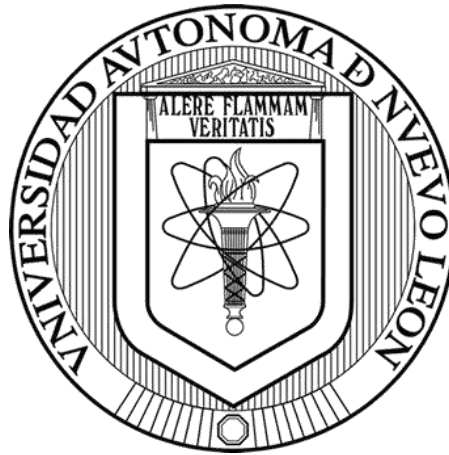


Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Centro de investigación en ciencias Físico Matemáticas



Equilibrio de Nash para el juego de segundo nivel

PRESENTA
Luis Rodrigo López Utrera

EN OPCIÓN AL GRADO DE:
Maestría en ciencias con orientación en matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León. Julio 2015

“Un diamante no se puede pulir sin fricción, tampoco un hombre puede perfeccionarse sin pruebas”

Proverbio chino

ÍNDICE

Resumen	1
1 Introducción	1
2 Juego de primer nivel	
2.1 Especificación del modelo	5
2.2 Equilibrio exterior	6
2.3 Criterio de consistencia	12
2.4 Equilibrio interior	13
3 Juego de segundo nivel	
3.1 Especificación del problema	18
3.2 Condición necesaria de primer orden para la existencia del equilibrio de Nash	18
3.3 Condición necesarias y suficientes para la existencia del equilibrio de Nash	21
4 Resultados numéricos	30
5 Conclusiones e investigación a futuro	42
Referencias	43

RESUMEN

En este trabajo se sigue trabajando con el concepto de equilibrios de variación conjetural (CVE), la idea fundamental de este concepto a diferencia de la conjetura de Cournot es que los jugadores eligen su estrategia tomando en cuenta que la estrategia de sus rivales es una función conjeturada de su propia estrategia. Los resultados obtenidos en los experimentos numéricos fueron comparados, debido a su gran popularidad, con las conjeturas de Cournot y se pudieron ver mejores beneficios para los productores usando el concepto de equilibrio de variación conjetural (CVE), dejando así la posibilidad de emplear este concepto en los duopolios clásicos.

PALABRAS CLAVES: Optimización, Equilibrios de variación conjetural (CVE).

ABSTRACT

In this paper we continue working with the concept of conjectural variations equilibrium (CVE), the fundamental idea of this concept in contrast to Cournot, is that players choose their strategy taking their rival's strategy into account which is a function conjecture of their own strategy. The results obtained in the numeric experiments were compared, due to their wide popularity with Cournot's conjectures and better benefits could be seen for the producers using the idea of conjectural variations equilibrium (CVE), which leaves the possibility to use this concept in classic duopolies.

KEY WORDS: Optimization, Conjectural variations equilibrium (CVE)

1 INTRODUCCIÓN

Actualmente, tanto en México como también en el resto del mundo, la mayoría de las empresas que predominan en un solo mercado son oligopolios, es decir, que la interdependencia que tienen estas empresas es fundamental para la toma de decisiones. Esta toma de decisiones de una empresa afecta a las demás dentro del mercado. La teoría de juegos es una herramienta que se usa para modelar la interacción entre las empresas para poder llegar a un punto óptimo.

El equilibrio de Nash (conocido también en economía como el equilibrio de Cournot) es un “concepto de solución” para juegos con dos o más jugadores, el cual asume que cada jugador conoce y ha adoptado su mejor estrategia posible y todos los jugadores conocen las estrategias de sus rivales. Por ende, cada jugador no gana nada modificando su estrategia siempre y cuando sus rivales mantengan sus estrategias. En otras palabras, un equilibrio de Nash es una situación en donde todos los jugadores han puesto en práctica, y saben que lo han hecho, una estrategia que

¹ Maestro en ciencias con orientación en matemáticas por parte de la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL). Ingeniero eléctrico por parte del Instituto Tecnológico de Veracruz (ITVER).

maximiza sus ganancias dadas las estrategias de sus rivales. Por lo que ningún jugador tiene motivo alguno para modificar su estrategia.

Los primeros en introducir los equilibrios de variación conjetural (CVE por sus siglas en inglés) fueron Bowley [1] y Frisch [2] como una posible solución de juegos estáticos. De acuerdo a este concepto los jugadores elijen su estrategia tomando en cuenta que la estrategia de sus rivales es una función conjeturada de su propia estrategia.

Bulavsky y Kalashnikov [5], [6] investigaron nuevas formas para describir estos equilibrios conjeturados para los modelos de oligopolios clásicos. En los trabajos de Bulvasky y Kalashnikov [5], [6], Isac, Bulavsky y Kalashnikov [9], siguiendo a Cournot, los autores consideran que cada agente toma el volumen total de producción como variable observable en función de variación de su propio volumen de producción. Pero en lugar de la suposición de Cournot, cada uno de los agentes hace uso de sus variaciones conjeturadas descritas por la siguiente ecuación:

$$G_i(\eta) = G + (\eta - q_i) * \omega_i(G, q_i) \quad (1.1)$$

Donde:

G - es la cantidad total producida en el mercado;

q_i - es la producción actual por el productor i ;

η - es la producción esperada por el productor i ;

$G_i(\eta)$ - es el total producido en el mercado, conjeturada por el productor i , como una respuesta a su cambio de q_i por η ;

$\omega_i(G, q_i)$ - es el **coeficiente de influencia** del productor i ,

La ecuación (1.1) cuando $\omega_i = 0$ se describe un modelo de competencia perfecta y es el modelo de Cournot cuando $\omega_i = 1$. Estos modelos fueron incluidos en una clase uniforme de modelos de oligopolio. Bajo las suposiciones generales Bulavsky y Kalashnikov [5], [6] demostraron la existencia y unicidad del equilibrio conjeturado.

Un obstáculo para este nuevo concepto es la consistencia para los coeficientes de influencia de los agentes también llamado racionalidad. Para lidiar con este obstáculo, Bulavsky [8] propone un nuevo enfoque. Dicho enfoque supone que cada jugador hace sus conjeturas tomando como referencia las variaciones del precio p en el mercado en función de las variaciones infinitesimales a su volumen de producción. Una vez conocidos todos los coeficientes de influencia de cada agente, cada uno de ellos realiza un procedimiento de verificación, el cual le permita verificar si su coeficiente de influencia es coherente con los coeficientes de los demás. Cuando

todos los coeficientes de influencia son coherentes entre sí, es natural llamarlo un equilibrio consistente o equilibrio consistente con variaciones conjeturadas (CCVE por sus siglas en inglés).

Las fórmulas obtenidas por Bulvasky [8] para obtener este equilibrio consistente con variaciones conjeturadas fueron las mismas que obtuvieron Liu Yuofei, Ni Y.X., Wu F.F., and Cai Bin [10]. Sin embargo Lui et al. [10] solo admite funciones de demanda lineal y funciones de costos cuadráticos, por otro lado Bulavsky [8] admite funciones de la demanda no lineales (e inclusive no diferenciables) y funciones de costos convexas.

La diferencia entre el equilibrio consistente de variaciones conjetural (CCVE) y el equilibrio clásico de Cournot-Nash, es que en el modelo clásico de Cournot-Nash se supone que solo un agente puede cambiar su volumen de producción, mientras que dentro del concepto de equilibrio consistente de variaciones conjetural (CCVE) todas las firmas pueden hacer cambios en su producción y su coeficiente de influencia para el equilibrio consistente se encuentran como una solución de un sistema de ecuaciones. Este nuevo concepto tiene dos puntos importantes que hacen que la investigación en esta área sea más interesante:

1. Los modelos de equilibrio conjeturado forman una clase uniforme, donde se encuentra incluidos los modelos tanto de Cournot como el de la competencia perfecta, haciendo el concepto de CCVE más general que el concepto de Cournot-Nash.
2. Los resultados obtenidos aplicando los modelos de CCVE son más eficientes que los modelos clásicos. En el trabajo Kalashnikov, Bulavsky, Kalashnykova y Felipe Castillo-Pérez [11] el equilibrio conjeturado obtenido para el mercado de electricidad mostró mejores resultados tanto para los productores y consumidores.

El concepto del equilibrio consistente en los trabajos [3], [4] está extendido para los modelos de oligopolio mixto, en donde la empresa pública maximiza una función de bienestar doméstico social y la empresa privada maximiza su ganancia neta, ha tenido un auge importante en los últimos años. Los resultados mencionados anteriormente han sido extendidos para los oligopolios mixtos. Felipe de Jesús Castillo Pérez [11] considera un modelo de oligopolio de variación conjetural en el mercado energético con ciertas conjeturas sobre las variaciones de los precios en función de su volumen de producción. En este trabajo se obtuvieron resultados en los que tanto el consumidor como el productor se ven beneficiados aplicando el concepto CCVE. Diego de Jesús Hernández Rodríguez [12] extiende los resultados de Felipe de Jesús Castillo Pérez [11] considerando un oligopolio mixto (con más de 2 productores) en un mercado de un bien homogéneo con una estructura especial para el agente público, es decir, el productor público maximiza una función la cual combina en forma convexa las funciones de bienestar doméstico social y de la ganancia neta. Bajo estas suposiciones generales Diego de Jesús Hernández Rodríguez [12] demostró la existencia y la unicidad del equilibrio exterior (definido por las

conjeturas fijas de los agentes dadas en forma exógena), así como la existencia de por lo menos un equilibrio interior (o bien, consistente). Finalmente, analizó el comportamiento de ciertos parámetros del equilibrio interior (consistente) en dependencia del coeficiente de la combinación convexa de las funciones objetivos en la meta del agente público. Carlos Ernesto Mitsuo Nakashima Villarreal [13] modela un oligopolio mixto donde el productor especial maximiza no solo el bienestar doméstico social así como también la ganancia neta promedio dividida por el tamaño de labor. En otras palabras, se maximiza la ganancia promedio de cada empleado de la firma. Bajo suposiciones generales, demostró la existencia y la unicidad del equilibrio exterior, así como la existencia de por lo menos uno equilibrio interior (o bien, consistente).

En este trabajo seguimos investigando propiedades de las conjeturas consistentes para el mercado oligopolístico clásico de un bien homogéneo. Aunque, en general, estas conjeturas consistentes son distintas a las de Cournot, en este trabajo se estableció un hecho notable. Se definió un juego de segundo nivel con los mismos jugadores, pero con las conjeturas que desempeñan el papel de las estrategias de los jugadores. Entonces, las conjeturas consistentes en el juego de primer nivel (juego original) nos aseguran las estrategias óptimas de Nash en el juego de segundo nivel.

2 JUEGO DE PRIMER NIVEL

2.1 ESPECIFICACIÓN DEL MODELO

En este modelo consideramos $n \geq 3$ productores (agentes) de un bien homogéneo con las funciones de gastos $f_i(q_i), i = 1, 2, \dots, n$. donde q_i es volumen de producción del agente i . En este trabajo consideramos la demanda de dos tipos: la demanda pasiva $G(p)$, la cual depende del precio p , y la demanda activa D la cual es no negativa y no depende del precio. El equilibrio entre la oferta y la demanda a un precio determinado p , está dado por la siguiente ecuación de balance.

$$\sum_{i=1}^n q_i = G(p) + D \quad (2.1)$$

Para nuestro modelo introducimos las siguientes suposiciones

A1. La función de la demanda $G(p)$ está definida para precios $p \in (0, +\infty)$, es continuamente diferenciable y $G'(p) \leq 0$.

A2. Para todo $i = 1, 2, \dots, n$, la función de gastos $f_i(q_i)$ está definida para $q_i \geq 0$, es dos veces continuamente diferenciable y estrictamente convexa, es decir, $f'_i(q_i) > 0$ y $f''_i(q_i) > 0$.

El productor $i = 1, 2, \dots, n$ escoge su producción $q_i \geq 0$ para maximizar su utilidad neta $\mu_i(p, q_i) = p * q_i - f_i(q_i)$, pensando que su selección puede afectar el valor del precio p . Bajo esta suposición se puede escribir la condición de optimalidad de primer orden como sigue.

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial q_i} = p + q_i * \frac{\partial p}{\partial q_i} - f'_i(q_i) \begin{cases} = 0, & \text{si } q_i > 0 \\ \leq 0, & \text{si } q_i = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Para describir el comportamiento del productor i , es necesario evaluar el comportamiento de la derivada $\frac{\partial p}{\partial q_i} = -v_i$ en lugar de la dependencia de p respecto a q_i . Introducimos el signo negativo para usar los valores no negativos de v_i . La dependencia p respecto a q_i debe garantizar la concavidad (al menos local) de la utilidad conjeturada del productor i como función de su producción. De otra manera, no se pueden usar las condiciones (2.2) como suficientes. Como suponemos que las funciones de gastos $f_i(q_i), i = 1, 2, \dots, n$, son estrictamente convexas, es

suficiente garantizar la concavidad del producto $p * q_i$. Para esto es suficiente suponer que el coeficiente v_i (llamado el **coeficiente de influencia** del productor i) es constante no negativo. En este caso la dependencia local conjeturada de la utilidad sobre la variación de su volumen de producción η_i tiene la forma $[p - v_i(\eta_i - q_i)]\eta_i - f_i(\eta_i)$, mientras que las condiciones de optimalidad de primer orden en $\eta_i = q_i$, están dadas por las relaciones.

$$\begin{cases} p = v_i q_i + f'_i(q_i), & \text{si } q_i > 0 \\ p \leq f'_i(0), & \text{si } q_i = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Si supiéramos que las conjeturas de los agentes están dadas exógenamente como lo suponen Bulavsky y Kalashnikov [5], [6] los valores de v_i serian funciones de q_i y p . Sin embargo, en este trabajo utilizamos el enfoque de Bulavsky [7], [8], en donde los parámetros de conjeturas de equilibrio, es decir, los coeficientes de influencia se determinan simultáneamente con el precio p y los valores de producción q_i , a través de un procedimiento de verificación. En este caso, los coeficientes de influencia son parámetros escalares determinados sólo para el equilibrio. A partir de aquí nos referiremos a este equilibrio como **equilibrio interior** descrito por el conjunto de variables y parámetros $(p, q_1, \dots, q_n, v_1, \dots, v_n)$.

Para pasar al procedimiento de verificación, hay que introducir la segunda noción de equilibrio, llamado **equilibrio exterior** (con los parámetros v_i dados exógenamente).

2.2 EQUILIBRIO EXTERIOR

Definición:

El vector (p, q_1, \dots, q_n) se denomina **equilibrio exterior** para determinados coeficientes de influencia (v_1, \dots, v_n) , $v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$. Si se cumple la condición de balance (2.1) y para todos los agentes se cumplen las condiciones de optimalidad (2.3).

A3. Para el precio $p_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \{f'_i(0)\}$ existe el volumen de producción q_i^0 (es único por el axioma A2), tal que para cada agente $i = 1, 2, \dots, n$, $p_0 = f'_i(q_i^0)$ y además

$$\sum_{i=1}^n q_i^0 < G(p_0) \quad (2.4)$$

Los axiomas **A1**, **A2** y **A3** garantizan que las condiciones (2.1) y (2.3) se cumplan simultáneamente si y solo si $p > p_0 \geq f'_i(0)$, es decir, si y solo si los volúmenes de producción $q_i, i = 1, 2, \dots, n$ sean estrictamente positivos.

Teorema 1

Bajo los axiomas **A1**, **A2** y **A3**, para todos parámetros $D \geq 0$ y $v_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ existe un único equilibrio exterior (p, q_1, \dots, q_n) , que depende continuamente de los parámetros (D, v_1, \dots, v_n) . El precio del equilibrio $p = p(D, v_1, \dots, v_n)$ es continuamente diferenciable respecto a D y a $v_i, i = 1, 2, \dots, n$, además $p > p_0$, y las derivadas se pueden representar de la siguiente manera

$$\frac{\partial p}{\partial D} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} > 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial v_i} = \frac{\frac{q_i}{v_i + f''_i(q_i)}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{v_j + f''_j(q_j)} - G'(p)} > 0 \quad (2.6)$$

El volumen de producción $q_i = q_i(D, v_1, \dots, v_n)$ es continuamente diferenciable respecto a $v_i, i = 1, 2, \dots, n$ y las derivadas se representan de la siguiente manera

$$\frac{\partial q_i(D, v_1, \dots, v_n)}{\partial v_i} = \frac{-q_i}{v_i + f''_i(q_i)} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} \right] < 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial q_i(D, v_1, \dots, v_n)}{\partial v_k} = \frac{1}{v_k + f''_k(q_k)} \frac{\frac{q_k}{v_k + f''_k(q_k)}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} > 0 \quad (2.8)$$

Demostración

Junto con el precio p_0 introducido en **A3** consideramos el precio p_1 definido de la siguiente manera:

$$p_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \lim_{q_i \rightarrow \infty} [v_i q_i + f'_i(q_i)] \right\} \quad (2.9)$$

Si todos los coeficientes de influencia $v_i, i = 1, \dots, n$ son positivos $p_1 = +\infty$. Pero p_1 puede ser finito, por ejemplo, cuando para algún $v_i = 0, i = 1, \dots, n$.

A partir de las condiciones de optimalidad (2.3) introducimos las siguientes funciones

$$\gamma_i(p, q_i, v_i) = p - v_i q_i - f'_i(q_i), i = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

y reescribimos (2.3) utilizando (2.10)

$$\gamma_i(p, q_i, v_i) = 0 \quad (2.11)$$

Como $\frac{\partial \gamma_i}{\partial q_i} = -v_i - f''_i(q_i) < 0$, por el teorema de la función implícita de la ecuación (2.11) es posible expresar el volumen de producción $q_i = q_i(p, v_i), i = 1, 2, \dots, n$ del agente i como una función continuamente diferenciable respecto a sus variables p y v_i . Al sustituir esta función en (2.11), obtenemos

$$\gamma_i(p, q_i(p, v_i), v_i) = 0 \quad (2.12)$$

Derivando (2.12) respecto a p , obtenemos lo siguiente

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial p} = 1 - v_i \frac{\partial q_i(p, v_i)}{\partial p} - f''_i(q_i) \frac{\partial q_i(p, v_i)}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial p} = 1 - [v_i + f''_i(q_i)] \frac{\partial q_i(p, v_i)}{\partial p} = 0$$

y de aquí encontramos

$$\frac{\partial q_i(p, v_i)}{\partial p} = \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.13)$$

Derivando (2.12) respecto a v_i , obtenemos

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial v_i} = -v_i \frac{\partial q_i(p, v_i)}{\partial v_i} - q_i - f''_i(q_i) \frac{\partial q_i(p, v_i)}{\partial v_i} = 0$$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial v_i} = -[v_i + f''_i(q_i)] \frac{\partial q_i(p, v_i)}{\partial v_i} - q_i = 0$$

Y de aquí encontramos

$$\frac{\partial q_i(p, v_i)}{\partial v_i} = \frac{-q_i}{v_i + f''_i(q_i)} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.14)$$

Ahora sabemos que es posible expresar el volumen de producción del productor (agente) i como función continuamente diferenciable respecto al precio p y al coeficiente de influencia v_i , $q_i = q_i(p, v_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, por lo que podemos expresar la ecuación de balance (2.1) de la siguiente manera.

$$\sum_{i=1}^n q_i(p, v_i) - G(p) - D = 0 \quad (2.15)$$

e introducimos la función siguiente:

$$\Gamma(p, v_1, \dots, v_n, D) = \sum_{i=1}^n q_i(p, v_i) - G(p) - D \quad (2.16)$$

Reescribimos (2.16) como:

$$\Gamma(p, v_1, \dots, v_n, D) = 0 \quad (2.17)$$

Como

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p) > 0 \quad (2.18)$$

Por el teorema de la función implícita es posible expresar el precio del equilibrio p como una función $p = p(D, v_1, \dots, v_n)$ y el volumen de producción q_i como una función $q_i = q_i(D, v_1, \dots, v_n)$ que son diferenciables respecto a todos sus parámetros. La derivada parcial del precio de equilibrio p respecto a D se encuentra derivando (2.16):

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial D} = \left[\sum_{i=1}^n [q_i(p, v_i)]' - G'(p) \right] \frac{\partial p}{\partial D} - 1 = 0,$$

despejando $\frac{\partial p}{\partial D}$ obtenemos

$$\frac{\partial p}{\partial D} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n [q_i(p, v_i)]' - G'(p)}$$

utilizando (2.13) obtenemos la derivada

$$\frac{\partial p}{\partial D} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.19)$$

Derivando (2.16) respecto a v_i , obtenemos la siguiente igualdad

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial v_i} = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial p} - G'(p) \right] \frac{\partial p}{\partial v_i} + \frac{\partial q_i}{\partial v_i} = 0,$$

despejando $\frac{\partial p}{\partial v_i}$ obtenemos

$$\frac{\partial p}{\partial v_i} = \frac{-\frac{\partial q_i}{\partial v_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial p} - G'(p)}$$

y usando (2.14), obtenemos

$$\frac{\partial p}{\partial v_i} = \frac{\frac{q_i}{v_i + f''_i(q_i)}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)}$$

Aplicando (2.13) y (2.14), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_i(D, v_1, \dots, v_n)}{\partial v_i} &= \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} \frac{\frac{q_i}{v_i + f''_i(q_i)}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} - \frac{q_i}{v_i + f''_i(q_i)} \\
&= \frac{q_i}{v_i + f''_i(q_i)} \left[\frac{1}{\left(v_i + f''_i(q_i) \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p) \right)} - 1 \right] \\
&= \frac{q_i}{v_i + f''_i(q_i)} \left[\frac{\frac{1}{v_i + f''_i(q_i)}}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p) \right)} - 1 \right] \\
&= \frac{-q_i}{v_i + f''_i(q_i)} \left[\frac{\sum_{i=1, i \neq k}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} \right] < 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

es decir,

$$\frac{\partial q_i(D, v_1, \dots, v_n)}{\partial v_k} = \frac{1}{v_k + f''_k(q_k)} \left[\frac{\frac{q_k}{v_k + f''_k(q_k)}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} \right] > 0 \tag{2.21}$$

■

2.3 CRITERIO DE CONSISTENCIA

Antes de introducir la definición de **equilibrio interior**. Primero vamos a describir el procedimiento de verificación de los coeficientes de influencia v_i dado en [6] – [7].

Supongamos que tenemos un *equilibrio exterior* (p, q_1, \dots, q_n) que ocurre para ciertos v_1, \dots, v_n y D . Uno de los productores (agentes), digamos k , sale del mercado y hace cambios pequeños a su volumen de producción en el equilibrio q_k . En términos matemáticos esto es equivalente al restringir el conjunto de productores (agentes) del modelo al subconjunto $i \neq k$ con el volumen de producción q_k sustraída a partir de la demanda activa. Entonces la variación en el volumen de producción por el productor (agente) k se reduce a la variación del mismo valor absoluto en la demanda activa $D_k = D - q_k$. Si consideramos estas variaciones siendo infinitesimales, asumimos que observando las variaciones correspondientes en el precio de equilibrio, el productor (agente) k obtiene la derivada del precio del equilibrio respecto a la demanda activa (2.5), o sea, sus coeficientes de influencia. Aplicando la fórmula (2.5) del **Teorema 1** para el cálculo de la derivada y recordando que el productor (agente) k está temporalmente fuera

del mercado, por lo que hay que excluir de la adición el término con el número $i = k$, llegamos a la formulación del siguiente criterio de consistencia:

Criterio de consistencia.

En un equilibrio exterior (p, q_1, \dots, q_n) los coeficientes de influencia $v_k, k = 1, 2, \dots, n$ se admiten como consistentes si se cumplen las igualdades siguientes:

$$v_k = \frac{1}{\sum_{i=1, i \neq k}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)}, i = 1, \dots, n \quad (2.22)$$

Ahora definimos el equilibrio interior

2.4 EQUILIBRIO INTERIOR

Definición:

El conjunto $(p, q_1, \dots, q_n, v_1, \dots, v_n)$, donde $v_k \geq 0, k = 1, \dots, n$ se refiere como un equilibrio interior, si para todos los coeficientes de influencia, el conjunto (p, q_1, \dots, q_n) es un equilibrio exterior y se cumple el criterio de consistencia para todo k .

Teorema 2

Bajo los axiomas **A1**, **A2** y **A3**, existe un equilibrio interior.

Demostración

Demostraremos que existen $v_k \geq 0, k = 1, \dots, n, q_i \geq 0, i = 1, \dots, n$, y $p > p_0$, de tal modo que el vector (p, q_1, \dots, q_n) constituya un equilibrio exterior y se cumpla la igualdad (2.22).

Introducimos el parámetro α de tal manera que $G'(p) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ para $\alpha \in [-1, 0]$ y definimos las siguientes funciones

$$F_i(\alpha, v_1, \dots, v_n) = \frac{1 + \alpha}{(1 + \alpha) \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - \alpha} \quad (2.23)$$

Como $v_i \geq 0$, $f''_i(q_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $\alpha \in [-1, 0]$, las funciones F_i , $i = 1, 2, \dots, n$ están definidas correctamente y son continuas respecto a sus argumentos en los dominios correspondientes. Ahora introducimos una función auxiliar $\Phi: [-1, 0] \times R_+^n \rightarrow [-1, 0]$. Para $\alpha \in [-1, 0]$ arbitraria y $(v_1, \dots, v_n) \in R_+^n$, encontramos el vector de equilibrio exterior (p, q_1, \dots, q_n) y calculamos la derivada $G'(p)$ en el punto p . Definimos el valor de la función Φ como sigue:

$$\Phi(\alpha, v_1, \dots, v_n) = \hat{\alpha} = \frac{G'(p)}{1 - G'(p)} \in [-1, 0] \quad (2.24)$$

Como la derivada de $G'(p)$ es continua respecto a p y el precio de equilibrio $p = p(v_1, \dots, v_n)$ es una función continua, Φ es continua dado que es una superposición de funciones continuas. Para concluir construimos un mapeo $H = (\Phi, F_1, \dots, F_n): [-1, 0] \times R_+^n \rightarrow [-1, 0] \times R_+^n$, y seleccionamos un conjunto compacto convexo que es mapeado a sí mismo por H . Definimos

$$\beta = \max\{f''_i(q_i) | q_i \in [0, G(p_0)], i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2.25)$$

La fórmula (2.23) tiene la siguiente relación cuando $\alpha = -1$

$$F_i(\alpha, v_1, \dots, v_n) = 0. \quad (2.26)$$

Mientras que para $\alpha \in (-1, 0]$ y $n \geq 3$ se tiene:

$$0 \leq F_i(\alpha, v_1, \dots, v_n) = \frac{1 + \alpha}{(1 + \alpha) \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - \alpha} \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)}} \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + \beta}} \quad (2.27)$$

Las relaciones (2.26) y (2.27) implican que para cualquier $\alpha \in [-1, 0]$, si $0 \leq v_i \leq \frac{\beta}{n-2}$, $i = 1, 2, \dots, n$ los valores de $F_i(\alpha, v_1, \dots, v_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ caen en el mismo intervalo $[0, \frac{\beta}{n-2}]$. Por lo tanto

establecimos que $H = (\Phi, F_1, \dots, F_n)$ mapea el subconjunto compacto $[-1, 0] \times [0, \frac{\beta}{n-2}]^n$ en sí mismo y entonces tiene al menos un punto fijo. ■

Ahora podemos desarrollar técnicas necesarias, que nos ayudarán más adelante. Para esto, denotamos la derivada de la función de la demanda como $\tau = G'(p)$ y reescribimos el criterio de consistencia de la siguiente manera:

$$v_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - \tau}, i = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

Consideremos el caso en el que las funciones de los gastos son cuadráticas, es decir, $f_i(q_i) = \frac{1}{2} a_i q_i^2 + b_i q_i$, reescribiendo (2.28) obtenemos:

$$v_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} - \tau}, k = 1, \dots, n \quad (2.29)$$

donde $\tau \in (-\infty, 0]$. Cuando $\tau \rightarrow -\infty$ (2.29) tiene una única solución $v_k = 0, i = 1, \dots, n$. Para todos los valores finitos τ establecemos el siguiente teorema.

Teorema 3

Para cualquier $\tau \in (-\infty, 0]$ existe única solución para el sistema (2.29) $v_k = v_k(\tau)$, $k = 1, \dots, k, \dots, n$ que depende continuamente de τ . Además $v_k(\tau) \rightarrow 0$ cuando $\tau \rightarrow -\infty$ y crece monótonamente hasta $v_k(0)$ cuando $\tau \rightarrow 0$

Demostración

Similarmemente a la demostración del teorema 2, introducimos las funciones:

$$F_i(\tau, v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} - \tau} = v_i, i = 1, \dots, n \quad (2.30)$$

y el parámetro $\beta = \max\{a_1, \dots, a_n\}$ definido en (2.25). Es fácil verificar que para cada valor fijo de $\tau \in (-\infty, 0]$ la función multivaluada $\Gamma = (F_1, \dots, F_n)$ mapea el cubo dimensional n , $M = \left[0, \frac{\beta}{n-2}\right]^n$ en si mismo. Consideramos la matriz Jacobiana del mapeo $\Gamma = (F_1, \dots, F_n)$, que es la matriz $J = \left(\frac{\partial F_i}{\partial v_j}\right)_{i=1, j=1}^n$ con los elementos siguientes:

$$\frac{\partial F_i}{\partial v_j} = \begin{cases} 0, & si \ j = i \\ \frac{F_i^2}{(v_j + a_j)^2}, & si \ j \neq i \end{cases} \quad (2.31)$$

Entonces, la matriz J es no negativa y no se puede descomponer. Estimamos la suma de los elementos de cada fila $i, i = 1, \dots, n$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial v_k} = F_i^2 \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{1}{(v_k + a_k)^2} \leq \frac{\sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{1}{(v_k + a_k)^2}}{\left(\sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{1}{v_k + a_k}\right)^2} = R_i(v_1, \dots, v_n) < 1 \quad (2.32)$$

Las funciones $R_i(v_1, \dots, v_n), i = 1, \dots, k, \dots, n$ están definidas en el cubo M , continuamente dependen de las variables v_1, \dots, v_n y toman valores positivos estrictamente menores a 1. Entonces, sus valores máximos alcanzados en el cubo son estrictamente menores a 1. Lo que implica que la matriz $I - J$ tiene inversa (donde I es la matriz unitaria de dimensiones $n \times n$) y el mapeo $\Gamma = (F_1, \dots, F_n)$ definido en M es un mapeo estrictamente contraído. Lo último implica que para cualquier valor fijo de $\tau \in (-\infty, 0]$, el sistema (2.29) tiene única solución $v(\tau) = (v_1(\tau), \dots, v_n(\tau))^T$. Como $\det(I - J) \neq 0$ para cualquier $\tau \in (-\infty, 0]$, el teorema de la función implícita garantiza la diferenciabilidad continua de la función $\tau(v)$ respecto a τ .

Para establecer la monotonía de $\tau(v)$ derivamos (2.30) respecto a τ

$$\frac{\partial v_i}{\partial \tau} = F_i^2 \left[\sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{\frac{\partial v_i}{\partial \tau}}{(v_k + a_k)^2} + 1 \right], i = 1, \dots, n \quad (2.33)$$

Reescribimos (2.33) de forma vectorial:

$$v_j' = J v_j' + F^2. \quad (2.34)$$

donde:

$$v_j' = \left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial \tau}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial \tau} \right) \right)^T \quad y \quad F^2 = ((F_1^2, \dots, F_n^2))^T > 0 \quad (2.35)$$

Como todos los elementos de la matriz $(I - J)^{-1}$ son no negativos y además no tiene ninguna fila de ceros, entonces (2.33) y (2.34) implican:

$$v_j' = (I - J)^{-1} F^2 > 0 \quad (2.36)$$

Por ende las soluciones $v_i = v_i(\tau), i = 1, \dots, n$ estrictamente crecen respecto a τ . Además:

$$0 \leq v_i(\tau) \leq \frac{-1}{\tau}, i = 1, \dots, n. \quad (2.37)$$

De (2.36) inmediatamente sigue que:

$$v_i(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \tau \rightarrow -\infty, i = 1, \dots, n. \quad (2.38)$$

■

3. JUEGO DE SEGUNDO NIVEL

3.1 ESPECIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Ahora vamos a proponer un nuevo juego, el cual llamaremos juego de segundo nivel, suponiendo que los axiomas **A1**, **A2** y **A3** se cumplen. Los jugadores son los productores $i = 1, \dots, n$, las estrategias para cada productor son sus coeficientes de influencia $v_i \geq 0, i = 1, \dots, n$. El resultado del juego para el jugador i se calcula por medio de la función $\pi_i: R_+^n \rightarrow R$ que esta dada por:

$$\pi_i(v_1, \dots, v_n) = p \cdot q_i - f'_i(q_i), \quad (3.1)$$

donde el precio p y el volumen de producción q_i están tomados del equilibrio exterior (p, q_1, \dots, q_n) del juego de primer nivel (juego original) calculado para los coeficientes de influencia (v_1, \dots, v_n) . Por el Teorema 1 el juego de segundo nivel está correctamente definido.

Cada productor trata de maximizar la función objetivo (3.1), escogiendo sus mejores estrategias $v_i \geq 0$, buscando el equilibrio de Nash. En el equilibrio de Nash cada productor asume que solo él puede cambiar su estrategia y las otras firmas no hacen cambios.

3.2 CONDICIÓN NECESARIA DE PRIMER ORDEN PARA LA EXISTENCIA DEL EQUILIBRIO DE NASH

Por el Teorema 1 sabemos que en el equilibrio exterior del juego de primer nivel el precio p y el volumen de producción q_i dependen continuamente de los parámetros (D, v_1, \dots, v_n) . Por lo que (3.1) podemos reescribir como sigue:

$$\pi_i(v_1, \dots, v_n) = p(D, v_1, \dots, v_n) \cdot q_i(D, v_1, \dots, v_n) - f'_i(q_i(D, v_1, \dots, v_n)) \quad (3.2)$$

Derivando (3.2) respecto a v_i y usando la derivada (2.7) obtenemos la condición necesaria de primer orden para la existencia del equilibrio de Nash en el juego de segundo nivel:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial v_i} \rightarrow \begin{cases} = 0, & \text{si } v_i > 0 \\ \leq 0, & \text{si } v_i = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Donde

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial v_i} = \frac{\partial p}{\partial v_i} q_i + (p - f'_i(q_i)) \left(\frac{-q_i}{v_i + f''_i(q_i)} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} \right] \right).$$

Teorema 4

Si se cumplen los axiomas **A1**, **A2** y **A3** el criterio necesario de primer grado para el juego de segundo nivel coincide con el criterio de consistencia (2.22) del juego de primer nivel (juego original).

Demostración

Mostraremos que para el productor i la estrategia $v_i = 0$ no cumple con la condición necesaria (3.3). De (2.3) $p = v_i q_i + f'_i(q_i)$, entonces cuando $v_i = 0$ el precio $p = f'_i(q_i)$ y de (3.3) como q_i y (2.6) son estrictamente positivos tenemos:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial v_i} = \frac{\partial p}{\partial v_i} q_i > 0. \quad (3.4)$$

Entonces, la estrategia $v_i = 0$ no puede ser óptima para el productor i , por lo que, si el equilibrio de Nash existe, la estrategia óptima $v_i^* > 0$ y la condición necesaria (2.3) puede ser reescrita de la siguiente manera tomando en cuenta que $p - f'_i(q_i) = v_i q_i$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial v_i} = q_i \left[\frac{\partial p}{\partial v_i} + \left(\frac{-q_i}{v_i + f''_i(q_i)} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} \right] \right) (v_i) \right] = 0 \quad (3.5)$$

Simplificando (3.5)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_i}{\partial v_i} &= q_i \left[\frac{\partial p}{\partial v_i} + \left(\frac{-q_i}{v_i + f''_i(q_i)} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} \right] \right) (v_i) \right] \\
&= q_i \left[\frac{-q_i v_i}{v_i + f''_i(q_i)} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{q_i}{(v_i + f''_i(q_i)) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p) \right)} \right] \\
&= q_i \left[\frac{q_i}{v_i + f''_i(q_i)} \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} - (v_i) \left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} \right) \right] \right] \\
&= q_i \left[\frac{q_i}{v_i + f''_i(q_i)} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} \right] \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{v_k + f''_k(q_k)} - G'(p)} - v_i \right] \right] \\
&= \frac{(q_i)^2}{v_i + f''_i(q_i)} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} \right] \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{v_k + f''_k(q_k)} - G'(p)} - v_i \right]
\end{aligned}$$

y tomando en cuenta que:

$$\frac{(q_i)^2}{v_i + f''_i(q_i)} > 0 \quad (3.6)$$

y

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + f''_i(q_i)} - G'(p)} \right] > 0 \quad (3.7)$$

Entonces la condición necesaria (3.3) toma la forma siguiente:

$$\left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{v_k + f''_k(q_k)} - G'(p)} - v_i \right] = 0, i = 1, \dots, n.$$

De esta manera queda demostrado que la condición necesaria (3.3) para la existencia del equilibrio de Nash en el juego de segundo nivel nos lleva al criterio de consistencia (2.22) del juego de primer nivel (juego original).

■

3.3 CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DEL EQUILIBRIO DE NASH

En este trabajo vamos a considerar tres casos particulares:

CASO 1

Vamos a considerar la demanda que sea una función lineal y las funciones de los gastos son cuadráticas.

Teorema 5

Sea cumplido el axioma **A3**, la función de la demanda es lineal $G(p) = -Kp + T$, con $K > 0, T > 0$ y las funciones de los gastos son cuadráticas, es decir, $f_i(q_i) = \frac{1}{2} a_i q_i^2 + b_i q_i$ con $a_i > 0, b_i > 0, i = 1, \dots, n$. Entonces, el criterio de consistencia para el juego de primer nivel (2.22) es la condición necesaria y suficiente para la existencia del equilibrio de Nash en el juego de segundo nivel.

Demostración

En el teorema 4, está demostrado que el criterio de consistencia es necesario, por lo que vamos a demostrar que sea suficiente.

Sea el vector de las estrategias $v^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_i^*, \dots, v_n^*)$ que satisface la condición (2.22), entonces, para cada jugador $s = 1, \dots, n$ se cumple

$$\left. \frac{\partial \pi_s(v_s)}{\partial v_s} \right|_{v^*} = 0.$$

Es evidente, que todas las estrategias $v_i^*, i = 1, \dots, n$ son positivas. Por consiguiente, es evidente que existe $\bar{\Delta} > 0$ suficientemente pequeño tal que para todos $\Delta, 0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$ y para cada $i = 1, \dots, n$ se cumple $v^* - \Delta \geq 0$. Para cada jugador $s = 1, \dots, n$ consideramos los vectores $\eta^{(s)}$ y $\delta^{(s)}$ cuyos componentes son los siguientes:

$$\eta^{(s)} = (\eta_1^{(s)}, \dots, \eta_n^{(s)}), \quad \text{tal que} \begin{cases} \eta_s^{(s)} = v_s^*, & \text{si } s \neq i \\ \eta_s^{(s)} = v_s^* + \Delta, & \text{si } s = i \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\delta^{(s)} = (\delta_1^{(s)}, \dots, \delta_n^{(s)}), \quad \text{tal que} \begin{cases} \delta_s^{(s)} = v_s^*, & \text{si } s \neq i \\ \delta_s^{(s)} = v_s^* - \Delta, & \text{si } s = i \end{cases} \quad (3.9)$$

Es fácil ver que para todos $\Delta, 0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$

$$\left. \frac{\partial \pi_i}{\partial v_s} \right|_{\eta^{(s)}} = \left[\frac{1}{\sum_{k=1, k \neq s}^n \frac{1}{v_k + a_k} + K} - v_s^* - \Delta \right] \leq 0$$

Y

$$\left. \frac{\partial \pi_i}{\partial v_s} \right|_{\delta^{(s)}} = \left[\frac{1}{\sum_{k=1, k \neq s}^n \frac{1}{v_k + a_k} + K} - v_s^* + \Delta \right] \geq 0$$

Lo que significa que el vector de las estrategias $v^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_i^*, \dots, v_n^*)$ es un equilibrio de Nash y el equilibrio de consistencia (2.22) para el juego de primer nivel es la condición necesaria y suficiente para el equilibrio de Nash en el juego de segundo nivel.

CASO 2

Se va a considerar que la función de la demanda satisface el axioma **A1** y además $G'(p)$ es no creciente mientras que las funciones de los gastos son cuadráticas.

Teorema 6

Sea cumplidos los axiomas **A1** y **A3**, además $G'(p)$ es no creciente y las funciones de los gastos son cuadráticas, es decir, $f_i(q_i) = \frac{1}{2} a_i q_i^2 + b_i q_i$ con $a_i > 0, b_i > 0, i = 1, \dots, n$. Entonces, el criterio de consistencia para el juego de primer nivel (2.22) es la condición necesaria y suficiente para la existencia del equilibrio de Nash en el juego de segundo nivel.

Demostración

Por el Teorema 4 solo basta con demostrar que el criterio de consistencia sea suficiente. Sea el equilibrio interior en el juego de primer nivel (juego original) dado por el vector $(p^*, v_1^*, \dots, v_n^*, q_1^*, \dots, q_n^*), i = 1, \dots, n$ por lo que se cumplen las condiciones de consistencia (2.22)

$$v_s^* = \frac{1}{\sum_{i=1, i \neq s}^n \frac{1}{v_i^* + a_i} - G'(p^*)}, s = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

De (3.10) es obvio que todas las estrategias $v_s^* > 0, s = 1, \dots, n$. Al igual que el teorema 5, es evidente, que existe $\bar{\Delta} > 0$ lo suficientemente pequeña tal que para todos $\Delta, 0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$ y para cada $i = 1, \dots, n$ se cumple $v_i^* - \Delta \geq 0$.

Para cualquier jugador $s = 1, \dots, n$ se cumple

$$\left. \frac{\partial \pi_s(v_s)}{\partial v_s} \right|_{v^*} = 0.$$

Y consideramos los vectores $\eta^{(s)}$ y $\delta^{(s)}$ definidos por (3.8) y (3.9), es necesario demostrar que

$$\left. \frac{\partial \pi_s(v_s)}{\partial v_s} \right|_{\eta^{(s)}} \leq 0 \quad (3.11)$$

Y

$$\left. \frac{\partial \pi_s(v_s)}{\partial v_s} \right|_{\delta^{(s)}} \geq 0 \quad (3.12)$$

Para demostrar (3.11) por (3.6) y (3.7) es suficiente mostrar que para todas Δ , $0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$

$$\frac{1}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{v_k + a_i}} - G'(p(\bar{v})) - (v_s^* + \Delta) \leq 0 \quad (3.13)$$

Como todos $v_s^* > 0, s = 1, \dots, n$, de (3.10) podemos despejar como sigue

$$\sum_{i \neq s}^n \frac{1}{v_i^* + a_i} - G'(p^*) = \frac{1}{v_s^*}$$

y de aquí

$$\sum_{i \neq s}^n \frac{1}{v_i^* + a_i} = \frac{1}{v_s^*} + G'(p^*) = \frac{1 + v_s^* G'(p^*)}{v_s^*} > 0, s = 1, \dots, n \quad (3.14)$$

Reescribiendo (3.13) utilizando (3.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1 + v_s^* G'(p^*)}{v_s^*} - G'(p(\bar{v}))} - (v_s^* + \Delta) &= \frac{v_s^*}{1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\bar{v}))} - (v_s^* + \Delta) \\ &= \frac{v_s^{*2} [G'(p(\bar{v})) - G'(p^*)] - \Delta + \Delta v_s^* [G'(p(\bar{v})) - G'(p^*)]}{1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\bar{v}))} \\ &= \frac{v_s^* [G'(p(\bar{v})) - G'(p^*)] (v_s^* + \Delta) - \Delta}{1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\bar{v}))} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por (3.15) observamos que $1 + v_s^* G'(p^*) > 0$ y además $-v_s^* G'(p(\eta^{(s)})) > 0$, por lo que el denominador de (3.15) es siempre positivo para cualquier $0 < \Delta < \bar{\Delta}$.

$$1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\eta^{(s)})) > 0, \quad (3.16)$$

por lo que el signo de (3.15) depende de su numerador. Ya que $G'(p)$ es no decreciente y $p(\eta^{(s)}) \geq p^*$ por (2.6), entonces

$$G'(p(\eta^{(s)})) - G'(p^*) \leq 0 \quad (3.17)$$

y por consiguiente:

$$v_s^* [G'(p(\eta^{(s)})) - G'(p^*)] (v_s^* + \Delta) - \Delta \leq 0 \quad (3.18)$$

Es decir, para todos Δ , $0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$ se cumple

$$\left. \frac{\partial \pi_s(v_s)}{\partial v_s} \right|_{\eta^{(s)}} \leq 0.$$

Por (3.6) y (3.7) para demostrar (3.12) basta con mostrar que para todas Δ , $0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$ se cumple con

$$\frac{1}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{v_k + a_i}} - (v_s^* - \Delta) \geq 0. \quad (3.19)$$

Con el resultado obtenido en (3.14) reescribimos el lado izquierdo de (3.19)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1 + v_s^* G'(p^*)}{1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\underline{v}))} - G'(p(\underline{v}))} - (v_s^* - \Delta) &= \frac{v_s^*}{1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\underline{v}))} - (v_s^* - \Delta) \\ &= \frac{v_s^{*2} [G'(p(\underline{v})) - G'(p^*)] + \Delta - \Delta v_s^* [G'(p(\underline{v})) - G'(p^*)]}{1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\bar{v}))} \\ &= \frac{v_s^* [G'(p(\underline{v})) - G'(p^*)] (v_s^* - \Delta) + \Delta}{1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\bar{v}))} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por (3.15) sabemos que $1 + v_s^* G'(p^*) > 0$ y además $-v_s^* G'(p(\delta^{(s)})) > 0$, por lo que el denominador de (3.20) es siempre positivo para cualquier Δ , $0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$

$$1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\delta^{(s)})) \quad (3.21)$$

Por lo que el signo de (3.20) depende de su numerador. Ya que $G'(p)$ es no decreciente y $p(\delta^{(s)}) \leq p^*$ por (2.6), entonces

$$G'(p(\delta^{(s)})) - G'(p^*) \geq 0, \quad (3.22)$$

y por ende

$$v_s^* [G'(p(\delta^{(s)})) - G'(p^*)] (v_s^* - \Delta) + \Delta \geq 0. \quad (3.23)$$

Es decir, para todos Δ , $0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$ se cumple

$$\left. \frac{\partial \pi_s(v_s)}{\partial v_s} \right|_{\delta^{(s)}} \geq 0$$

Lo que significa que el vector de las estrategias $v^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_i^*, \dots, v_n^*)$ es un equilibrio de Nash y el equilibrio de consistencia (2.22) para el juego de primer nivel es la condición necesaria y suficiente para el equilibrio de Nash para el juego de segundo nivel. ■

CASO 3

Se considera que la función de la demanda satisface el axioma **A1** y su derivada $G'(p)$ satisface a una condición de Lipschitz y las funciones de los gastos son cuadráticas.

Teorema 7

Sean cumplidos los axioma **A1** y **A3**, las funciones de los gastos son cuadráticas, es decir, $f_i(q_i) = \frac{1}{2} a_i q_i^2 + b_i q_i$ con $a_i > 0, b_i > 0, i = 1, \dots, n$ y para todo $p_1 > 0$ y $p_2 > 0$ se cumple la condición de Lipschitz

$$|G'(p_1) - G'(p_2)| \leq L |p_1 - p_2|, \quad (3.24)$$

Donde

$$L = \frac{1}{2\beta^2 G(p_0)} \quad \beta = \max\{a_1, \dots, a_n\}.$$

Entonces, el criterio de consistencia para el juego de primer nivel (2.22) es la condición necesaria y suficiente para la existencia del equilibrio de Nash en el juego de segundo nivel.

Demostración

Por el Teorema 4 solo basta con demostrar que el criterio de consistencia sea suficiente.

Sea el equilibrio interior en el juego de primer nivel (juego original) dado por el vector $(p^*, v_1^*, \dots, v_n^*, q_1^*, \dots, q_n^*)$, $i = 1, \dots, n$ por lo que se cumplen las condiciones de consistencia (2.22) y toman la siguiente forma

$$v_s^* = \frac{1}{\sum_{i \neq s} \frac{1}{v_i^* + a_i} - G'(p^*)}, s = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

De (3.25) es obvio que todas las estrategias $v_s^* > 0$, $s = 1, \dots, n$. Al igual que el Teorema 6, es evidente que existe $\bar{\Delta} > 0$ lo suficientemente pequeña tal que para todas Δ , $0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$ y para cada $i = 1, \dots, n$ se cumple $v_i^* - \Delta \geq 0$.

Para cualquier jugador $s = 1, \dots, n$ se cumple:

$$\left. \frac{\partial \pi_s(v_s)}{\partial v_s} \right|_{v^*} = 0.$$

Demostraremos que para todos Δ , $0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$

$$\left. \frac{\partial \pi_s(v_s)}{\partial v_s} \right|_{\eta^{(s)}} \leq 0 \quad (3.26)$$

Y

$$\left. \frac{\partial \pi_s(v_s)}{\partial v_s} \right|_{\delta^{(s)}} \geq 0. \quad (3.27)$$

Donde los vectores $\eta^{(s)}$ y $\delta^{(s)}$ están definidos en (3.8) y (3.9) respectivamente. Para demostrar (3.26) por (3.6) y (3.7) es suficiente mostrar que para todas Δ , $0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$

$$\frac{1}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{v_k + a_i} - G'(p(\eta^{(s)}))} - (v_s^* + \Delta) \leq 0. \quad (3.28)$$

En este caso hacemos la siguiente denotación $p^* = p(v^*)$. Rescribiendo (3.28) utilizando (3.14)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 + v_s^* G'(p^*)} - (v_s^* + \Delta) &= \frac{v_s^*}{1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\bar{v}))} - (v_s^* + \Delta) \\
 &= \frac{v_s^{*2} [G'(p(\bar{v})) - G'(p^*)] - \Delta + \Delta v_s^* [G'(p(\bar{v})) - G'(p^*)]}{1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\bar{v}))} \\
 &= \frac{v_s^* [G'(p(\bar{v})) - G'(p^*)] (v_s^* + \Delta) - \Delta}{1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\bar{v}))}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Similarmenete a los pasos de la demostración del teorema 6, el denominador de (3.29) es estrictamente positivo para cualquier Δ , $0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$, por lo que el signo de (3.29) depende de su numerador y de esta manera para demostrar (3.28) es suficiente mostrar que

$$v_s^* [G'(p(\eta^{(s)})) - G'(p^*)] (v_s^* + \Delta) \leq \Delta. \tag{3.30}$$

En el Teorema 3 se demostró que para cualquier $\tau \in (-\infty, 0]$, el sistema (2.29) tiene única solución $v_k = v_k(\tau)$, $k = 1, \dots, n$ y por los pasos de la demostración del Teorema 2 tenemos demostrado que esta solución al ser única debe estar dentro del cubo $M = [0, \frac{\beta}{n-2}]^n$, donde $\beta = \max\{a_1, \dots, a_n\}$. En este trabajo consideramos $n \geq 3$, por lo que resulta evidente que se cumplen las siguientes relaciones

$$0 \leq v_s \leq \frac{\beta}{n-2} \leq \beta, \quad 0 \leq \Delta \leq \beta, \quad 0 \leq v_s^* + \Delta \leq 2\beta, \quad 0 \leq v_s^* - \Delta \leq \beta. \tag{3.31}$$

Por (3.24) se cumple con

$$|G'(p(\bar{v})) - G'(p^*)| \leq \frac{1}{2\beta^2 G(p_0)} |p(\bar{v}) - p^*| \tag{3.32}$$

Del teorema del valor medio, tenemos que

$$p(\eta^{(s)}) - p^* = \frac{\partial p}{\partial v_s} \Big|_{\xi} \Delta$$

Donde $\xi = \lambda v^* + (1 - \lambda)\eta^{(s)}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ por lo que podemos expresar (3.32) de la siguiente manera:

$$|G'(p(\eta^{(s)})) - G'(p^*)| \leq \frac{1}{2\beta^2 G(p_0)} \left| \frac{\partial p}{\partial v_s} \right|_{\xi} \Delta \quad (3.33)$$

Usando (2.6) obtenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial p}{\partial v_s} \right|_{\xi} &= \frac{\frac{q_s}{v_s + a_s}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{v_j + a_j} - G'(p)} \leq \frac{\frac{q_s}{v_s + a_s}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{v_j + a_j}} \\ &= \frac{\frac{q_s}{v_s + a_s}}{\frac{q_s}{(v_s + a_s) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{v_j + a_j} \right)}} = \frac{\frac{q_s}{v_s + a_s}}{\sum_{j=1}^n \frac{v_s + a_s}{v_j + a_j} + 1} \\ &= \frac{\frac{q_s}{v_s + a_s}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{v_j + a_j} + \frac{1}{v_s + a_s}} \leq \frac{\frac{q_s}{v_s + a_s}}{\frac{1}{v_s + a_s}} \leq q_s \leq G(p_0) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Entonces por (3.34) y usando (3.33) sigue

$$|G'(p(\bar{v})) - G'(p^*)| \leq \frac{1}{2\beta^2} \Delta$$

Por lo que para cualquier Δ , $0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$ queda demostrado (3.30).

Por (3.6) y (3.7) para demostrar (3.27) basta mostrar que para todas Δ , $0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{v_k + a_k} - G'(p(\delta^{(s)}))} - (v_s^* - \Delta) \geq 0 \quad (3.35)$$

Al igual que el caso de arriba reescribimos (3.35) utilizando (3.14)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1 + v_s^* G'(p^*)}{v_s^*} - G'(p(\bar{v}))} - (v_s^* - \Delta) &= \frac{v_s^*}{1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\bar{v}))} - (v_s^* - \Delta) \\ &= \frac{v_s^{*2} [G'(p(\bar{v})) - G'(p^*)] - \Delta + \Delta v_s^* [G'(p(\bar{v})) - G'(p^*)]}{1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\bar{v}))} \\ &= \frac{v_s^* [G'(p(\underline{v})) - G'(p^*)] (v_s^* - \Delta) + \Delta}{1 + v_s^* G'(p^*) - v_s^* G'(p(\underline{v}))} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Similarmente a los pasos de la demostración del Teorema 6, el denominador de (3.36) es estrictamente positivo para cualquier Δ , $0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$, por lo que el signo de (3.36) depende de su numerador, por lo que para demostrar (3.35) basta con mostrar que

$$v_s^* \left[G' \left(p(\delta^{(s)}) \right) - G'(p^*) \right] (v_s^* - \Delta) + \Delta \geq 0. \quad (3.37)$$

Por (3.31) y (3.34) sigue

$$\left| v_s^* \left[G' \left(p(\delta^{(s)}) \right) - G'(p^*) \right] (v_s^* - \Delta) \right| \leq \beta^2 \frac{1}{2\beta^2 G(p_0)} |p(\delta^{(s)}) - p^*|. \quad (3.38)$$

por (2.6) y del teorema del valor medio tenemos que:

$$|p(\delta^{(s)}) - p^*| = \left. \frac{\partial p}{\partial v_s} \right|_{\xi} \Delta$$

donde $\xi = \lambda v^* + (1 - \lambda)\delta^{(s)}, 0 \leq \lambda \leq 1$ y por (3.37) reescribimos (3.38) de la siguiente manera

$$\left| v_s^* \left[G' \left(p(\underline{v}) \right) - G'(p^*) \right] (v_s^* - \Delta) \right| \leq \frac{\Delta}{2}$$

Por lo que para cualquier $\Delta, 0 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}$ queda demostrado (3.37).

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

La experimentación realizada en este trabajo fue tomada como referencia al ejemplo numérico de Liu [10]. En [10] se consideran 6 firmas privadas productoras de un mismo bien homogéneo y la función de la demanda está dada de la siguiente forma:

$$p(G, D) = 50 - 0.02(G + D) = 50 - 0.02 \sum_{i=1}^6 q_i$$

Las funciones de los gastos $f_i(q_i), i = 1, \dots, 6$ son cuadráticas, es decir, $f_i(q_i) = \frac{1}{2} a_i q_i^2 + b_i q_i$ y los valores de a_i y b_i se pueden apreciar en la Tabla 4.1

Agente	b_i	a_i
1	2.0	0.02
2	1.75	0.0175
3	3.0	0.025
4	3.0	0.025
5	1.0	0.0625
6	3.25	0.00834

Tabla 4.1: Valores para las constantes a_i y b_i

Para este trabajo se realizaron tres experimentos:

En el **EXPERIMENTO 1** se encontró el equilibrio de Nash para el juego de segundo nivel. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.2

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	0.19193	0.19552	0.18677	0.18677	0.17395	0.22323
Niveles de producción	353.40	405.12	258.43	258.43	142.89	560.18
Beneficio	1730.39	2080.53	1085.41	1085.41	709.46	2713.77
Precio	10.43039					
Producción total	1978.719					

Tabla 4.2: Valores para el equilibrio de Nash en el juego de segundo nivel

En las tablas 4.3 – 4.8 presentamos de una forma visual que los resultados obtenidos en la Tabla 4.2 forman un equilibrio de Nash. Para eso, cada agente $i, i=1,2,3,4,5,6$ hace un cambio en su estrategia (coeficiente de influencia) mientras que los demás agentes siguen utilizando su estrategia obtenida en la Tabla 4.2 y como resultado podemos ver que el beneficio para el agente i no aumenta comparándolo con la Tabla 4.2

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	0.1919321	0.1955282	0.1867735	0.1867735	0.1739529	0.2232344
	.39165					
Beneficio	1730.393	2161.802	1134.864	1134.864	734.8127	2842.897
	1701.477					

Tabla 4.3: El beneficio del agente $i = 1$ se ve afectado al modificar su coeficiente de influencia.

En la Tabla 4.3 se observa que el agente $i = 1$ hace un incremento a su coeficiente de influencia de .1919 a .3916 y sus rivales no mueven sus estrategias, esto provoca un decremento a su beneficio y por ende los resultados de este cambio no pueden ser considerados un equilibrio de Nash.

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	0.1919321	0.1955282	0.1867735	0.1867735	0.1739529	0.2232344
		0.1200				
Beneficio	1687.625	2080.534	1055.139	1055.139	693.7939	2636.514
		2070.215				

Tabla 4.4: El beneficio del agente $i = 2$ se ve afectado al modificar su coeficiente de influencia

En la Tabla 4.4 se observa que el agente $i = 2$ hace un ligero decremento a su coeficiente de influencia y sus rivales no mueven sus estrategias, esto provoca un decremento al beneficio del agente $i = 2$ y por ende los resultados de este cambio no pueden ser considerados un equilibrio de Nash.

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	0.1919321	0.1955282	0.1867735 0.43615	0.1867735	0.1739529	0.2232344
Beneficio	1782.08	2140.985	1085.416 1065.061	1122.143	728.2886	2809.949

Tabla 4.5: El beneficio del agente $i = 3$ se ve afectado al modificar su coeficiente de influencia.

En la Tabla 4.5 se observa que el $i = 3$ aumenta considerablemente su coeficiente de influencia y sus rivales no mueven sus estrategias, provocando un decremento a su beneficio y por ende, los resultados de este cambio no pueden ser considerados un equilibrio de Nash.

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	0.1919321	0.1955282	0.1867735	0.1867735 0.06157	0.1739529	0.2232344
Beneficio	1695.707	2084.128	1060.658	1085.416 1076.512	696.6435	2650.791

Tabla 4.6: El beneficio del agente $i = 4$ se ve afectado al modificar su coeficiente de influencia.

En la Tabla 4.6 se observa que el agente $i = 4$ disminuye considerablemente su coeficiente de influencia y sus rivales no mueven sus estrategias, esto provoca un decremento mínimo a su beneficio, pero sigue siendo menor este beneficio al que se obtuvo en la tabla 4.2 por lo que este cambio no puede ser considerado un equilibrio de Nash.

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	0.1919321	0.1955282	0.1867735	0.1867735	0.1739529 0.1487	0.2232344
Beneficio	1728.061	2077.811	1083.757	1083.757	709.464 709.7216	2710.925

Tabla 4.7: El beneficio del agente $i = 5$ se ve afectado al modificar su coeficiente de influencia.

En la Tabla 4.7, se observa que el agente $i = 5$ hace un ligero decremento a su coeficiente de influencia y sus rivales no mueven sus estrategias, provocando un decremento mínimo a su beneficio, pero aún menor al obtenido en la tabla 4.2 por lo que este cambio no puede ser considerado un equilibrio de Nash.

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	0.1919321	0.1955282	0.1867735	0.1867735	0.1739529	0.2232344 0.4730500
Beneficio	1967.318	2357.058	1254.656	1254.656	795.8917	2713.772 2575.83

Tabla 4.8: El beneficio del agente $i = 6$ se ve afectado al modificar su coeficiente de influencia.

En la Tabla 4.8 se observa que el agente $i = 6$ aumenta su coeficiente de influencia y sus rivales no mueven sus estrategias, esto provoca pérdida a su beneficio, pero este cambio no puede ser considerado un equilibrio de Nash.

EL **EXPERIMENTO 2** nace a partir de la importancia y popularidad que tiene dentro de la teoría de juegos la *conjetura de Cournot*. En este experimento se encontró el precio, los volúmenes de producción y los beneficios de cada agente en el caso en el que cada uno de ellos elige la conjetura de Cournot como su estrategia.

Los resultados obtenidos son mostrados en la Tabla 4.9

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
Niveles de producción	319.1463	347.1191	261.4122	261.4122	166.7851	406.4691
Beneficio	3051.567	3459.329	2218.204	2218.204	1424.526	3986.707
Precio	14.75312					
Producción total	1762.344					

Tabla 4.9: Valores bajo las conjeturas de Cournot para el juego de segundo nivel.

Es fácil ver que las conjeturas de Cournot no forman el equilibrio de Nash en el juego de segundo nivel. Para mostrar esto, cambiaremos para cada agente $i, i = 1, \dots, 6$, la conjetura de Cournot por su conjetura obtenida en la Tabla 4.2, los resultados de tal cambio los mostramos en las Tablas 4.10 – 4.15.

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	0.1919321					
Beneficio	3051.567	2935.503	1848.212	1848.212	1220.125	3307.954
	3349.622					

Tabla 4.10: Las conjeturas de Cournot no forman un equilibrio de Nash para el agente $i = 1$

De la Tabla 4.10, se puede apreciar que las conjeturas de Cournot no forma un equilibrio de Nash debido a que el beneficio obtenido para el agente $i = 1$ es mayor con el coeficiente de influencia v_1 obtenido en la Tabla 4.2

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
		0.1955282				
Beneficio	2496.628	3459.329	1782.361	1782.361	1183.431	3187.306
		3836.047				

Tabla 4.11: Las conjeturas de Cournot no forman un equilibrio de Nash para el agente $i = 2$

Similarmente de la Tabla 4.11 se puede apreciar que el beneficio obtenido para el agente $i = 2$ es mayor con el coeficiente de influencia v_2 obtenido en la Tabla 4.2 que con la conjetura de Cournot.

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
			0.1867735			
Beneficio	2718.664	3088.993	2218.204	1956.271	1280.118	3506.04
			2395.311			

Tabla 4.12: Las conjeturas de Cournot no forman un equilibrio de Nash y Cournot para el agente $i = 3$

De la Tabla 4.12 se puede apreciar que la conjetura de Cournot no forma un equilibrio de Nash debido a que el beneficio obtenido para el agente $i = 3$ es mayor que el coeficiente de influencia v_3 obtenido en la Tabla 4.2

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
				0.1867735		
Beneficio	2718.664	3088.993	1956.271	2218.204	1280.118	3506.04
				2395.311		

Tabla 4.13: Las conjeturas de Cournot no forman un equilibrio de Nash para el agente $i = 4$

De la Tabla 4.13, se puede apreciar que el beneficio obtenido para el agente $i = 4$ es mayor con el coeficiente de influencia v_4 obtenido en la Tabla 4.2 que con la conjetura de Cournot.

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
					0.1739529	
Beneficio	2951.046	3347.549	2138.974	2138.974	1424.526	3841.244
					1462.858	

Tabla 4.14: Las conjeturas de Cournot no forman un equilibrio de Nash para el agente $i = 5$

De la Tabla 4.14 se puede apreciar que la conjetura de Cournot no forma un equilibrio de Nash debido a que el beneficio obtenido para el agente $i = 5$ es mayor con el coeficiente de influencia v_5 obtenido en la Tabla 4.2

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
						0.2232344
Beneficio	2137.143	2440.91	1502.398	1502.398	1026.138	3986.707
						4675.774

Tabla 4.15: Las conjeturas de Cournot no forman un equilibrio de Nash para el agente $i = 6$

De la Tabla 4.15, se puede apreciar que el beneficio obtenido para el agente $i = 6$ es mayor con el coeficiente de influencia v_6 obtenido en la Tabla 4.2 que con la conjetura de Cournot.

Observando los resultados obtenidos en las Tablas mostradas arriba podemos concluir dos cosas: el equilibrio de Nash es único y no hay manera que las conjeturas de Cournot formen un equilibrio de Nash para el juego de segundo nivel.

Para nuestro **EXPERIMENTO 3** todos los jugadores aplican la conjetura de Cournot excepto uno. Suponemos que un jugador, por ejemplo, $i=1$ conoce nuestro concepto de CVE y decide aprovechar su conocimiento sabiendo que todos sus rivales lo desconocen, y que seguirán aplicando la conjetura de Cournot, es decir, el jugador $i=1$ elige su estrategia v_1 calculada por la siguiente formula.

$$v_1 = \frac{1}{\sum_{i=2}^6 \frac{1}{0.02 + a_i} + 50}, \quad (4.1)$$

Donde $v_i = 0.02, i = 2, 3, 4, 5, 6$ ($v_i = 0.002, i = 2, \dots, 6$ en nuestro modelo corresponden a las conjeturas de Cournot). El resultado de este experimento se muestra en la Tabla 4.16

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	0.296704					
Beneficio	3051.567	3030.289	1914.906	1914.906	1257.184	3430.196
	3366.232					

Tabla 4.16: Comparación del concepto de CVE contra Cournot para el agente $i = 1$

De la Tabla 4.16, podemos apreciar que el beneficio del agente 1 incrementa al usar el concepto de CVE en vez de la conjetura de Cournot, por lo que suponemos que ahora que el jugador $i = 2$ aplica el concepto CVE y sus rivales lo desconocen, es decir, el jugador $i = 2$ elige su estrategia v_2 calculada por la siguiente formula:

$$v_2 = \frac{1}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^6 \frac{1}{0.02 + a_i} + 50}, \quad (4.2)$$

Donde $v_i = 0.02, i = 1, 3, 4, 5, 6$ ($v_i = 0.002, i = 2, \dots, 6$ en nuestro modelo corresponden a las conjeturas de Cournot). El resultado de este experimento se muestra en la Tabla 4.17

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
		0.2996677				
Beneficio	2598.457	3459.329	1862.033	1862.033	1227.813	3333.281
		3858.249				

Tabla 4.17: Comparación del concepto CVE contra Cournot para el agente $i = 2$

Al igual que para el agente $i = 1$ se puede apreciar en la Tabla 4.17 que bajo el concepto de CVE el agente $i = 1$ obtiene un mejor beneficio que cuando usa la conjetura de Cournot. Este mismo experimento se realizó para cada agente y los resultados se muestran en las tablas 4.18 – 4.21

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
			0.2918925			
Beneficio	2776.999	3153.918	2218.204	2002.071	1305.468	3590.037
			2404.166			

Tabla 4.18: Comparación del concepto CVE contra Cournot para el agente $i = 3$

De la Tabla 4.18 podemos apreciar que el beneficio del agente $i = 3$ incrementa al usar el concepto de CVE en lugar de la conjetura de Cournot.

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
				0.2918925		
Beneficio	2776.999	3153.918	2002.071	2218.204	1305.468	3590.037
				2404.166		

Tabla 4.19: Comparación del concepto CVE contra Cournot para el agente $i = 4$

De la Tabla 4.19, podemos apreciar que el beneficio del agente $i = 4$ incrementa al usar el concepto de CVE en lugar de la conjetura de Cournot.

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
					0.2756386	
Beneficio	2965.782	3363.937	2150.582	2150.582	1424.526	3862.551
					1464.038	

Tabla 4.20: Comparación del concepto CVE contra Cournot para el agente $i = 5$

De la Tabla 4.20 podemos apreciar que el beneficio del agente $i = 5$ incrementa al usar el concepto de CVE en lugar de la conjetura de Cournot.

Agente	1	2	3	4	5	6
Coeficiente de influencia	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
						0.3159911
Beneficio	2304.935	2628.084	1632.804	1632.804	1099.681	3986.707
						4720.017

Tabla 4.21: Comparación del concepto CVE contra Cournot para el agente $i = 6$

De la Tabla 4.21, podemos apreciar que el beneficio del agente $i = 6$ incrementa al usar el concepto de CVE en lugar de la conjetura de Cournot.

5 CONCLUSIONES E INVESTIGACIÓN A FUTURO

En este trabajo se continuó la investigación de las propiedades de las conjeturas consistentes para el mercado de oligopolio clásico de un bien homogéneo.

En el Capítulo 2 están mostrados los resultados teóricos relacionados con la existencia del equilibrio consistente para el mercado de oligopolio clásico (el juego original o de primer nivel) y que fueron necesarios para formular el Capítulo 3.

Dentro del Capítulo 3 está definido un juego de segundo nivel con los mismos jugadores, los cuales consideramos en el Capítulo 2, pero siendo sus coeficiente de influencia las estrategias de los jugadores. Demostramos las condiciones necesarias y suficientes de primer orden para la existencia de equilibrio de Nash para el juego de segundo nivel y de tal manera se llegó a un hecho notable, que nos permitió buscar el equilibrio consistente no mediante la aplicación del procedimiento de verificación del juego original, sino de otra manera. Demostramos que las conjeturas consistentes en el juego de primer nivel (el juego original) aseguran las estrategias óptimas de Nash en el juego de segundo nivel.

Para la experimentación numérica del Capítulo 4 se tomó como referencia el ejemplo numérico del trabajo de Liu [10]. El resultado más importante de esta parte de mi tesis consiste en lo que de manera visible se mostró, que en general las conjeturas consistentes son distintas a las conjeturas de Cournot y mostramos que la aplicación de los resultados teóricos obtenidos dentro de mi tesis no tiene problemas algorítmicos.

Los resultados obtenidos en mi tesis me motivan a seguir trabajando bajo este concepto. Un trabajo a futuro sería extender los resultados teóricos para el caso de duopolio clásico que no está considerado dentro de mi tesis, y la aplicación de los resultados obtenidos para los problemas reales, proponiendo los modelos para su solución.

Referencias

1. **Bowley AL.** The mathematical groundwork of economics. Oxford University Press: Oxford, 1924.
2. **Frisch R.** Monopole, polypole – La notion de forcé en économie. Nation-alkonomisk Tidsskrift 1933, 71; 241 – 259 (reprinted: Monopoly, polypoly: The concept of forcé in the economy. Internacional Economic Papers 1951; 1; 23 – 36.)
3. **William C. Merrill, Norman Schneider.** Government firms in oligopoly industries: A Short-Run Analysis. The Quarterly Journal of Economics. Vol. 80, No. 3 (Aug., 1966), pp. 400-412.
4. **Richard G. Harris, Elmer G. Wiens.** Government Enterprise: An instrument for the internal regulation of industry. The Canadian Journal of Economics. Vol. 13, No. 1 (feb., 1980), pp. 125-132.
5. **Vladimir A. Bulavsky, Vyacheslav V. Kalashnikov.** One-Parametric Method to Study an Equilibrium. Economics and Mathematical Methods. 1994. Vol. 30, No. 4, (in russian)
6. **Vladimir A. Bulavsky, Vyacheslav V. Kalashnikov.** Equilibrium in Generalized Cournot and Stackelber Models. Economics and Mathematical Methods. 1995. Vol. 35, No. 3, (in russian).
7. **Vladimir A. Bulavsky.** An Imagined experiment in the framework of the generalized Cournot model. Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody). 1996. 32. Pp. 128-137.
8. **Vladimir A. Bulavsky.** Structure of demand and equilibrium in a model of oligopoly. Economics and Mathematical Methods. 1997. Vol. 33, pp. 112-124, (in russian).
9. **Isac G., Vladimir A. Bulavsky, Vyacheslav V. Kalashnikov.** Complementarity, Equilibrium, Efficiency and Economics. Kluwer Academic Publishers, Dor-drecht; 2002.
10. **Youfei Liu, Y.X. Ni, Felix F. Wu, Bin Cai.** Existence and uniqueness of consistent conjectural variation equilibrium in electricity markets. International Journal of Electrical Power and Energy Systems 29 (2007) 455-461.
11. **Vyacheslav V. Kalashnikov, Vladimir A. Bulavsky, Nataliya I. Kalashnykova, Felipe J. Castillo Pérez.** Mixed Oligopoly with Consistent Conjectures. European Journal of Operational Research. 2011, Vol. 210, Issue 3, pp. 729-735; ISSN 0377-2217.
12. **Diego de Jesús Hernández Rodríguez.** Equilibrios con variaciones conjeturadas en un oligopolio mixto de estructura especial. 2015.
13. **Carlos Ernesto Mitsuo Nakashima Villarreal.** Equilibrios con variaciones conjeturadas en modelo del mercado de oligopolio mixto con una compañía que considera su ganancia como combinación convexa de la ganancia laboral y la ganancia privada. 2014.