlos con preguntas para que lo consigan por ellos mismos.
- Cuando la estrategia sea la exposición de un tema se recomienda mantener una actividad intelectual en el alumno, por ejemplo planteándoles preguntas que promuevan a la reflexión.
- Generar un ambiente de confianza en el que el estudiante exprese sus dudas e inquietudes y participe sin temor con sus ideas durante el desarrollo de los temas.

2.2 Operadores diferenciales lineales

Definición: Se dice que una transformación lineal $L: C^n(I) \to C(I)$ es un operador diferencial lineal de orden n sobre el intervalo I si puede expresarse de la forma

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_o(x)$$

Donde los coeficientes $a_o(x), \dots, a_n(x)$ son continuos en todos los puntos de I y el coeficiente principal $a_n(x)$ es diferente de cero en I.

De tal manera que la imagen de una función $f(x)$ en $C^n(I)$ bajo el operador diferencial lineal que se acaba de describir es la función en $C(I)$ definida por

$$L\,f(x) = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}f(x) + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx}f(x) + a_o(x)f(x)$$

O de manera más breve

$$L\,y = a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_o(x)y$$

En donde $y', \dots, y^{(n)}$ son las derivadas sucesivas de la función y= f(x)

2.3 Ecuaciones diferenciales lineales

Definición: Una ecuación diferencial lineal de orden "n" en un intervalo I es, una ecuación con operadores de la forma

$$\mathrm{Ly} = h(\mathrm{x})$$

Donde h(x) es continua en I, y L es un operador diferencial lineal de orden n definido en I. Una ecuación se dice que es homogénea si h(x) es idénticamente cero en I, en otro caso se dice que es no homogénea.

Definición: Se dice que y(x) es una solución de la ecuación diferencial, si y sólo si y(x) pertenece a $C^n(I)$ y satisface idénticamente la ecuación en I.

Ahora se verá como el álgebra lineal interviene en el estudio de las ecuaciones diferenciales
Se tiene la siguiente ecuación diferencial homogénea normal y de orden n en el intervalo I del eje de las x: $\mathrm{Ly} = 0$

Si se asume $L(y) = 0$, como una transformación lineal, entonces se estaría buscando el espacio nulo de L como el conjunto solución de la ecuación diferencial $\mathrm{Ly} = 0$.

Dado que el dominio de la transformación $C^n(I)$, es un espacio vectorial, se asume que el espacio solución de la ecuación diferencial homogénea de orden n, es un subespacio n-dimensional de $C^n(I)$, de tal suerte que será necesario determinar una base de n vectores para generar dicho subespacio, es decir se buscarán $y_1(x)$, ... , $y_n(x)$ soluciones linealmente independientes. De tal forma que todo solución quede representada por la siguiente combinación lineal. $y(x) = e_1y_1(x) + \cdots + e_ny_n(x)$, para números reales adecuados e .

Tomando estos conceptos del álgebra lineal también resultan pertinentes para el estudio de las ecuaciones diferenciales no homogéneas.

Definición: Si y_p es una solución particular cualquiera de la ecuación no homogénea $\mathrm{Ly} = h(\mathrm{x})$, y si y_h es la solución general de la ecuación homogénea asociada $\mathrm{Ly} = 0$, entonces la expresión y_p+y_h es la solución general de $\mathrm{Ly} = h(\mathrm{x})$.

En otras palabras, el conjunto solución de la ecuación diferencial lineal no homogénea puede encontrarse al sumar todas las soluciones de la ecuación homogénea asociada a cualquier solución particular de la ecuación diferencial dada.

Ejemplo: La ecuación diferencial de segundo orden $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$, tiene como soluciones las funciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$
La ecuación no homogénea $\frac{d^2y}{dx^2} - y = -x^3 - 5x^2 + 6x + 10$, tiene solución particular
$y_p(x) = x^3 + 5x^2$, por la tanto la solución general de la ecuación diferencial no homogénea está dada por la siguiente expresión $y(x) = e_1e^x + e_2e^{-x} + x^3 + 5x^2$

2.4 El operador derivada

Es esta sección se analiza a las ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes, a través del concepto de operador lineal (transformación lineal).

Para la solución de una ecuación diferencial homogénea se buscará una base para el núcleo del operador y se representará el conjunto solución de la siguiente manera:

$\{y(x): y(x) = y(x) = e_1y_1(x) + \cdots + e_ny_n(x), \text{ para } e_1, \dots, e_n \text{ reales }\}$

Para determinar la solución particular de una ecuación diferencial no homogénea se implementará el concepto de operador inverso (transformación inversa), para garantizar la existencia de la transformación inversa, se define apropiadamente el dominio de la transformación.

Definición: Sea $L: H \rightarrow C(I)$, una transformación uno a uno, entonces la transformada inversa está dada por, $L^{-1}: C(I) \rightarrow H$ donde $H = \{y: y \in C^n(I), \text{ no eontiene términos generados por la base del nueleo}\}$

De tal manera que si $L(y) = w(x)$, entonces $L^{-1}(w) = y(x)$, donde $y(x)$ es única y no contiene términos generados por la base del núcleo.

El inconveniente que se tiene es la falta de un método genérico que permita determinar la inversa del operador. A continuación se presenta algunas propiedades del operador derivada que permitirá definir algunas reglas para encontrar la inversa del operador para algunos casos de la función w(x)

2.4.1 Propiedades del operador derivada

Primera propiedad del operador derivada:

Sea x la variable independiente, aunque en otros casos puede ser t o cualquier otra letra previamente establecida.
Se define a:
$D = \frac{d}{dx}$, como el operador primera derivada
$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$, como el operador segunda derivada
$D^3 = \frac{d^3}{dx^3}$, como el operador tercera derivada
...
$D^n = \frac{d^n}{dx^n}$, como el operador n-ésima derivada

Consideremos para esta primera propiedad, funciones del tipo exponencial es decir:
$f(x) = e^{\pm ax}$, donde a es una constante. Aplicando el operador derivada e este tipo de funciones se tiene:

$D(e^{\pm ax}) = \pm a e^{\pm ax}$, $D^2(e^{\pm ax}) = \pm a^2 e^{\pm ax}$, $D^3(e^{\pm ax}) = \pm a^3 e^{\pm ax}$, … , $D^n(e^{\pm ax}) = \pm a^n e^{\pm ax}$

Sumando las igualdades anteriores se tiene:

$D(e^{\pm ax}) + D^2(e^{\pm ax}) + \cdots + D^n(e^{\pm ax}) = \pm a e^{\pm ax} + (\pm a^2 e^{\pm ax}) + (\pm a^3 e^{\pm ax}) + \cdots + (\pm a^n e^{\pm ax})$

Se factoriza $e^{\pm ax}$
$(D + D^2 + D^3 + \cdots + D^n)e^{\pm ax} = ((\pm a) + (\pm a^2) + (\pm a^3) + \cdots + (\pm a^n))e^{\pm ax}$

$$P(D)e^{\pm ax} = P(\pm a)e^{\pm ax}$$

Multiplicando la igualdad anterior por $\frac{1}{P(D)P(\pm a)}$, se tiene $\frac{1}{P(D)} e^{\pm ax} = \frac{1}{P(\pm a)} e^{\pm ax}$

Nota: La expresión $\frac{1}{P(D)}$, representa el operador inverso del polinomio $P(D)$

Ejemplo: Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 10e^{4x}$$

Solución homogénea:
Aplicando el concepto de polinomio diferencial tenemos: $(D^2 - 3D + 2)y = 0$
$\rightarrow (D - 1)(D - 2)y = 0$, se deduce que $D_1 = 1$ y $D_2 = 2$, donde el conjunto fundamental solución de la ecuación diferencial homogénea es: $\{e^x, e^{2x}\}$, por tanto la solución homogénea de la ecuación diferencial es:

$$y_h = e_1 e^x + e_2 e^{2x}$$

Solución particular:

Empleando Operador Diferencial o Derivada. De la ecuación

$$(D^2 - 3D + 2)y = 10e^{4x}$$

Aplicando a esta expresión la primera propiedad del operador diferencial se obtiene:
$y_p = \frac{1}{(D^2-3D+2)} 10e^{4x}$, evaluando el polinomio se tiene $y_p = \frac{1}{(4^2-3(4)+2)} 10e^{4x} = \frac{1}{6} 10e^{4x} = \frac{5}{3} e^{4x}$

Por lo tanto la solución general es: $y(x) = y_h + y_p = e_1e^{x} + e_2e^{2x} + \frac{5}{3} e^{4x}$

Segunda propiedad del operador derivada

Esta propiedad se aplica a funciones polinómicas de la forma $a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$

$$L(D)y = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \rightarrow y_p = \frac{1}{L(D)}(a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)$$

Donde $\frac{1}{L(D)}$ es un polinomio en "D", calculado en serie de orden "n"

Por ejemplo, si $L(D) = (a_o + a_1 D + a_2 D^2)$, entonces $\frac{1}{L(D)} = \frac{1}{a_o} - \frac{a_1}{a_o^2} D + \frac{-\frac{a_2}{a_o} + \frac{a_1^2}{a_o^2}}{a_o} D^2$, que es la serie de orden "3" o bien $\frac{1}{L(D)} = \frac{1}{a_o} - \frac{a_1}{a_o^2} D + \frac{-\frac{a_2}{a_o} + \frac{a_1^2}{a_o^2}}{a_o} D^2 + \frac{\frac{a_1a_2}{a_o^2} + \frac{(a_2a_o - a_1^2)a_1}{a_o^3}}{a_o} D^3$, que es la serie de orden "4"
Lo anterior depende si el polinomio es de grado dos o tres

Ejemplo: Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 4x^2 - 7x + 5$$

Solución homogénea:
Aplicando el concepto de polinomio diferencial tenemos $(D^2 - 5D + 6)y = 0$; $(D-3)(D-2)y = 0$, se deduce que $D_1 = 3$ y $D_2 = 2$, donde el conjunto fundamental solución de la ecuación diferencial homogénea es: $\{e^{3x}, e^{2x}\}$ por tanto la solución homogénea de la ecuación diferencial es:

$$y_h = e_1e^{3x} + e_2e^{2x}$$

Solución particular:
Empleando Operador Diferencial o Derivada. De la ecuación

$$(D^2 - 5D + 6)y = 4x^2 - 7x + 5$$

Aplicando a esta expresión la segunda propiedad del operador diferencial se obtiene:

$y_p = \frac{1}{(D^2-5D+6)}(4x^2 - 7x + 5)$, resolviendo $\frac{1}{(D^2-5D+6)}$ en serie de orden "3", se tiene que;
$y_p = (\frac{1}{6} + \frac{5}{36}D + \frac{19}{216}D^2)(4x^2 - 7x + 5)$
$y_p = \frac{1}{6}(4x^2 - 7x + 5) + \frac{5}{36}D(4x^2 - 7x + 5) + \frac{19}{216}D^2(4x^2 - 7x + 5)$
$y_p = (\frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{5}{6}) + \frac{5}{36}(8x - 7) + \frac{19}{216}(8)$
$y_p = (\frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{5}{6}) + \frac{5}{36}(8x - 7) + \frac{19}{216}(8)$
$y_p = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{18}x + \frac{61}{108}$

Por lo que la solución general es: $y(x) = y_h + y_p = e_1e^{3x} + e_2e^{2x} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{18}x + \frac{61}{108}$

Tercera propiedad del operador derivada

Para esta propiedad se consideran funciones de la forma $\mathrm{sen}(ax+b), \cos(ax+b)$, $\mathrm{sen}(ax)$ y $\cos(ax)$

$$D(\mathrm{sen}(ax+b)) = \frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(ax+b)) = a\mathrm{eos}(ax+b)$$

$$D^2(\mathrm{sen}(ax+b)) = \frac{d^2}{dx^2}(\mathrm{sen}(ax+b)) = -a^2\,\mathrm{sen}(ax+b)$$

$$D^3(\mathrm{sen}(ax+b)) = \frac{d^3}{dx^3}(\mathrm{sen}(ax+b)) = -a^3\,\mathrm{eos}(ax+b)$$

$$D^4(\mathrm{sen}(ax+b)) = \frac{d^4}{dx^4}(\mathrm{sen}(ax+b)) = a^4\,\mathrm{sen}(ax+b)$$

En las derivadas anteriores se observa que en los órdenes pares se repite la función seno, por lo que se puede sustituir $D^2 = -a^2$, de tal forma que $D^4 = (D^2)^2 = (-a^2)^2 = a^4$, de lo anterior se infiere

$$y_p = \frac{1}{F(D^2)}\mathrm{sen}(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)}\mathrm{sen}(ax+b)$$

Para la función es similar:

$$y_p = \frac{1}{F(D^2)}\mathrm{eos}(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)}\mathrm{eos}(ax+b)$$

Ejemplo: Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 20\cos(4x)$$

Solución homogénea:

Aplicando el concepto de polinomio diferencial tenemos:$(D^2+5D+6)y = 0$; $(D+2)(D+3)y = 0$ se deduce que $D_1 = -2$ y $D_2 = -3$, donde el conjunto fundamental solución de la ecuación diferencial homogénea es: $\{e^{-2x}, e^{-3x}\}$ por tanto la solución homogénea de la ecuación diferencial es:

$$y_h = e_1e^{-2x} + e_2e^{-3x}$$

Solución particular:

Empleando Operador Diferencial o Derivada. De la ecuación

$$(D^2+5D+6)y = 20\cos(4x)$$

Aplicando a esta expresión la tercera propiedad del operador diferencial se obtiene:

$y_p = \frac{1}{(D^2+5D+6)}20\cos(4x)$, evaluando el polinomio se tiene

$$y_p = \frac{1}{(-16+5D+6)}20\cos(4x) = \frac{1}{(-1o+5D)}\left(\frac{5D+1o}{5D+1o}\right)20\cos(4x) = \frac{5D+1o}{(25D^2-1oo)}20\cos(4x)$$

$$y_p = \frac{5D+10}{(25(-16)-100)}20\cos(4x) = \frac{5D+10}{(25(-16)-100)}20\cos(4x) = \frac{5D+10}{-500}20\cos(4x)$$

$$y_p = \left(-\frac{1}{5}D - \frac{2}{5}\right)\cos(4x) = -\frac{1}{5}(-4\mathrm{sen}(4x)) - \frac{2}{5}\cos(4x) = \frac{4}{5}\mathrm{sen}(4x) - \frac{2}{5}\cos(4x)$$

Por lo tanto la solución general es: $y(x) = y_h + y_p = e_1e^{-2x} + e_2e^{-3x} + \frac{4}{5}\mathrm{sen}(4x) - \frac{2}{5}\cos(4x)$

Cuarta propiedad del operador derivada

En esta propiedad se considera una función cualquiera de x, llamada u(x) multiplicada por la función exponencial $e^{\pm ax}$ es decir: $u(x)e^{\pm ax}$

Esta propiedad permite anteponer la exponencial al operador derivada, afectando a este último únicamente a la función u(x).

Si en lugar del operador D aplicamos a éste tipo de funciones un P(D) (polinomio en D), entonces:

$$P(D)u(x)e^{\pm ax} = e^{\pm ax}P(D \pm a)u(x)$$

$$y_p = \frac{1}{P(D)}u(x)e^{\pm ax} = e^{\pm ax}\ \frac{1}{P(D \pm a)}u(x)$$

Ejemplo: Determinar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} + 6y = 8e^{2x}\cos(3x)$$

Solución homogénea:
Aplicando el concepto de polinomio diferencial tenemos: $(D^3 + 6D^2 + 11D + 6)y = 0$; $(D + 1)(D + 2)(D + 3)y = 0$, se deduce que $D_1 = -1$ $D_2 = -2$ y $D_3 = -3$, donde el conjunto fundamental solución de la ecuación diferencial homogénea es: $\{e^{-x}, e^{-2x}, e^{-3x}\}$, por tanto la solución homogénea de la ecuación diferencial es:

$$y_h = e_1e^{-x} + e_2e^{-2x} + e_3e^{-3x}$$

Solución particular:

Empleando Operador Diferencial o Derivada. De la ecuación

$$(D^3 + 6D^2 + 11D + 6)y = 8e^{2x}\cos(3x)$$

Aplicando el concepto de operador inverso para determinar la solución particular se tiene:

$y_p = \frac{1}{(D^3+6D^2+11D+6)}8e^{2x}\cos(3x)$, aplicando la cuarta regla se tiene

$$y_p = 8e^{2x}\frac{1}{((D+2)^3+6(D+2)^2+11(D+2)+6)}\cos(3x) = 8e^{2x}\frac{1}{(D^3+12D^2+47D+60)}\cos(3x)$$

Ahora se aplica la tercera regla

$$y_p = 8e^{2x}\frac{1}{(DD^2 + 12D^2 + 47D + 60)}\cos(3x) = 8e^{2x}\frac{1}{(D(-9) + 12(-9) + 47D + 60)}\cos(3x)$$

$$= 8e^{2x}\frac{1}{(38D - 48)}\left(\frac{38D + 48}{38D + 48}\right)\cos(3x) = 8e^{2x}\frac{38D + 48}{(1444D^2 - 2304)}\cos(3x)$$

$$= 8e^{2x}\frac{38D + 48}{(1444(-9) - 2304)}\cos(3x) = -\frac{8}{15300}e^{2x}(38D(\cos(3x)) + 48\cos(3x))$$

$$y_p = -\frac{8}{15300}e^{2x}(-114\operatorname{sen}(3x) + 48\cos(3x)) = \frac{76}{1275}e^{2x}\operatorname{sen}(3x) - \frac{32}{1275}e^{2x}\cos(3x)$$

Por lo tanto la solución general es:

$$y(x) = y_h + y_p = e_1e^{-x} + e_2e^{-2x} + e_3e^{-3x} + \frac{76}{1275}e^{2x}\operatorname{sen}(3x) - \frac{32}{1275}e^{2x}\cos(3x)$$

Quinta propiedad del operador derivada
Las funciones que se consideran para este caso son $f(x) = x^r u(x)$

$$\frac{1}{P(D)}x^r u(x) = \left[\left(x + \frac{d}{dD}\right)^r \frac{1}{P(D)}\right]u(x)$$

Ejemplo: Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 5xe^{4x}$$

Solución homogénea:
Aplicando el concepto de polinomio diferencial tenemos: $(D^2 - 3D + 2)y = 0$ $(D - 1)(D - 2)y = 0$ se deduce que $D_1 = 1$ y $D_2 = 2$, donde el conjunto fundamental solución de la ecuación diferencial homogénea es: $\{e^x, e^{2x}\}$ por tanto la solución homogénea de la ecuación diferencial es:

$$y_h = e_1e^x + e_2e^{2x}$$

Solución particular:

Empleando Operador Diferencial o Derivada. De la ecuación

$$(D^2 - 3D + 2)y = 5xe^{4x}$$

Aplicando a esta expresión la quinta propiedad del operador diferencial se obtiene:

$$y_p = \frac{1}{(D^2 - 3D + 2)} 5xe^{4x} = 5\left(x + \frac{d}{dD}\right)\frac{1}{(D^2 - 3D + 2)} e^{4x}$$

$$= 5x \frac{1}{(D^2 - 3D + 2)} e^{4x} + 5 \frac{d}{dD}\left(\frac{1}{(D^2 - 3D + 2)}\right) e^{4x}$$

$$= 5x \frac{1}{(D^2-3D+2)} e^{4x} + 5\left(\frac{-2D+3}{(D^2-3D+2)^2}\right) e^{4x} = 5x \frac{1}{(4^2-3(4)+2)} e^{4x} + 5\left(\frac{-2(4)+3}{(4^2-3(4)+2)^2}\right) e^{4x} = \frac{5}{6}xe^{4x} - \frac{25}{36}e^{4x},$$

Por lo tanto la solución general es: $y(x) = y_h + y_p = e_1e^x + e_2e^{2x} + \frac{5}{6}xe^{4x} - \frac{25}{36}e^{4x}$

3. MATERIALES Y MÉTODOS

Este trabajo es una investigación experimental que presenta la manipulación de una variable experimental no comprobada, la aplicación de los métodos abreviados con operadores diferenciales inversos, para la solución de Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden Superior, con el fin de producir un aprendizaje más significativo en las Ecuaciones Diferenciales. En el experimento, el investigador maneja de manera deliberada la variable experimental y luego observa lo que ocurre en condiciones controladas. La experimentación es la repetición voluntaria de los fenómenos para verificar su hipótesis.

El diseño es un Cuasi experimento donde se manipulan deliberadamente al menos un variable independiente para ver su efecto y relación con una y más variables dependientes, solamente que difieren de los experimentos verdaderos en el grado de seguridad o confiabilidad, dado que no se tiene equivalencia inicial de los grupos. En este estudio los sujetos no son asignados al azar a los grupos emparejados, si no que dichos grupo ya estaban formados antes del experimento. En la segunda unidad del curso se aplicaron los métodos abreviados con operadores inversos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior grupo experimental en contraste se aplicaron los métodos tradicionales de coeficientes indeterminados y variación de parámetros al grupo control. Participaron 80 estudiantes elegidos por muestreo no probabilístico en forma intencional y distribuidos en dos grupos ya formados; como muestra experimental se tomó el grupo de 3° se mestre de Ing. Bioquímica con 43 alumnos y de control al grupo de 5° semestre de In g. Mecatrónica con 37 alumnos, del Instituto Tecnológico de Colima. En la prueba estadística de la Hipótesis de Investigación se utilizará la prueba “Z”, para la comparación de medias, utilizando un coeficiente de significancia de $a = 5\%$

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las evidencias aportadas para la prueba estadística de la hipótesis de Investigación consisten en los resultados obtenidos de la evaluación de la segunda unidad del curso, de los dos grupos, el experimental y el grupo testigo, los que pueden observarse en la Tabla 1.

Tabla 1. Resultados de la evaluación.

Grupo experimental		Grupo control	
Media	78.3255814	Media	74.0810811
Error típico	1.87207755	Error típico	2.88762982
Mediana	80	Mediana	76
Moda	70	Moda	50
Desviación estándar	12.2760334	Desviación estándar	17.5647665
Varianza de la muestra	150.700997	Varianza de la muestra	308.521021
Curtosis	0.1675722	Curtosis	-1.22510292
Coeficiente de asimetría	-0.42074796	Coeficiente de asimetría	-0.15192539
Rango	50	Rango	50
Mínimo	50	Mínimo	50
Máximo	100	Máximo	100
Suma	3368	Suma	2741
Cuenta	43	Cuenta	37
Porcentaje de aprobación	93%	Porcentaje de aprobación	73%
Nivel de confianza (95.0%)	3.7780054	Nivel de confianza (95.0%)	5.85638467
Estadístico de prueba para las medias:	1.23337242	Estadístico de prueba para las proporciones:	2.41808086

Hipótesis de investigación: "Se producen mejores resultados en el aprendizaje para resolver Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior mediante la aplicación de los métodos abreviados con base en operadores inversos, en comparación de los métodos tradicionales de coeficientes indeterminados y variación de parámetros."
Para probar la hipótesis general es necesario realizar dos pruebas estadísticas; una prueba de diferencia de medias y una prueba de diferencia de proporciones.

Parte 1
Hipótesis estadísticas:
H_o: "El promedio de calificaciones en la segunda unidad del curso de Ecuaciones diferenciales, del grupo experimental no es significativamente mayor que del grupo control"
H_1: "El promedio de calificaciones en la segunda unidad del curso de Ecuaciones diferenciales, del grupo experimental es significativamente mayor que del grupo control"
H_o: $\mu_2 \leq \mu_1$ $\quad$ H_o: $\mu_2 - \mu_1 \leq 0$
H_1: $\mu_2 > \mu_1$ $\quad$ H_1: $\mu_2 - \mu_1 > 0$
Estadístico de prueba:
Dado que los grupos experimental y testigo son de un tamaño mayor o igual a 30, entonces se utiliza la prueba "Z"

$$Z = \frac{(X_2 - X_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{S_2^2}{n_2} + \frac{S_1^2}{n_1}}}$$

Nivel de significancia:
Para determinar si existe suficiente evidencia, para rechazar o no rechazar la hipótesis nula, se utiliza un nivel de significancia de $a = 0.05$
Criterio de Prueba:
Se determina las regiones de rechazo y no rechazo de la hipótesis nula.

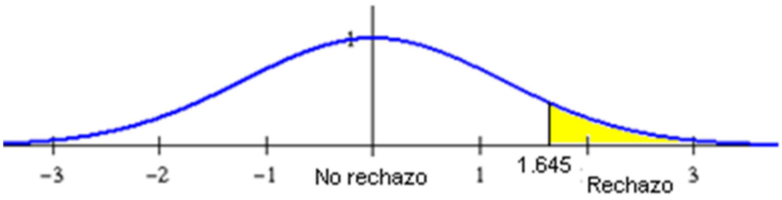

Figura 2. Regiones de rechazo y no rechazo de la hipótesis nula.

Si el valor del estadístico de prueba es mayor a 1.645, entonces se rechaza la hipótesis nula, por lo contrario no se rechaza la hipótesis nula.

Cálculo del valor del estadístico de prueba:

$$Z = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{S_2^2}{n_2} + \frac{S_1^2}{n_1}}} = \frac{(78.33 - 74.08) - (0)}{\sqrt{\frac{150.7}{43} + \frac{308.52}{37}}} = 1.23$$

Resultados

Dado que el valor del estadístico de prueba Z= $1.23 < 1.645$, entonces no se rechaza la hipótesis nula, es decir, las calificaciones obtenidas en los dos grupos, experimental y de control, no aportan suficiente evidencia para establecer que el promedio de las calificaciones del grupo experimental es significativamente mayor al promedio del grupo control.

Prueba de diferencia de proporciones

Hipótesis estadísticas:

H_o: "El porcentaje de aprobación en la segunda unidad del curso de Ecuaciones diferenciales, del grupo experimental no es significativamente mayor que del grupo control"

H_1: "El porcentaje de aprobación en la segunda unidad del curso de Ecuaciones diferenciales, del grupo experimental es significativamente mayor que del grupo control"

$H_o: p_2 \leq p_1 \qquad H_o: p_2 - p_1 \leq 0$

$H_1: p_2 > p_1 \qquad H_1: p_2 - p_1 > 0$

Estadístico de prueba:

Dado que los grupos experimental y testigo son de un tamaño mayor o igual a 30, entonces se utiliza la prueba "Z"

$$Z = \frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) - (p_2 - p_1)}{\sqrt{\frac{(\bar{p}_2)(1 - \bar{p}_2)}{n_2} + \frac{(\bar{p}_1)(1 - \bar{p}_1)}{n_1}}}$$

Nivel de significancia:

Para determinar si existe suficiente evidencia, para rechazar o no rechazar la hipótesis nula, se utiliza un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$

Criterio de Prueba:

Se determina las regiones de rechazo y no rechazo de la hipótesis nula.

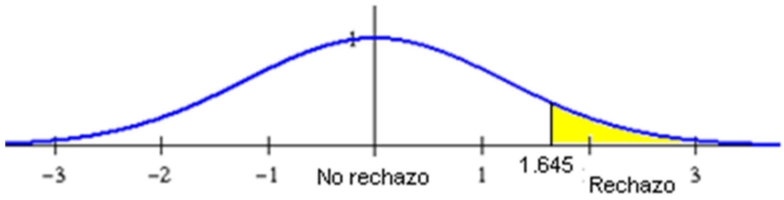

Figura 3. Regiones de rechazo y no rechazo de la hipótesis nula.

Si el valor del estadístico de prueba es mayor a 1.645, entonces se rechaza la hipótesis nula, por lo contrario no se rechaza la hipótesis nula.

Cálculo del valor del estadístico de prueba:

$$Z = \frac{(p_2 - \bar{p}_1) - (p_2 - p_1)}{\sqrt{\frac{(\bar{p}_2)(1-\bar{p}_2)}{n_2} + \frac{(\bar{p}_1)(1-\bar{p}_1)}{n_1}}} = \frac{(0.93 - 0.73) - (0)}{\sqrt{\frac{(0.93)(0.07)}{43} + \frac{(0.73)(0.27)}{37}}} = 2.418$$

Conclusión:

Dado que el valor del estadístico de prueba $Z = 2.418 > 1.645$, entonces si se rechaza la hipótesis nula, es decir, las calificaciones obtenidas en los dos grupos, experimental y de control, aportan suficiente evidencia para establecer que el porcentaje de aprobación del grupo experimental es significativamente mayor al porcentaje del grupo control.

5. CONCLUSIONES

Los aspectos más relevantes que observaron, a modo de conclusiones son:

- Con la aplicación de los métodos abreviados para la resolución se ecuaciones diferenciales, se pudo contar con una holgura de tiempo para dedicarlo a la resolución de problemas contextualizados.

- Con respecto al promedio de calificaciones de los grupos experimental y de control, si bien no hubo evidencia estadística para establecer una diferencia significativa, si se observa una diferencia aritmética de casi 4 centésimas.

- En relación al porcentaje de aprobación de los grupos experimental y de control, si hubo suficiente evidencia para establecer una diferencia significativa entre la proporción de aprobados del grupo experimental en comparación con el grupo control.

6. BIBLIOGRAFÍA

BARANENKO, G. (1988). Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático, Editorial Mir, Moscú.

BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C. (2004). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. México. Editora Limusa Wiley.

DE LAS FUENTES MAXIMILIANO, ARCOS JOSÉ L. Y NAVARRO CARLOS R. (2010). Impacto en las Competencias Matemáticas de los Estudiantes de Ecuaciones Diferenciales a Partir de una Estrategia Didáctica que Incorpora la Calculadora, Formación Universitaria, Vol. 3(3), 33-44.

GONZÁLEZ, T. (2000). Metodología para la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas: Un estudio evaluativo. Revista de Investigación Educativa, Vol. 18, No.1, páginas. 175-199.

GROSSMAN S. I.(2007). Álgebra Lineal. Editorial McGraw Hill, México.

KREIDER D. L., KULLER R. G., OSTBERG DONALD R. (1973) Ecuaciones Diferenciales. Fondo Educativo Interamericano, S.A.

MADALENA DULLIUS, MARÍA. (2009). Enseñanza y Aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con Abordaje Gráfico, Numérico y Analítico. Tesis Doctoral, Universidad de Burgos.

NAGLE R. K., SAFF E. B., SNIDER ARTHUR DAVID. (2001). Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la Frontera. Addison Wesley.

PERDOMO, J. (2011). Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Volumen 78, 113–134.

ZILL, D. G. (2002).Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado. México. Editora Thompson Learning.

GARCÍA, V. (2005). El origen de la integral. [Documento en línea]. Disponible en: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ezuazua/informweb/trabajodehistoria/El_origen_de_la_integral.doc [Consultada: Noviembre 2012]

WHITEHEAD A. N. (1965). Mathematics and Liberal Education, Journal of the Association of Teachers of Mathematics for the Southeastern Part of England. Volume I, Number 1 in a philosopher looks at science, (Philosophers Library) New York.

VARONA, J. L. (1996). Métodos clásicos ´de resolución de ´ecuaciones diferenciales ordinarias. Servicio de Publicaciones Universidad de la Rioja. España.