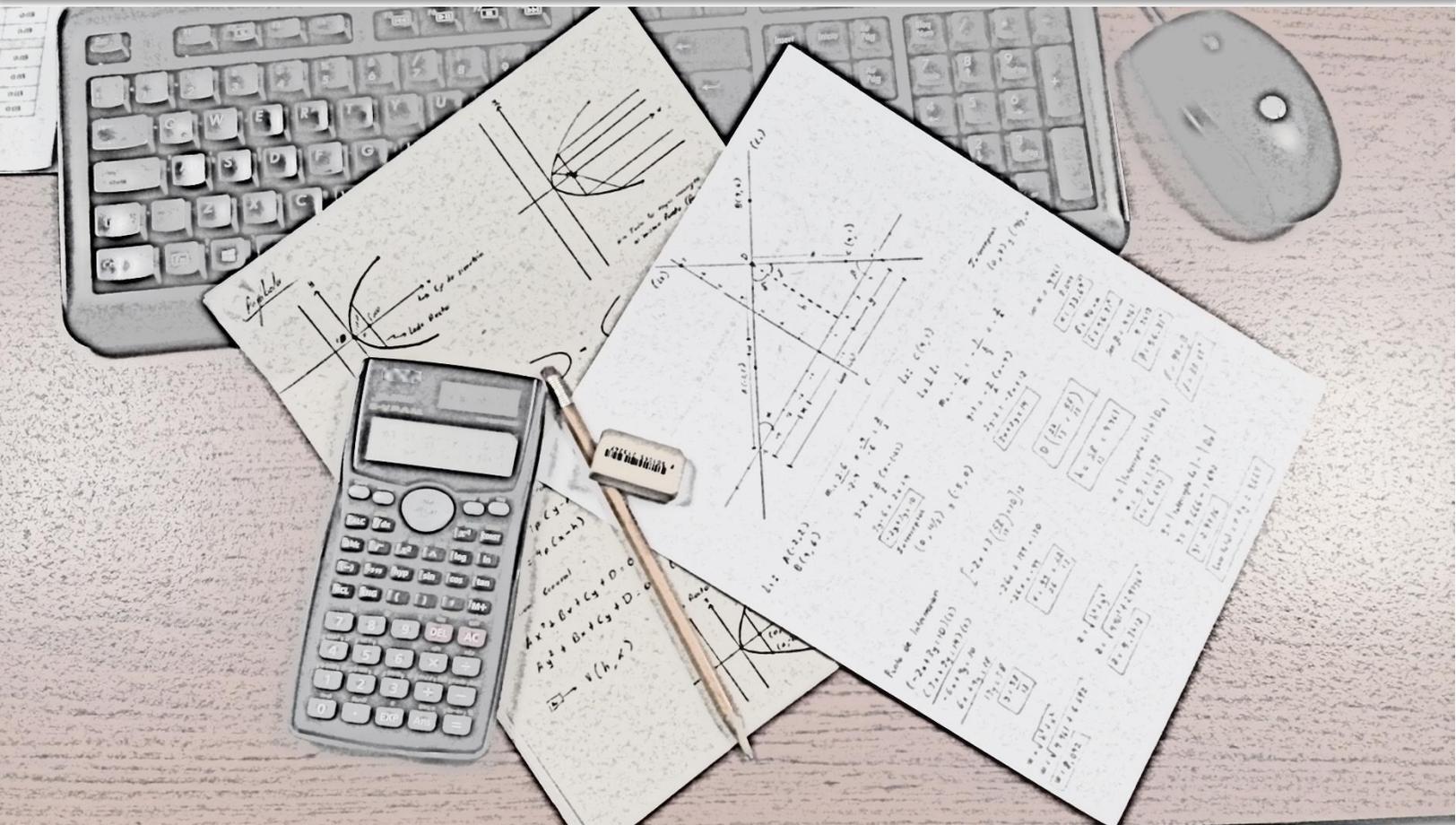


# INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS

---

## para las Ciencias Económico - Administrativas



**Dr. Edmundo Jesús Laurencio Castillo**  
**Dra. Elizabeth Guadalupe Chong González**  
**Mtra. María Azucena González Baltazar**



Dr. Edmundo Jesús Laurencio Castillo  
Dra. Elizabeth Guadalupe Chong González  
Mtra. María Azucena González Baltazar

Introducción a las Matemáticas para las Ciencias Económico - Administrativas

ISBN: 978-84-17211-80-6

1ª edición

Primera edición en español (2018)

DR. © Universidad Politécnica del Valle de Toluca

Licenciatura en Negocios Internacionales

Cuerpo Académico de Negocios Internacionales

Línea de investigación: Desarrollo Económico con énfasis en Negocios Internacionales

Carretera Toluca - Almoloya de Juárez km. 5.6 Santiaguito Tlalcilcali, Almoloya de Juárez, Estado de México C.P. 50904

Revisión Técnica:

Dra. Ariadna Velázquez Arriaga. Universidad Tecnológica de México

Mtra. Catalina Correa Ramos. Universidad Autónoma del Estado de México

Mtro. José Eduardo Almazán Mercado. Universidad Autónoma del Estado de México

Diseño de formato para edición y portada:

Dr. Edmundo Jesús Laurencio Castillo

e-mail: [edmundolaurencio@upvt.edu.mx](mailto:edmundolaurencio@upvt.edu.mx)

Imagen de portada. Maths Desktop. LNI UPVT. Foto. EJLC 2018

## ACERCA DE LOS AUTORES

---

### Dr. Edmundo Jesús Laurencio Castillo

Egresado de la Universidad Autónoma del Estado de México como Ingeniero en Computación, Maestro en Educación y Doctor en Administración, actualmente Profesor Investigador de la Licenciatura en Negocios Internacionales en la Universidad Politécnica del Valle de Toluca, Facilitador de materias como Introducción a las Matemáticas, Métodos Numéricos y Probabilidad y Estadística.

Mail: [edmundolaurencio@upvt.edu.mx](mailto:edmundolaurencio@upvt.edu.mx)

### Dra. Elizabeth Guadalupe Chong González

Profesora investigadora de la Universidad Politécnica del Valle de Toluca, Licenciada en Actuaría Financiera, Maestra en Economía y Doctora en Ciencias por la Universidad Autónoma del Estado de México. Catedrática en las materias de: Introducción a las Matemáticas, Cálculo Diferencial e Integral, Matemáticas Financieras, Métodos Cuantitativos, Probabilidad y Estadística.

Mail: [elizabethchong@upvt.edu.mx](mailto:elizabethchong@upvt.edu.mx)

### Mtra. María Azucena González Baltazar

Maestra en Economía por la Universidad Autónoma del Estado de México, con formación Matemática, actualmente se desempeña como profesora de asignatura en la Universidad Politécnica del Valle de Toluca, impartiendo materias relacionadas con su formación, así como profesora de asignatura en la facultad de Economía de la UAEMex.

Mail: [maria.azucena@upvt.edu.mx](mailto:maria.azucena@upvt.edu.mx)

INTRODUCCIÓN.....	7
UNIDAD 1, EXPRESIONES ALGEBRAICAS .....	9
INTRODUCCIÓN.....	9
CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS .....	9
PRIORIDAD DE OPERACIONES.....	11
OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES .....	15
Suma de dos fracciones.....	15
Caso especial de la suma de fracciones .....	16
Suma y Resta de tres fracciones .....	19
Multiplicación de fracciones.....	22
División de fracciones.....	23
EXPRESIÓN ALGEBRAICA.....	26
Término Algebraico .....	26
Monomios y Polinomios.....	27
Suma y Resta de dos Monomios .....	28
Multiplicación de dos monomios .....	29
División de dos monomios .....	30
Suma y Resta de Polinomios.....	33
Multiplicación de Polinomios.....	34
División de Polinomios.....	36
Polinomio entre Monomio.....	37
Polinomio entre Polinomio .....	38
Algunas aplicaciones .....	42
UNIDAD 2, PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN.....	46
INTRODUCCIÓN.....	46
PRODUCTOS NOTABLES .....	46
Binomio al cuadrado .....	46
Binomios conjugados.....	47

Binomio al cubo .....	49
Suma de cubos y Diferencia de cubos.....	50
TRIÁNGULO DE PASCAL .....	51
FACTORIZACIÓN .....	55
Factor común .....	55
Factor común por agrupación de términos.....	55
Trinomio cuadrado perfecto .....	57
Diferencia de cuadrados.....	57
Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ .....	58
Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ .....	58
SOLUCIÓN DE ECUACIONES POR FACTORIZACIÓN .....	59
Completar el cuadrado .....	60
Ejercicios propuestos de factorización.....	63
SIMPLIFICACIÓN, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS .....	65
Simplificación de fracciones algebraicas .....	65
Simplificación de una fracción compuesta .....	68
Multiplicación de fracciones algebraicas.....	69
División de fracciones algebraicas.....	70
Suma y resta de fracciones algebraicas con denominadores iguales .....	72
Algunas Aplicaciones.....	74
UNIDAD 3, SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES .....	76
INTRODUCCIÓN.....	76
ECUACIONES LINEALES .....	77
Ecuación .....	77
Solución de una ecuación lineal.....	77
PROPIEDADES DE LA ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN DE LA IGUALDAD .....	77
SISTEMAS DE ECUACIONES .....	81
Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2 X 2 .....	81
Métodos de Solución de Ecuaciones Lineales de 2 X 2 (dos ecuaciones con dos variables) .....	81
Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por Eliminación.....	81
Solución de Sistemas Lineales por Sustitución.....	84

Solución de Sistemas Lineales por Igualación .....	86
Método por Determinantes (Regla de Cramer) .....	88
Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales en forma Gráfica .....	91
Sistemas de Ecuaciones Lineales de 3 X 3 (tres ecuaciones con tres variables) .....	93
Solución de Sistemas Lineales de 3 X 3, por Regla de Cramer. ....	96
Algunas Aplicaciones.....	99
UNIDAD 4, FUNDAMENTOS DE TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA.....	107
INTRODUCCIÓN.....	107
FUNDAMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA.....	107
Función Lineal.....	108
La Pendiente de una Recta .....	108
Forma de la Ecuación de una Recta .....	114
Ecuación General de una Recta [EGR] a partir de un punto y una pendiente .....	116
Ecuación General de una Recta [EGR] a partir de dos puntos.....	119
Rectas Paralelas y Perpendiculares.....	121
TRIGONOMETRÍA.....	124
Tipos de Triángulos.....	124
Tipos de Ángulos .....	125
Razones Trigonométricas .....	129
Ejercicios propuestos.....	139
BIBLIOGRAFÍA.....	141

## INTRODUCCIÓN

---

Una de las principales preocupaciones al momento de analizar, diseñar y desarrollar el contenido de este libro, fue la necesidad de estandarizar el temario de la materia de Introducción a las Matemáticas, la cual se imparte en el primer cuatrimestre de la Licenciatura en Negocios Internacionales y sirve como antecedente para materias como Cálculo Diferencial e Integral, Probabilidad y Estadística, Economía, Métodos Cuantitativos para la Toma de Decisiones, Matemáticas Financieras, entre otras; por esta razón, la importancia de cimentar bases algebraicas sólidas en los alumnos, sin importar el docente que imparta la materia, pues su trascendencia impacta de manera importante en su formación profesional.

Otra de las razones que incentivaron la creación de este material, fue apoyar en el desarrollo académico de los alumnos, quienes, aunado a las clases presenciales, ahora podrán disponer de una guía que les permita ser autodidactas, repasar los temas en casa y solucionar series de ejercicios personalizados de acuerdo con su futura profesión, permitiéndoles desarrollar las habilidades de análisis y resolución de problemas.

El libro está dividido en cuatro unidades y aborda en la primera unidad los temas de Expresiones Algebraicas, cuyos subtemas giran en torno a la solución de operaciones entre monomios y polinomios; en la segunda unidad, Productos Notables y Factorización: diseñada para la resolución de ecuaciones cuadráticas, raíces solución, binomios a la  $n$  potencia, entre otros subtemas; en la unidad número tres se abordan los Sistemas de Ecuaciones Lineales de dos y tres incógnitas y su solución a través de diferentes métodos; y la última unidad, Fundamentos de Trigonometría y Geometría: permite analizar de manera muy particular lo relacionado a la ecuación de la recta, por su importancia en el análisis de problemas relacionados con la Economía y algunos Métodos para la toma de decisiones; cada una de las unidades mantiene un enfoque que permite al alumno saber cómo se resuelven los ejercicios y además extrapolar ese conocimiento en su aplicación a entornos reales, por tal razón cada una de las unidades es acompañada de series de ejercicios, con los cuales se pretende que el alumno repase los temas vistos a fin de aclarar las dudas que hayan salido durante su clase presencial o bien durante sus repasos individuales.

Por último, el libro cuenta con las referencias bibliográficas del material que sirvió de apoyo para el desarrollo del contenido, cuya expectativa es que sea puntual y objetivo, esperando que la razón de ser de este material sea en beneficio académico de la comunidad estudiantil de la Licenciatura en Negocios Internacionales de la Universidad Politécnica del Valle de Toluca.

# Introducción a las Matemáticas

## Unidad 1



## Expresiones Algebraicas

## UNIDAD 1, EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Al completar la unidad de aprendizaje, el alumno será capaz de:

- Realizar operaciones algebraicas.
- Modelar y resolver problemas algebraicos que surgen en las organizaciones



Aún y cuando la **Calculadora** es una herramienta accesible, poderosa y en algunos casos, imprescindible en nuestros tiempos, también es muy importante que los alumnos sepan resolver operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) manualmente, por esta razón y al menos para esta unidad, **NO SE RECOMIENDA EL USO DE ESTA HERRAMIENTA**, a fin de que puedan seguir desarrollando su habilidad para resolver problemas algebraicos sin la necesidad de una calculadora.

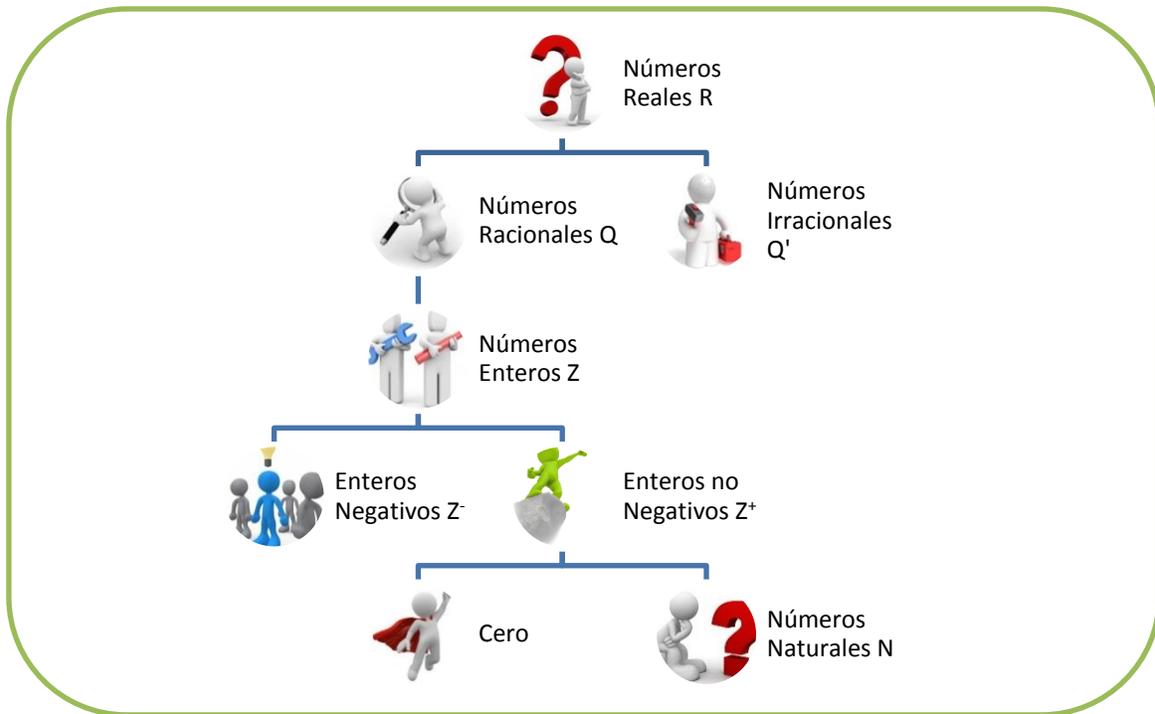
### INTRODUCCIÓN

En la vida es común realizar cálculos de cualquier índole, ¿Cuánto tiempo se tarda una persona en llegar de la ciudad de Toluca a la ciudad de México por Autopista?, ¿Cuánto dinero se necesita ahorrar cada quincena para organizar una fiesta?, ¿Cuánto se debe cobrar por diseñar un plan de negocios?, etc.; ejemplos existen muchos y la necesidad de obtener respuestas obliga a rodearse de herramientas que faciliten de alguna forma la obtención de esas respuestas.

Por lo anterior, en esta unidad se trata de brindar al alumno, el conocimiento mínimo necesario, para crear herramientas que le permitan analizar, diseñar y aplicar soluciones matemáticas a sus interrogantes diarias.

### CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS

La importancia de poder distinguir los diferentes tipos de números ayudará en un futuro a saber cómo trabajar con ellos de acuerdo con su clasificación, ya que la resolución de problemas no es igual cuando se trabaja con números enteros respecto a números racionales e irracionales, donde existe la posibilidad de aplicar ciertas propiedades que facilitarán su solución.



Organigrama 1, Clasificación de los números  
 Fuente: Elaboración propia con base en (Carvajal, 2012, pág. 4)

Los Números Naturales **N**, se utilizan en el sistema de numeración decimal y se emplean para contar objetos en sucesión.

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Los Números Enteros **Z**, es la unión del Cero con los números Enteros Negativos y Positivos.

$$Z = Z^- \cup 0 \cup Z^+, \text{ donde}$$

$$Z^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

$$Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

El conjunto de los números racionales (finitos, progresivos) **Q**, tienen la forma

$$\frac{p}{q}, \text{ donde: } p \text{ y } q \text{ son números enteros con } q \neq 0$$

$$Q = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{4}{7}, 9, \dots \right\}$$

Aquellos números que no se pueden expresar como racionales, es decir, número irracionales (infinitos no progresivos) **Q'**, generalmente se encuentran dentro de un radical  $\sqrt{n}$ .

$$Q' = \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi, \dots\}$$

(Carvajal, 2012)

# PRIORIDAD DE OPERACIONES

Para resolver operaciones básicas, es importante seguir una serie de recomendaciones y pasos, los cuales se contemplan en el siguiente cuadro, cuya prioridad es Descendente y de Izquierda a Derecha:

Nivel	Operación
1	{ }, [ ], ( ) Llaves, Corchetes, Paréntesis
2	$\sqrt{n}, n^m$ Radicales y Potencias
3	$(n)(m), n/m$ Multiplicaciones y Divisiones
4	$a + b, a - b$ Sumas y Restas



**Nota:** Recuerda que, al trabajar un ejercicio con operaciones del mismo nivel, este debe resolverse de izquierda a derecha

Tabla 1, Prioridad de Operaciones  
Fuente: Elaboración Propia

**Ejercicio:** Indique el orden en el cual resolvería la siguiente operación, a partir de lo que la tabla anterior indica.

$$a + b * c - d/e^d$$

Antes de iniciar con la solución, identifique los componentes de la operación, es decir, ¿Existen llaves, corchetes o paréntesis?, ya que de acuerdo con la tabla núm. 1, este es el indicio para empezar, en este caso, no existen así que podemos bajar un nivel.

¿Existen Potencias o Radicales?, la respuesta es sí, en este caso iniciamos con esta operación

$$a + b * c - d/\underbrace{e^d}_1$$

La nueva operación queda:

$$a + b * c - d/1$$

Se baja un nivel en la prioridad y se analiza, ¿Existen divisiones, multiplicaciones o ambas?, en este caso, existen ambas operaciones, por tanto, al estar en el mismo nivel de prioridad, se procede a resolver de izquierda a derecha, dependiendo el que se encuentre primero.

$$a + \underbrace{b * c}_{2} - d / \boxed{1}$$

$$a + \boxed{2} - d / \boxed{1}$$

Y se continúa resolviendo las operaciones siguientes, pertenecientes a la misma prioridad

$$a + \boxed{2} - \underbrace{d / \boxed{1}}_{3}$$

$$a + \boxed{2} - \boxed{3}$$

Por último, bajamos un nivel de prioridad y se identifican sumas y restas, resolviéndolas de izquierda a derecha.

$$\underbrace{a + \boxed{2}}_{4} - \boxed{3}$$

$$\underbrace{\boxed{4} - \boxed{3}}_{5}$$

Una vez terminado, te darás cuenta de que, a lo largo de la resolución, hiciste un total de 5 operaciones para encontrar la solución.



Trabajar con números es fácil y divertido, sin embargo, requiere de paciencia y mucha práctica para poderlo dominar, no es algo que se aprenda de la noche a la mañana y por supuesto, **depende de ti.**

**Ejercicio:** Resuelva el siguiente ejercicio aplicando prioridad de operaciones.

$$\underbrace{[(a - b) + c * d^e]}_1 + (f/g + h)$$

$$[1 + c * d^e] + \underbrace{(f/g + h)}_2$$

$$[1 + c * d^e] + \underbrace{(2 + h)}_3$$

$$[1 + c * d^e] + 3$$

$$\underbrace{[1 + c * d^e]}_4 + 3$$

$$[1 + c * 4] + 3$$

$$\underbrace{[1 + c * 4]}_5 + 3$$

$$[1 + 5] + 3$$

$$\underbrace{[1 + 5]}_6 + 3$$

$$6 + 3$$

$$\underbrace{6 + 3}_7$$

¿Por curiosidad, sabes cómo se llama este símbolo ^?

La respuesta es:

Acento circunflejo, en matemáticas generalmente es utilizado para indicar potenciación.




Aunque para este ejercicio se realizaron 7 operaciones en total, el tiempo y la práctica te llevarán a reducirlo a un menor número de pasos, incluso, sin necesidad de resolverlo de manera estructurada como se hizo en los 2 ejercicios anteriores.

## Ejercicios propuestos de Prioridad de Operaciones

1.  $(15 - 35)/5 + 1 =$
2.  $8 + 2[7 - 4(5 - 3)] =$
3.  $36 \div 9 + 3 - 18 \div +2^3 =$
4.  $9 + [4^2 - (9 - 3)] =$
5.  $12 - 5(8 - 2) + (3 - 7)^2 =$
6.  $5 + 2[(-4)^2 - 7(6 - 2)] =$
7.  $2\{2^3 - [(36/6) - 3]\} =$
8.  $4(-2)^3 + 6(-1)^2 - \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} + (-2) - (-10) =$
9.  $4^3 - [2^2 - \sqrt{9(8 \div 2 - 2)}] =$
10.  $2(5 - 8)^2 - 3(7 - 10)^3 + \sqrt{81} - \sqrt[3]{8} =$
11.  $\{5[(3 - 7)^2 - 4(5 - 6)^3 + \sqrt{64}]\} =$
12.  $20 + (-15) - (7) - (-4) =$
13.  $(-6)(-4)(-2) - (10 - 50) =$
14.  $4(-5)(-3) + (-4 - 60) =$
15.  $\{2(4 - 7)^2 - [(8 - 10)^3 - \sqrt{64} + \sqrt[3]{64}]\} =$
16.  $3^3 + \{(-2)^3 + [\sqrt{16}(8 \div 4 - 1) - (4 - 5)^2]\} =$

Hi!! Guys, wait a minute...

You need to practice,  
because, it's necessary  
if you want to pass  
Maths... enjoy solving  
these exercises



Serie de ejercicios extraídos de (Carvajal, 2012, págs. 24 - 30)

## OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Como recordarás, los Números Racionales **Q**, son aquellos que se expresan en forma de fracción, y al igual que los Número Naturales **N**, existen operaciones como suma, resta, multiplicación y división entre ellos, a continuación, se analizarán estas operaciones entre dos y tres fracciones.

### Suma de dos fracciones

Este tipo de operaciones se resuelven como se indica el diagrama siguiente:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Fórmula 1, Suma de dos fracciones con denominadores diferentes

Fuente: Elaboración propia

Note que el procedimiento solicita hacer un producto cruzado entre el numerador de la primera fracción y el denominador de la segunda fracción (**ad**), más la multiplicación del denominador del primer elemento por el numerador del segundo elemento (**bc**), divididos entre el producto de ambos denominadores (**bd**).

**Ejercicio:** Resuelve la siguiente suma de dos fracciones, con base en el diagrama 1.

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{5} =$$

El primer paso es realizar los productos cruzados como se indica a continuación:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \frac{5+9}{?}$$

A continuación, se multiplican ambos denominadores

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \frac{5+9}{15}$$

Por último, se resuelve la suma del numerador resultante y en su caso, se simplifica la fracción

$$\frac{5+9}{15} = \frac{14}{15}$$

## Caso especial de la suma de fracciones

Cuando los denominadores de las dos fracciones a sumar son iguales, el ejercicio se resuelve como se indica en el diagrama número 2.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Fórmula 2, Suma de dos fracciones con el mismo denominador  
Fuente: Elaboración propia

Este tipo de operación se resuelve sumando los numeradores (**a + c**) y pasando el mismo denominador **b**.

**Ejercicio:** Resuelve la siguiente suma de dos fracciones, en base al diagrama número 2.

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} =$$

Identificamos en este caso que los denominadores de ambas fracciones son iguales, por tanto, procedemos a sumar sus numeradores y pasar de forma directa uno de los dos denominadores.

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{2+3}{5}$$

Y listo, la suma de fracciones se resolvió.

$$\frac{2+3}{5} = \frac{5}{5}, \quad \text{simplificando queda: } \frac{5}{5} = 1$$

## Resta de dos fracciones

El procedimiento es exactamente el mismo que la suma de dos fracciones, la diferencia radica en el signo, ya que este es determinante en el resultado que obtengas, así, tenemos diferentes casos que deberás tomar en cuenta al momento de solucionar un ejercicio de este tipo.



No olvides las leyes de los signos en un producto, donde:

**Signos Iguales = + y Signos Diferentes = -**

**Caso número 1**, el signo negativo se encuentra en la primera fracción

$$-\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(-ad) + (bc)}{bd}$$

Fórmula 3, Caso 1  
Fuente: Elaboración propia

**Caso número 2**, el signo negativo se encuentra en la segunda fracción

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{(ad) - (bc)}{bd}$$

Fórmula 4, Caso 2  
Fuente: Elaboración propia

**Caso número 3**, ambas fracciones tienen signo negativo

$$-\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{-(ad) - (bc)}{bd}$$

Fórmula 5, Caso 3  
Fuente: Elaboración propia

**Caso número 4**, Las fracciones tienen el mismo denominador

$$-\frac{a}{d} - \frac{c}{d} = \frac{-a - c}{d}$$

Fórmula 6, Caso 4  
Fuente: Elaboración propia

En este último caso, la resta de los numeradores se realiza de manera directa, sin embargo, debes tomar en cuenta que el signo de cada fracción siempre acompaña a dichos numeradores.



**E**l signo siempre acompaña al numerador

$$\frac{a}{b} \quad \text{Numerador} \quad \frac{-a}{b} \quad \text{Denominador}$$

**Ejercicio:** Resuelve la siguiente resta de fracciones, aplicando lo visto en los casos anteriores.

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{5} =$$

El primer paso es realizar los productos cruzados como se indica a continuación:

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{5-9}{?}$$

A continuación, se multiplican ambos denominadores

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{5-9}{15}$$

Por último, se resuelve la resta del numerador resultante y en su caso, se simplifica la fracción

$$\frac{5-9}{15} = -\frac{4}{15}$$

**Ejercicio:** Resuelve la siguiente resta de fracciones con denominadores iguales.

$$-\frac{4}{3} - \frac{8}{3} =$$

Resta los numeradores y sus signos de manera directa y pasa uno de los denominadores

$$-\frac{4}{3} - \frac{8}{3} = \frac{-4-8}{3}$$

Obtén el resultado.

$$\frac{-4-8}{3} = -\frac{12}{3}, \quad \text{simplificando queda: } -\frac{12}{3} = -4$$

## Suma y Resta de tres fracciones

Cuando quieras realizar una suma de este tipo, tendrás que realizar una operación adicional llamada **Mínimo Común Múltiplo (MCM)**, el cual podrás trabajar con números primos y se explica en el siguiente ejercicio:

**Ejercicio:** Calcula el MCM de los números 4, 9 y 14.

MCM	
Números	N. Primos
4 9 14	2
2 9 7	2
1 9 7	3
1 3 7	3
1 1 7	7
1 1 1	

Iniciamos dividiendo los 3 números (4, 9 y 14) entre el primer número primo disponible, en este caso el número 2, dando como resultado 2, 9 y 7, en caso de que existan más números que puedan ser divisibles entre 2 con residuo cero, se continua trabajando con él.

Una vez que se terminó de trabajar con el número 2, se procede a trabajar con el siguiente número primo, en este caso el 3, al igual que en el caso anterior, se trabaja con los números resultantes hasta que ninguno de ellos se pueda dividir entre 3 con residuo 0.

El proceso continua hasta que cada uno de los números iniciales se reduce a uno.

Para finalizar, se multiplican los números primos utilizados y se encuentra el MCM.

$$\text{MCM} = ( 2 )( 2 )( 3 )( 3 )( 7 )$$

MCM = 252

Investigar:

¿Qué es un Número Primo?



Un **Número Primo** es aquel número Natural mayor que 1 que solo se puede dividir entre 1 y entre sí mismo con residuo 0, por ejemplo:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,...

Haciendo uso de la operación mod 2 y mod 3 en algún lenguaje de programación como C, podrían identificarse números primos mayores.

Una vez que repasamos el MCM, procederemos a analizar cómo resolver una suma de tres fracciones, la cual se especifica en siguiente diagrama:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{\left(\frac{x}{b} * a\right) + \left(\frac{x}{d} * c\right) + \left(\frac{x}{f} * e\right)}{x}, \text{ donde:}$$

$$x = MCM (bdf), \text{ con } b, d \text{ y } f \neq 0$$

Fórmula 7, Suma de tres fracciones  
Fuente: Elaboración propia

Tome en cuenta que el primer paso obligatorio en este ejercicio es el cálculo de **x**, el cual no es otra cosa más que el cálculo del MCM de los tres denominadores, no obstante, para que quede claro analicemos el siguiente ejercicio.

**Ejercicio:** Resuelva la siguiente suma de fracciones de acuerdo con lo indicado en el Diagrama Número 7.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} =$$

Como se indicó anteriormente, se procede a calcular el MCM de los tres denominadores

MCM	
Números	N. Primos
3 5 4	2
3 5 2	2
3 5 1	3
1 5 1	5
1 1 1	

$$MCM = (2)(2)(3)(5)$$

$$MCM = 60$$

Quedando

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{a + b + c}{60}$$

Y encontramos los elementos **a, b y c**

$$a = \left(\frac{60}{3} * 1\right), b = \left(\frac{60}{5} * 2\right) \text{ y } c = \left(\frac{60}{4} * 3\right)$$

$$a = 20, b = 24 \text{ y } c = 45$$

Una vez encontrados los tres elementos anteriores se reestructura la operación

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{20 + 24 + 45}{60}$$

Se realiza la suma y, en caso de que sea posible, la simplificación encontrando el resultado final

$$\frac{20 + 24 + 45}{60} = \frac{89}{60}$$

La resolución de la resta es exactamente igual a la suma, la diferencia se da en los signos, los cuales obligan en su caso, a realizar las restas correspondientes, sin olvidar que el negativo siempre acompaña al numerador.

**Ejercicio:** Resuelva la siguiente resta de fracciones.

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{3}{4} =$$

Como se indicó anteriormente, se procede a calcular el MCM de los tres denominadores

MCM	
Números	N. Primos
3 5 4	2
3 5 2	2
3 5 1	3
1 5 1	5
1 1 1	

$$\text{MCM} = (2)(2)(3)(5)$$

$$\text{MCM} = 60$$

Quedando

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{3}{4} = \frac{a - b - c}{60}$$

Y encontramos los elementos **a**, **b** y **c**

$$a = \left(\frac{60}{3} * 1\right), b = \left(\frac{60}{5} * 2\right) \text{ y } c = \left(\frac{60}{4} * 3\right)$$

$$a = 20, b = 24 \text{ y } c = 45$$

Una vez encontrados los tres elementos anteriores se reestructura la operación

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{3}{4} = \frac{20 - 24 - 45}{60}$$

Y se realiza la resta y la simplificación, en caso de que ésta sea posible, encontrando el resultado final

$$\frac{20 - 24 - 45}{60} = -\frac{49}{60}$$

## Multiplicación de fracciones

Este tipo de operación es exactamente igual para dos o tres fracciones, ya que las operaciones se realizan únicamente entre numeradores y denominadores de manera independiente, es decir:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{ac}{bd}\right)$$

Fórmula 8, Multiplicación de dos fracciones  
Fuente: Elaboración propia

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) \left(\frac{e}{f}\right) = \left(\frac{ace}{bdf}\right)$$

Fórmula 9, Multiplicación de tres fracciones  
Fuente: Elaboración propia

**Ejercicio:** Resuelva la siguiente multiplicación de tres fracciones.

$$\left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{5}{7}\right) \left(\frac{2}{5}\right) =$$

Primero identificamos los numeradores y denominadores, ya que estos se multiplicarán entre si

**Numeradores:** 3, 5 y 2

**Denominadores:** 4, 7 y 5

Se realiza la operación

$$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{(3)(5)(2)}{(4)(7)(5)}$$

$$\frac{(3)(5)(2)}{(4)(7)(5)} = \frac{30}{140}$$

Se encuentra el resultado y en su caso se simplifica

$$\frac{30}{140} = \frac{3}{14}$$

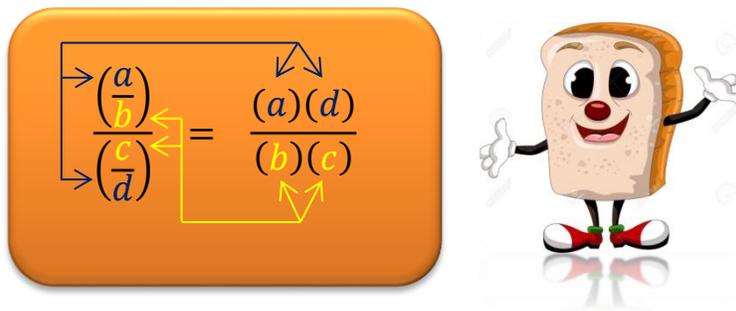
### División de fracciones

Al igual que todas las operaciones anteriores, trabajar con divisiones es muy sencillo, pues basta con seguir el siguiente diagrama.

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{(a)(d)}{(b)(c)}$$

Fórmula 10, División de Fracciones  
Fuente: Elaboración propia

En este caso, las operaciones se realizan multiplicando externo por externo y medio por medio, es decir, se aplica algo que muchos conocen como **“Ley del Sándwich”**, el cual, aunque no suena muy bonito ni matemático, es un mnemónico bastante efectivo.



En la mnemotecnia, un **mnemónico** es una técnica para ejercitar la capacidad memorística, generalmente son palabras fáciles de aprender para recordar conceptos más difíciles.

**Ejercicio:** Resuelva la siguiente división de fracciones.

$$\left(\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{4}{7}\right) =$$

Para que visualmente resulte más cómodo, una opción es reacomodar la operación de la siguiente manera

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{4}{7}\right)} =$$

Se multiplican extremo por extremo y medio por medio y se encuentra el resultado, simplificándolo en caso de que esto sea posible

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{4}{7}\right)} = \frac{(2)(7)}{(3)(4)} = \frac{14}{12} = \boxed{\frac{7}{6}}$$

### Ejercicios propuestos de Operaciones con Fracciones

1.  $\frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} =$

2.  $\frac{3}{4} + \frac{5}{2} + \frac{1}{8} =$

3.  $\frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{5}{12} =$

4.  $\frac{7}{5} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4} =$

5.  $\frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3} =$

6.  $\frac{5}{12} + \frac{5}{6} =$

7.  $\frac{4}{7} + \frac{2}{5} =$

8.  $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} =$

9.  $\frac{1}{4} + \frac{9}{5} + 3 =$

If you study a lot of time, you will might to pass this subject



Serie de ejercicios extraídos de acuerdo con (Carvajal, 2012, pág. 41)

**Algunas Leyes y Propiedades que debes conocer para cuando sea necesario aplicarlas**



**Notación Exponencial**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{n \text{ elementos}}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{1/m} = \sqrt[m]{a}$$

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$$

**Leyes de Exponentes**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ si } a \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

**Propiedades de los Radicales**

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

**Propiedades de la Suma**

Propiedad Conmutativa  $a + b = b + a$

Propiedad Asociativa  $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

Inverso Aditivo  $a + (-a) = 0$   
 $-(-a) = a$

Información extraída de (Carvajal, 2012, págs. 17-19) y (Hoffman, Bradley, Sobecki, Price, & Sandoval, 2013, págs. 60-61)

# EXPRESIÓN ALGEBRAICA

De acuerdo con (Carvajal, 2012, pág. 99), una expresión de este tipo se compone de varias operaciones algebraicas, las cuales se integran por:

- 🌱 Números concretos
- 🌱 Literales del alfabeto
- 🌱 Operaciones (Suma, Resta, Multiplicación, División, Potenciación, Radicación)
- 🌱 Propiedades de esas operaciones

Por tanto, cualquier expresión que indica una o varias de las operaciones algebraicas se llama *expresión algebraica*.

### Ejemplos de Expresiones Algebraicas

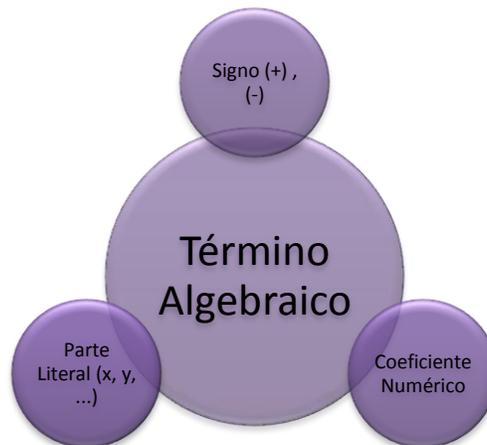
$3x + y$	$x^2 + x + 1$
$\sqrt{x} - 4y$	$x^3 + 1$
$(x + y)(6x - 2)$	$\frac{x + y}{x - y}$

**Tabla 2, Expresiones Algebraicas**

Fuente: Elaboración propia en base a (Carvajal, 2012, pág. 99)

## Término Algebraico

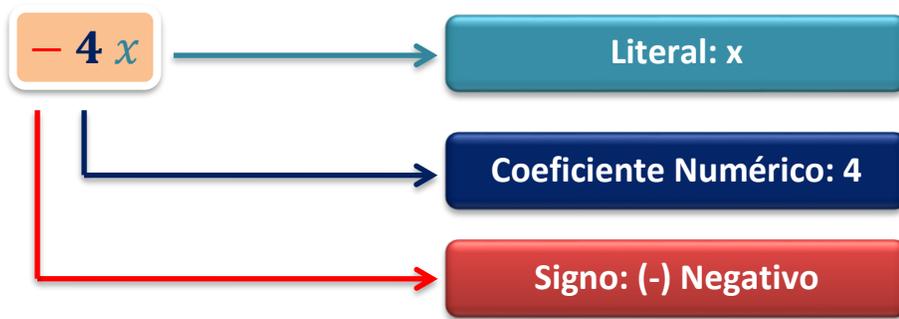
Es una expresión compuesta por números concretos y letras que también representan números relacionado entre sí mediante las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación, un término está conformado por:



**Diagrama 1, Componentes de un Término**

Fuente: Elaboración propia en base a (Carvajal, 2012, pág. 99)

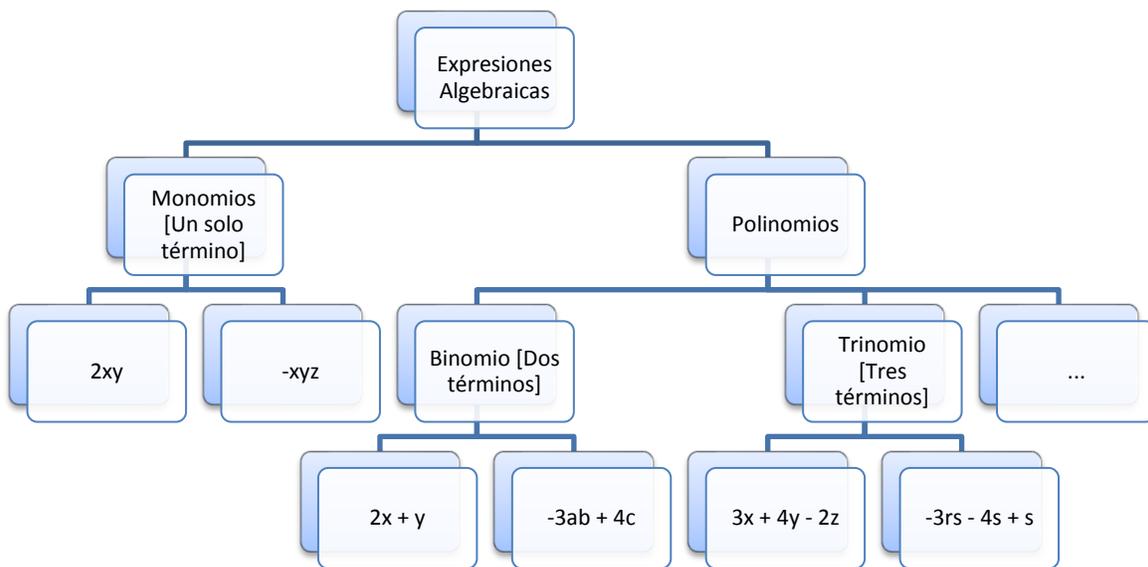
Analicemos el siguiente término, para identificar las partes que lo integran:



Sin embargo, en este curso se va a trabajar con expresiones algebraicas que incluyen no solo uno sino dos o más términos, los cuales se pueden clasificar en Monomios y Polinomios.

### Monomios y Polinomios

De acuerdo con el número de términos que se tengan, estos se pueden clasificar en:



Organigrama 2, Clasificación de las Expresiones Algebraicas  
Fuente: Elaboración propia

Y al igual que con los números naturales, racionales, etc., los monomios y polinomios se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir entre sí, como se explica a continuación.

## Suma y Resta de dos Monomios

Estas operaciones solo se podrán realizar si existe un factor común entre ambos monomios, en otro caso simplemente queda igual.

El factor común hace referencia al hecho de que las literales que acompañan a los coeficientes, son iguales, por ejemplo, los tres monomios siguientes tienen el mismo factor común:

$$75x^2yz \quad -210x^2yz \quad \frac{4}{7}x^2yz$$

**Factor Común =  $x^2yz$**

Una vez que se identifica si las literales son iguales, es decir, se tiene el mismo factor común, se procede a sumar o en su defecto a restar los coeficientes.

**Ejercicio:** Resuelva la siguiente operación de dos monomios

$$-6ab + 2ab =$$

Identificamos si existe un factor común

$$-6ab + 2ab =$$

**Factor Común =  $ab$**

En este caso tienen el mismo factor común y se procede a sumar los coeficientes

$$-6ab + 2ab = -4ab$$

**Ejercicio:** Resuelva la siguiente operación de dos monomios

$$\frac{2}{3}xy^3 + 3xy^3 =$$

Ambos monomios tienen el factor común  $xy^3$ , por tanto, se procede a sumar sus coeficientes, con la observación de que, en este caso, se trata de una suma de fracciones, sin embargo, la resolución del ejercicio no cambia en nada.

$$\frac{2}{3}xy^3 + \frac{9}{3}xy^3 = \frac{11}{3}xy^3$$

### Multiplicación de dos monomios

A diferencia de las sumas y restas donde debe existir un factor común, en la multiplicación no es necesario, sin embargo, se toma en cuenta la propiedad de exponentes vista anteriormente donde:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Es decir, si analizamos el siguiente ejercicio podremos observarlo mejor

$$(2x^2)(-3x^3) =$$

El procedimiento implica multiplicar coeficiente por coeficiente y literal por literal cuando se trate de la misma literal

$$(2x^2)(-3x^3) =$$

$$(2)(-3) = -6$$

$$(x^2)(x^3) = x^{2+3}$$

Se concatenan los resultados individuales y se obtiene la solución del ejercicio

$$(2x^2)(-3x^3) = -6x^5$$

**Ejercicio:** Resuelva la siguiente operación de dos monomios

$$(4x^2)(3y) =$$

En este caso, podemos observar que los literales de cada monomio son diferentes, sin embargo, como se mencionó antes, en la multiplicación no es necesario que existan factores comunes, sin embargo, se aplican las siguientes propiedades

$$a^0 = 1 \quad a \cdot 1 = a$$

Al igual que en el ejercicio anterior, se multiplican coeficientes por coeficientes y literales por literales, aplicando las propiedades de la sección anterior

$$(4x^2)(3y) =$$

→  $(4)(3) = 12$

→  $(x^2)(x^0) = x^{2+0} = x^2$

→  $(y^0)(y^1) = y^{0+1} = y^1 \approx y$

Se concatenan los resultados individuales y se encuentra la solución

$$(4x^2)(3y) = 12x^2y$$



Probablemente te estés preguntando, ¿Qué paso en el ejercicio anterior?, y la verdad es que no es nada complicado.

Aunque el monomio  $4x^2$  no estaba acompañado por una  $y$ , esta literal si se encontraba de manera implícita en el elemento, en otras palabras, teníamos  $4x^2y^0$ , mientras que el segundo monomio se integraba por un  $3x^0y$

¿Y por qué no se colocaron tanto  $x^0$  como  $y^0$ ?, la respuesta es muy fácil, ya que se aplican las propiedades antes mencionadas donde  $x^0 = 1$  y además  $1 \cdot a = a$  por tanto se dice que los elementos se encuentran implícitos y no es necesario escribirlos.

Por lo tanto, cuando resuelvas este tipo de ejercicios, en tu resultado no es que solo se pasen las literales del producto al resultado de manera natural, sino que se aplican ciertas propiedades para que esto pueda pasar.

### División de dos monomios

En este tipo de operaciones se utiliza la siguiente fórmula o propiedad para las literales principalmente, aunque también puede aplicar para los coeficientes si es que los exponentes se encuentran indicados

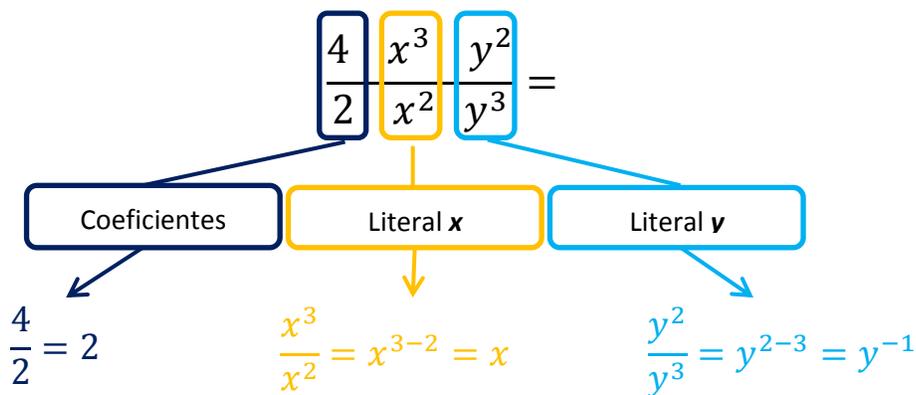
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

No obstante, cuando los coeficientes no cuentan con exponentes, estos se trabajan como fracción y en el mejor de los casos pueden dar como resultado un número entero o en su defecto la simplificación de la fracción original.

Cuando se dividen dos monomios como el siguiente

$$\frac{4x^3y^2}{2x^2y^3} =$$

Lo ideal es separar y trabajar coeficientes y literales de manera individual, sin olvidar que al igual que la multiplicación, no es necesario que los monomios tengan un factor común como lo es en la suma y en la resta.



Unimos los resultados individuales y se obtiene la solución al ejercicio

$$\frac{4x^3y^2}{2x^2y^3} = 2xy^{-1}$$

Aplicando la propiedad

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Quedaría

$$2xy^{-1} = \frac{2x}{y}$$

Aunque cualesquiera de los dos resultados son exactamente iguales, puesto que lo único que cambia es su expresión.

**Ejercicio:** Resuelva la siguiente operación de monomios

$$\frac{9x^{-2}y^5z^{-3}}{3x^4y^{-3}z^4} =$$

Este ejercicio se puede resolver de dos maneras, la primera es aplicando la propiedad  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  y la otra a través de la propiedad  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ , como se explica a continuación.

Si se aplica la primera propiedad, implicaría reacomodar el ejercicio, convirtiendo los signos negativos en positivos, acomodando las literales en el lugar que le corresponda

$$\frac{9 \overset{\text{blue}}{\circ} x^{-2} y^5 \overset{\text{yellow}}{\circ} z^{-3}}{3x^4 \underset{\text{blue}}{\downarrow} \overset{\text{green}}{\uparrow} y^{-3} \underset{\text{yellow}}{\downarrow} z^4} = \frac{9y^5y^3}{3x^4x^2z^3z^4}$$

Y se multiplican las literales iguales, quedando

$$\boxed{\frac{3y^8}{x^6z^7}}$$

Por otro lado, si se aplica la segunda propiedad, basta con desarrollar las restas de los exponentes de cada literal

$$\frac{9x^{-2}y^5z^{-3}}{3x^4y^{-3}z^4} =$$

$$\frac{x^{-2}}{x^4} = x^{-2-4}, \quad \frac{y^5}{y^{-3}} = y^{5-(-3)}, \quad \frac{z^{-3}}{z^4} = z^{-3-4}$$

$$x^{-6}, \quad y^8, \quad z^{-7}$$

Y se encuentra la solución

$$\frac{9x^{-2}y^5z^{-3}}{3x^4y^{-3}z^4} = 3x^{-6}y^8z^{-7}$$

$$3x^{-6}y^8z^{-7} = \frac{3y^8}{x^6z^7}$$

## Suma y Resta de Polinomios

Existen 2 pautas a tomar en cuenta antes de poder iniciar la resolución de un ejercicio de esta naturaleza:

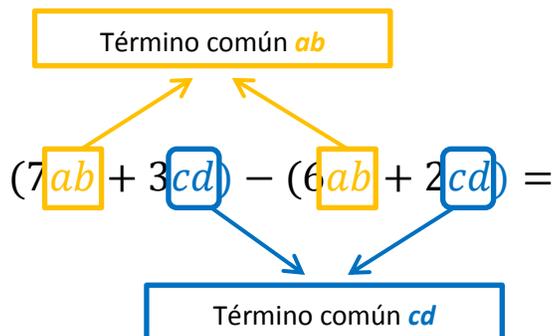
1. Los signos: lo cuales determinarán la operación a realizar, ya sea una suma o en su defecto una resta, y
2. Las literales: este punto es importante, ya que el único momento en el cual cada término podrá sumarse o restarse, es cuando sus literales son exactamente iguales, como se explicó en la sección anterior.

**Ejercicio:** Resuelva la siguiente suma de Polinomios

$$(7ab + 3cd) - (6ab + 2cd) =$$

Lo primero que tenemos que hacer, es identificar los **términos comunes**, ya que como se explicó anteriormente, es necesario que las literales de cada término sean iguales para poderse sumar o restar.

En este caso tenemos dos términos comunes



Una vez que identificamos los términos comunes, se procede a realizar la suma o resta de sus coeficientes, según corresponda, tomando en cuenta si estos están siendo afectados por algún signo negativo

$$7ab - 6ab = ab$$

$$3cd - 2cd = cd$$

Y se juntan los resultados individuales en un solo polinomio para dar solución al ejercicio

$$(7ab + 3cd) - (6ab + 2cd) = \boxed{ab + cd}$$

En el ejercicio anterior, se realizaron por separado dos operaciones, al final se volvieron a concatenar para dar solución al ejercicio, sin embargo, en la práctica, no es necesario separarlos, ya que basta con identificar los términos comunes para poder realizar las operaciones de manera directa.

**Ejercicio:** Resuelva la siguiente operación con Polinomios

$$(7x^2y + 8x) - (y + 2x^2y) - (9x + y) =$$

Si se separan nuevamente los términos, tomando en cuenta los signos negativos, quedaría de la siguiente manera

$$7x^2y - 2x^2y = 5x^2y$$

$$8x - 9x = -x$$

$$-y - y = -2y$$

Se concatenan los resultados individuales y se da solución a la operación original

$$(7x^2y + 8x) - (y + 2x^2y) - (9x + y) = 5x^2y - x - 2y$$

**Ejercicio:** Resuelva la siguiente operación con Polinomios

$$(9x^2 + 2y^2) - (7x^2 + 2) =$$

A diferencia de los ejercicios anteriores, en este ejercicio solamente dos elementos tienen término común

$$(9x^2 + 2y^2) - (7x^2 + 2) =$$

Por lo tanto, son los únicos elementos que podrán ser en este caso, restados

$$9x^2 - 7x^2 = 2x^2$$

Y el resultado obtenido se concatena con los otros dos elementos que quedaron exactamente igual, dando por resultado

$$(9x^2 + 2y^2) - (7x^2 + 2) = 2x^2 + 2y^2 - 2$$

## Multiplicación de Polinomios

Recordemos que, para esta operación, no es necesario que se encuentre un factor común, pero si se tiene que poner atención en cómo se realiza o en qué orden se resuelve, ya que la multiplicación se hace elemento por elemento y de alguna manera cada uno de los componentes de un polinomio termina multiplicándose por todos los componentes del otro polinomio.

Para ejemplificar lo anterior tome en cuenta el siguiente diagrama

$$(a + b)(a + b) =$$

Donde, el primer elemento del primer polinomio (**a**) multiplica a los dos elementos del segundo, a su vez el segundo elemento del primer polinomio (**b**), también lo hace, quedando de la siguiente manera:

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

Una vez terminada la primera etapa y acomodados los resultados por términos comunes, se procede a realizar la sumatoria correspondiente y obtener la solución

$$+ \begin{array}{r} a^2 + ab \\ ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Se ordenan los elementos por término común y se suman

**Ejercicio:** Resuelva la siguiente operación con Polinomios

$$(-3x + y)(x - 3y + z) =$$

Iniciamos multiplicando el primer elemento del primer polinomio por todos los elementos del segundo polinomio

$$(-3x)(x - 3y + z) = -3x^2 + 9xy - 3xz$$

Se repite la misma acción, pero con el segundo elemento del primer polinomio

$$(y)(x - 3y + z) = xy - 3y^2 + yz$$

Se procede a acomodar los elementos por término común para su posterior suma y obtención del resultado.

$$\begin{array}{r}
 -3x^2 + 9xy - 3xz \\
 + \quad \quad \quad xy \quad - 3y^2 + yz \\
 \hline
 -3x^2 + 10xy - 3xz - 3y^2 + yz
 \end{array}$$

### División de Polinomios

Para muchos la división es sinónimo de problemas, pero la realidad es que son igual de sencillas que todo lo que se ha trabajado en esta unidad, aunque si es importante recordar cómo es el procedimiento para solucionar una división de números enteros, pues la misma filosofía se aplica para la resolución de divisiones con polinomios.

Una división tiene la siguiente estructura



Dónde:

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} * \text{Cociente} + \text{Residuo}$$

La división entre polinomios corresponde a la misma estructura y para este apartado se verán dos casos

- Polinomio entre Monomio, y
- Polinomio entre Polinomio

El objetivo de ver esta operación al final es por que engloba las tres operaciones anteriores, existen multiplicaciones, sumas y restas, tanto en la resolución del ejercicio como al momento de realizar la comprobación, pero analicemos los dos casos arriba mencionados.

## Polinomio entre Monomio

Para analizar este caso, resolvamos el siguiente ejercicio

$$xy \overline{) x^2y + xy}$$

El primer paso consiste en eliminar el término  $x^2y$ , multiplicando el divisor por un factor que, al restarlo, permita obtener un residuo **cero**, como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} * \\
 \begin{array}{|c|} \hline xy \\ \hline \end{array} \overline{) x^2y + xy} \\
 \begin{array}{|c|} \hline xy \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 x^2y \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Una vez realizado este paso, procedemos a bajar el siguiente término y encontrar un nuevo factor que, multiplicado por el divisor, permita obtener un residuo cero al restar los términos encontrados.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|} \hline xy \\ \hline \end{array} * \\
 \begin{array}{|c|} \hline x + 1 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline xy \\ \hline \end{array} \overline{) x^2y + xy} \\
 \begin{array}{|c|} \hline xy \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 x^2y + xy \\
 \hline
 0 + xy \\
 \hline
 xy \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Una vez terminado, podemos comprobar el resultado multiplicando el divisor por el cociente más el residuo.

$$x^2y + xy = (xy)(x + 1) + 0$$

$$x^2y + xy = x^2y + xy + 0$$

$$x^2y + xy = x^2y + xy$$

Por lo tanto, el resultado es

$$\text{Cociente} = x + 1$$

$$\text{Residuo} = 0$$

El caso anterior también puede ser resuelto aplicando **propiedades de los exponentes**, es decir:

Se escribe la división como si se tratase de una fracción

$$\frac{x^2y + xy}{xy} =$$

Se separan los términos en dos fracciones con el mismo denominador

$$\frac{x^2y}{xy} + \frac{xy}{xy} =$$

Se aplican las leyes de los exponentes y se encuentra el resultado

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{x}\right)\left(\frac{y}{y}\right) + \left(\frac{x}{x}\right)\left(\frac{y}{y}\right) &= \\ (x^{2-1})(y^{1-1}) + (x^{1-1})(y^{1-1}) &= \\ (x^1)(y^0) + (x^0)(y^0) &= \\ (x)(1) + (1)(1) &= \end{aligned}$$

$$x + 1$$

## Polinomio entre Polinomio

Se maneja igual que el ejercicio anterior, la diferencia radica en el número de términos que se encuentran tanto en el dividendo como en el divisor, tal y como se muestra en el siguiente ejercicio

$$2x^2 + 2y \sqrt{4x^4 + y^2}$$

Para resolverlo, se busca eliminar en primer lugar el término  $x^4$ , multiplicando al divisor por un factor que permita hacerlo para obtener un residuo cero y posteriormente bajar el segundo término del dividendo



Por lo tanto, el resultado es

$$\text{Cociente} = 2x^2 - 2y$$

$$\text{Residuo} = 5y^2$$

## Ejercicios Propuestos de Monomios y Polinomios

Resolver de manera correcta las siguientes sumas de polinomios

- $3x^2 - 6x + 4; x^2 - 2x - 1 =$
- $3a + 7b - 5c - 1; a - 10b + 5c - 1 =$
- $5x - 4y + 10; -7x - 3y - 10 =$
- $2x^3 - 9x^2 - 10x + 3; x^3 + 3x^2 - x - 8 =$
- $15ab + 6b - 8a - c + 3; -12 + 4a + ab - 6b - c =$
- $x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 5 + 8x; -4x - 1 - 7x^2 - x^3 - 2x^4 =$
- $4xy - 3y + z; 4z - 9xy; 5xy - 6z + 10y =$
- $-m^2 + 16mn - 8m - 9n + 5; -4mn - 5 + n - m + m^2 =$
- $7xy - 2x + y - 8; xy + 2x - 2; -5y - 9xy + 6 =$
- $-4a - 12b + c; 3a + 9c - b; -5c + 3b + 2a =$

En los ejercicios siguientes, restar el segundo polinomio del primero

- $6x^2 + 3y^2 - 7x + 4y - 2; 2x^2 - y^2 - 7x + 8 =$
- $a^3 - 6b^2 - c^3; 3c^3 + 6b^2 - 2a^3 =$
- $x^2 - 3x + y + 6; -12 - 6y + 2x + 2x^2 =$
- $\frac{5}{8}x - \frac{1}{4}y; -\frac{7}{8}x - \frac{3}{8}y =$
- $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b; \frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b =$
- $3x - 4xy + 6y - 8; -10 - y + 7x + 2xy =$
- $-7c + 4b + 3a - 4; 2b + 5a + 4 - 7c =$
- $x^3 + 3x^2y - 5xy^2 - 4y^3; 2y^3 - 4xy^2 + 2x^3 - 7x^2y =$

Resolver de manera correcta las siguientes Multiplicaciones

- $6a^3b(2ab^5) =$
- $(-8xy^2)(3xy) =$

3.  $(-4m^2b)(-5m^3b) =$
4.  $(-7x)(-2x)(-3x^4) =$
5.  $(4a^2b)(-5ab^3)(-2a^2b^4c) =$
6.  $3x^3y^2(2x^4y^3)(-4xy) =$
7.  $(-2m^2n^3)^4(3mn^4)^2 =$
8.  $(-2x^2yz^3)^3(-2x^3y)^2 =$
9.  $(-3x^2y^3)^3(-2xy^3)^2 =$
10.  $4y^2(y^3 - 5y^2 + y - 1) =$
11.  $mn^4(m^3 - 2m^2n + 4mn^2 - n^2 + 4) =$
12.  $-2a^3b(a^3 - 2a^2b^2 - 6ab^3) =$
13.  $7x^2(x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x - 5) =$
14.  $-5xy^3(2x^3 - x^2y - 6) =$
15.  $-y^3(4y^2 - 5y + 6) =$
16.  $xy^4(xy - x^2y^2) =$

Come on,  
you can  
do it!!



Resolver de manera correcta las siguientes divisiones

1.  $\frac{25a^7b^9c^4d}{-5a^4b^3cd} =$
2.  $\frac{-81x^3y^5}{9xy^6} =$
3.  $\frac{9a^2-3a+6}{3a} =$
4.  $\frac{-12a^2+6ab-15a^2b^2}{3a} =$
5.  $(x^2 - 9x + 20) \div (x + 2) =$
6.  $(x^3 + 5x^2 - x - 21) \div (x + 3) =$
7.  $(x^3 + 7x^2 + x - 47) \div (x + 4) =$
8.  $(x^2 - 5x - 12) \div (x - 4) =$
9.  $(x^3 - 7x^2 + 14x - 1) \div (x - 4) =$
10.  $(x^3 + 27) \div (x + 3) =$

Serie de ejercicios extraídos de acuerdo con (Carvajal, 2012, págs. 107-128)

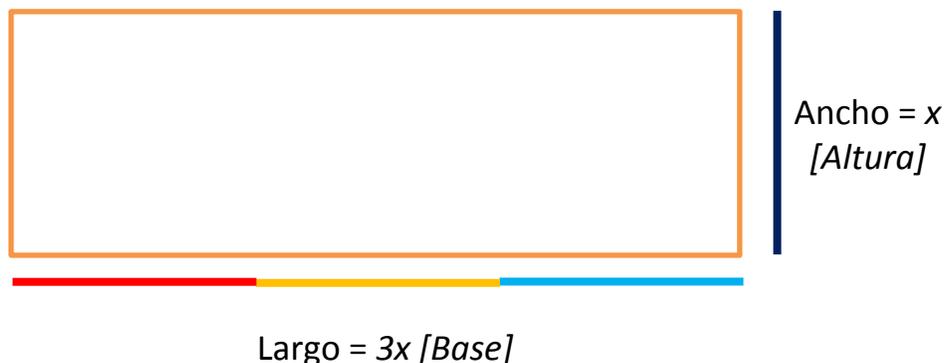
## Algunas aplicaciones

Conjuntando de alguna manera lo visto anteriormente, se pueden hacer planteamientos algebraicos que nos permitan trabajar el razonamiento lógico matemático, a través de la resolución de ejercicios ya conocidos, como el cálculo de un área por mencionar algunos.

Para ello, analicemos el siguiente ejercicio: Pedro Valdivia compró hace dos semanas un terreno de forma rectangular, el dueño anterior le explicó que el área total era de  $243 \text{ m}^2$ , y que el largo del terreno era 3 veces mayor que el ancho, sin embargo, nunca le mencionó cuanto media exactamente cada lado, ¿Cuántos metros mide cada lado?

Lo primero que se tiene que hacer es el planteamiento del problema

⇒ Se sabe que:



⇒ Y, Además, se determina el área de un rectángulo con la fórmula

$$\text{Área} = (\text{Base})(\text{Altura}), \text{ donde } \text{Área} = 243 \text{ m}^2$$

⇒ Por tanto, la fórmula para encontrar el valor de cada lado es

$$(\text{Base})(\text{Altura}) = \text{Área}$$

$$(3x)(x) = 243 \text{ m}^2$$

Una vez que el problema ha sido planteado, se procede a resolver la multiplicación para encontrar el valor de  $x$

$$(3x)(x) = 243 m^2$$

$$3x^2 = 243m^2$$

$$x^2 = \frac{243m^2}{3} \quad x^2 = 81m^2 \quad x = \sqrt{81m^2}$$

$$x = 9 \text{ Metros}$$

Con el valor de  $x$  encontrado, se sustituye en la base y la altura para encontrar su longitud y solución a este ejercicio

$$\text{Base} = 3x$$

$$\text{Altura} = x$$

$$\text{Base} = 3(9 \text{ metros})$$

$$\text{Altura} = 9 \text{ metros}$$

$$\text{Base} = 27 \text{ metros}$$

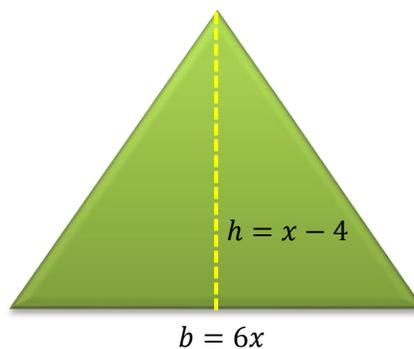
En el ejercicio anterior se trabajó con:

- Multiplicación de monomios
- Despeje de variables y
- Sustitución de valores

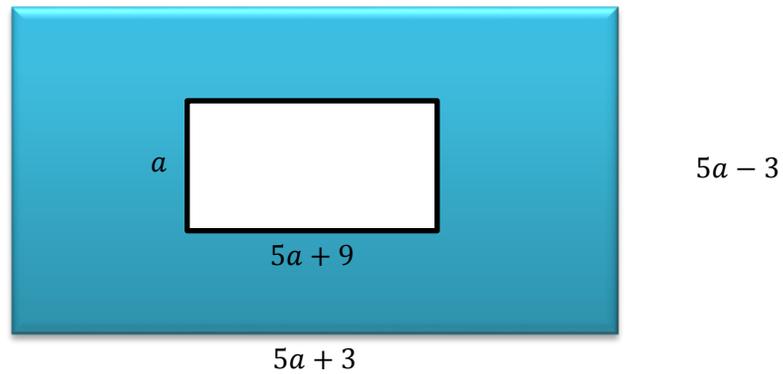


**Ejercicios Propuestos de Aplicación**

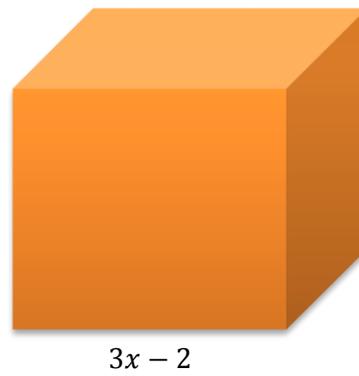
1. Determinar una expresión polinomial del área del siguiente triángulo



2. Determinar una expresión para el área de la región sombreada de la siguiente figura



3. Determinar el volumen del siguiente cubo



Serie de ejercicios extraídos de acuerdo con (Carvajal, 2012, págs. 132-133)

# Introducción a las Matemáticas

## Unidad 2



$$4+2=6$$

## Productos Notables y Factorización

## UNIDAD 2, PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

Al completar la unidad de aprendizaje, el alumno será capaz de:

- Realizar la factorización de polinomios.
- Identificar las diferentes formas de realizar una factorización.

### INTRODUCCIÓN

Hasta el momento se ha aprendido a realizar operaciones con números reales y, como se pudo observar, se utilizan frecuentemente para resolver cualquier problema de la vida diaria.

En esta unidad se aprenderá a trabajar con expresiones algebraicas con la finalidad de simplificarlas aplicando productos notables y factorización, los cuales permitirán reducir expresiones para que sea mucho más sencillo su procesamiento, en ejercicios donde se requiera despejar variables o en cálculo diferencial e integral, para poder integrar o derivar funciones de manera más sencilla.

### PRODUCTOS NOTABLES

Son fórmulas que permiten obtener el resultado de un producto, de manera directa, sin la necesidad de efectuar la multiplicación.

#### Binomio al cuadrado

- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

**Ejercicios:** Resuelve de manera correcta los siguientes ejercicios, de acuerdo con las fórmulas de suma y resta de binomios.

1.  $(2x + 5)^2$

Se eleva al cuadrado el primer elemento

$$(2x)^2 = 4x^2$$

Se multiplica el doble del segundo elemento por el primero

$$2(2x)(5) = 20x$$

Se eleva al cuadrado el segundo elemento

$$(5)^2 = 25$$

Y se obtiene el resultado

$$(2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$$

2.  $(x - 3y)^2$

$$\begin{array}{ccc} (x)^2 & 2(-3y)(x) & (-3y)^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x^2 - 6xy + 9y^2 \end{array}$$

3.  $\left(\frac{1}{2}x^2y^2 + 2z\right)^2$

$$\begin{array}{ccc} \left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)^2 & 2(2z)\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right) & (2z)^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{1}{4}x^4y^4 + 2x^2y^2z + 4z^2 \end{array}$$

4.  $(3x + 2y + 5x^2 + 4xy)^2$

$$\begin{array}{ccc} (3x + 2y)^2 & 2(3x + 2y)(5x^2 + 4xy) & (5x^2 + 4xy)^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9x^2 + 12xy + 4y^2 & + 30x^3 + 44x^2y + 16xy^2 & + 25x^4 + 40x^3y + 16y^2x^2 \end{array}$$

### Binomios conjugados

Si  $(a + b)$  es un binomio, entonces  $(a - b)$  será su binomio conjugado. Si los multiplicamos tenemos:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Recuerda, para que el resultado sea una diferencia de cuadrados, dos términos deben tener el mismo signo y dos signo contrario.



El producto de binomios conjugados es igual al cuadrado del primer término, menos el cuadrado del segundo término y esto da como resultado una diferencia de cuadrados.

**Ejercicios:** Resuelve de manera correcta los siguientes ejercicios, de acuerdo con la fórmula de binomio conjugado.

$$\begin{array}{l}
 1. (3x + 2y)(3x - 2y) = \\
 \quad (3x)(3x - 2y) \longrightarrow 9x^2 - 6xy \\
 \quad (2y)(3x - 2y) \longrightarrow \quad \quad \quad \cancel{6xy} - 4y^2 \\
 \hline
 \text{Resultado} \quad 9x^2 \quad - 4y^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2. (5x^2 - 6y^2)(5x^2 + 6y^2) = \\
 \quad (5x^2)(5x^2 + 6y^2) \longrightarrow 25x^4 + 30x^2y^2 \\
 \quad (-6y^2)(5x^2 + 6y^2) \longrightarrow \quad \quad \quad \cancel{-30x^2y^2} - 36y^4 \\
 \hline
 \text{Resultado} \quad 25x^4 \quad - 36y^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 3. (7mn + 2)(7mn - 2) = \\
 \quad (7mn)(7mn - 2) \longrightarrow 49m^2n^2 - 14mn \\
 \quad (2)(7mn - 2) \longrightarrow \quad \quad \quad \cancel{14mn} - 4 \\
 \hline
 \text{Resultado} \quad 49m^2n^2 \quad - 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 4. (3a^2 - 5ab)(3a^2 + 5ab) = 9a^4 - 25a^2b^2 \\
 \quad (3a^2)(3a^2 + 5ab) \longrightarrow 9a^4 + 15a^3b \\
 \quad (-5ab)(3a^2 + 5ab) \longrightarrow \quad \quad \quad \cancel{-15a^3b} - 25a^2b^2 \\
 \hline
 \text{Resultado} \quad 9a^4 \quad - 25a^2b^2
 \end{array}$$

## Binomio al cubo

En este caso, la misma operación se puede ver de maneras diferentes:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b), \text{ como un producto triple}$$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b), \text{ como un binomio de grado 2 por un binomio de grado 1}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \text{ como un producto notable}$$

Sin embargo, aunque se puede resolver por las tres maneras anteriores, se sugiere ocupar el producto notable, ya que este ha sido probado y comprobado, por lo tanto, el resultado es más fácil de obtener.

**Ejercicios:** Resuelve de manera correcta los siguientes ejercicios, de acuerdo con el producto notable del binomio al cubo.

1.  $(1 + 9a)^3 =$

Tomando en cuenta la posición de los elementos, se tiene que:  $a = 1$  y  $b = 9a$

$$\begin{array}{c}
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\
 (1)^3 + 3(1)^2(9a) + 3(1)(9a)^2 + (9a)^3 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 1 + 27a + 243a^2 + 729a^3
 \end{array}$$

2.  $(2x - 5)^3 =$

$$\begin{array}{c}
 (2x)^3 + 3(2x)^2(-5) + 3(2x)(-5)^2 + (-5)^3 \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\
 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125
 \end{array}$$

3.  $(3xy - z)^3 =$

$$\begin{array}{c}
 (3xy)^3 + 3(3xy)^2(-z) + 3(3xy)(-z)^2 + (-z)^3 \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\
 27x^3y^3 - 27x^2y^2z + 9xyz^2 - z^3
 \end{array}$$

$$4. (x^n + y^n)^3 = (x^n)^3 + 3(x^n)^2(y^n) + 3(x^n)(y^n)^2 + (y^n)^3$$

$$x^{3n} + 3x^{2n}y^n + 3x^n y^{2n} + y^{3n}$$

### Suma de cubos y Diferencia de cubos

A diferencia de los casos anteriores donde se tienen binomios elevados a la  $n$  potencia, en este apartado los elementos que integran el polinomio están elevados de manera individual al cubo como se muestra a continuación.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{[Suma]}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{[Diferencia]}$$

Su resolución es demasiado sencilla, basta con seguir la fórmula y ajustarla de acuerdo con el ejercicio que se esté desarrollando.

**Ejercicios:** Resuelve de manera correcta los siguientes productos, de acuerdo con la fórmula de suma y diferencia de cubos.

$$1. (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 8$$

Si la operación se hubiera resuelto como una multiplicación de polinomios, el resultado al cual se llegaría sería exactamente igual que aplicando la fórmula, la diferencia radica en la rapidez con la cual se resuelve el ejercicio, el procedimiento se describe a continuación:



$$\begin{array}{r} (x)(x^2 - 2x + 4) \quad x^3 - 2x^2 + 4x \\ (2)(x^2 - 2x + 4) \quad \underline{2x^2 - 4x + 8} \\ \text{Resultado} \rightarrow x^3 \qquad \qquad \qquad + 8 \end{array}$$

$$2. (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 - 8$$

$$3. (5x + 2y)(25x^2 - 10xy + 4y^2) = 125x^3 + 8y^3$$

$$4. \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)\left(\frac{a^2}{4} + \frac{ab}{6} + \frac{b^2}{9}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{b}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{8} - \frac{b^3}{27}$$

## TRIÁNGULO DE PASCAL

Se usa para obtener coeficientes binomiales, los números están acomodados de la siguiente manera:

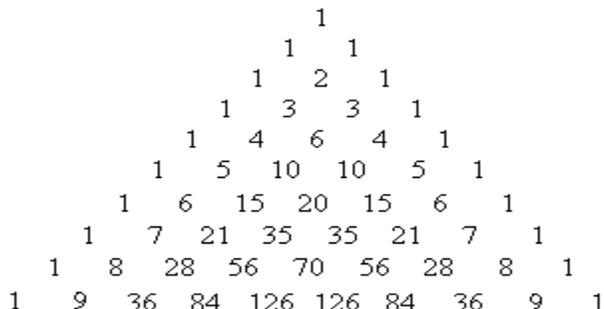


Imagen 1, Triángulo de Pascal  
Fuente: (Lazo & Silva, 2008, pág. 293)

Toma en cuenta que el coeficiente inicial hace referencia a un binomio elevado a la cero, es decir:

$$(a + b)^0 = 1,$$

¿Por qué uno?, recuerda que una de las propiedades de los exponentes menciona que todo número elevado a la potencia cero, siempre es igual a uno, de ahí el por qué.

Los números de la segunda fila son los coeficientes de la expansión de  $(a + b)^1$  donde:

$$(a + b)^1 = 1a + 1b$$

La tercera fila corresponde a los coeficientes determinados por  $(a + b)^2$  donde:

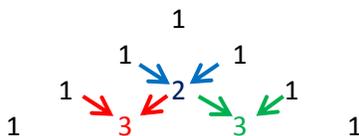
$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

Con respecto a la cuarta fila correspondiente al binomio  $(a + b)^3$  se tiene:

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

Y así sucesivamente.

En cuanto al triángulo, cada número del conjunto que es diferente de 1 se puede hallar al sumar los dos números de la fila previa que aparecen arriba e inmediatamente a la izquierda y derecha del número, es decir:



Para trabajar los exponentes de las ecuaciones, recuerda que se debe hacer uso del *Binomio de Newton*, sin embargo, basta con identificar el exponente del binomio y desarrollar la ecuación de acuerdo con la siguiente estructura:

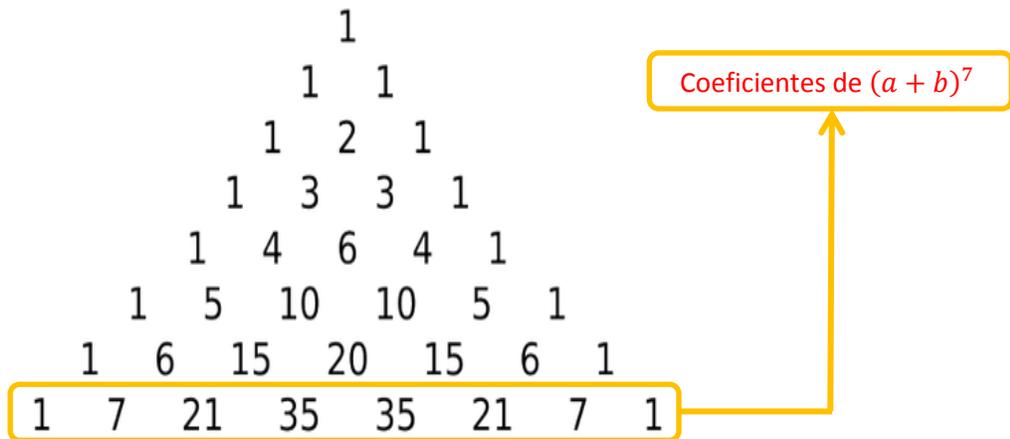
$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{variable } a} \\
 a^n b^0 + a^{n-1} b^1 + a^{n-2} b^2 + \dots + a^2 b^{n-2} + a^1 b^{n-1} + a^0 b^n \\
 \xleftarrow{\text{variable } b}
 \end{array}$$

Se puede observar que con respecto a la variable  $a$ , el exponente va en decremento en el sentido de izquierda a derecha, mientras que los exponentes correspondientes a la variable  $b$ , lo hacen en el sentido contrario.

**Al unir el triángulo de pascal y la ecuación de newton, se pueden desarrollar de manera sencilla cada uno de los binomios con exponente  $n$ .**

**Ejercicio:** Encontrar la octava fila del triángulo de pascal y expandir el binomio  $(a + b)^7$ .

En primer lugar, se deben localizar los coeficientes correspondientes a la potencia 7.



A continuación, se arma la ecuación de Newton para localizar los exponentes

$$(a + b)^7 = a^7 + a^6 b + a^5 b^2 + a^4 b^3 + a^3 b^4 + a^2 b^5 + a b^6 + b^7$$

y se une la información

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7$$

## Ejercicios propuestos de productos notables

Resuelve las siguientes operaciones, utilizando los productos notables:

1.  $(a + b)(a - b) =$

2.  $(x + 8)(x - 8) =$

3.  $(7 + x)(7 - x) =$

4.  $(10 - 4p)(10 + 4p) =$

5.  $(3c + 9)(3c - 9) =$

6.  $(4x^2 + 2)(4x^2 - 2) =$

7.  $(7y^4 + 1)(1 - 7y^4) =$

8.  $(3m + 9n)(9n - 3m) =$

9.  $(a^x b^y + 2)(a^x b^y - 2) =$

10.  $(6x^2 y - 10x^3 y^2)(6x^2 y + 10x^3 y^2) =$

11.  $(y + 2)^2 =$

12.  $(a + 6)^2 =$

13.  $(4 + b)^2 =$

14.  $(10a^2 + 6)^2 =$

15.  $(10a^2 - 6)^2 =$

16.  $(a + b)^3 =$

17.  $(p + q)^3 =$

18.  $(a + 1)^3 =$

19.  $(a - 1)^3 =$

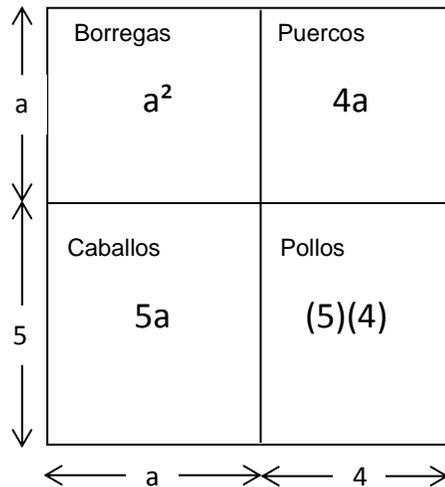
20.  $(2 + a)^3 =$



(Ibáñez y García, 2009)

### Aplicaciones

1. Se quiere elaborar una base de madera cuadrada para colocar chocolates, la medida de cada uno de sus lados es  $(y + 2)$  metros. Calcular el área de la base y su perímetro.
2. Calcular el volumen de una habitación que tiene  $(x + 6)$  metros de largo, de ancho y de alto.
3. Juan desea construir un corral en su granja, el cual tiene cierta superficie, lo pretende distribuir para construir un espacio para cada uno de los animales: las borregas, pollos, puercos y caballos. A continuación, se presenta cómo quiere que se construya el espacio para cada animal. ¿Cuál es el área total de la superficie? y ¿Cuál es el área que le corresponde a cada animal?



4. En una fábrica se producen  $(a + 1)^9$  dulces de vainilla cada 15 minutos, se desea saber cuántos habrá en 1 hora. Nota: utiliza el binomio de newton.
5. La población de cierto lugar crece rápidamente a partir del año 2015 ( $t = 0$ ). La siguiente función muestra su crecimiento:  $N(t) = (1 + t)^t$ , donde  $N(t)$  representa el tamaño de la población en millones en cualquier instante  $t$  (años) ¿Cuál será la población para 2050 ( $t = 35$ )?

## FACTORIZACIÓN

La factorización es la reducción o descomposición de una expresión algebraica en pequeñas partes llamadas factores.

### El procedimiento general para factorizar es el siguiente:

1. Se debe empezar buscando un factor común
2. Posteriormente se examina el número de términos
  - Dos términos: Identifica si es una diferencia de cuadrados.
  - Tres términos: Identifica si el trinomio es cuadrado perfecto, sino probar con otro tipo de trinomio.
3. Siempre se debe factorizar las veces que sea necesario hasta que ya no sea posible factorizar más.

### Factor común

En los siguientes ejercicios toma en cuenta que las variables del factor común no necesariamente requieren tener el mismo exponente y que además el coeficiente también puede formar parte de él.

$$a) 3b - 15ab^2 = 3b(1 - 5ab)$$

$$b) a^3 + a^4b + a^2b = a^2(a + a^2b + b)$$

$$c) 2x^3y - 8x^2y^2 - 6xy^3 = 2xy(x^2 - 4xy - 3y^2)$$

$$d) 18x^2 + 12x - 24y = 6(3x^2 + 2x - 4y)$$

Siempre se debe trabajar con el factor común de menor grado



### Factor común por agrupación de términos

Este tipo de factorización también es muy importante debido a que la expresión algebraica original se puede reducir de manera considerable sin necesidad de aplicar ningún tipo de fórmula u operación, salvo el análisis previo, como en los siguientes ejercicios.

**Ejercicios:** Factorizar los siguientes ejercicios por agrupación de términos.

1.  $ax + ay + bx + by =$

*Las líneas y colores permiten identificar visualmente los factores para la agrupación.*

En primer lugar, se deben identificar los términos comunes para su extracción, se analiza el resultado obtenido en busca de nuevos términos comunes y se repite la misma acción hasta lograr un término en su mínima expresión.

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$$

2.  $3x^2 - 6x + 4x - 8 =$

$$3x(x - 2) + 4(x - 2) = (3x + 4)(x - 2)$$

3.  $6m - 9n - 14mx + 21nx =$

$$3(2m - 3n) - 7x(2m - 3n) = (3 - 7x)(2m - 3n)$$

4.  $3a^2 - 7b^2x + 3ax - 7ab^2 =$

$$3a(a + x) - 7b^2(x + a) = (3a - 7b^2)(a + x)$$

## Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio de este tipo tiene las siguientes características:

- El primer y tercer término tienen raíces exactas
- Se colocan las raíces separadas y el signo del segundo término
- Se eleva al cuadrado el binomio

**Ejercicios:** Factorice los siguientes Trinomios Cuadrados Perfectos.

$$1. x^2 - 6xy + 9y^2 = (x - 3y)^2$$

$$2. 4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x - 5y)^2$$

$$3. 1 - 16ax^2 + 64a^2x^4 = (1 - 8ax^2)^2$$

## Diferencia de cuadrados

Para proceder a su resolución se debe tomar en cuenta que:

- Se factoriza como producto de binomios conjugados
- El exponente se divide entre dos

**Ejercicios:** Factorice los siguientes ejercicios de diferencia de cuadrados

$$1. x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

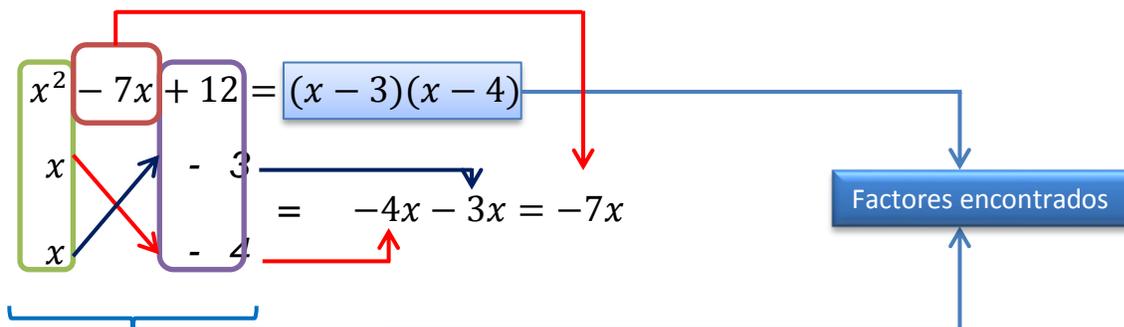
$$2. 36x^2 - 9y^6 = (6x - 3y^3)(6x + 3y^3)$$

$$3. 144m^{18} - 49y^{12} = (12m^9 - 7y^6)(12m^9 + 7y^6)$$

$$4. (a + b)^2 - c^2 = [(a + b) - c][(a + b) + c]$$

### Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

En estos ejercicios se recomienda utilizar la factorización por *coeficientes enteros* donde el producto de dos números sea igual al primer elemento, el producto de otros dos números iguale al tercer elemento y el producto cruzado de los elementos propuestos permita obtener el término medio del trinomio, es decir:



**Ejercicios:** Factorice los siguientes ejercicios de la forma  $x^2 + bx + c$

1.  $x^6 + 7x^3 - 44 = (x^3 + 11)(x^3 - 4)$
2.  $x^2 + 6x - 216 = (x + 18)(x - 12)$
3.  $x^4 - 5x^2 - 50 = (x^2 - 10)(x^2 + 5)$

### Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

El procedimiento para la resolución de este tipo de trinomios es exactamente igual que el ejercicio anterior, la única diferencia radica en que el primer elemento de dicho trinomio tiene un coeficiente diferente de 1.

**Ejercicios:** Factorice los siguientes ejercicios de la forma  $ax^2 + bx + c$

1.  $6x^2 - 7x - 3 = (3x + 1)(2x - 3)$
2.  $30x^2 + 13x - 10 = (6x + 5)(5x - 2)$
3.  $20x^2 + 7x - 6 = (4x + 3)(5x - 2)$
4.  $2x^2 - 14x + 24 = (2x - 8)(x - 3) \text{ o } (x - 4)(2x - 6)$

## SOLUCIÓN DE ECUACIONES POR FACTORIZACIÓN

Las soluciones de una ecuación (raíces solución) son los valores de la variable que hacen que la ecuación se cumpla. Por ejemplo:  $x = 2$  es una solución de la ecuación

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$$

Al sustituir el valor de  $x$  en la ecuación original, se tiene:

$$(2)^3 - 6(2)^2 + 12(2) - 8 = 8 - 24 + 24 - 8 = 0$$

**Ejercicios:** encuentre las raíces solución de la siguiente ecuación mediante factorización

$$x^2 - 3x = 10$$

Ecuación Original

En primer lugar, se iguala a cero la ecuación, por lo que se resta 10 a ambos lados de esta para obtener una ecuación alternativa que pueda ser más fácil factorizar

$$x^2 - 3x - 10 = 10 - 10$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Ecuación Alternativa

Posteriormente factorizamos el polinomio resultante del lado izquierdo para obtener

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

Como el producto  $(x - 5)(x + 2)$  es igual a cero, al despejar las variables se encuentran las raíces solución, es decir:

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

$$x_1 - 5 = 0 \quad x_2 + 2 = 0$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -2$$

Al sustituir cualquiera de las raíces encontradas en la *ecuación original*, el resultado es diez, con lo cual se comprueba que efectivamente son las raíces solución de la ecuación.

**Ejercicios:** Resolver la siguiente ecuación racional.

$$1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 0$$

Lo ideal en este tipo de ejercicios es escribir las fracciones del lado izquierdo con el común denominador  $x^2$

$$\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2} = 0$$

NOTA: para tener como común denominador  $x^2$ , debes multiplicar cada término por:  $\frac{x^2}{x^2}$

A continuación, se debe factorizar el polinomio del numerador para obtener

$$\frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} = 0$$

Un cociente es cero solo si su numerador es cero y su denominador no lo es, entonces las raíces solución son  $x_1 = -1$  y  $x_2 = 2$

### Completar el cuadrado

Una ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  para  $a \neq 0$  es una ecuación cuadrática. Este tipo de ecuaciones pueden tener a la suma dos soluciones y, como ya se ha visto, una manera de hallar las soluciones es factorizar la ecuación por el método de *coeficientes enteros*. Otra es mediante un procedimiento algebraico denominado completar el cuadrado, en el cual se reescribe la ecuación de la forma.

$$(x + r)^2 = s$$

Para los números reales "r" y "s". A continuación, se presentan los pasos de este procedimiento.

Paso 1. Dividir ambos lados de la ecuación dada entre "a" ( $a \neq 0$ )

$$ax^2 + bx + c = 0$$

para obtener

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right) = 0$$

A continuación, restar  $\frac{c}{a}$  de ambos lados

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right) - \left(\frac{c}{a}\right) = 0 - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x = -\frac{c}{a}$$

Paso 2. Sumar el cuadrado de  $\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)$  en ambos lados

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Paso 3. El lado izquierdo de la ecuación es  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ , ya que es un producto notable. De este modo, la ecuación puede escribirse como

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Y finalmente la solución de la ecuación se obtiene al quitar el cuadrado del primer término y despejar el valor de x.

**Ejercicio:** Obtenga las raíces solución de la siguiente ecuación por el método de completar el cuadrado.

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

En este caso se puede observar que el valor de *a* es 1, por tal razón la ecuación queda igual, el siguiente paso es restar *c* a ambos lados, donde *c* = 4

$$x^2 + 5x + 4 - 4 = 0 - 4 \quad \longrightarrow \quad x^2 + 5x = -4$$

Ahora se procede a encontrar  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ , donde *b* = 5 y *a* = 1 y se suma a ambos lados

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -4 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Se arma el binomio al cuadrado

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -4 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

De tal modo que al despejar el exponente y resolver el radical, se obtienen los valores positivo y negativo de dicha solución, con lo cual se obtienen las raíces solución

$$x + \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{9}{4}} \quad y \quad x + \frac{5}{2} = -\sqrt{\frac{9}{4}}$$

Y las soluciones son

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1 \quad y \quad x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -4$$

**Ejercicio:** Obtener las raíces solución de la siguiente ecuación por el método de completar el cuadrado.

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

El método es exactamente igual que el ejercicio anterior, la diferencia radica en que el coeficiente que acompaña a la  $x^2$  es 3, por tanto

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{5}{3}\right)x + \left(\frac{7}{3}\right) = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{5}{3}\right)x = -\frac{7}{3}$$

$$x^2 + \left(\frac{5}{3}\right)x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{7}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{59}{36}$$

Al despejar la potencia de la expresión  $\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{59}{36}$ , esta es igual al radical de un número

negativo  $\sqrt{-\frac{59}{36}}$ , por lo tanto, la ecuación cuadrática dada no tiene solución (raíces reales).

## Ejercicios propuestos de factorización

Instrucciones: En cada uno de los siguientes ejercicios, factorizar la expresión dada.

1.  $2x^3y^2 - 6xy^3$
2.  $8b^2m^2 + 24b^2mn + 18b^2n^2$
3.  $x^2 + 2xy + y^2 - a^2$
4.  $m^2 - b^2 - 2mn + n^2$
5.  $6a^2 + 5a - 6$
6.  $12x^2 - 29x + 15$
7.  $10m^2 - 13mn - 3n^2$
8.  $x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 6$
9.  $4a^2mx + 8a^2nx - 2a^2my - 4a^2ny$
10.  $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$
11.  $a^3b^6 + 27c^6d^3$
12.  $1 + my - y^2 - my^3$
13.  $x^8 + x^4 + 1$
14.  $4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2$
15.  $b^2 - 4b =$
16.  $2x^2 + 6x =$
17.  $3a^4 + 6a^2 + 6 =$
18.  $14m^4 - 12m =$
19.  $32a^5 - 17a^4 =$
20.  $6c^2 - 5c^2 =$
21.  $2x^2 + 2x - 8 =$
22.  $a^3b + 6a^2b =$
23.  $12x^5y^2 + 9x^4y + 6x^3y^2 =$
24.  $17c^5 + 34c^3 + 51c =$
25.  $6m^4 - 10m^3 + 3m^2 =$
26.  $y^5 + y^4 + y^3 - y^2 =$
27.  $2a^7 - 2y^6 - 64a^5 + 4a^3 =$
28.  $4y^4x^4 - 2y^3x^2 + 6y^2 =$
29.  $2a^3b - 4a^2b + b^2 =$
30.  $3m^2 - 3m =$
31.  $5c^2 + 10c + 30 =$
32.  $28x^2 + 21x^4 =$
33.  $9a^3 + 25a^7 =$
34.  $11a^4 + 7a^4 =$



(Lehmann, 2008, pág. 44) (Ibañez & García, 2009, págs. 210-211)

Aplicaciones de factorización (Ibañez & García, 2009, págs. 211, 212, 219)

1. El perímetro del paralelogramo que se muestra es  $8g + 4h$ . ¿Qué longitud tienen los lados que faltan?



2. El perímetro del siguiente trapecio es  $16m + 3$ , la base del trapecio es 1 más que el doble de la longitud del lado opuesto. ¿Cuáles son las longitudes de los lados que faltan?



3. Si el área de cada cuadrado está representada por el trinomio cuadrado perfecto correspondiente, determinar el lado de cada uno de los cuadrados siguientes.

a)

$$y^2 + 2y + 1$$

b)

$$f^2 + 6f + 9$$

c)

$$a^2 + 4a + 4$$

d)

$$b^2 + 8b + 16$$

4. Si el área de cada rectángulo está representada por el trinomio correspondiente a cada uno de ellos, ¿Cuál es el valor de cada uno de sus lados?

a)  $8r^2 + 8r + 2$

b)  $12s^2 + 13s + 3$

c)  $2v^2 + 7v + 6$

## SIMPLIFICACIÓN, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

De acuerdo con Silva y Lazo (2008), el cociente de dos polinomios se denomina fracción algebraica, por ejemplo:

$$a) \frac{1}{x} \quad b) \frac{4}{2x^2 + 3} \quad c) \frac{-2x^3 + 7x - 1}{5x^2 + 3x + 9} \quad d) \frac{x^3 + x - 6}{2}$$

En la mayoría de los casos, estos ejercicios se pueden simplificar a una expresión equivalente menor, es decir, la misma expresión original, pero expresada con un número menor de términos.

### Simplificación de fracciones algebraicas

Uno de los objetivos al trabajar con fracciones algebraicas es reducirlas en términos más simplificados, es decir, eliminar todos los factores comunes del numerador y el denominador. En este proceso serán de utilidad las siguientes propiedades de las fracciones, recordando lo visto en la unidad anterior.

#### Propiedades de fracciones

1. Regla de la suma:  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
2. Regla del producto:  $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$
3. Regla del cociente:  $\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

**Ejercicios:** Simplifica las siguientes fracciones a sus términos más simples

$$1. \frac{3x+3}{3} =$$

Factorizando el numerador tenemos que

$$\frac{3x + 3}{3} = \frac{3(x + 1)}{3}$$

Observamos que el factor en común es 3 y se puede eliminar, es decir

$$\frac{\cancel{3}(x+1)}{\cancel{3}} = x + 1$$

2.  $\frac{3x^2}{6x^2 - 6xy}$

Al igual que en el ejercicio anterior, se busca un factor común y se factoriza

$$\frac{3x^2}{6x^2 - 6xy} = \frac{3x^2}{6x(x - y)}$$

Se simplifica el 3 con el 6 y la  $x^2$  con la  $x$ , es decir

$$\frac{\cancel{3} \cancel{x^2}}{\cancel{6} \cancel{x} (x - y)} = \frac{x}{2(x - y)}$$

3.  $\frac{2a^3 - 10a}{10a^2}$

Se factoriza el **numerador** por factor común

$$2a^3 - 10a = 2a(a^2 - 5)$$

Y los factores del **denominador** son

$$10a^2 = 5a(2a)$$

Quedando

$$\frac{2a^3 - 10a}{10a^2} = \frac{(2a)(a^2 - 5)}{(2a)(5a)}$$

Pudiendo entonces cancelar el término  $2a$

$$\frac{\cancel{2a}(a^2 - 5)}{\cancel{2a}(5a)} = \frac{a^2 - 5}{5a}$$

4.  $\frac{x^2 + 3x - 10}{4x + 20} = \frac{(x-2)\cancel{(x+5)}}{4\cancel{(x+5)}} = \frac{x-2}{4}$

$$5. \frac{x^3-9x}{x^2-x-6} = \frac{x(x^2-9)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x+2)} = \frac{x(x+3)}{x+2}$$

$$6. \frac{x-3}{3-x} = \frac{x-3}{-(x-3)} = \frac{1\cancel{(x-3)}}{-1\cancel{(x-3)}} = -1$$

$$7. \frac{4(y^2-x^2)}{2(x^2-y^2)} = \frac{4(y-x)\cancel{(x+y)}}{2(x-y)\cancel{(x+y)}} = \frac{2(y-x)}{(x-y)} = \frac{2\cancel{(y-x)}}{(-1)\cancel{(y-x)}} = -2$$

$$8. \frac{x^2-5xy-6y^2}{y^2-x^2} = \frac{(x-6y)\cancel{(x+y)}}{(y-x)\cancel{(y+x)}} = \frac{x-6y}{y-x}$$

$$9. \frac{x^4-6x^3+8x^2}{6x^4-24x^2} = \frac{x^2(x^2-6x+8)}{6x^2(x^2-4)} = \frac{\cancel{x^2}(x-2)(x-4)}{6\cancel{x^2}(x-2)(x+2)} = \frac{x-4}{6(x+2)}$$

$$10. \frac{a^2+3a-ab-3b}{a^2-ab+5a-5b} = \frac{(a^2+3a)-(ab+3b)}{(a^2-ab)+5(a-b)} = \frac{a(a+3)-b(a+3)}{a(a-b)+5(a-b)} = \frac{\cancel{(a-b)}(a+3)}{\cancel{(a-b)}(a+5)} = \frac{a+3}{a+5}$$

Algunos de los errores que se cometen al simplificar las fracciones se basan en las siguientes igualdades:



**Error número 1:**

$$\frac{\cancel{k+a}}{\cancel{k+b}} = \frac{a}{b}$$

**Error número 2:**

$$\frac{\cancel{k+a}}{\cancel{k}} = a$$

Se debe notar que en ambos casos la propiedad está mal aplicada, ya que en el numerador se encuentra una suma y no un producto.

Lo que sí se puede afirmar es que

$$\frac{k + a}{k} = \frac{k}{k} + \frac{a}{k}, \text{ si } k \neq 0$$

**Ejercicios:** Simplifica las siguientes fracciones a sus términos más simples

a)  $\frac{x^2+4}{x^2+3}$  no se puede simplificar  $\frac{x^2+4}{x^2+3} \neq \frac{4}{3}$

b)  $\frac{x^2+6x+9}{x^2+6x+5}$  no se puede simplificar  $\frac{x^2+6x+9}{x^2+6x+5} \neq \frac{9}{5}$

c)  $\frac{3x+7}{3x} = \frac{3x}{3x} + \frac{7}{3x} = 1 + \frac{7}{3x}$

d)  $\frac{x^2+6}{x} \neq x + 6$  por tanto  $\frac{x^2+6}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{6}{x} = x + \frac{6}{x}$

e)  $\frac{x+8}{4} \neq x + 2$  por tanto  $\frac{x+8}{4} = \frac{x}{4} + \frac{8}{4} = \frac{x}{4} + 2$

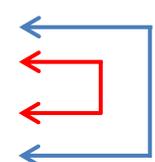
### Simplificación de una fracción compuesta

Una expresión racional con fracciones tanto en numerador como en el denominador se conoce como fracción compuesta. A menudo es útil presentar una fracción compuesta como el cociente de dos polinomios.

**Ejercicio:** Simplificar las siguientes fracciones compuestas a sus términos más simples

$$\frac{1 + \frac{1}{x+1}}{x - \frac{4}{x}} =$$

En este tipo de ejercicios, la recomendación es solucionar las operaciones con fracciones correspondientes al numerador y denominador de manera separada, no se debe olvidar la prioridad de operaciones para su resolución

$$\frac{\frac{1(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}}{\frac{x^2}{x} - \frac{4}{x}} = \frac{\frac{x+1+1}{x+1}}{\frac{x^2-4}{x}} = \frac{\frac{x+2}{x+1}}{\frac{x^2-4}{x}}$$


Al multiplicar medios por medios y extremos por extremos, la división de fracciones queda de la siguiente manera:

$$\frac{x(x + 2)}{(x + 1)(x^2 - 4)}$$

A continuación, se factoriza el producto notable del denominador:  $(x^2 - 4)$

$$(x^2 - 4) = (x + 2)(x - 2)$$

Dando como resultado:

$$\frac{x(x + 2)}{(x + 1)\cancel{(x + 2)}(x - 2)} = \frac{x}{(x + 1)(x - 2)}$$

### Multiplicación de fracciones algebraicas

Para efectuar la multiplicación de fracciones se hará uso del teorema:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0$$

El procedimiento es sencillo, se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, posteriormente se factorizan y por último se utiliza la ley de la cancelación para eliminar factores en común tanto en el numerador como en el denominador.

**Ejercicios:** Multiplicar y simplificar las siguientes expresiones.

1.  $\frac{4x^3}{y} \cdot \frac{2y^4}{8x}$

$$\frac{(4x^3)(2y^4)}{y(8x)} = \frac{\cancel{4}(x^3)\cancel{2}(y^4)}{\cancel{4}\cancel{2}xy} = \frac{x^2y^3}{1} = x^2y^3$$

2.  $\frac{2a+2b}{4} \cdot \frac{a-b}{a^2-b^2}$

$$\frac{(2a + 2b)(a - b)}{4(a^2 - b^2)} = \frac{2\cancel{(a + b)}\cancel{(a - b)}}{4\cancel{(a + b)}\cancel{(a - b)}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$3. \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 25} \cdot \frac{2x + 10}{6x + 12}$$

$$\frac{(x^2 - 3x - 10)(2x + 10)}{(x^2 - 25)(6x + 12)} = \frac{\cancel{(x-5)}(x+2)(2)(x+5)}{\cancel{(x-5)}(x+2)(6)(x+5)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$4. \frac{x-4}{2x+8} \cdot \frac{4x+8}{x^2-16} \cdot \frac{x+4}{x+2}$$

$$\frac{(x-4)(4x+8)(x+4)}{(2x+8)(x^2-16)(x+2)} = \frac{(4)\cancel{(x-4)}(x+2)(x+4)}{(2)\cancel{(x-4)}(x+2)\cancel{(x+4)}(x+4)} = \frac{2}{x+4}$$

### División de fracciones algebraicas

Para la división se hará uso del siguiente teorema:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

El cual también se puede ver como una multiplicación de medios por medios y extremos por extremos como se ha visto anteriormente:

$$\left( \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \right) = \frac{ad}{bc}$$

Para dividir dos fracciones algebraicas, se debe transformar la división en un producto de fracciones algebraicas y se resuelve como tal.

**Ejercicios:** Dividir y simplificar las siguientes expresiones algebraicas:

$$1. \frac{6b^2}{4a} \div \frac{3b}{4a^2}$$

$$\frac{(6b^2)(4a^2)}{(4a)(3b)} = \frac{(b)\cancel{(2)}(3b)\cancel{(2a)}(2a)}{\cancel{(2)}(3b)\cancel{(2a)}} = 2ab$$

$$2. \frac{4a^2b}{5a^2} \div a^2b^3$$

$$\frac{4a^2b}{5a^2} \div \frac{a^2b^3}{1} = \frac{(4a^2b)(1)}{(5a^2)(a^2b^3)} = \frac{4}{5a^2b^2}$$

$$3. \frac{x-1}{4} \div \frac{3x-3}{8}$$

$$= \frac{(x-1)(8)}{(4)(3x-3)} = \frac{\cancel{(4)}(x-1)(2)}{\cancel{(4)}(x-1)(3)} = \frac{2}{3}$$

$$4. \frac{2x}{3x-15} \div \frac{x^2-3x}{x^2-8x+15}$$

$$\frac{(2x)(x^2-8x+15)}{(3x-15)(x^2-3x)} = \frac{2x\cancel{(x-5)}\cancel{(x-3)}}{3x\cancel{(x-5)}\cancel{(x-3)}} = \frac{2}{3}$$

También se pueden tener fracciones combinadas de producto y división como en los siguientes ejercicios.

**Ejercicios:** Simplificar las siguientes expresiones algebraicas

$$a) \frac{(x^2-9)(x)}{(x)(x-3)} \div \frac{3}{x+3}$$

$$= \frac{(x^2-9)(x)(x+3)}{x(x-3)(3)} = \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}\cancel{(x)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x)}(3)} = \frac{(x+3)^2}{3}$$

$$b) \frac{x^2+x-2}{x-1} \div \frac{x+2}{x^2-3x+2} \cdot \frac{4}{x-2}$$

$$= \frac{(x^2+x-2)(x^2-3x+2)}{(x-1)(x+2)} \cdot \frac{4}{x-2} = \frac{(x^2+x-2)(x^2-3x+2)(4)}{(x-1)(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{(x-1)\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}(4)}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}} = 4(x-1)$$

## Suma y resta de fracciones algebraicas con denominadores iguales

Para sumar o restar dos fracciones algebraicas se utilizará el mismo proceso que para sumar fracciones numéricas, esto depende de que sus denominadores sean iguales o no.

Para sumar o restar fracciones con el mismo denominador se hará uso de lo siguiente:

Si a, b y c son números reales:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \quad b \neq 0$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}, \quad b \neq 0$$

**Ejercicios:** Simplificar las siguientes expresiones algebraicas con el mismo denominador

a)  $\frac{x}{3} + \frac{6-x}{3} = \frac{x+6-x}{3} = \frac{6}{3} = 2$

b)  $\frac{x-2}{4} - \frac{x+5}{4} = \frac{(x-2)-(x+5)}{4} = \frac{x-2-x-5}{4} = \frac{-7}{4}$

c)  $\frac{5x+4}{9} + \frac{4x+5}{9} = \frac{5x+4+4x+5}{9} = \frac{9x+9}{9} = \frac{9(x+1)}{9} = x+1$

d)  $\frac{8}{a+b} - \frac{5}{a+b} = \frac{8-5}{a+b} = \frac{3}{a+b}$

e)  $\frac{4x}{x^2+x-2} + \frac{8}{x^2+x-2} = \frac{4x+8}{x^2+x-2} = \frac{4(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{4}{x-1}$

f)  $\frac{x^2+10}{x-6} - \frac{3x+30}{x-6} + \frac{2x-10}{x-6} = \frac{(x^2+10)-(3x+30)+(2x-10)}{x-6} = \frac{x^2+10-3x-30+2x-10}{x-6}$   
 $= \frac{x^2-x-30}{x-6} = \frac{(x-6)(x+5)}{x-6} = x+5$

## Ejercicios propuestos

Instrucciones: Simplificar las siguientes expresiones algebraicas, utilizando la factorización (Ibañez & García, 2009, págs. 250-251):

$$1. \frac{4w^2}{2w} =$$

$$2. \frac{72x^2y^3}{9x^2y^4} =$$

$$3. \frac{56a^5b^4c^3}{7a^4b^5c} =$$

$$4. \frac{m^2-1}{m+1} =$$

$$5. \frac{y^2+4y+4}{y+2} =$$

$$6. \frac{g^2-2g-3}{g^2-g} =$$

$$7. \frac{f^2+16f+63}{f^2+7f} =$$

$$8. \frac{h^2-2h}{h^2-7h+10} =$$

$$9. \frac{81-b^2}{81+18b+b^2} =$$

$$10. \frac{y^2-3y+2}{y^2+y-2} =$$

$$11. \frac{a^2+4a+3}{a^2+a-2} =$$

$$12. \frac{2w^2+4a+3}{a^2+a-6} =$$

$$13. \frac{3r^2-11r+6}{2w^2+5w-3} =$$

$$14. \frac{(2a-5b)(a^2+3ab+2b^2)}{(2a^2-3ab-5b^2)(2a-b)} =$$

$$15. \frac{y^4+4y^2+16}{y^3+8} =$$

$$16. \frac{x^6-y^6}{x^4-y^4} =$$

$$17. \frac{(2a-5)a-3}{a^2-4a+3} =$$

$$18. \frac{(3r-5)r-2}{(r-2)(3r-5)} =$$

$$19. \frac{s-3}{(2s-5)s-3} =$$

$$20. \frac{(f-4)(f+2)}{(5f-19)f-4} =$$



## Algunas Aplicaciones

1. El denominador de una fracción es mayor por una unidad al triple del numerador. Si el numerador se aumenta en 15 y el denominador se disminuye a 1, el valor de la fracción será  $\frac{4}{3}$ , encuentre la fracción.
2. La suma de dos números es 436, si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 2 y el residuo 73, encuentre los números.
3. El cabello de Paula mide  $\frac{75}{x}$  cm de largo, acaba de cortarlo 5 cm, ahora su cabello mide 20 cm, ¿Cuál era la medida de su cabello antes de cortarlo?, determina el valor de  $x$  algebraicamente.

# Introducción a las Matemáticas

## Unidad 3



$$(X+1) \quad (Y-2)$$

### Sistemas de Ecuaciones Lineales

## UNIDAD 3, SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Al completar la unidad de aprendizaje, el alumno será capaz de:

- Interpretar sistemas de ecuaciones lineales de primer grado con 2 incógnitas.
- Interpretar ecuaciones de segundo grado con 3 incógnitas.
- Modelar problemas de las organizaciones a través de ecuaciones lineales.

### INTRODUCCIÓN

Un sistema de ecuaciones lineales, es algo que va más allá de dos simples rectas que se cruzan en algún punto y que en algunos casos especiales, jamás se cruzan; en materias como Economía Y Métodos para la Toma Decisiones, estas rectas o sistemas de rectas permiten entre muchas cosas, interpretar cual va a ser el comportamiento de un problema en específico, es decir, descubrir si se van a optimizar tiempos, reducir costos, optimizar recursos, los cuales son de suma importancia cuando del sector industrial se habla y son estos instrumentos los que permiten precisamente la toma de decisiones.

En esta unidad, se les guía para que, a través de diferentes métodos, los alumnos sean capaces de resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales ya sea de dos o tres incógnitas.

Are you ready?

Here we go!!!!



# ECUACIONES LINEALES

## Ecuación

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se cumple solo para algunos valores de la variable.

Algunos ejemplos de ecuaciones son:

$2x - 3 = 9 - x$   **Ecuación lineal de una variable**

$2x + y = 7$   **Ecuación lineal en dos variables**

$4x - 3 = \frac{5x+3}{2}$   **Ecuación lineal de una variable**

$y^2 - 5y = 6 - 4y$   **Ecuación de segundo grado**



El grado de una ecuación viene dado por el exponente mayor de la incógnita

En el caso de la ecuación lineal de una variable o de primer grado, el mayor grado de la incógnita es uno y puede escribirse en la forma:  $ax + b = 0$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes y  $a \neq 0$

El valor o valores de la variable ( $x$ ) que hagan válida la igualdad se denomina raíz o solución de la ecuación dada.

### ¿Sabías que?

El símbolo de las dos rayas = que indican igualdad se empezó a usar en el Reino Unido hace 400 años



### Solución de una ecuación lineal

Para determinar la solución de una ecuación lineal se usan las propiedades de la adición y multiplicación de igualdad.

## PROPIEDADES DE LA ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN DE LA IGUALDAD

**Propiedad 1:** Sumar o restar a las dos partes de la igualdad una misma expresión no altera la igualdad y el conjunto solución no cambia.

El proceso que se sigue para resolver una ecuación lineal en una variable consiste en escribir la ecuación en la forma estándar:

$$ax + b = 0$$

Para ello se deben eliminar todas las fracciones (si las hay), simplificar cada lado por separado tanto como sea posible, por medio de la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis y agrupar términos semejantes según se requiera y después despejar la variable, es decir dejarla a un lado de la ecuación y escribir las constantes (los números) al otro lado.

Si en las ecuaciones aparecen fracciones o decimales como coeficientes, se recomienda multiplicar ambos lados por el mínimo común denominador de todas las fracciones. Esta es una aplicación de propiedad de multiplicación de la igualdad que produce una ecuación equivalente con coeficientes enteros.

*¡Hacer ecuaciones es como montar en bicicleta, lo importante es mantener el equilibrio!*



**Ejercicio:** Resuelva la ecuación  $\frac{x+7}{6} + \frac{2x-8}{2} = -4$  y encuentre el valor de la variable  $x$ .

Se multiplican ambos lados por 6 para eliminar la fracción

$$6 \left( \frac{x+7}{6} + \frac{2x-8}{2} \right) = (6)(-4)$$

Aplicamos propiedad distributiva

$$6\left(\frac{x+7}{6}\right) + 6\left(\frac{2x-8}{2}\right) = (6)(-4)$$

$$x + 7 + 3(2x - 8) = -24$$

$$x + 7 + 6x - 24 = -24$$

Y Agrupamos términos

$$7x - 17 = -24$$

Se coloca de un solo lado el término que contenga a la variable y se escriben los números al otro lado. (Esto equivale a sumar 17 a cada miembro de la igualdad)

$$7x = -24 + 17$$

$$7x = -7$$

Para hacer que el coeficiente de la variable sea 1 se lleva su coeficiente al otro lado de la igualdad (esto equivale a dividir entre 7 a cada miembro de la igualdad)

$$x = \frac{-7}{7}$$

$$x = -1$$

Para asegurarse que la solución es ( $x = -1$ ), se comprueba sustituyendo este valor en la ecuación original

$$\frac{-1 + 7}{6} + \frac{2(-1) - 8}{2} = -4$$

$$\frac{6}{6} + \frac{-2 - 8}{2} = -4$$

$$\frac{6}{6} + \frac{-10}{2} = -4$$

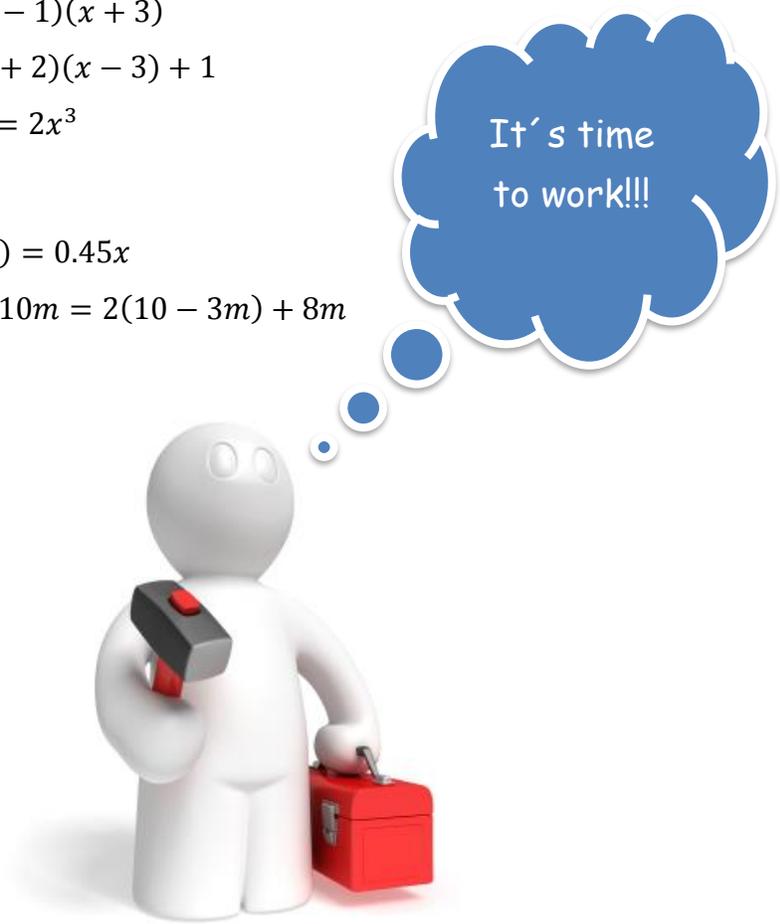
$$1 - 5 = -4$$

$$-4 = -4$$

Como se satisface la igualdad, la solución si es  $x = -1$

**Ejercicios propuestos:** Resolver las siguientes ecuaciones

1.  $2x - 3 = 9 - x$
2.  $3x + 7 = 3 + 5x$
3.  $4(x - 3) = 8 - x$
4.  $3(x - 4) + 5(x + 6) = 9(3x - 2) - 2$
5.  $3x + 2(x - 1) = 6x - 9$
6.  $(x - 4)^2 = (x - 2)^2$
7.  $x^2 + (x + 1)^2 = (2x - 1)(x + 3)$
8.  $(x - 1)(x + 3) = (x + 2)(x - 3) + 1$
9.  $(x + 1)^3 + (x - 1)^3 = 2x^3$
10.  $\frac{2x+5}{5} = \frac{3x+1}{2} + \frac{-x+7}{2}$
11.  $0.5x + 0.10(200 - x) = 0.45x$
12.  $4[6 - 1(1 + 2m)] + 10m = 2(10 - 3m) + 8m$



It's time  
to work!!!

## SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con dos o más variables que conforman un problema matemático al que se pretende encontrar una solución común.

### Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2X2

Este sistema de ecuaciones de 2x2, está formado por dos ecuaciones con dos variables cuyo objetivo consiste en encontrar los valores de las variables que satisfacen dichas ecuaciones.

La forma general de representar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables es:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

### Métodos de Solución de Ecuaciones Lineales de 2X2 (dos ecuaciones con dos variables)

Como se mencionó anteriormente, resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables consiste en encontrar el valor de las variables que satisfagan a ambas ecuaciones.

Los métodos que permiten resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 son:

- Eliminación (Reducción o Suma y Resta)
- Sustitución
- Igualación
- Determinantes
- Método gráfico
- Eliminación gaussiana

### Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por Eliminación

También es llamado método de reducción y consiste en eliminar una de las variables disponibles.

#### Pasos

1. Escribir en forma estándar ambas ecuaciones  $Ax + By = C$

2. Hallar los opuestos de los coeficientes de un par de términos, es decir, multiplicar una o ambas ecuaciones por números apropiados de modo que la suma de los coeficientes de  $x$  o de  $y$  sea 0.
3. Sumar las nuevas ecuaciones para eliminar una variable. La suma resultante es una ecuación con una variable.
4. Resolver la ecuación resultante del paso anterior.
5. Sustituir el resultado en cualquiera de las ecuaciones dadas y resolver la ecuación para la otra variable.
6. Comprobar la solución en las ecuaciones originales dadas.

**Ejercicio:** Determine la solución del siguiente sistema de ecuaciones por eliminación

$$4x + 3y = 1 \quad (1)$$

$$3x + 2y = 2 \quad (2)$$

Se analiza el ejercicio antes de comenzar y se procede a resolver

- Las ecuaciones ya están escritas en forma estándar
- Para eliminar la variable  $x$  se multiplica la ecuación (1) por 3, y la ecuación (2) por -4, así las nuevas ecuaciones equivalentes son

$$12x + 9y = 3$$

$$-12x - 8y = -8$$

- Se suman estas dos ecuaciones para eliminar  $x$

$$y = -5$$

- La solución de la ecuación se obtuvo en automático.
- Para encontrar el valor de  $x$ , se sustituye  $y$  por -5 en cualquiera de las dos ecuaciones originales. Al sustituir en la ecuación (1) de obtiene

$$12x + 9y = 3$$

$$12x + 9(-5) = 3$$

$$12x - 45 = 3$$

$$12x = 48$$

$$x = 4$$

Por lo tanto, el punto solución es  $(x = 4, y = -5)$

Por último, se debe verificar la solución sustituyendo  $(x = 4, y = -5)$  en las ecuaciones originales:

Ecuación (1)

$$4x + 3y = 1$$

$$4(4) + 3(-5) = 1$$

$$16 - 15 = 1$$

$$1 = 1$$

Ecuación (2)

$$3x + 2y = 2$$

$$3(4) + 2(-5) = 2$$

$$12 - 10 = 2$$

$$2 = 2$$



¡Oye!!, recuerda que no todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen un punto solución que satisfaga a ambas ecuaciones, ya que se puede tener alguno de los siguientes casos:

- a) Que no se crucen por ser paralelas y que no exista una solución o
- b) Que las rectas se encuentren encimadas y se tenga un número infinito de soluciones

## Solución de Sistemas Lineales por Sustitución

Este método es relativamente más rápido que el método anterior (aunque esto dependerá de algún modo del alumno, quien podrá tener una mejor opinión al respecto y en función de sus propias habilidades), la forma de solucionar un sistema por este método se describe a continuación:

- Despejar una de las variables en función de la otra en una de las dos ecuaciones disponibles.
- Sustituir la variable despejada en la otra ecuación.
- Resolver la ecuación resultante de una variable.
- Sustituir el valor de la variable encontrada, en el despeje.
- Comprobar la solución en las ecuaciones dadas.
- Verificar la solución en las ecuaciones dadas.

**Ejercicio:** Determine la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales por sustitución

$$4x + 3y = 1 \quad (1)$$

$$3x + 2y = 2 \quad (2)$$

En función a lo descrito anteriormente, se procede a resolver el ejercicio, en primer lugar, despejar la variable  $x$  de ecuación (1)

$$x = \frac{1 - 3y}{4}$$

Sustituir el valor de  $x$  en la ecuación (2)

$$3x + 2y = 2$$

$$3\left(\frac{1 - 3y}{4}\right) + 2y = 2$$

Resolver la ecuación para la variable  $y$

$$\left[3\left(\frac{1 - 3y}{4}\right) + 2y = 2\right] (4) \quad \text{Se multiplican ambos lados por (4) para eliminar la fracción}$$

$$3(1 - 3y) + 8y = 8$$

No olvides Agrupar términos, separarlos para dejar la variable de un lado y los números del otro

$$3 - 9y + 8y = 8$$

$$3 - y = 8$$

$$-y = 8 - 3$$

$$-y = 5$$

Por último, para hacer que el coeficiente de la variable sea 1 se multiplica por (-1) la ecuación

$$y = -5$$

Ahora es momento de sustituir el valor de  $y = -5$  en la ecuación (1)

$$4x + 3y = 1 \qquad 4x + 3(-5) = 1 \qquad 4x - 15 = 1$$

$$4x = 1 + 15 \qquad 4x = 16 \qquad x = 4$$

Por lo tanto, el punto solución que satisface al sistema de ecuaciones es  $(x = 4, y = -5)$

Para comprobarlo, se debe sustituir  $(x = 4, y = -5)$  en las ecuaciones originales

Ecuación (1)

$$4x + 3y = 1$$

$$4(4) + 3(-5) = 1$$

$$16 - 15 = 1$$

$$1 = 1$$

Ecuación (2)

$$3x + 2y = 2$$

$$3(4) + 2(-5) = 2$$

$$12 - 10 = 2$$

$$2 = 2$$

## Solución de Sistemas Lineales por Igualación

En este método se sigue un procedimiento muy similar al anterior, la diferencia radica en que la variable seleccionada se despeja en ambas ecuaciones y se igualan para encontrar su valor, el procedimiento completo se describe a continuación:

- Despejar la misma variable en las dos ecuaciones.
- Igualar las dos ecuaciones despejadas.
- Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita.
- Sustituir el valor de la variable encontrada en cualquiera de los despejes.
- Comprobar la solución en las ecuaciones dadas.

**Ejercicio:** determine la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación

$$4x + 3y = 1 \quad (1)$$

$$3x + 2y = 2 \quad (2)$$

Como se ha descrito, se despeja la variable  $x$  en ambas ecuaciones

Con respecto a la ecuación (1)

$$4x + 3y = 1$$

$$x = \frac{1 - 3y}{4}$$

De la ecuación (2) se tiene

$$3x + 2y = 2$$

$$x = \frac{2 - 2y}{3}$$

Y se procede a igualar ambas ecuaciones despejadas

$$\frac{1 - 3y}{4} = \frac{2 - 2y}{3}$$

Ahora se resuelve la ecuación, tomando en cuenta que, para poder eliminar las fracciones, se debe buscar un término común, el cual es el resultado de multiplicar 4 y 3, es decir el número 12.

$$\frac{1 - 3y}{4} = \frac{2 - 2y}{3}$$

$$(12) \left[ \frac{1 - 3y}{4} = \frac{2 - 2y}{3} \right]$$

$$3(1 - 3y) = 4(2 - 2y)$$

$$3 - 9y = 8 - 8y$$

Se coloca de un solo lado el término que contenga a la variable y se escriben los números al otro lado.

$$-9y + 8y = 8 - 3$$

$$-y = 5$$

$$y = -5$$

Con el valor numérico de  $y$ , es momento de sustituirla en cualquiera de los dos despejes, en este caso en la ecuación  $x = \frac{1-3y}{4}$

$$x = \frac{1 - 3(-5)}{4}$$

$$x = \frac{1 + 15}{4}$$

$$x = \frac{16}{4}$$

$$x = 4$$

Por lo tanto, el punto solución de la ecuación lineal es

$$(x = 4, y = -5)$$

Para comprobar, se verifica la solución sustituyendo los valores  $(x = 4, y = -5)$  en las ecuaciones originales

**Ecuación (1)**

$$4x + 3y = 1$$

$$4(4) + 3(-5) = 1$$

$$16 - 15 = 1$$

$$1 = 1$$

**Ecuación (2)**

$$3x + 2y = 2$$

$$3(4) + 2(-5) = 2$$

$$12 - 10 = 2$$

$$2 = 2$$

## Método por Determinantes (Regla de Cramer)

Es un método basado en la solución de determinantes que se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos o más incógnitas. Consideremos un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

El cual se expresa en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Dónde:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

Se denomina matriz de coeficientes del sistema y se denota por A

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Se denomina matriz columna de las incógnitas y se denota por X

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Se denomina matriz columna de los términos independientes y se denota por Y



Una matriz es un arreglo de m renglones y n columnas de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Una matriz se denota usualmente con letra mayúscula A y sus elementos como  $a_{ij}$

La solución de un sistema de ecuaciones lineales por medio de determinantes se especifica a continuación

- Calcular el determinante general del sistema con los coeficientes de las incógnitas, el determinante general se denota como  $\Delta A$  y se determina como sigue:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

- Calcular el determinante de cada una de las incógnitas. Cuando se plantea el determinante de una incógnita, se elimina la columna de los coeficientes de esa incógnita y se sustituye por la columna de los valores constantes a los que están igualadas las ecuaciones.

Esto es:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

- Obtener el valor de las incógnitas del sistema, se divide el determinante de cada una de las variables entre el determinante general, es decir:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta A} \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta A}$$

- Comprobar la solución en las ecuaciones dadas.



Este método es aplicable solo si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

**Ejercicio:** Determine la solución del siguiente sistema de ecuaciones por el método de determinantes

$$4x + 3y = 1 \quad (1)$$

$$3x + 2y = 2 \quad (2)$$

Antes de iniciar, se debe calcular el determinante general

El determinante general se obtiene sustituyendo los coeficientes  $a_1 = 4, b_1 = 3, a_2 = 3, y b_2 = 2$  en la fórmula

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (4)(2) - (3)(3) = 8 - 9 = -1$$

A continuación, se debe calcular el determinante de cada una de las incógnitas ( $x, y$ ), para ello se sustituye en las formulas los coeficientes  $a_1 = 4, b_1 = 3, a_2 = 3, b_2 = 2, c_1 = 1, c_2 = 2$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (2)(3) = 2 - 6 = -4$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (4)(2) - (3)(1) = 8 - 3 = 5$$

Por último, obtener el valor de las incógnitas ( $x, y$ )

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta A} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta A} = \frac{5}{-1} = -5$$

Así la solución o el punto solución que satisface a ambas ecuaciones es:  $(x = 4, y = -5)$

**Ejercicios propuestos:** Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$a) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 3y + 8 = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + 4y = 14 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 7x - 8y = 4 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$

### Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales en forma Gráfica

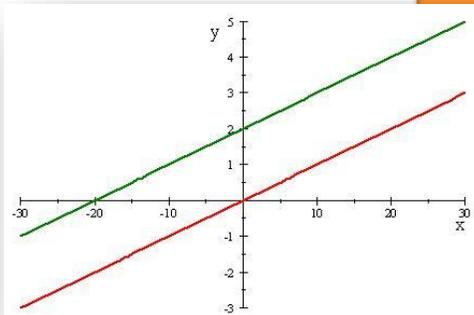
Consideremos un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Cada ecuación del sistema se representa gráficamente por medio de una línea recta (tema que se verá con mayor profundidad en la siguiente unidad). Para resolver un sistema de ecuaciones en forma gráfica (Método Gráfico) se debe:

- Trazar las rectas en el plano  $xy$ . Para trazar las rectas se obtienen los puntos de intersección de cada recta con los ejes coordenados (*Interceptos*), para esto se hace  $x = 0$  y se resuelve la ecuación para  $y$ , lo mismo para el caso de la otra variable  $y = 0$  y se resuelve la ecuación para  $x$ .
- Se determina el punto de intersección (punto donde se cruzan estas rectas) que es **la solución del sistema**.

Existen dos casos especiales de Sistemas de Ecuaciones Lineales que deberás tomar en cuenta:



1. Las que no tienen punto solución debido a que nunca se cruzan por ser **PARALELAS**.
2. Las que tienen un número infinito de soluciones por estar una recta encima de la otra, es decir, se trata de la **MISMA RECTA**,

**Ejercicio:** Determine la solución del siguiente sistema de ecuaciones en forma gráfica

$$8x + y = 4 \quad (1)$$

$$2x - y = 1 \quad (2)$$

En primer lugar, se deberán encontrar los interceptos de las ecuaciones de manera individual, es decir, se sustituyen los valores del punto propuesto  $(0, 0)$ , donde  $x = 0$  y  $y = 0$

Con respecto a la ecuación Núm. (1)

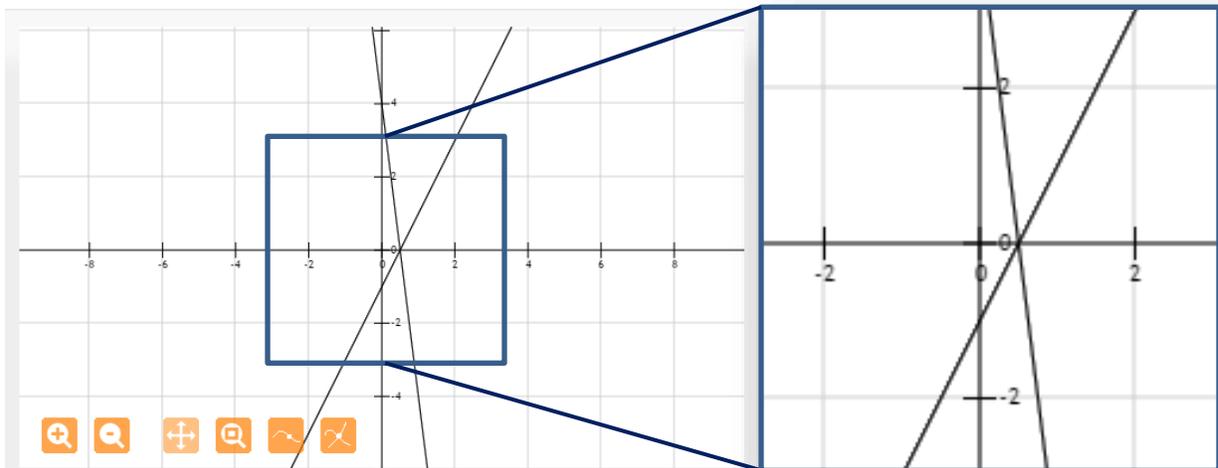
Punto encontrado		
Si $x = 0$	$Y = 4$	$(0, 4)$
Si $y = 0$	$x = \frac{1}{2}$	$(0.5, 0)$

De la ecuación Núm. (2) se tiene

Punto encontrado		
Si $x = 0$	$Y = -1$	$(0, -1)$
Si $y = 0$	$x = \frac{1}{2}$	$(0.5, 0)$

Por lo tanto, para la ecuación  $8x + y = 4$ , los puntos de intersección con los ejes son:  $(0, 4)$  y  $(\frac{1}{2}, 0)$  y para la ecuación  $2x - y = 1$ , los puntos de intersección con los ejes son:  $(0, -1)$  y  $(\frac{1}{2}, 0)$ .

Con esto se pueden graficar ambas rectas como se observa en la figura.



El punto solución del sistema de ecuaciones es el punto de intersección de las dos rectas, en este caso  **$(0.5, 0)$**

**Ejercicios Propuestos:** Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el Método Gráfico y encuentre su punto solución.

$$1. \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - 2y = 10 \\ 2x + 3y = -8 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 7x - y = -16 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x = -4y \\ 5x - 6y = 38 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x + 4y = 15 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

### Sistemas de Ecuaciones Lineales de 3x3 (tres ecuaciones con tres variables)

Al igual que los sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, este tipo de sistemas de ecuaciones lineales se puede resolver por cualquiera de los métodos arriba descritos, por tanto, la solución dependerá del método seleccionado.

Para resolver el sistema de ecuaciones por el Método de Eliminación deberá:

- Eliminar una Variable. Aplicar el método de suma o resta para eliminar una variable de la ecuación (1) y (2). El resultado es una ecuación en dos variables.
- Eliminar la misma variable otra vez. Se elimina la misma variable, pero ahora de la ecuación (2) y (3), para obtener un sistema de dos ecuaciones con dos variables.
- Resolver por eliminación las dos ecuaciones en dos variables que resultan.
- Sustituir los valores de las dos variables del paso anterior para obtener el valor de la tercera variable.
- Comprobar la solución en las ecuaciones dadas.

En el siguiente ejercicio se explica de manera detallada el proceso de solución.

**Ejercicio:** Encuentre el punto solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales de tres incógnitas por el método de eliminación

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 8 & \xrightarrow{\text{blue}} \text{(1)} \\ 2x - 3y + 2z = 16 & \xrightarrow{\text{red}} \text{(2)} \\ x + 4y - z = 20 & \xrightarrow{\text{cyan}} \text{(3)} \end{cases}$$

Para efectos de este ejercicio, en primer lugar, eliminaré  $z$  de la ecuación (1) y (2) para obtener la ecuación (1a), no olvides tomar en cuenta que el coeficiente de ambas  $z$  es igual, pero con signo diferente

$$\begin{array}{r}
 (-2) \left( \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 8 \\ 2x - 3y + 2z = -16 \end{array} \right) \\
 \hline
 -6x - 4y - 2z = -16 \\
 2x - 3y + 2z = -16 \\
 \hline
 -4x - 7y = -32 \longrightarrow (1a)
 \end{array}$$

A continuación, se eliminará  $z$  de las ecuaciones (2) y (3) para obtener la ecuación (1b)

$$\begin{array}{r}
 2x - 3y + 2z = -16 \\
 (2) \left( \begin{array}{l} 2x + 4y - z = 20 \end{array} \right) \\
 \hline
 2x - 3y + 2z = -16 \\
 2x + 8y - 2z = 40 \\
 \hline
 4x + 5y = 24 \longrightarrow (1b)
 \end{array}$$

Ahora se resuelve el sistema de  $2 \times 2$  resultante con las ecuaciones (1a) y (1b)

$$\begin{array}{r}
 -4x - 7y = -32 \\
 4x + 5y = 24 \\
 \hline
 -2y = -8 \\
 \boxed{y = 4}
 \end{array}$$

El valor encontrado de  $y$ , se sustituye en alguna de las ecuaciones (1a) o (1b), en este caso será en (1a)

$$-4x - 7(4) = -32$$

$$-4x - 28 = -32$$

$$-4x = -32 + 28$$

$$x = \frac{-4}{-4}$$

$$x = 1$$

Por último, se sustituyen los valores de  $x$ ,  $y$  en la ecuación (1) para encontrar el valor de  $z$

$$3(1) + 2(4) + z = 8$$

$$3 + 8 + z = 8$$

$$11 + z = 8$$

$$z = 8 - 11$$

$$z = -3$$

Por lo tanto, el punto solución es  $(x = 1, y = 4, z = -3)$

Recuerda que, para comprobarlo, deberás sustituir los valores encontrados en las tres ecuaciones originales e igualar los resultados como se muestra a continuación

$$3x + 2y + z = 8$$

$$3(1) + 2(4) - 3 = 8$$

$$3 + 8 - 3 = 8$$

$$8 = 8$$

$$2x - 3y + 2z = -16$$

$$2(1) - 3(4) + 2(-3) = -16$$

$$2 - 12 - 6 = -16$$

$$\mathbf{-16 = -16}$$

$$x + 4y - z = 20$$

$$1 + 4(4) + 3 = 20$$

$$1 + 16 + 3 = 20$$

$$\mathbf{20 = 20}$$

Solución de Sistemas Lineales de 3x3, por Regla de Cramer.

Para solucionar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas como el que se muestra a continuación:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + d_1z = c_1 \\ a_2x + b_2y + d_2z = c_2 \\ a_3x + b_3y + d_3z = c_3 \end{cases}$$

En primer lugar, se debe calcular el determinante general del sistema, el cual se obtiene como:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} + d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Así como los determinantes de cada una de las incógnitas, los cuales se obtienen como:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + d_1 \begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} + d_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Y se obtiene el valor de las incógnitas, esto es:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta A} \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta A} \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta A}$$

Por último, se comprueba en las ecuaciones dadas.

**Ejercicio:** Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Cramer.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 8 \\ 2x - 3y + 2z &= -16 \\ x + 4y - z &= 20 \end{aligned}$$

En primer lugar, se debe calcular el determinante general.

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta A = 3[(-3)(-1) - (4)(2)] - 2[(2)(-1) - (2)(1)] + [(2)(4) - (-3)(1)]$$

$$\Delta A = 3[3 - 8] - 2[-2 - 2] + [8 + 3]$$

$$\Delta A = 3[-5] - 2[-4] + 11$$

$$\Delta A = -15 + 8 + 11$$

$$\Delta A = 4$$

A continuación, se calcula el determinante de cada una de las variables

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -16 & -3 & 2 \\ 20 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -16 & 2 \\ 20 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -16 & -3 \\ 20 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = 8[(-3)(-1) - (2)(4)] - 2[(-16)(-1) - (20)(2)] + [(-16)(4) - (20)(-3)]$$

$$\Delta x = 8[3 - 8] - 2[16 - 40] + [-64 + 60]$$

$$\Delta x = 8(-5) - 2(-24) - 4$$

$$\Delta x = -40 + 48 - 4$$

$$\Delta x = 4$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & -16 & 2 \\ 1 & 20 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -16 & 2 \\ 20 & -1 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -16 \\ 1 & 20 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = 3[(-16)(-1) - (20)(2)] - 8[(2)(-1) - (1)(2)] + [(2)(20) - (1)(-16)]$$

$$\Delta y = 3[16 - 40] - 8[-2 - 2] + [40 + 16]$$

$$\Delta y = 3[-24] - 8[-4] + 56$$

$$\Delta y = -72 + 32 + 56$$

$$\Delta y = 16$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & -16 \\ 1 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 & -16 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -16 \\ 1 & 20 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = 3[(-3)(20) - (4)(-16)] - 2[(2)(20) - (1)(-16)] + 8[(2)(4) - (1)(-3)]$$

$$\Delta z = 3[-60 + 64] - 2[40 + 16] + 8[8 + 3]$$

$$\Delta z = 3[4] - 2[56] + 8[11]$$

$$\Delta z = 12 - 112 + 88$$

$$\Delta z = -12$$

Por último, se procede a calcular el valor de cada una de las variables para encontrar el punto solución

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta A} = \frac{4}{4} = 1 \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta A} = \frac{16}{4} = 4 \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta A} = \frac{-12}{4} = -3$$

Punto solución

$$(x = 1, y = 4, z = -3)$$

### Algunas Aplicaciones

La importancia de los sistemas de ecuaciones no es otra que ayudarnos a resolver situaciones problemáticas que se nos plantean en la realidad, para ello en primer lugar se traduce el problema al lenguaje algebraico, después se obtienen las soluciones del sistema, y por último se comprueba si la solución matemática obtenida es válida como respuesta al problema de partida.

Para solucionar problemas relacionados con el planteamiento de ecuaciones, es conveniente tener en cuenta los siguientes pasos:

1. **Interpretación del enunciado.** Al leer el enunciado se debe identificar la incógnita o incógnitas del problema, es decir lo que se desea obtener, esto se encuentra generalmente en las preguntas del problema.
2. **Planteamiento del problema.** Con la información necesaria en términos de la incógnita, se plantea la ecuación o ecuaciones que relacionan los datos del problema.
3. **Resolución de la ecuación o sistema de ecuaciones.** Se resuelve la ecuación o sistema de ecuaciones planteadas conforme a los criterios, pasos y procedimientos de resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones.
4. **Comprobación de la solución.** Se verifica la solución hallada, comprobando que cumple con las condiciones del enunciado del problema.

**Ejercicio:** La edad de un padre es el triple de la edad de su hijo, la edad que tenía el padre hace 7 años, era el doble de la edad que tendrá su hijo dentro de 6 años. ¿Qué edad tienen padre e hijo?

Para proceder a su solución, se deben seguir los puntos descritos anteriormente:

1. Interpretación del enunciado.

Lo que se desea saber es la edad del Padre e hijo. Por tanto, se asigna la incógnita  $x$  a la edad actual del hijo y la incógnita  $y$  a la edad actual del Padre y se expresan las demás edades en términos de estas variables.

Edad del padre hace siete años	Edad del hijo dentro de seis años
$y - 7$	$x + 6$

2. Planteamiento del problema

La edad de un padre es el triple de la edad de su hijo, entonces se tiene

$$y = 3x$$

La edad del padre hace 7 años, era el doble de la edad que tendrá su hijo dentro de 6 años, entonces se tiene

$$y - 7 = 2(x + 6)$$

3. Resolución de la ecuación o sistema de ecuaciones

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, donde además se puede observar que  $y$  cuenta con un valor igual a  $3x$

$$\begin{aligned} y &= 3x \\ y - 7 &= 2(x + 6) \end{aligned}$$

Para obtener la solución del sistema sustituimos  $y$  en la segunda ecuación, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} 3x - 7 &= 2(x + 6) \\ 3x - 7 &= 2x + 12 \\ 3x - 2x &= 12 + 7 \\ x &= 19 \end{aligned}$$

Al sustituir  $x$  en la primera ecuación se tiene

$$y = 3(19)$$

$$y = 57$$

Por tanto, la solución es

$$\begin{aligned} \text{Edad actual del hijo: } &x = 19 \\ \text{Edad actual del Padre: } &y = 57 \end{aligned}$$

## 4. Comprobación de la solución

La edad de un padre es el triple de la edad de su hijo

$$y = 3(19) = 57$$

La edad del padre hace 7 años, era el doble de la edad que tendrá su hijo dentro de 6 años, entonces se tiene

$$\begin{aligned} 57 - 7 &= 2(19 + 6) \\ 50 &= 50 \end{aligned}$$

Estos resultados satisfacen las condiciones del problema.

**Ejercicio:** Los Principales socios comerciales de Estados Unidos. Los dos socios comerciales principales de Estados Unidos durante los cuatro primeros meses del año 2000 fueron Canadá y México. Las exportaciones e importaciones con México fueron \$57,000 millones menos que aquellos con Canadá. Las exportaciones e importaciones totales que involucraron a estos dos países fueron de \$211,000 millones. ¿De cuánto fueron las exportaciones estadounidenses con cada nación?

## 1. Interpretación del enunciado.

Lo que se desea saber es, ¿De cuánto fueron las exportaciones estadounidenses con cada nación?

Por lo tanto, se asigna la incógnita  $x$  a las exportaciones con Canadá y la incógnita  $y$  a las exportaciones con México

## 2. Planteamiento del problema

Las exportaciones e importaciones con México fueron \$57,000 millones menos que aquellos con Canadá, entonces se tiene:

$$x = y - \$57,000$$

Las exportaciones e importaciones totales que involucraron a estos dos países fueron de \$211,000 millones, en este caso se tiene

$$x + y = \$211,000$$

## 3. Resolución de la ecuación o sistema de ecuaciones

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$x = y - 57,000$$

$$x + y = 211,000$$

Para obtener la solución del sistema sustituimos  $x$  en la segunda ecuación

$$y - 57,000 + y = 211,000$$

$$2y = 211,000 + 57,000$$

$$2y = 268,000$$

$$y = 134,000$$

Al sustituir  $y$  en la primera ecuación tenemos:

$$x = 77,000$$

Por tanto, la solución es

$$\text{Exportaciones con México: } x = 77,000$$

$$\text{Exportaciones con Canadá: } y = 134,000$$

#### 4. Comprobación de la solución

Las exportaciones e importaciones con México fueron \$57,000 millones menos que aquellos con Canadá, entonces se tiene

$$x = 134,000 - 57,000 = 77,000$$

Las exportaciones e importaciones totales que involucraron a estos dos países fueron de \$211,000 millones

$$77,000 + 134,000 = 211,000$$

Como se puede observar, si se satisfacen las condiciones del problema, por lo tanto, es correcto.

**Ejercicio:** Distribución a un mayorista. Un fabricante de imitación de joyas para el carnaval provee a tres mayoristas A, B y C, el total de un día de producción es de 320 estuches de imitación de joyas, debe enviar al mayorista A el triple de estuches de los que envía al B, y debe mandar al mayorista C 160 estuches menos de los que proporciona al A y al B juntos. ¿Cuántos estuches debe enviar a cada mayorista, a fin de distribución la producción total del día?

##### 1. Interpretación del enunciado

Lo que se desea saber es: ¿Cuántos estuches debe enviar a cada mayorista, a fin de distribuir la producción total del día?

Por lo tanto, se asigna la incógnita  $x$  a la cantidad de estuches que se deben enviar al mayorista A, la incógnita  $y$  para la cantidad de estuches enviados al mayorista B y la incógnita  $z$  a la cantidad de estuches enviados a mayorista C.

##### 2. Planteamiento del problema

El total de un día de producción es de 320 estuches, así que

$$x + y + z = 320$$

Debe enviar al mayorista A, el triple de estuches de los que envía al B

$$x = 3y$$

Debe mandar al mayorista C, 160 estuches menos de los que proporciona al A y al B juntos

$$z = x + y - 160$$

### 3. Resolución de la ecuación o sistema de ecuaciones

A partir de lo anterior, se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{aligned} x + y + z &= 320 \\ x &= 3y \\ z &= x + y - 160 \end{aligned}$$

Si la solución se obtiene por determinantes, tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta A &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 + 4 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= \begin{vmatrix} 320 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 160 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 320 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 160 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 160 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 320(3) - 0 + 480 = 1440 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= \begin{vmatrix} 1 & 320 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 160 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 160 & -1 \end{vmatrix} - 320 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 160 \end{vmatrix} = 0 + 320 + 160 = 480 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 320 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 160 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 160 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 160 \end{vmatrix} + 320 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$=1(-480) - 1(160) + 320(4) = 640$$

Con los valores de los determinantes encontrados, se busca el valor de las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta A} = \frac{1440}{8}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta a} = \frac{480}{8}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta A} = \frac{640}{8}$$

$$\begin{aligned} x &= 180 \\ y &= 60 \\ z &= 80 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es:

- Enviar 180 estuches a mayorista A
- Enviar 60 estuches a mayorista B
- Enviar 80 estuches a mayoristas C

4. Comprobación de la solución

El total de un día de producción es de 320 estuches

$$180 + 60 + 80 = 320$$

Debe enviar al mayorista A, el triple de estuches de los que envía al B

$$x = 3(60) = 180$$

Debe mandar al mayorista C, 160 estuches menos de los que proporciona al A y al B juntos

$$z = 180 + 60 - 160 = 80$$

Como se puede observar si se satisfacen las condiciones del problema.

Problemas propuestos (Miller, Heeren, & Hornsby, 2006)

1. Costo de viaje. Tokio y Nueva York se encuentran entre las ciudades más caras del mundo para los viajeros de negocios. Los costos promedios por día a cada ciudad (que incluye habitación, comidas, lavandería y dos viajes en taxi), por dos días en Tokio y tres días en Nueva York, son de \$2015. Pasar cuatro días en Tokio y dos días en Nueva York cuesta \$2490. ¿Cuál es el costo promedio por día para cada ciudad?
2. Producción de hilo y estambre. Una fábrica usa dos máquinas principales, A y B, que a su vez producen dos artículos diferentes, hilo y estambre. Cada unidad de hilo requiere 1 hora a la maquina A y 2 horas en la B, mientras que cada unidad de estambre requiere una 1 en la A y 1 hora en la B. La máquina a trabaja 8 horas por día, mientras que la B lo hace 14 horas

diarias. ¿Cuántas unidades de hilo y cuantas de estambre debe hacer la fábrica por día, a fin de mantener sus máquinas funcionando a su capacidad?

3. Producción de ferretería. Un proveedor de ferretería manufactura tres tipos de abrazaderas, de los tipos A, B y C. Las restricciones de la producción obligan fabricar 10 unidades más de tipo C que el total de los otros tipos, y el doble de las de tipo B que las de tipo A, el taller debe producir un total de 490 unidades de abrazadera podría. ¿Cuántas unidades de cada tipo puede fabricar a diario?
4. En un local de comida rápida, una orden de 5 hamburguesas, 2 papas fritas y 3 refrescos cuesta 56 pesos. Una orden de 4 hamburguesas, 3 papas fritas y 2 refrescos cuesta 46 pesos. Una orden de 6 hamburguesas, 4 papas fritas y 3 refrescos cuesta 68 pesos ¿Cuál será el precio de una sola hamburguesa con un refresco?
5. Laura compró tres clases diferentes de acciones por \$20,000. Una de ellas paga un 6% anual de intereses, otra paga un 7%, y la otra un 8% anual. Al final del primer año, la suma de los intereses de las acciones al 6% y al 7% es de \$940, y la suma de los intereses de las acciones al 6% y al 8% es de \$720. ¿Cuánto invirtió Laura en cada una de las acciones?

Introducción a las Matemáticas

Unidad 4



Fundamentos de Trigonometría y Geometría

## UNIDAD 4, FUNDAMENTOS DE TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA

Al completar la unidad de aprendizaje, el alumno será capaz de:

- Distinguir las diferencias entre trigonometría y geometría.
- Aplicar las funciones trigonométricas básicas para la solución de problemas, así como su representación gráfica de ecuaciones de primer grado.

### INTRODUCCIÓN

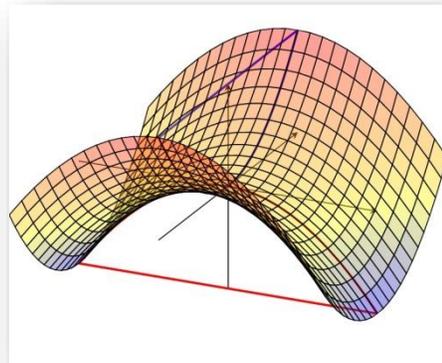
El teorema de Pitágoras, las funciones trigonométricas, el cálculo de ángulos, son algunos de los conceptos que podrás encontrar en esta unidad, a través de la cual podrás descubrir tan solo algunas de sus aplicaciones.

De igual forma, podrás encontrar lo correspondiente a la Geometría Analítica en cuanto a la ecuación de la recta, su pendiente, casos especiales, rectas paralelos y perpendiculares, entre otros temas, así como sus aplicaciones en áreas como el Cálculo, la Economía y los Métodos para la Toma de Decisiones, materias que forman parte del plan de estudios de un Licenciado en Negocios Internacionales.

Esta unidad, trata de dar un panorama fundamental tanto de la Trigonometría como de la Geometría Analítica, como base de futuras asignaturas y como medio para la resolución de problemas, tanto de la vida profesional, como interrogantes de los sucesos que se llevan a cabo a nuestro alrededor.

### FUNDAMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

De acuerdo con (Heinhold & Riedmüller, 2008), el objeto fundamental de la Geometría Analítica es la resolución de problemas geométricos mediante métodos algebraicos y la interpretación geométrica de los desarrollos algebraicos. La introducción de coordenadas en el plano fue una de las aportaciones fundamentales, ya que, mediante las mismas, entre otras cuestiones, se pudieron estudiar como lugares geométricos las secciones cónicas, que ya eran conocidas desde la matemática griega.



Para (Ramírez-Galarza, 2004), la Geometría Analítica se considera básica, porque incluye temas necesarios en Cálculo, Álgebra Lineal, Física, Probabilidad, etc., ya que en dichas asignaturas es necesario manejar subconjuntos del plano y el espacio cartesianos, y muchas veces será necesario considerar la región definida como una unión, una intersección, un complemento, etc.

Para la Geometría Analítica, el uso del plano cartesiano es fundamental, ya que en él se pueden localizar las coordenadas  $(x, y)$ , necesarias para graficar cualquier tipo de función a través de los cuatro cuadrantes utilizados para planos de dos dimensiones.

En el caso de quienes estudian la Licenciatura en Negocios Internacionales, el manejo de ecuaciones, su gráfica y su interpretación, es muy importante ya que el poseer este conocimiento y aplicarlo, puede ser determinante en materias económico-administrativas, por tal razón es que en la siguiente sección se trabaja de manera ardua con las líneas rectas.

## Función Lineal

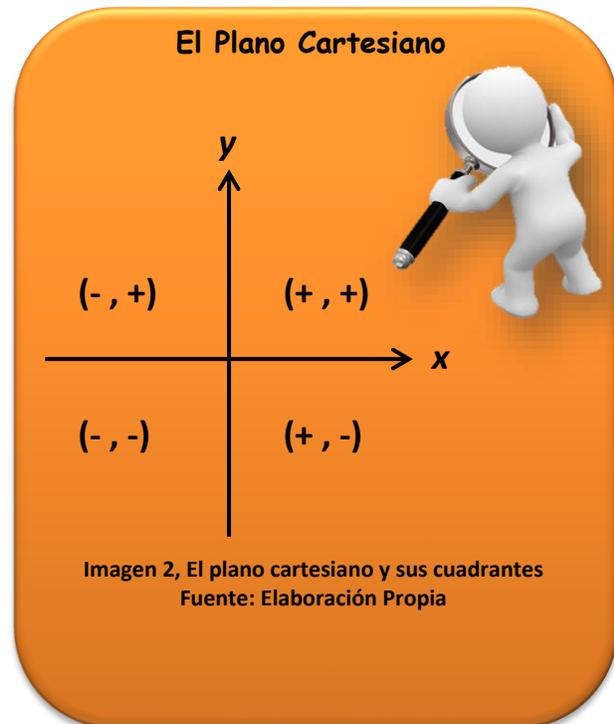
Una función lineal es aquella con la forma general  $f(x) = mx + b$ , y la gráfica de este tipo de función es una recta. Las funciones lineales desempeñan un papel importante en muchas aplicaciones prácticas. (Hoffman, Bradley, Sobecki, Price, & Sandoval, 2013)

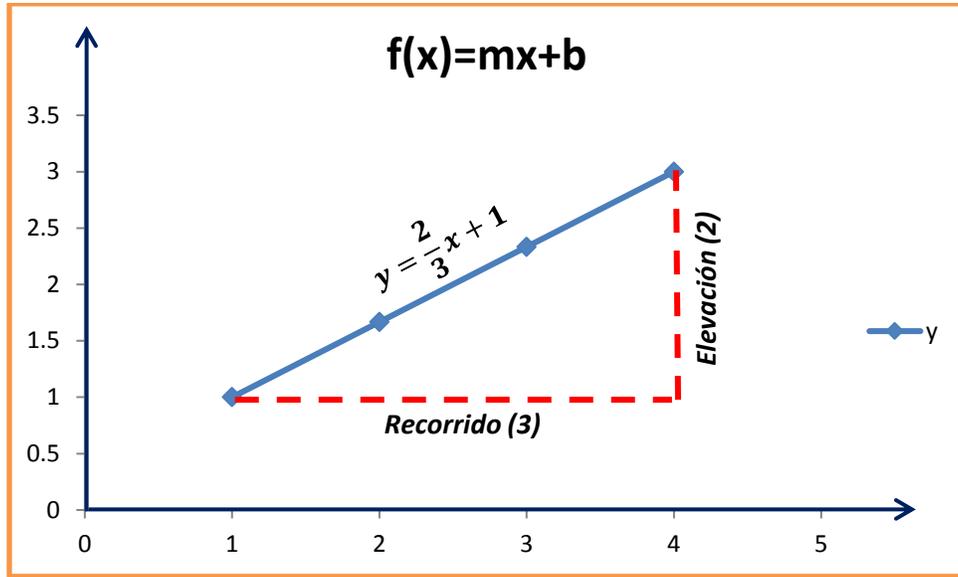
## La Pendiente de una Recta

Con respecto a la pendiente ( $m$ ), esta se encuentra determinada por tres aspectos de suma importancia, la elevación, el recorrido y su sentido, ya sea positivo o negativo.

$$m = \frac{\textit{elevación}}{\textit{recorrido}}$$

Por ejemplo, si una recta tiene una pendiente  $m = \frac{2}{3}$ , implica que esta se eleva dos posiciones por tres de recorrido, de manera gráfica se puede observar





Gráfica 1, Pendiente de una recta.  
Fuente: Elaboración Propia

También es importante distinguir cuando se trata de una pendiente positiva o una negativa, ya que esto permitirá ubicar el sentido de una recta aún y cuando aún no se haya graficado, es decir

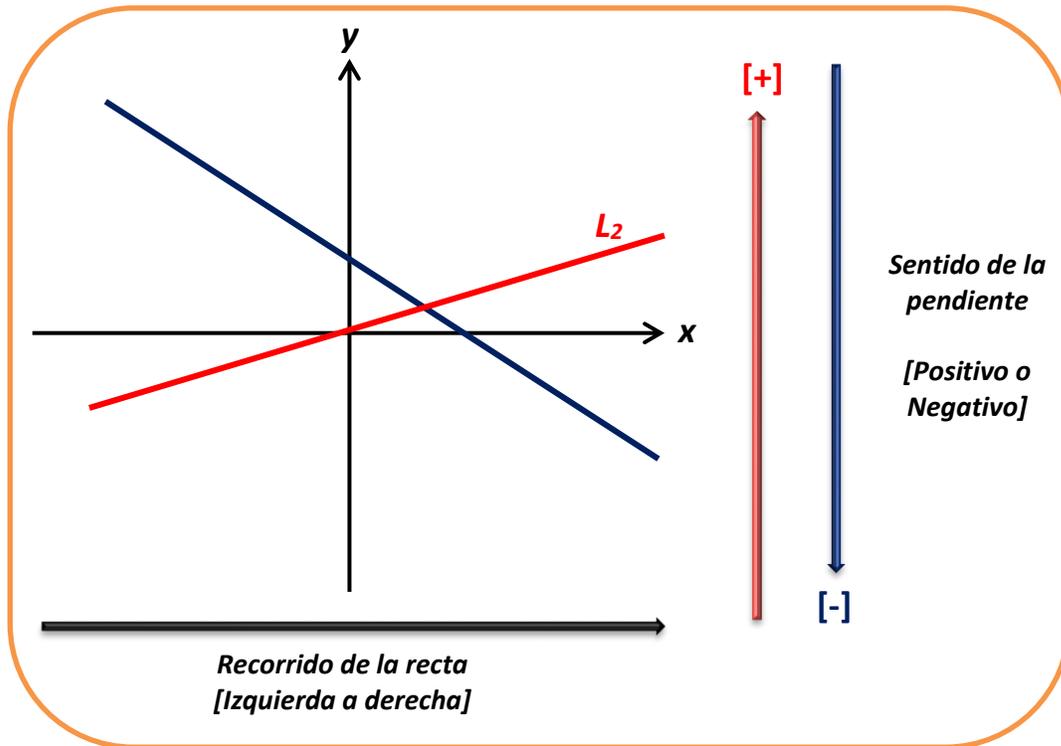


Imagen 3, Sentido de la pendiente de una recta  
Fuente: Elaboración propia

Haciendo el recorrido de una recta de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, se trata de una recta con pendiente negativa, donde la elevación en lugar de crecer decrece hacia la parte negativa del eje  $y$ .

Por otro lado, cuando la pendiente de una recta, haciendo un recorrido de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, la elevación crece en el sentido positivo del eje  $y$ .

No obstante, existen dos casos que se deben tomar en cuenta, esto es, cuando las líneas rectas son paralelas a los ejes  $x$  y  $y$  del plano cartesiano, las cuales serán llamadas, casos especiales de la pendiente de una recta.

En estos casos especiales tenemos:

- a) Recta  $L_1$  paralela al eje  $x$  con pendiente  $m = 0$ .
- b) Recta  $L_2$  paralela al eje  $y$  con pendiente  $m = \infty$

La siguiente imagen muestra los dos casos anteriores y explica la razón por la cual las pendientes tienen valores  $0$  e  $\infty$ .

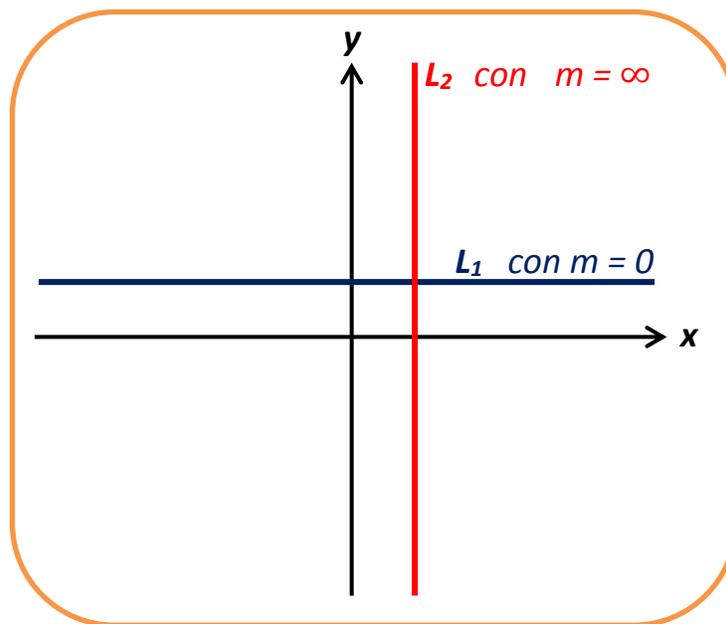


Imagen 4, Casos especiales de la pendiente  
Fuente: Elaboración Propia

La recta  $L_1$  tiene recorrido el cual va desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ , sin embargo, no crece ni decrece, es decir nunca hay una elevación positiva o negativa, manteniéndose todo el tiempo en *cero*, es decir:

$$m_{L_1} = \frac{0}{-\infty \ a \ \infty}$$

→ Elevación  
→ Recorrido

Tomando en cuenta que *cero* dividido entre cualquier número da como resultado *cero*, la pendiente de una recta paralela al eje *x*, es una pendiente  $m = 0$ .

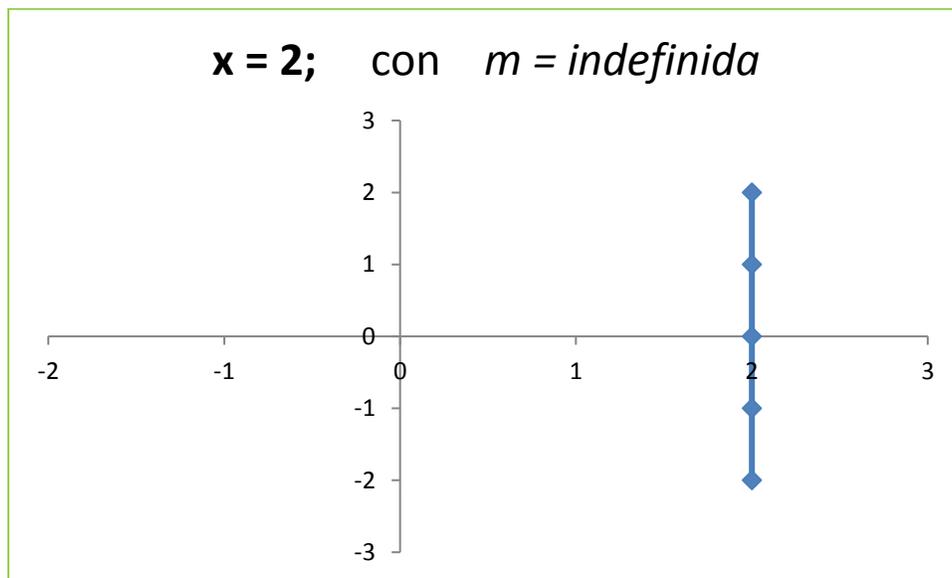
Con respecto a la recta  $L_2$ , a diferencia del caso anterior, su recorrido se mantiene en cero y su elevación va desde  $-\infty$  hasta  $\infty$  con respecto al eje *y*, donde

$$m_{L_2} = \frac{-\infty \ a \ \infty}{0}$$

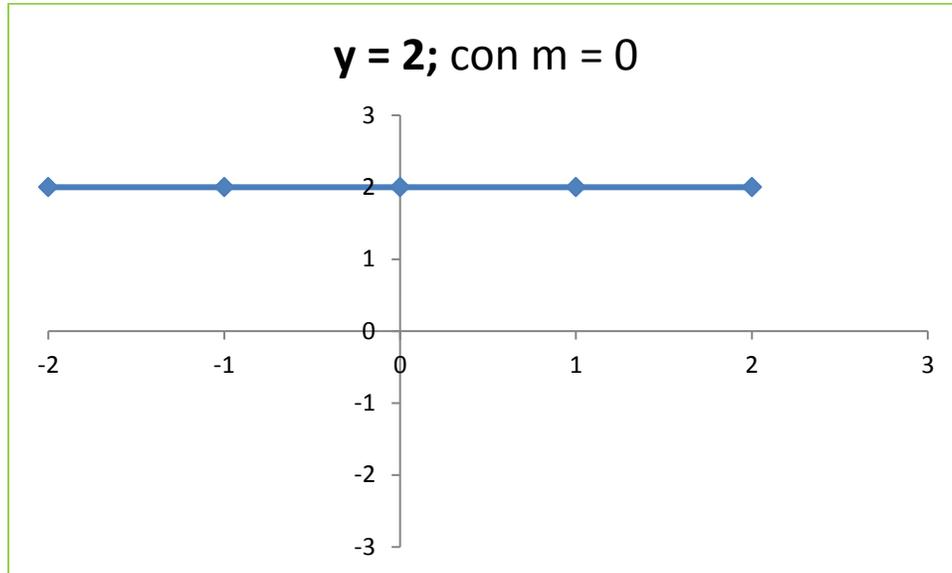
→ Elevación  
→ Recorrido

Sin embargo, la operación de un número *n* dividido entre cero al ser indefinido, la pendiente de una recta paralela al eje *y* también es indefinida.

Por lo anterior, estos casos especiales de la recta tienen ecuaciones muy simples de la forma  $y = n$  para las líneas horizontales paralelas al eje *x*, y  $x = n$ , para las líneas verticales paralelas al eje *y*.



Gráfica 2, Recta paralela al eje *y*  
Fuente: Elaboración propia



Gráfica 3, Recta paralela al eje x  
Fuente: Elaboración propia

En cualquier otro caso, como lo menciona (Hoffman, Bradley, Sobecki, Price, & Sandoval, 2013), la pendiente de una recta no vertical que pasa por los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  está dada por la fórmula:

$$\text{Pendiente } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**Ejercicio:** Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos A  $(-1, 1)$  y B  $(2, 2)$ , grafique el resultado.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

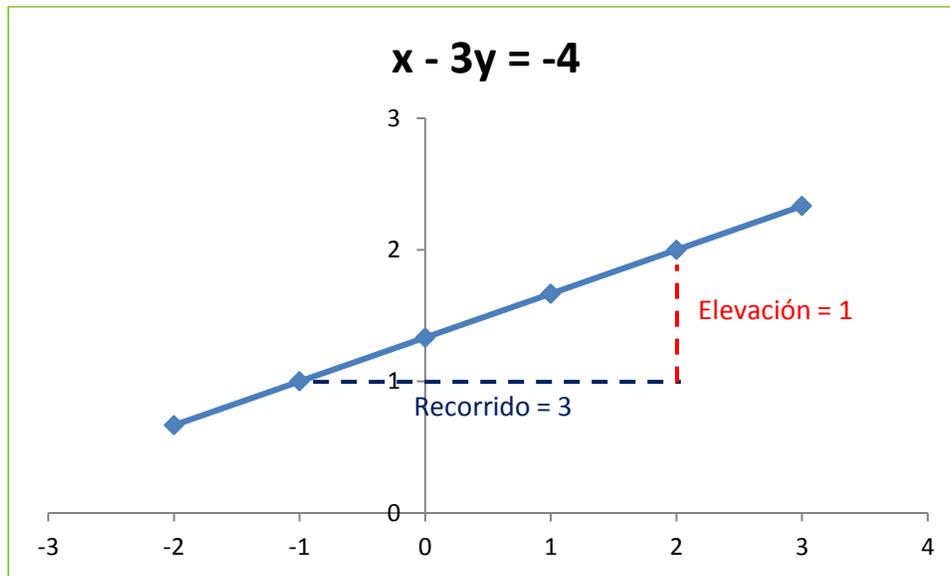
Dónde

	$x_1$	$y_1$		$x_2$	$y_2$
A	-1	1		2	2

Sustituyendo en la fórmula tenemos

$$m = \frac{2 - 1}{2 - (-1)} \quad m = \frac{1}{3}$$

Gráficamente



Gráfica 4, Pendiente de una recta  
Fuente: Elaboración propia

Se puede comprobar que la pendiente calculada por medio de la fórmula corresponde con el de la gráfica anterior, donde tanto el recorrido como la elevación son iguales, con tendencia positiva.

**Ejercicio:** Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (-2, 1) y B (2, -1), grafique el resultado.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dónde

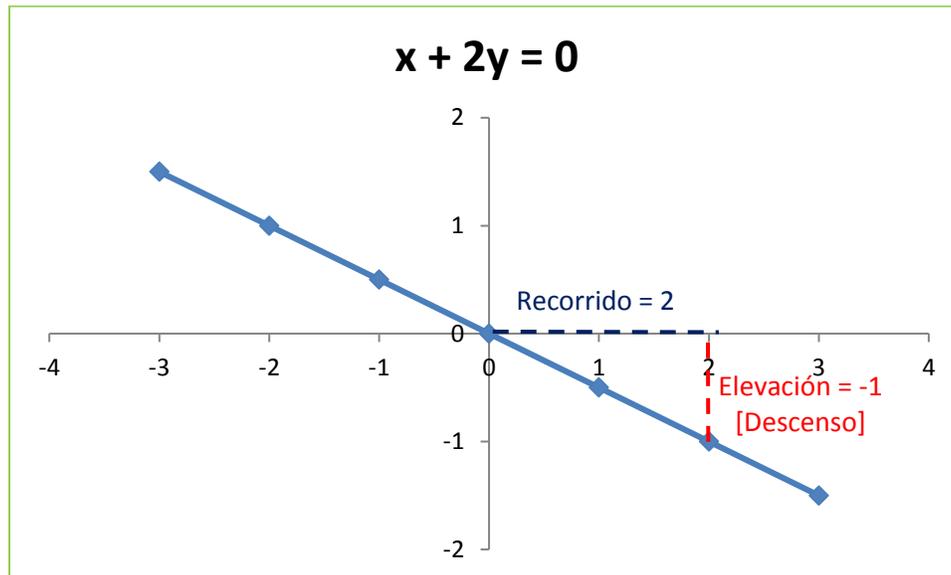
	$x_1$	$y_1$
A	-2	1

	$x_2$	$y_2$
B	2	-1

Sustituyendo en la fórmula tenemos

$$m = \frac{-1 - 1}{2 - (-2)} \quad m = -\frac{2}{4} \quad m = -\frac{1}{2}$$

Gráficamente



Gráfica 5, Pendiente de una recta  
Fuente: Elaboración propia

A diferencia del ejercicio anterior donde la pendiente era positiva, en este segundo ejercicio se observa un recorrido igual a 2 y no existe una elevación sino un descenso, lo cual confirma que la pendiente es negativa.

## Forma de la Ecuación de una Recta

La ecuación general de una recta tiene la forma:

$$ax + by = c$$

A partir de esta ecuación se puede encontrar la forma **intercepto - pendiente**, cuya principal característica es que surge de despejar la variable  $y$ , como se indica a continuación

$$ax + by = c$$

$$by = c - ax$$

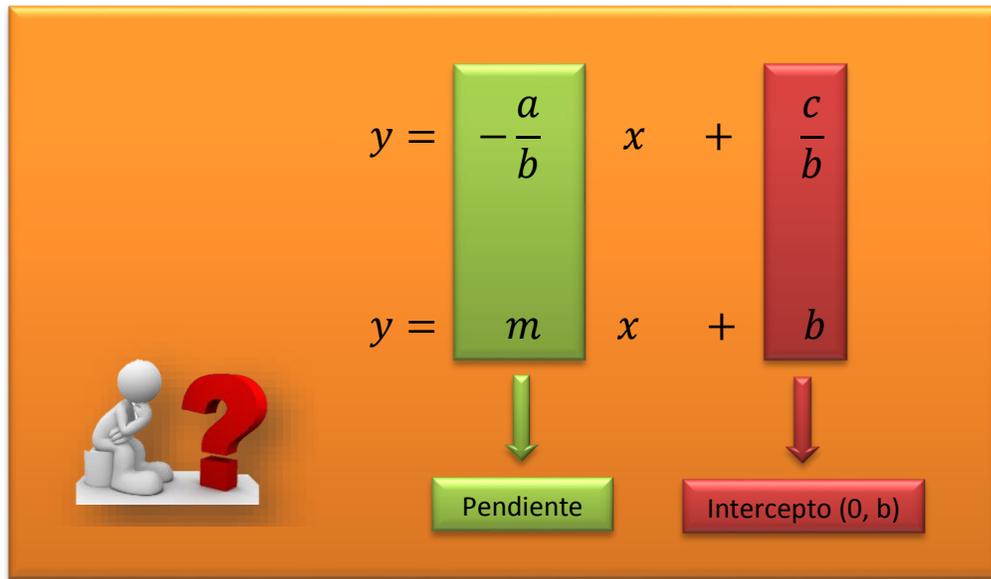
$$y = \frac{c - ax}{b}$$

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

En términos generales, la ecuación intercepto - pendiente tiene la forma:

$$y = mx + b$$

Por lo tanto, al comparar ambas ecuaciones, tenemos una correspondencia que ayudará en un futuro a identificar tanto la pendiente como el intercepto de una ecuación lineal.



**Ejercicio:** Encuentra la pendiente ( $m$ ) y el intercepto ( $0, b$ ), de la ecuación general de la recta  $x - 2y = 2$ , grafica el resultado.

En primer lugar, procedemos a despejar la variable  $y$  de la EG de la recta

$$\begin{aligned}
 x - 2y &= 2 \\
 -2y &= 2 - x \\
 y &= \frac{2 - x}{-2}
 \end{aligned}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{aligned}
 y &= \frac{-x}{-2} - \frac{2}{2} \\
 y &= \frac{1}{2}x - 1
 \end{aligned}$$

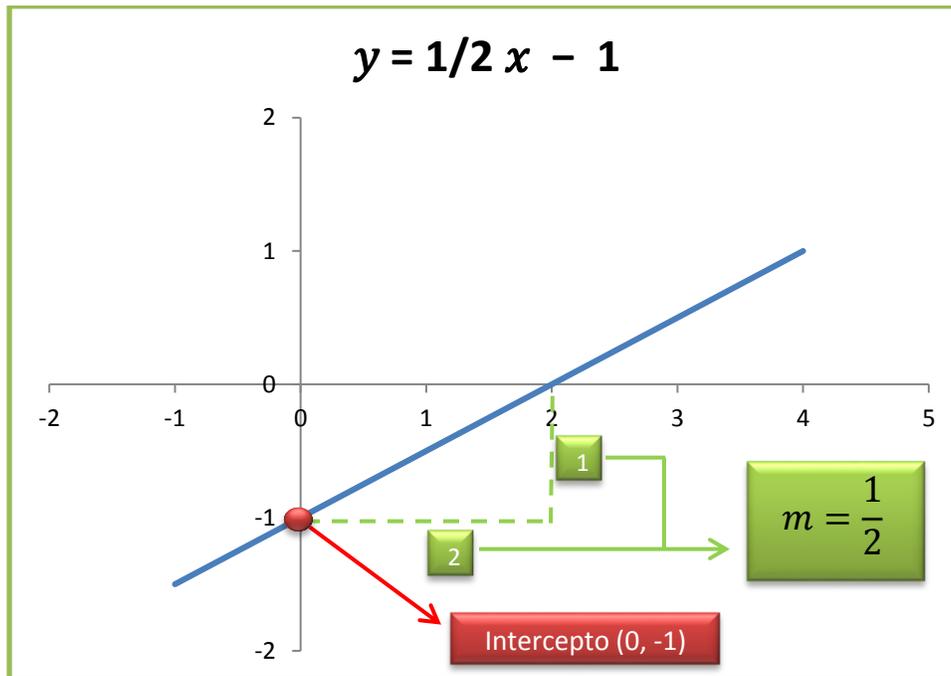
Una vez despejada la variable, se identifica la pendiente y el intercepto

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

$m = \frac{1}{2}$

$intercepto = (0, -1)$

Con esta información se procede a graficar



Gráfica 6, gráfica ejercicio núm. 3  
Fuente: Elaboración propia

Para (Hoffman, Bradley, Sobecki, Price, & Sandoval, 2013), la forma intercepto - pendiente para la ecuación de una recta es en especial útil si se tiene la ecuación de una recta particular y se desea conocer su pendiente e intercepto  $y$ .

Sin embargo, en la mayoría de los casos no se cuenta con la ecuación general de la recta y es necesario encontrarla a partir de dos condiciones iniciales, estas pueden ser:

- a) 2 puntos o
- b) 1 punto y una pendiente

A continuación, se estudian ambos casos.

### Ecuación General de una Recta [EGR] a partir de un punto y una pendiente

Para encontrar la EGR que pasa por el punto  $A(x_0, y_0)$  y la *pendiente*  $m$ , se utiliza la fórmula

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

La cual es una derivación de la fórmula para determinar la pendiente utilizada en la sección anterior, es decir

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$m(x - x_0) = y - y_0$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Por lo tanto, si se cuenta con un punto y una pendiente, es posible encontrar la EGR y su gráfica como se muestra a continuación:

**Ejercicio:** Encuentra la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por el punto A (-1, 1) y tiene una pendiente  $m = 2/3$

En primer lugar, se identifican los elementos que forman parte de la fórmula, en este caso,  $x_0$ ,  $y_0$  y la pendiente.

	$x_0$	$y_0$		<i>Elevación</i>	<i>Recorrido</i>
A	-1	1	m	2	3

Se sustituye la información en la fórmula

$$y - 1 = \frac{2}{3}[x - (-1)]$$

Y se procede a encontrar la ecuación

$$3(y - 1) = 2[x - (-1)]$$

$$3y - 3 = 2(x + 1)$$

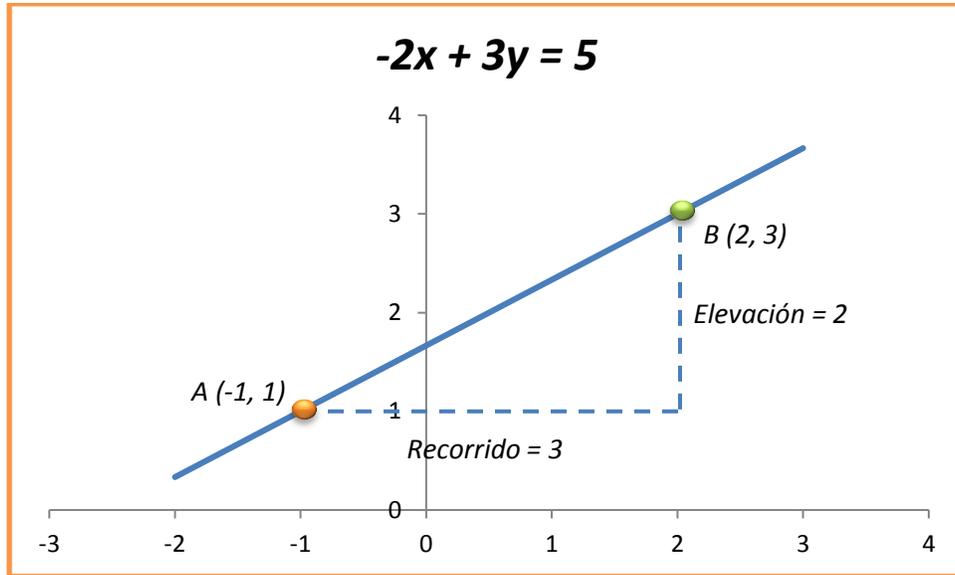
$$3y - 3 = 2x + 2$$

$$-2x + 3y = 2 + 3$$

Ecuación General de la Recta

$$-2x + 3y = 5$$

Una forma de comprobar es graficando la recta y verificar que pasa por el punto A (-1, 1) y tiene la pendiente  $m = 2/3$



Gráfica 7, gráfica ejercicio núm. 4  
Fuente: Elaboración propia

Una vez que el punto y la pendiente han sido confirmados, se puede resolver que la ecuación de la recta que pasa por el punto A (-1, 1) con pendiente  $m = 2/3$  es

$$-2x + 3y = 5$$

**Ejercicio:** Encuentra la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por el punto A (1, -2) y tiene una pendiente  $m = -3$

Al igual que el ejercicio anterior, se identifican los elementos que forman parte de la fórmula.

	$x_0$	$y_0$		<i>Elevación</i>	<i>Recorrido</i>
A	1	-2	m	-3	1

Se sustituye la información en la fórmula

$$y - (-2) = -3[x - 1]$$

Y se procede a encontrar la ecuación

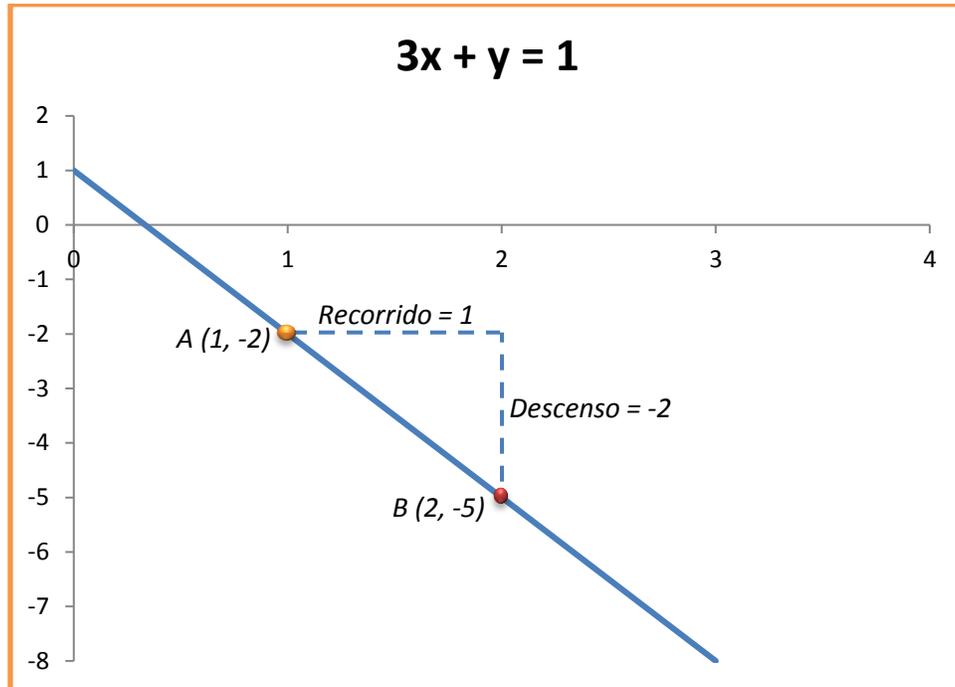
$$y + 2 = -3x + 3$$

$$3x + y = 3 - 2$$

Ecuación General de la Recta

$$3x + y = 1$$

Se verifica que la recta pasa por el punto A (1, -2) y tiene la pendiente  $m = -3$



Gráfica 8, gráfica ejercicio núm. 5  
Fuente: Elaboración propia

La gráfica permite comprobar que la ecuación de la recta que pasa por el punto A (1, -2) con pendiente  $m = -3$  efectivamente es

$$3x + y = 1$$

### Ecuación General de una Recta [EGR] a partir de dos puntos

Para determinar la EGR que pasa por los puntos A y B, es necesario comenzar encontrando la pendiente de una recta, que como ya se ha analizado en la sección anterior, se hace a partir de la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

El resto del ejercicio es prácticamente igual que el caso de la EGR a partir de un punto y una pendiente, como se puede observar en el siguiente ejercicio.

**Ejercicio:** Encuentra la EG y la gráfica de la recta que pasa por los puntos A (-1, -2) y B (3, -4).

En primer lugar, se tiene que encontrar la pendiente, identificando los elementos necesarios para hacerlo.

	$x_1$	$y_1$		$x_2$	$y_2$
A	-1	-2	B	3	-4

Se sustituye la información en la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Y se procede a encontrar la pendiente

$$m = \frac{-4 - (-2)}{3 - (-1)}$$

$$m = \frac{-4 + 2}{3 + 1} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Una vez que se cuenta con la pendiente y el punto A o el punto B, se puede encontrar la EGR

	$x_0$	$y_0$		<i>Elevación</i>	<i>Recorrido</i>
A	-1	-2	m	-1	2

Se sustituye la información en la fórmula

$$y - (-2) = -\frac{1}{2}[x - (-1)]$$

Y se procede a encontrar la ecuación

$$y + 2 = -\frac{1}{2}(x + 1)$$

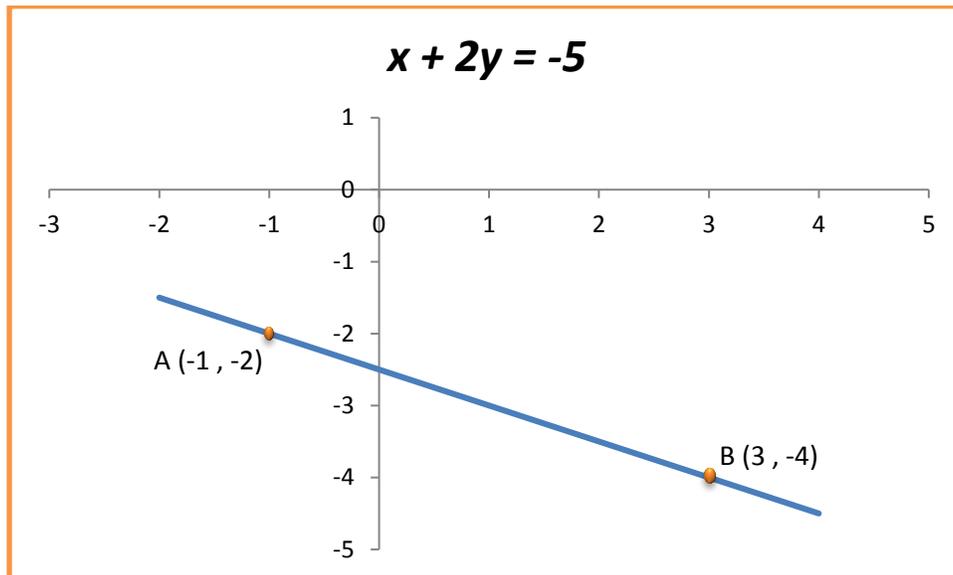
$$2y + 4 = -x - 1$$

$$x + 2y = -1 - 4$$

Ecuación General de la Recta

$$x + 2y = -5$$

Se verifica que la recta pasa por el punto A (-1, -2) y B (3, -4)



Gráfica 9, EGR que pasa por dos puntos  
Fuente: Elaboración propia

La gráfica permite comprobar que la ecuación de la recta  $x + 2y = -5$ , si pasa por los puntos A y B.

### Rectas Paralelas y Perpendiculares

Para (Hoffman, Bradley, Sobecki, Price, & Sandoval, 2013), algunas veces en las aplicaciones es necesario o útil saber si dos rectas dadas son paralelas o perpendiculares. Una recta vertical es paralela solo respecto de otras verticales, y es perpendicular a cualquier recta horizontal. En los casos que incluyen rectas no verticales pueden emplearse los criterios siguientes:

Sea  $m_1$  y  $m_2$  las pendientes de las rectas no verticales  $L_1$  y  $L_2$ , entonces:



$L_1$  y  $L_2$  son **paralelas**  $\parallel$  si y sólo si  $m_1 = m_2$

$L_1$  y  $L_2$  son **perpendiculares**  $\perp$  si y sólo si  $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

Sabiendo cómo se comportan las pendientes y conociendo al menos un punto por el cual pasa la recta, resulta sencillo encontrar la EGR paralela o perpendicular a otra.

**Ejercicio:** Encuentre las ecuaciones de las rectas

- a)  $L_1$  que pasa por los puntos  $A (-2, -1)$  y  $B (3, 1)$
- b)  $L_2 \parallel L_1$  que pasa por el punto  $C (1, 2)$
- c)  $L_3 \perp L_1$  que pasa por el punto  $D (2, 1)$

No se puede dar solución a los incisos b y c sino se cuenta con la ecuación de  $L_1$ , por tanto, es necesario encontrar la EGR de dicha recta.

**Con respecto a  $L_1$**

	$x_1$	$y_1$		$x_2$	$y_2$
A	-2	-1	B	3	1

Y se procede a encontrar la pendiente

$$m = \frac{1 - (-1)}{3 - (-2)}$$

$$m = \frac{1 + 1}{3 + 2} = \frac{2}{5}$$

Una vez que se cuenta con la pendiente y el punto A o el punto B, se puede encontrar la EGR

	$x_0$	$y_0$		Elevación	Recorrido
A	-2	-1	m	2	5

Se sustituye la información en la fórmula

$$y - (-1) = \frac{2}{5} [x - (-2)]$$

Y se procede a encontrar la ecuación

$$y + 1 = \frac{2}{5} (x + 2)$$

$$5y + 5 = 2x + 4$$

$$-2x + 5y = 4 - 5$$

Ecuación General  
de la Recta  $L_1$



$$-2x + 5y = -1$$

A continuación, ya se puede trabajar con la recta  $L_2$ , ya que, de acuerdo con lo descrito anteriormente, se sabe que la  $m_2 = m_1$ , es decir:  $m_2 = \frac{2}{5}$

	$x_0$	$y_0$		<i>Elevación</i>	<i>Recorrido</i>
C	1	2	m	2	5

$$y - 2 = \frac{2}{5}(x - 1)$$

$$5y - 10 = 2x - 2$$

$$-2x + 5y = -2 + 10$$

Ecuación General de la Recta  $L_2$

$$-2x + 5y = 8$$

**T**oma en cuenta que las ecuaciones paralelas generalmente son iguales (puede ser que los coeficientes varíen, aunque en realidad son equivalentes), la parte donde realmente son diferentes es en el resultado.

Por último, para encontrar la EGR  $L_3 \perp L_1$  que pasa por el punto  $D(2, 1)$ , se debe recordar que la  $m_3 = -\frac{1}{m_1}$ , por lo tanto

$$m_3 = -\frac{1}{\frac{2}{5}}$$

$$m_3 = -\frac{5}{2}$$

	$x_0$	$y_0$		<i>Elevación</i>	<i>Recorrido</i>
D	2	1	m	-5	2

$$y - 1 = -\frac{5}{2}(x - 2)$$

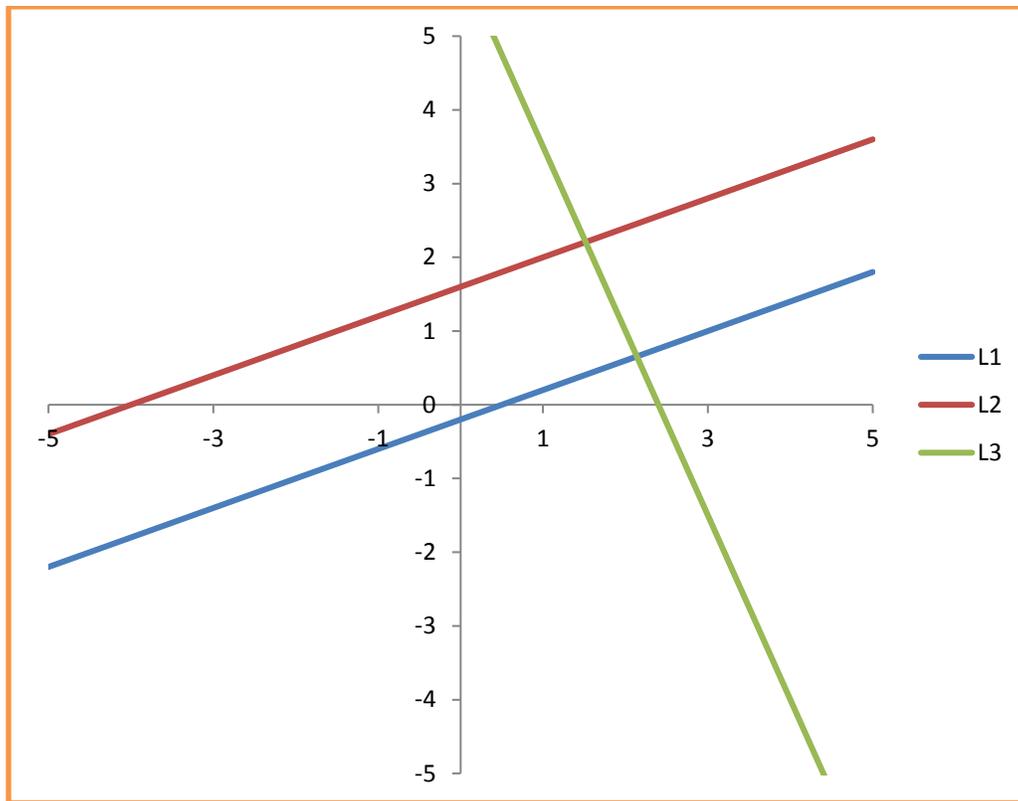
$$2y - 2 = -5x + 10$$

$$5x + 2y = 10 + 2$$

Ecuación General de la Recta  $L_3$

$$5x + 2y = 12$$

Para comprobar, se grafican las tres ecuaciones, de las cuales dos son paralelas y una perpendicular.



Gráfica 10, EGR L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub> y L<sub>3</sub>  
Fuente: Elaboración propia

## TRIGONOMETRÍA

De acuerdo con (Niles, 1992), la palabra trigonometría significa, medida de los triángulos. Por su parte (Oteyza, 2001), menciona que la trigonometría surge de la necesidad de medir triángulos, lo cual puede ser posible utilizando las relaciones que guardan sus lados, los ángulos, las áreas, así como otros elementos geométricos. El estudio de la trigonometría se extiende más allá de tales alcances y se torna importante por sus aplicaciones que van desde la ingeniería, la navegación y las ciencias, en general, hasta las artes como la música y la arquitectura.

### Tipos de Triángulos

Aunque es un tema que en teoría todos dominan, la realidad es que aún cuesta trabajo distinguirlos, sin embargo, en la siguiente tabla se trata de ejemplificar los tipos de triángulos existentes, en base a sus lados y a sus ángulos internos.



## Tipos de Triángulos

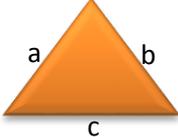
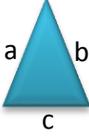
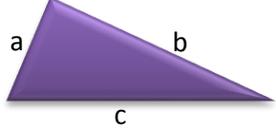
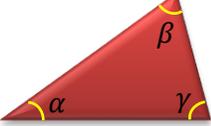
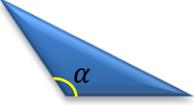
Tipo de triángulo	Nombre	Descripción gráfica
Según sus lados	<b>Equilátero</b> (3 lados iguales)	 $a = b = c$
	<b>Isósceles</b> (2 lados iguales)	 $a = b$
	<b>Escaleno</b> (3 lados desiguales)	 $a \neq b \neq c$
Según sus ángulos	<b>Rectángulo</b> (1 ángulo de $90^\circ$ )	 $\alpha = 90^\circ$
	<b>Acutángulo</b> (3 ángulos agudos)	 $\alpha, \beta \wedge \gamma < 90^\circ$
	<b>Obtusángulo</b> (1 ángulo mayor a $90^\circ$ )	 $\alpha > 90^\circ$

Tabla 3, Clasificación de los triángulos  
Fuente: Elaboración propia

De alguna manera la tabla anterior resume los tipos de triángulos sin embargo es importante conocer también los tipos de ángulos, lo cual es complementario a lo anterior.

### Tipos de Ángulos

Como se analizará más adelante, los ángulos son muy importantes dentro de la trigonometría debido a que las razones trigonométricas en conjunto con el teorema de Pitágoras serán determinantes para dar solución a problemas con triángulos, la siguiente tabla resume solamente algunos de los tipos de ángulos existentes.

Tipos de ángulos

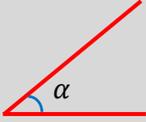
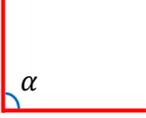
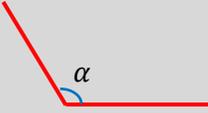
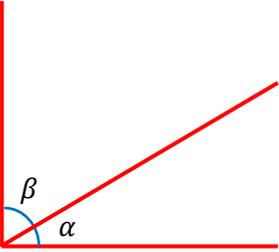
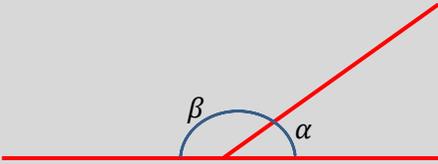
Tipo	Nombre	Descripción gráfica
Según la Medida	Agudo	 $\alpha < 90^\circ$
	Recto	 $\alpha = 90^\circ$
	Obtuso	 $\alpha > 90^\circ$
Según su suma	Complementarios	 $\alpha + \beta = 90^\circ$
	Suplementarios	 $\alpha + \beta = 180^\circ$

Tabla 4, Clasificación básica de los ángulos  
Fuente: Elaboración propia

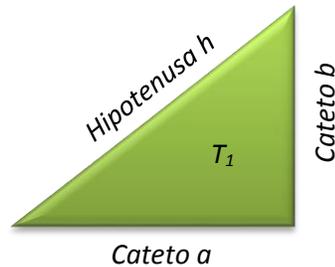
La tabla anterior resume de manera muy básica la clasificación de los ángulos, sin embargo, es importante que consultes de manera particular los demás tipos ya que estos serán complementarios a la información proporcionada en este apartado.



Recuerda que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a  $180^\circ$

## Teorema de Pitágoras

Dado el triángulo rectángulo  $T_1$ , con catetos  $a$ ,  $b$  e hipotenusa  $h$



Se tiene que:

- a) Si se desconoce la *hipotenusa*  $h$

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- b) Si se desconoce el *cateto*  $a$

$$a^2 + b^2 = h^2$$

$$a^2 = h^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$

- c) Si se desconoce el *cateto*  $b$

$$a^2 + b^2 = h^2$$

$$b^2 = h^2 - a^2$$

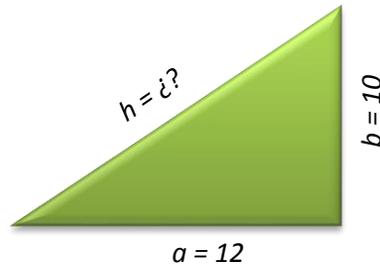
$$b = \sqrt{h^2 - a^2}$$

Los tres casos anteriores surgen a partir del teorema de Pitágoras y para determinar el tamaño de cada cateto o la hipotenusa, será necesario conocer al menos dos datos, los cuales pueden ser:

1. 2 catetos conocidos
2. 1 cateto y la hipotenusa
3. 1 ángulo y alguno de los catetos o la hipotenusa

Con respecto al último punto, el manejo de los ángulos dentro de los triángulos rectángulos obliga a conocer las razones trigonométricas, las cuales serán de mucha utilidad en la resolución de este tipo de problemas.

**Ejercicio:** Encuentre el valor de la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo.



De acuerdo con el teorema de Pitágoras, se sabe que la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma del cuadrado de los catetos, es decir:

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Donde

<b>h = ¿?</b>	<b>a = 12</b>	<b>b = 10</b>
---------------	---------------	---------------

Sustituyendo en la fórmula

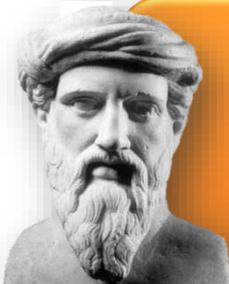
$$h = \sqrt{12^2 + 10^2}$$

$$h = \sqrt{144 + 100}$$

$$h = \sqrt{244} = 15.620$$

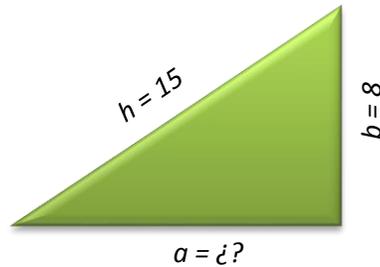
Una forma (Aunque no necesariamente obligatoria) de comprobar que la hipotenusa es correcta, es verificando que el valor de esta sea mayor al cateto a y b respectivamente, es decir:

$$h > a \text{ y } h > b$$



Filósofo y matemático griego, la escuela por él fundada dio un importante impulso al desarrollo de las matemáticas en la antigua Grecia. Se le atribuye haber transformado las matemáticas en una enseñanza liberal mediante la formulación abstracta de sus resultados, con independencia del contexto material en que ya eran conocidos algunos de ellos. Éste es, en especial, el caso del famoso teorema de Pitágoras, que establece la relación entre los lados de un triángulo rectángulo: el cuadrado de la hipotenusa (el lado más largo) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (los lados cortos que forman el ángulo rectángulo). (Vidas, 2016)

**Ejercicio:** Encuentre el valor del *cateto a* del siguiente triángulo rectángulo.



De acuerdo con el teorema de Pitágoras, se sabe que la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma del cuadrado de los catetos, es decir:

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dónde

$h = 15$	$a = \text{¿?}$	$b = 8$
----------	-----------------	---------

Sustituyendo y despejando en la fórmula, tenemos

$$h = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad h^2 = a^2 + b^2$$

$$h^2 - b^2 = a^2$$

$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{15^2 - 8^2} = 12.688$$

### Razones Trigonómicas

El tema como tal es muy extenso, puesto que la mayoría de los autores en sus libros dedica gran parte del estudio al análisis de sus gráficas, sus amplitudes, sus signos, etc., sin embargo, para este capítulo, el estudio de las razones trigonométricas se centra en su aplicación para la resolución de un triángulo rectángulo.

Las razones trigonométricas utilizadas son:

- |                      |                     |
|----------------------|---------------------|
| 1. <i>Seno</i>       | 5. <i>Secante</i>   |
| 2. <i>Coseno</i>     | 6. <i>Cosecante</i> |
| 3. <i>Tangente</i>   |                     |
| 4. <i>Cotangente</i> |                     |

Las últimas tres de la lista anterior se consideran recíprocas de las tres primeras

Tomando como referencia el siguiente triángulo rectángulo con vértices A, B, C y ángulo  $\theta$ :



Las razones trigonométricas son:

- $\text{sen } \theta = \frac{CO}{Hip}$
- $\text{cos } \theta = \frac{CA}{Hip}$
- $\text{tan } \theta = \frac{CO}{CA}$
- $\text{cot } \theta = \frac{CA}{CO}$
- $\text{sec } \theta = \frac{Hip}{CA}$
- $\text{csc } \theta = \frac{Hip}{CO}$



Recuerda tomar en cuenta que la posición del ángulo  $\theta$ , es la que determina cuál de los catetos es opuesto (enfrente de  $\theta$ ) o adyacente (junto a  $\theta$ ).

Para aprenderte de manera fácil y divertida las razones trigonométricas, te sugerimos ocupar un **mnemónico**, en este caso, el algoritmo de la Coca-Cola, si, leíste bien, pero ¿en qué consiste?, en aprenderse la siguiente instrucción:

**Co - Ca - Co - Ca - Hip - Hip**

Y colocarlas en ese orden, primero de arriba abajo en el numerador y después de abajo arriba en el mismo orden pero en el denominador.

### ¿A qué se refiere el hecho de que las razones trigonométricas son recíprocas?

Si te has detenido a observar en alguna ocasión tu calculadora científica, te habrás dado cuenta de que las funciones cotangente, secante y cosecante **no existen**, pero antes de hacer tal afirmación, detengámonos un poco.

La cosecante es recíproca del seno, la secante del coseno y la cotangente de la tangente, veamos un ejemplo:

es decir  $\text{csc } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}$

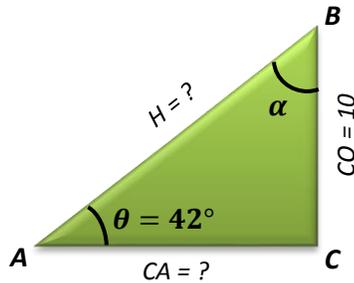
donde  $\text{sen } \theta = \frac{CO}{Hip}$



por lo tanto 
$$\csc \theta = \frac{1}{\frac{CO}{Hip}} \rightarrow \csc \theta = \frac{Hip}{CO}$$

Una vez analizado lo anterior, podrás obtener con ayuda de tu calculadora la cotangente, secante y cosecante sin ningún problema.

**Ejercicio:** Tomando como referencia el siguiente triángulo rectángulo con vértices A, B, C, determinar el valor de Cateto Adyacente, la Hipotenusa y el ángulo  $\alpha$ :



Antes de iniciar analicemos el ejercicio, ¿se puede utilizar el teorema de Pitágoras?, la respuesta tajante es **NO**, ya que para utilizar este método se necesitan dos longitudes y únicamente se cuenta con una, el **CO**.

¿Se puede utilizar una razón trigonométrica?, la respuesta es **SI**, ¿Cuál de ellas?, cualquiera de las tres primeras, el seno, el coseno o la tangente, ya que al calcular le inversa de estas, se podrá encontrar el valor del ángulo de forma directa.

Aplicando  $\text{sen } \theta$ , donde

$$\text{sen } \theta = \frac{CO}{Hip}$$

$$\theta = 42^\circ \qquad CO = 10 \qquad Hip = \text{¿?}$$

Sustituyendo tenemos

$$\text{sen } 42^\circ = \frac{10}{Hip}$$

$$(Hip)(\text{sen } 42^\circ) = 10$$

$$Hip = \frac{10}{\text{sen } 42^\circ} \qquad Hip = \frac{10}{0.66913} \qquad \text{Hip} = 10.94476$$

Una vez que se cuenta con el **CO e Hipotenusa**, se puede aplicar el teorema de Pitágoras, sin embargo, para efectos del presente ejercicio, encontraremos el **CA** con la función *tangente*.

$$\tan \theta = \frac{CO}{CA}$$

Dónde

$$\theta = 42^\circ \qquad CO = 10 \qquad CA = ?$$

$$\tan 42^\circ = \frac{10}{CA}$$

$$(CA) (\tan 42^\circ) = 10$$

$$CA = \frac{10}{\tan 42^\circ} \quad CA = \frac{10}{0.90040} \quad CA = 11.10612$$

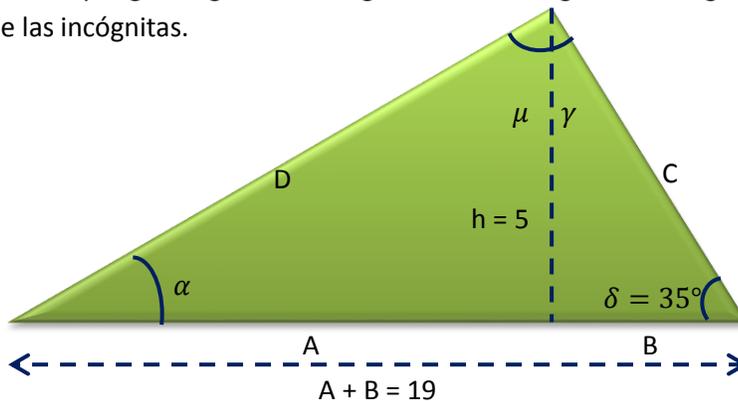
Los lados del triángulo están completos; con respecto al ángulo que falta, recordemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ , adicionalmente se sabe que un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto de  $90^\circ$ , por lo tanto

$$\theta + \alpha + 90^\circ = 180^\circ ; \qquad \text{con } \theta = 42^\circ$$

Sustituyendo

$$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 42^\circ \qquad \alpha = 48^\circ$$

**Ejercicio:** Descomponga el siguiente triángulo en dos triángulos rectángulos y encuentre el valor de cada una de las incógnitas.



En primer lugar, analicemos y clasifiquemos los datos para identificar los valores dados por el ejercicio y las incógnitas.

Lados	Valor
A	Desconocido
B	
C	
D	
h	

Ángulos	Valor
$\alpha$	Desconocido
$\mu$	
$\gamma$	
$\delta$	$35^\circ$
	$180^\circ$

A+B	19		Sumatoria de los ángulos	
-----	----	--	--------------------------	--

Los elementos que se encuentran sombreados en amarillo, serán los que nos ayudarán a encontrar el resto de los valores desconocidos.

Para encontrar el valor del ángulo  $\gamma$ , recordemos que la suma de los ángulos internos del triángulo formado por los lados h, B y C, da una suma igual a  $180^\circ$ , de los cuales se tiene, un ángulo recto de  $90^\circ$  y  $\delta = 35^\circ$ , por lo tanto

$$90^\circ + \delta(35^\circ) + \gamma = 180^\circ \quad \gamma = 180^\circ - 125^\circ \quad \gamma = 55^\circ$$

Aplicando una de las razones trigonométricas disponibles, se puede encontrar el valor del lado C, ya que se cuenta con al menos dos valores, en este caso, dos ángulos ( $\delta$  y  $\gamma$ ) y el lado h.

Aplicando  $\text{sen } \delta$ , donde

$$\text{sen } \delta = \frac{CO}{Hip}$$

$$\delta = 35^\circ \quad CO(h) = 5 \quad Hip(C) = \text{¿?}$$

Sustituyendo tenemos

$$\text{sen } 35^\circ = \frac{5}{Hip(C)} \quad (Hip)(\text{sen } 35^\circ) = 5$$

$$Hip = \frac{5}{\text{sen } 35^\circ} \quad Hip = \frac{5}{0.57} \quad Hip(C) = 8.72$$

Este primer triángulo, prácticamente está resuelto, solo falta encontrar el valor del lado B, el cual se puede calcular con una razón trigonométrica o con el teorema de Pitágoras, en este caso, se utilizará el segundo método sugerido

$$C = \sqrt{h^2 + B^2}$$

Donde

C = 8.72	h = 5	B = ¿?
----------	-------	--------

Sustituyendo y despejando en la fórmula, tenemos

$$C = \sqrt{h^2 + B^2} \quad C^2 = h^2 + B^2$$

$$C^2 - h^2 = B^2 \quad B = \sqrt{C^2 - h^2}$$

$$B = \sqrt{8.72^2 - 5^2} = 7.14$$

Ahora continuaremos con la solución del triángulo formado por los lados A, h y D.

Se sabe que el lado B es igual a 7.14 y que la suma de los lados A y B es igual a 19, entonces ya se puede calcular el valor del lado A

$$A + B = 19 \quad A = 19 - B \quad A = 19 - 7.14 \quad A = 11.86$$

Ahora ya se conoce el valor de dos lados de este segundo triángulo y aplicando el teorema de Pitágoras se puede encontrar el valor del lado D

$$D = \sqrt{A^2 + h^2}$$

Donde

D = ¿?	A = 11.86	h = 5
--------	-----------	-------

Sustituyendo en la fórmula

$$D = \sqrt{11.86^2 + 5^2}$$

$$D = \sqrt{140.66 + 25}$$

$$D = \sqrt{165.66} = 12.87$$

Y se procede a encontrar el valor de los ángulos  $\alpha$  y  $\mu$ , haciendo uso de alguna de las razones trigonométricas.

$$\tan \alpha = \frac{CO}{CA}$$

Dónde

$$\alpha = \text{¿?} \quad CO(h) = 5 \quad CA(A) = 11.86$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{11.86} \quad \tan \alpha = 0.42 \quad \alpha = \tan^{-1}(0.42)$$

$$\alpha = 22.86^\circ$$

$$\alpha(22.86^\circ) + \mu + 90^\circ = 180^\circ \qquad \mu = 180^\circ - 112.86^\circ$$

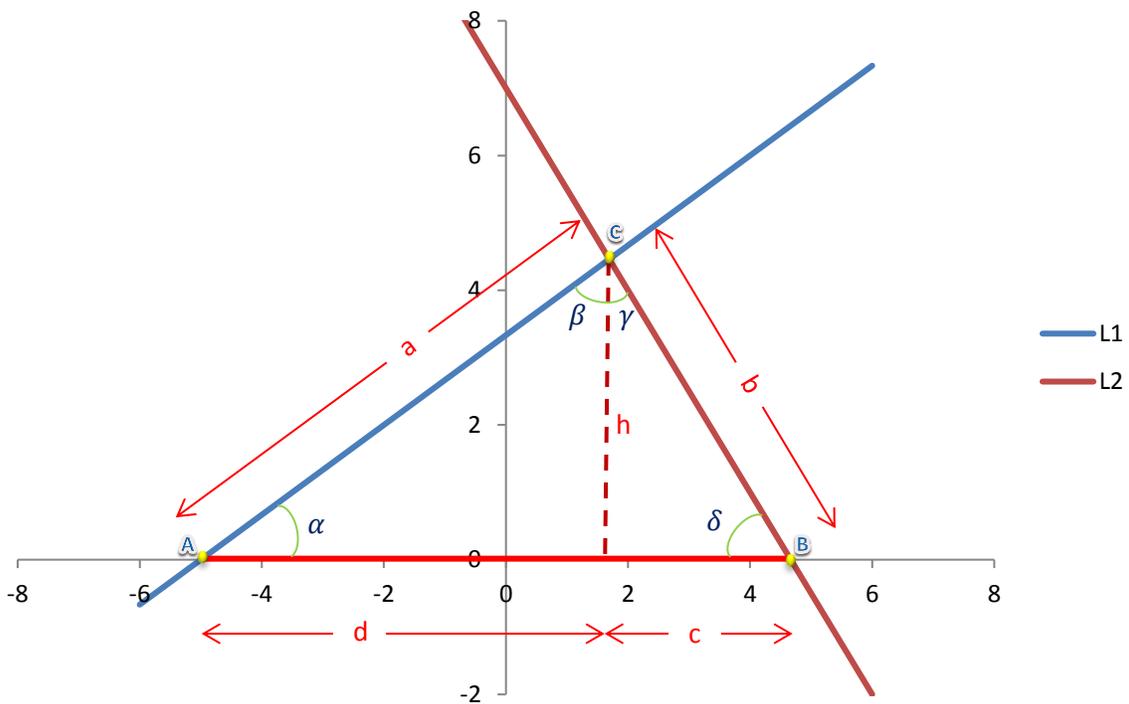
$$\mu = 67.14^\circ$$

Por lo tanto

Lados	Valor
A	11.86
B	7.14
C	8.72
D	12.87
h	5
A+B	19

Ángulos	Valor
$\alpha$	$22.86^\circ$
$\mu$	$67.14^\circ$
$\gamma$	$55^\circ$
$\delta$	$35^\circ$
Sumatoria de los ángulos	$180^\circ$

**Ejercicio:** Encuentre el valor de las incógnitas que se encuentran en el triángulo formado por los vértices A, B y C.



Datos disponibles

**Rectas**

L<sub>1</sub> Pasa por los puntos (-2, 2) y (4, 6)

L<sub>2</sub> Perpendicular a L<sub>1</sub> y pasa por el punto (4, 1)

**Ángulos**      **Dimensiones de los lados**

$\alpha = \text{¿?}$

a = ¿?

$\beta = \text{¿?}$

b = ¿?

Puntos

A = ¿?      B = ¿?      C = ¿?

$\gamma = \text{¿?}$        $c = \text{¿?}$

$\delta = \text{¿?}$        $d = \text{¿?}$

Antes de iniciar es importante encontrar las ecuaciones generales de las rectas y aplicar algún método para resolver el sistema de ecuaciones lineales formado por las rectas  $L_1$  y  $L_2$ , con esta información se podrá encontrar el resto de la información.

Con respecto a  $L_1$ , que pasa por los puntos (-2, 2) y (4, 6)

Encontramos la pendiente  $m_1$

$$m_1 = \frac{2 - 6}{-2 - 4}$$

$$m_1 = \frac{-4}{-6}$$

$$m_1 = \frac{2}{3}$$

Con la pendiente y un punto, se encuentra la ecuación general de la recta  $L_1$  y sus interceptos

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - (-2))$$

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x + 2)$$

$$3(y - 2) = 2(x + 2)$$

$$3y - 6 = 2x + 4$$

$$-2x + 3y = 4 + 6$$

$$-2x + 3y = 10$$

Interceptos

$(0, \frac{10}{3})$  y

$(-5, 0)$

En este caso, este intercepto corresponde al punto donde se cruza la recta  $L_1$  y el eje x, correspondiente al punto A

Para encontrar la pendiente y la ecuación general de la recta  $L_2$ , se hace uso de la pendiente  $m_1$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

$$m_2 = -\frac{1}{\frac{2}{3}}$$

$$m_2 = -\frac{3}{2}$$

Con el punto (4, 1), se encuentra la ecuación general de la recta  $L_2$  y sus interceptos

$$y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 4)$$

$$2(y - 1) = -3(x - 4)$$

$$2y - 2 = -3x + 12$$

$$3x + 2y = 12 + 2$$

$$3x + 2y = 14$$

Interceptos

$(0, 7)$  y

$(\frac{14}{3}, 0)$

En este caso, este intercepto corresponde al punto donde se cruza la recta  $L_2$  y el eje x, correspondiente al punto B

Una vez que se cuenta con las ecuaciones generales de las rectas  $L_1$  y  $L_2$ , se puede utilizar algún método para resolución de un sistema de ecuaciones lineales, ya que, al encontrar el punto de intersección, encontramos el punto C.

Aplicando el método de Cramer tenemos

Ecuación 1  $-2x + 3y = 10$

Ecuación 2  $3x + 2y = 14$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 14 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 42 = -22$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = -28 - 30 = -58$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-22}{-13} = \frac{22}{13} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-58}{-13} = \frac{58}{13}$$

El punto solución del sistema de ecuaciones correspondiente al punto C es  $\left(\frac{22}{13}, \frac{58}{13}\right)$ , es decir (1.692, 4.461).

El punto que se acaba de encontrar es de mucha utilidad, ya que permitirá encontrar el valor de las bases de cada uno de los triángulos, las longitudes  $c$  y  $d$ .

Con respecto al eje  $x$  sabemos que la distancia del punto  $(0, 0)$  al punto A es de 5, al punto B es de  $14/3$  y al punto C es de  $22/13$ , si se suman las longitudes del punto A con el punto C se obtiene la distancia  $d$  y si se resta la distancia de C a la de B se obtiene la longitud del lado  $c$ , es decir:

$$d = \text{distancia del origen al punto A} + \text{distancia del origen al punto C (con respecto al eje x)}$$

$$c = \text{distancia del origen al punto B} - \text{distancia del origen al punto C (con respecto al eje x)}$$

$$d = 5 + \frac{22}{13} = \frac{87}{13} = 6.692 \qquad c = \frac{14}{3} - \frac{22}{13} = \frac{116}{39} = 2.974$$

En cuanto a la altura de los triángulos, cuya base se acaba de localizar, basta con identificar el valor de  $y$  (**h**) del punto C, el cual es igual **4.461**.

Una vez que se cuenta con las bases y las alturas de los triángulos, se pueden calcular el valor de las hipotenusas  $a$  y  $b$ , aplicando el teorema de Pitágoras.

$$a = \sqrt{d^2 + h^2} = \sqrt{6.692^2 + 4.461^2} = \sqrt{64.683} = 8.042$$

$$b = \sqrt{c^2 + h^2} = \sqrt{2.974^2 + 4.461^2} = \sqrt{28.745} = 5.361$$

Por último, se procede a encontrar el valor de los ángulos, aunque solo será necesario encontrar el valor de uno de ellos, ya que, al tratarse de líneas perpendiculares, estas forman un ángulo de 90° y los ángulos deben cumplir con este requisito también ( $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \delta$ ).

Para encontrar el valor del ángulo  $\alpha$ , se puede utilizar alguna de las razones trigonométricas disponibles, en este caso, el *sen de*  $\alpha$ .

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{a} = \frac{4.461}{8.042} = 0.5547$$

$$\alpha = \text{sen}^{-1}(0.5547)$$

$$\alpha = 33.69^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 56.31^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ - \beta = 33.69^\circ$$

$$\delta = 90^\circ - \gamma = 56.31^\circ$$

En resumen tenemos:

Rectas	Ángulos
L <sub>1</sub> Pasa por los puntos (-2, 2) y (4, 6)	$\alpha = 33.69^\circ$
L <sub>2</sub> Perpendicular a L <sub>1</sub> y pasa por el punto (4, 1)	$\beta = 56.31^\circ$
	$\gamma = 33.69^\circ$
	$\delta = 56.31^\circ$
Puntos	Dimensiones de los lados
A = (-5, 0)	a = 8.042
B = (14/3, 0)	b = 5.361
C = (22/13, 58/13)	c = 2.974
	d = 6.692
	h = 4.461

## Ejercicios propuestos

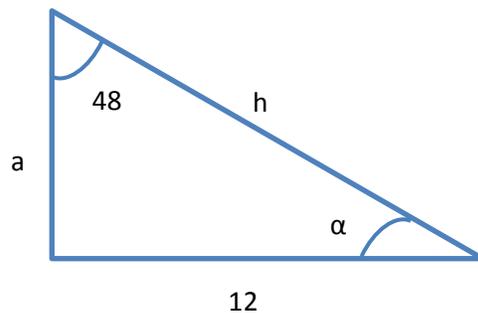
Instrucciones: Resuelve de manera correcta cada uno de los ejercicios propuestos, tomando en cuenta lo visto en esta unidad.

### a) Rectas

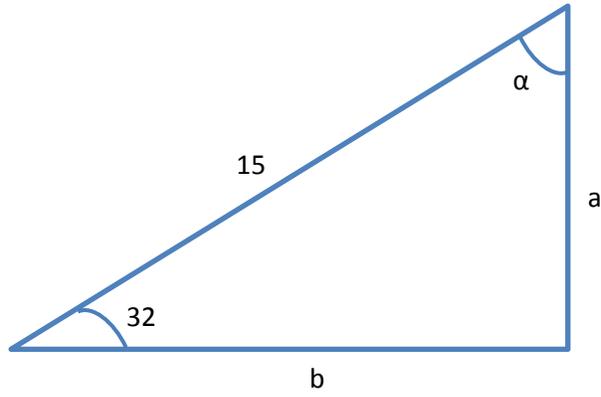
1. Encuentra la pendiente y el intercepto de las siguientes ecuaciones
  - i.  $2x + 3y = 3$
  - ii.  $-2x - 4y = -8$
  - iii.  $-x - y = 6$
  - iv.  $5x - y = 15$
  - v.  $6x - 12y = 0$
2. Encuentra la ecuación general de las rectas que pasan por los puntos:
  - i.  $A(2, 1)$  y  $B(3, 2)$
  - ii.  $A(-2, 3)$  y  $B(3, -1)$
  - iii.  $A(2, -1)$  y  $B(4, 2)$
  - iv.  $A(-1, -1)$  y  $B(1, 1)$
  - v.  $A(3, 1)$  y  $B(4, 5)$
3. Encuentra la ecuación general de la recta con punto y pendiente:
  - i.  $A(-1, 2)$  y  $m = 2$
  - ii.  $A(3, 4)$  y  $m = \frac{2}{3}$
  - iii.  $A(-1, -2)$  y  $m = -\frac{1}{4}$
  - iv.  $A(1, 4)$  y  $m = -\frac{2}{3}$
  - v.  $A(0, -2)$  y  $m = 3$
4. Sea  $L_1$  la recta que pasa por los puntos  $A(-2, 1)$  y  $B(3, -1)$ , encontrar:
  - i. La ecuación general de la recta  $L_1$
  - ii. La ecuación general de la recta  $L_2 \parallel$  a  $L_1$  y que pasa por el punto  $C(2, 2)$
  - iii. La ecuación general de la recta  $L_3 \perp$  a  $L_1$  y que pasa por el punto  $D(1, 1)$

### b) Triángulos: encuentra el valor de las incógnitas en base al teorema de Pitágoras y el uso de razones trigonométricas.

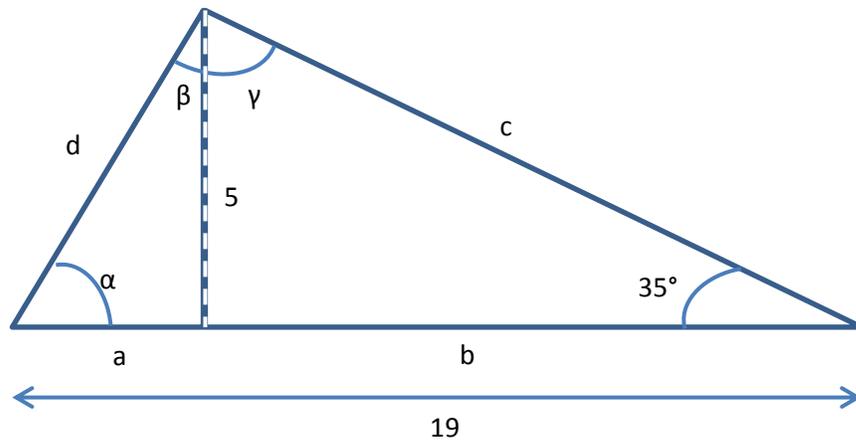
1.



2.



3.



## BIBLIOGRAFÍA

- Carvajal, J. A. (2012). *Matemáticas I*. México, D. F.: Mc Graw Hill.
- Heinhold, J., & Riedmüller, B. (2008). *Álgebra Lineal y Geometría Analítica*. Barcelona: Reverté.
- Hoffman, Bradley, Sobecki, Price, & Sandoval. (2013). *Matemáticas aplicadas a la Administración y los negocios*. México, D. F.: Mc Graw Hill.
- Ibañez, P., & García, G. (2009). *Matemáticas 1: Aritmética y Álgebra*. México: Cengage Learning.
- Lazo, A., & Silva, J. M. (2008). *Fundamentos de Matemáticas*. México: Limusa.
- Lehmann, C. H. (2008). *Álgebra*. España: Limusa.
- Miller, Heeren, & Hornsby. (2006). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. España: Pearson.
- Niles, N. O. (1992). *Trigonometría Plana*. México: Limusa.
- Oteyza, E. d. (2001). *Geometría Analítica y Trigonometría*. México: Pearson.
- Ramírez-Galarza, A. I. (2004). *Geometría Analítica, Una introducción a la Geometría*. México: Las prensas de ciencias.
- Vidas, B. y. (15 de Diciembre de 2016). *biografiasyvidas.com*. Obtenido de biografiasyvidas.com: <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/pitagoras.htm>

**El presente libro terminó de ser editado en las instalaciones de la Universidad  
Politécnica del Valle de Toluca, el 12 de enero de 2018.**

