Introducción al álgebra, geometría y trigonometría

Con aplicaciones a ingeniería petrolera y ciencias

Manuel Sandoval Martínez, Maricela García Ávalos
Gladys del Carmen Velázquez López

Acerca de los autores.

Dr. Manuel Sandoval Martínez. Profesor de Tiempo Completo en la Carrera de Ingeniería Petrolera de la Universidad Politécnica del Golfo de México. Es licenciado en Física, cuenta con una Maestría en Ciencias en Matemáticas Aplicadas. Obtuvo el Doctorado en Ciencias en Física Educativa en el Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

M.C. Maricela García Ávalos. Profesora de Tiempo Completo en la Carrera de Ingeniería Petrolera de la Universidad Politécnica del Golfo de México. Es licenciada en Matemáticas, cuenta con una Maestría en Matemáticas Aplicadas en la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

M.C. Gladys del Carmen Velázquez López. Profesora de Tiempo Completo en la Carrera de Ingeniería Petrolera de la Universidad Politécnica del Golfo de México. Es licenciada en Matemáticas, cuenta con una Maestría en Matemáticas Aplicadas en la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Resumen

En la actualidad la enseñanza de las ciencias ha tenido una evolución muy interesante y que permite, a los profesores, encontrar herramientas que faciliten su labor cotidiana. Una de las áreas más complicadas tanto de enseñanza como de aprendizaje es el álgebra elemental, dentro de la cual los estudiantes se enfrentan a ejercicios mayoritariamente abstractos y es causa de frustraciones tanto en alumnos como en profesores debido a que ambas partes quedan insatisfechas con su respectivo desempeño.

Si bien existen diversas metodologías para la enseñanza de las ciencias, en este libro se hace uso de *representaciones geométricas,* el *algoritmo de Rudnick&Krulik* y el *aprendizaje basado en problemas contextualizados* para la enseñanza de algunos temas importantes del álgebra, la geometría plana y las funciones trigonométricas.

Palabras claves

Enseñanza de las matemáticas, representaciones geométricas, problemas contextualizados, algoritmo de Rudnick&Krulik, trabajo en equipo, enseñanza no tradicional, desarrollo de habilidades matemáticas.

Introducción

A lo largo de los años, el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se ha realizado (en la mayoría de los casos) mediante métodos tradicionalistas, en los cuales se asume (y se acepta por parte del estudiante) que el profesor es el que posee el conocimiento absoluto de la asignatura en cuestión y se convierte en un emisor (en muchos casos pasivo) de esos conocimientos. Por otro lado, los estudiantes asumen ser un libro en blanco y es responsabilidad del profesor "escribir" en él; esto ha provocado que ambas partes se sientan en un de ambiente de confort que impide el progreso y aprovechamiento escolar y, de esta manera, el estudiante se convierte en un receptor pasivo. Esta forma de impartir clases tiende a llevar (en muchos casos) a un autoritarismo por parte del profesor e inhibe el potencial académico de los estudiantes.

Por esta y otras razones, en la actualidad se han implementado diversas metodologías de enseñanza de las matemáticas que permiten mejorar el binomio enseñanza-aprendizaje, es decir se busca que las clases impartidas sean mucho más dinámicas y sobre todo centradas en el estudiante para que se convierta en un actor en la adquisición del conocimiento y pueda desarrollar habilidades y competencias que sean de utilidad para su vida académica y laboral. Éste, es uno de los principales objetivos del Modelo Educativo Basado en Competencias, y es en este sentido que se ha elaborado este libro titulado **Introducción al álgebra, geometría y trigonometría con aplicaciones a ingeniería petrolera y ciencias,** cuyo contenido abarca algunos de los principales temas de las Matemáticas básicas. En este libro se tiene la intención de mostrar la utilidad del álgebra, la geometría y la trigonometría dentro de las ingenierías, en particular los ejemplos y ejercicios propuestos se encuentran dentro del contexto de la industria petrolera (aunque también se incluyen aplicaciones a otras ciencias).

Se presenta una metodología diferente a la tradicional para tratar los temas antes indicados, se recalcan las habilidades que deben desarrollar y alcanzar los estudiantes a lo largo de este libro y se hace uso de dos estrategias de gran relevancia; la primera es de Rudnick&Krulik, que muestra un algoritmo de secuencias lógicas para resolver problemas cuantitativos de cualquier área, cuando un estudiante logra dominar esta estrategia adquiere mayor seguridad y confianza para comenzar a resolver un problema; y la segunda se basa en las ideas de Morris Kline, la cual se basa en realizar algunas operaciones algebraicas (tales como multiplicación de productos notables y factorización) utilizando como apoyo una figura geométrica (rectángulo) que se subdivide en cuatro partes y serán las que ayudarán a realizar el producto o la factorización del polinomio que se indique.

Se han incluido también una serie de ejercicios contextualizados, la mayoría enfocados a la ingeniería petrolera de manera que aumente la motivación entre los estudiantes de esta carrera para que su aprendizaje sea de mayor interés para ellos. Se presentan ejercicios aplicados a la velocidad de perforación de un pozo, posicionamiento de un instrumento de exploración, ganancias por ventas de barriles de petróleo o bien de materiales como la bentonita, análisis PVT de algunos gases, análisis de fluidos de perforación, aplicaciones del número de Reynold, la ecuación de Poiseuille, etc.

En el capítulo 1, se analizan las propiedades de los números reales, los productos notables y las fracciones parciales; se presenta a detalle la estrategia basada en representaciones geométricas para desarrollar los productos notables. En el capítulo 2, se muestran diversos ejemplos y aplicaciones de las funciones lineales y de segundo orden, enfatizando la utilidad de las representaciones geométricas para realizar factorización de una forma simple. En el capítulo 3, se analizan las propiedades de las gráficas de la recta, las parábolas y las funciones racionales con denominador lineal; se presentan también aplicaciones a la industria del petróleo tales como el análisis PVT, entre otros. En el capítulo 4, se estudian las funciones trascendentes y trigonométricas así como las leyes que las rigen y sus propiedades principales, de igual forma se muestran aplicaciones a la industria petrolera y algunas otras áreas de la ingeniería. Se incluye también una pequeña sección denominada ***por si estabas con el pendiente,*** en la cual se presentan algunos aspectos históricos de las matemáticas como la evolución de los números, las notaciones matemáticas, las ideas que dieron origen a algunas funciones, etc.

En general, se han diseñado y elegido una serie de ejerc1c1os contextualizados, detallándose paso a paso cómo aplicar la estrategia de Rudnick&Krulik para, de esta manera, desarrollar el análisis lógico-matemático en nuestros estudiantes. Como apoyo para el profesor, se indica cómo realizar el *inicio, desarrollo* y *cierre* de una clase tomando en cuenta los ejemplos resueltos; se recalca también la importancia de realizar *retroalimentación* al finalizar una sesión académica.

Este libro tiene la intención de ser un apoyo académico tanto para profesores como estudiantes, asegurando que al ser utilizado de manera adecuada permitirá adquirir habilidades específicas y genéricas y mejorar el nivel académico de nuestros estudiantes; y como consecuencia facilitará la enseñanza de las matemáticas en el profesor y, el aprendizaje en los estudiantes.

Competencias a desarrollar

Competencias a desarrollar. Capacidad de abstracción, análisis y síntesis. Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica. Capacidad de organizar y planificar el tiempo. Capacidad de investigación. Habilidades para buscar, procesar y analizar información procedente de fuentes diversas. Capacidad creativa. Capacidad crítica y autocrítica. Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas. Capacidad de trabajo en equipo.

Estrategia General.

Inicio:

- Proyección del ejercicio o resolver; se solicita la lectura a un estudiante. Trazar un bosquejo o diagrama representativo del enunciado
- Pregunta: ¿qué conceptos o leyes están involucrados en este ejercicio? ¿cuál es la estrategia para resolverlo? Propuestas individuales

Desarrollo: (Formar equipos de 3 integrantes)

- Discutir en equipos la estrategia y decidir si es la correcta.
- Motivar a los equipos a explicar sus estrategias y respuestas paso a paso.
- Resolver en el pizarrón

Cierre:

- Proponer un nuevo ejercicio, que esté acorde al previo, pero deberá resolverse de manera individual en su totalidad.
- Después de cierto tiempo, se realiza ca-evaluación (revisión del procedimiento en pares)
- Resolver en el pintarrón y discutir en el grupo los aciertos y errores.
  - ¿Qué aprendí de este ejercicio?
  - ¿Qué quedó claro y qué no?

Retroalimentación.

Algoritmo de Rudnick&Krulik

La solución de problemas es una de las estrategias de habilidades del pensamiento que más utilizan los profesores para enseñarle a sus estudiantes a **cómo** pensar.

Definición de problema: "es una situación, cuantitativa o cualitativa, que confronta a un individuo o grupo de individuos y requiere de una solución y de la cual no se ve una aparente solución rápida o fácil". Krulik&Rudnick (1980).Se ha encontrado que la enseñanza tradicional no tiene un enfoque en el cual se motive a los estudiantes a desarrollar su creatividad. La solución de problemas contextualizados puede desarrollar habilidades y competencias tanto genéricas como específicas. Esto permite que los estudiantes puedan transferir sus conocimientos a aplicaciones reales lo que ayuda a ver similitudes o patrones entre diversos problemas. La enseñanza actual debe preparar a los estudiantes para resolver problemas reales, y por tal razón se debe enfocar más en la práctica que en la teoría.

La solución de problemas es un proceso o guía que las personas pueden aplicar a varias situaciones. El algoritmo de Krulik&Rudnick es el siguiente:

1. **Leer.-** Definir e interpretar el problema. Se comienza anotando palabras claves, qué se está preguntando en el problema, describirlo en palabras fáciles de interpretar.
2. **Explorar.** Se buscan patrones, conceptos o leyes que juegan un papel importante en el problema. Aquí se deben colocar diagramas o esquemas representativos del problema.
3. **Estrategia.-** Determinar los pasos a seguir para encontrar la solución del problema haciendo uso de las leyes o conceptos antes determinados.
4. **Resolver el problema.-** Llevar a cabo el plan elegido, siguiendo los pasos planteados en la estrategia.
5. **Extender la solución.-** Aquí se debe verificar la solución y hacer casos como, ¿qué ocurre si la variable xcambia de valores?

Capítulo I. Aritmética y álgebra elemental

Los números reales

Las matemáticas en sí, están basadas en los números reales y sus propiedades puesto que se emplean en todas sus ramas. Pero, ¿Cuáles son los números reales y cuáles son sus propiedades? Para responder comenzamos con algunos sistemas numéricos más sencillos.

Los números naturales

Son los números más sencillos de todos. Nos sirven para contar nuestras pertenencias, amigos, dinero, etc. Los naturales se denotan como $\mathbf{N} = 1,2,3,4,5,\dots$, los puntos suspensivos indican que la secuencia continua sin límite.

Los números enteros

Ahora bien, el sistema $\mathbf{N}$ tiene un defecto ya que dados m, s en $\mathbf{N}$, la ecuación $\mathrm{m}+\mathrm{x}=\mathrm{s}$ puede o no tener solución. Por ejemplo si se tiene la ecuación $\mathrm{m}+\mathrm{x}=\mathrm{m}$ entonces no hay solución en $\mathbf{N}$. Es por eso que se remedia la situación añadiendo a los números Naturales (llamados entonces enteros positivos, $\mathbf{Z}^{+}$) el cero y los enteros negativos formando así el conjunto $\mathbf{Z}$ de los números enteros, es decir, $\mathbf{Z} = -\mathbf{N} \cup \{0\} \cup \mathbf{N} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ donde $-\mathbf{N} = \{-1, -2, -3, \dots\}$.

Entonces, el conjunto de los enteros se define como $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ y la necesidad de trabajar con este conjunto es que en $\mathbf{N}$ no se puede restar, así $\mathbf{Z}$ se obtiene agregando a $\mathbf{N}$ los números negativos.

En Tabla 1.1 se muestran ejemplos de números enteros, especifique, en la columna de la derecha, a qué conjunto pertenecen, es decir $\mathbf{Z}^{+}$ o $\mathbf{Z}^{-}$.

Tabla 1.1 Ejemplos de números enteros

1. Plantas subterráneas	
2. Altitudes sobre el nivel del mar	
3. Temperatura bajo cero	
4. Nivel debajo del mar	
5. Cantidades completas	
6. Años D.C.	
7. Ascenso y descenso de los pisos de un elevador	
8. Sótanos	
9. Temperatura sobre cero	

En $\boldsymbol{Z}$ se encuentran definidas las operaciones: suma (+), producto (·) y resta (-). Es decir,

$$si\ a, b \in Z \qquad \begin{matrix} a + b \in \boldsymbol{Z} \\ ab \in \boldsymbol{Z} \\ a - b \in \boldsymbol{Z} \end{matrix}$$

Además, con la inclusión del cero y los negativos tiene sentido:

a. El neutro aditivo: $a + 0 = 0 + a = a$
   Ejemplo. El neutro aditivo es el 0 (cero)
b. El inverso aditivo: si $a \in \boldsymbol{Z}$ existe $-a \in \boldsymbol{Z}$ tal que $a + -a = 0$
   Ejemplo. El inverso aditivo de -10^6 es 10^6.
c. Se pueden resolver con soluciones enteras, las ecuaciones $x + b = c$, donde $b, c \in Z$ cuya solución es $x = c - b$.

Ahora bien, $\boldsymbol{Z}$ tiene un inconveniente, pues dada la ecuación $mx = s$, con $m, s \in \boldsymbol{Z}$ y $m \neq 0$, ésta puede o no tener solución. Por ejemplo, $3x = 6$ tiene solución $x = 2$ pero $4x = 6$ no tiene solución en $\boldsymbol{Z}$. O de otra manera cuando medimos longitud, peso, voltaje o presión los enteros son inadecuados y que están separados muy lejos uno del otro para dar suficiente precisión.

El conjunto de los números racionales es el que se puede expresar como el cociente de dos números enteros y se define como

$$\boldsymbol{Q} = \frac{a}{b}, ab \in \boldsymbol{Z}, b \neq 0$$

Nota 1.1 Los elementos de $\boldsymbol{Q}$ son cocientes de números enteros con la propiedad de que el denominador no puede ser cero.

Nota 1.2 Todo número entero es racional, es decir $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$ ya que si $a \in \boldsymbol{Z}$ entonces $a = \frac{a}{1} \in \boldsymbol{Q}$

Nota 1.3 Dos números $\frac{m}{n}, \frac{a}{b} \in \boldsymbol{Q}$ son iguales, denotado $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ si y solo si $mb = an$.

Ejemplo1.1 Halle el valor de x si se sabe $\frac{3}{x} = \frac{2}{5}$

Despejando la variable $x$se llega a: $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}$

En $\boldsymbol{Q}$ están definidas las siguientes operaciones:

Sean $\frac{m}{n}, \frac{a}{b} \in \boldsymbol{Q}$. Entonces,

1. Adición-sustracción: Esta operación nos permite calcular la suma de dos números racionales, el resultado de dicha suma es otro número racional

$$\frac{a}{b} \pm \frac{m}{n} = \frac{an \pm bm}{bn}$$

Ejemplo 1.1.1 Realice la suma de las siguientes fracciones utilizando las reglas anteriores.

a. $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{2+4}{7} = \frac{6}{7}$
b. $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{8-2}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

Otras propiedades de los números racionales son:

i. Conmutativa:

$$\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{m}{n} + \frac{a}{b}$$

ii. Asociativa:

$$\frac{a}{b}+\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{a}{b}+\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$$

iii. Elemento neutro: Cualquier número racional $\frac{a}{b}$ sumado con cero es igual a $\frac{a}{b}$. El cero es el elemento neutro de la adición $\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$

iv. Elemento simétrico: si $\frac{a}{b}$ es un racional entonces $-\frac{a}{b}$ es el simétrico. Entonces $\frac{a}{b}+-\frac{a}{b}=0$

2. <u>Producto de racionales</u>: Se define de la siguiente manera

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\frac{am}{bn}$$

Ejemplo 1.1.2 Resuelva: $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

Propiedades de producto en el conjunto **Q**

a) Conmutativa:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{a}{b}$$

b) Asociativa:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}$$

c) Elemento neutro: El uno es el elemento neutro del producto, es decir, $\frac{a}{b}.1=\frac{a}{b}$

Si $\frac{a}{b}\in Q$ y $\frac{a}{b}\neq 0$, el inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$ es $\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$ y se denota por $\frac{a}{b}^{-1}$, es decir $\frac{a}{b}^{-1}=\frac{b}{a}$ tal que $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$

d) Distributiva: $\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\mp\frac{p}{q}=\frac{am}{bn}\mp\frac{ap}{bq}$

3. <u>División</u>: $\frac{a}{b} \div \frac{m}{n} = \frac{an}{bm}$

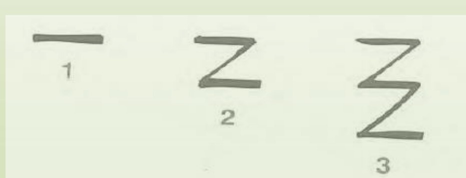
Ejemplo1.1.3 Resuelva: $\frac{3}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{3\quad 4}{2\quad 1} = \frac{12}{2} = 6$

Actividad 1.1 Elabore una lista de las características de los números enteros.

Por si estabas con el pendiente…

La historia de las matemáticas tiene su origen (principalmente) con la invención de símbolos para denotar números. El sistema decimal, se inventó hace unos 1,500 años. Sin embargo, los "decimales" se inventaron hace apenas unos 450 años. La contabilidad comenzó hace unos 10, 000 años en el Oriente Próximo. Para contar utilizaban tablillas de arcilla que podían tener diversas formas: conos, esferas, óvalos, pirámides, etc. Nuestros símbolos 1, 2 y 3 se derivan, respectivamente, de un trazo, dos trazos y tres trazos horizontales unidos por una línea inclinada.

Figura 1.1 Origen de los números



Ejemplo 1.1 Un empleado gastó $\frac{1}{6}$ de su sueldo en arriendo, $\frac{1}{3}$ en alimentación y $\frac{1}{10}$ en vestuario. Si le sobra $\$216$. ¿Cuál es su sueldo?

Desarrollo: (Formar equipos de 3 integrantes)

- *Discutir en equipos la estrategia y decidir si es la correcta.*
- *Motivar a los equipos a explicar sus estrategias y respuestas paso a paso.*
- *Resolver en el pizarrón*

Rudnick&Krulik (R&K)

1. **Leer**. Economía, sueldo, gastos, ley de signos, fracciones, números reales.
2. **Explorar**. Renta= $1/6$; alimentos= $1/3$; vestido= $1/10$, ¿sueldo?
3. **Elegir estrategia.** La suma del gasto total con lo que sobre, corresponde al sueldo.
4. **Resolver**. La suma de los gastos (en fracciones del sueldo) es

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}=\frac{30+60+18}{180}=\frac{108}{180}=\frac{3}{5}$$

De esta manera observamos que $Resto = \frac{2}{5}S = 216$. Entonces el sueldo es $S = \$540$.

Extender. ¿Qué pasaría con el sueldo, si anexamos un gasto extra, como el pago de su celular? ¿Cambia alguna otra variable?

Figura. 1.2 Representación del sueldo del empleado

Aplicación a un contenedor de combustible

Ejemplo 1.2 Después de sacar de un tanque 300 litros de petróleo el nivel de la misma desciende de $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{9}$. ¿Cuántos litros de petróleo faltaban para llenar el tanque?

R&K

1. **Leer.** Diferencias de volumen, petróleo, fracciones.
2. **Explorar.** $N_1 = \frac{2}{3}V$; $N_2 = \frac{1}{9}V$
3. **Elegir estrategia.** Realizar la diferencia de volúmenes para obtener la fracción del volumen que se extrae. Después aplicar una regla de tres.
4. **Resolver.** La diferencia en los volúmenes es:

$$\Delta V = \frac{2}{3}V - \frac{1}{9}V = \frac{18-3}{27}V = \frac{5}{9}V$$

Figura 1.3 Tanque de almacenamiento

Entonces los $300\ litros$ equivalen a $\frac{5}{9}$. Ahora bien, sea x los litros que faltaban para que se llene el tanque, es decir x litros equivalen a $\frac{1}{3}$. Entonces los litros de petróleo que faltaban para que se llenara el tanque son $x = \frac{300\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = 180$ litros.

5. **Extender.** ¿Si $N_2 = \frac{1}{5}V$, qué pasa con la variable x?

Los números irracionales

En la práctica, los números racionales son suficientes, de hecho, calculadoras y computadoras únicamente trabajan con números racionales. Sin embargo, para cuestiones teóricas, los números racionales no son suficientes. Por ejemplo, no se puede resolver la ecuación $x^2 = 2$ usando racionales. Esto es, no existe un racional x que al elevarlo al cuadrado de como resultado 2. Este hecho era ya conocido por la escuela Pitagórica, al intentar calcular la longitud de la diagonal del cuadrado unitario, el resultado conocido era $d = \sqrt{2}$, el cual no es un racional ya que no puede ser expresado como el cociente de dos enteros. Entonces, aquellos números que no pueden ser expresados como el cociente de dos enteros se les llama números irracionales y se les denotará por I. Ejemplos de estos números son π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc., los cuales tienen infinitas cifras no periódicas.

Los números reales

El conjunto de los números reales denotado por $\boldsymbol{R}$, se define por $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$. Es decir, son todos los números racionales e irracionales que pueden medir longitudes, junto con sus negativos y el cero.

Definición 1.1. Un número real es positivo, negativo o cero. Cualquier real se puede clasificar como racional o irracional (Ver Figura 1.4).

Figura 1.4 Diagrama de los números reales

El sistema numérico real consiste de un conjunto $\boldsymbol{R}$ de elementos llamados número reales y dos operaciones llamadas adición y multiplicación denotados por los símbolos $(+)$ y $(\cdot)$

Entonces, dados x y y,$(x+y)$ indica la suma y (xy) el producto. La adición y multiplicación tienen las siguientes propiedades:

Sean $x, y, z \in \boldsymbol{R}$

1. Conmutatividad
   a. Adición: $x+y=y+x$
   b. Multiplicación: $xy=yx$
2. Asociatividad
   a. Adición: $x+y+z=x+y+z$
   b. Multiplicación: $x\,yz=xy\,z$
3. Distributividad: $x\,y+z=xy+xz$
4. Elemento neutro: Hay dos números distintos, 0 y 1, que satisfacen las identidades $x+0=x$ y $x \cdot 1=x$
5. Inversos
   i) Aditivo: Todo número x tiene un inverso aditivo (negativo de x) $-x$ tal que $x+-x=0$
   ii) Multiplicativo: Todo número x, excepto 0, tiene un inverso multiplicativo (también llamado recíproco), x^{-1}, que satisface la expresión $x \cdot x^{-1}=1$

La sustracción y la división se definen por:

$$x-y=x+(-y)$$

y por otro lado

$$\frac{x}{y}=x \cdot y^{-1}$$

Leyes de los exponentes

Si a es un número real cualquiera y n es un entero positivo, entonces la potencia n-ésima de a es

$$a^{n}=\underbrace{a.\,a.\,a \ldots a}_{n\,factores}$$

El número a se denomina base y n es el exponente.

Actividad 1.2 Sean a,b números reales y m,n enteros. Elabore una descripción, en la columna tres, de el procedimiento realizado en la columna dos de la Tabla 1.2

Tabla 1.2 Leyes de los exponentes y ejemplos

Ley	Ejemplo	Descripción
$a^m\, a^n = a^{m+n}$	$3^2 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$	
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$	Para dividir dos números con la misma potencia, reste dichas potencias.
$a^{m\ n} = a^{mn}$	$3^{2\ 5} = 3^{2.5} = 3^{10}$	
$ab^{\ n} = a^n\, b^n$	$3.4^{\ 2} = 3^2 4^2$	
$\frac{a}{b}^{\ n} = \frac{a^n}{b^n}$	$\frac{3}{4}^{\ 2} = \frac{3^2}{4^2}$	
$\frac{a}{b}^{\ -n} = \frac{b}{a}^{\ n}$	$\frac{3}{4}^{\ -2} = \frac{4}{3}^{\ 2}$	
$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	$\frac{3^{-2}}{4^{-5}} = \frac{4^5}{3^2}$	

Ejemplo 1.3 Simplifique las expresiones de la Tabla 1.3 y en la columna de la derecha coloque la propiedad utilizada.

Tabla 1.3 Empleo de las leyes de los exponentes

Operación	Propiedad utilizada
a. $x^3x^2 =$	
b. $x^4 x^{-6} =$	
c. $\frac{a^{7}}{a^{3}} =$	
d. $x^{4\ 5} =$	
e. $3x^{\ 3} =$	

Por si estabas con el pendiente…

El sistema Babilónico es de “base 60” o sexagesimal. Es decir, el valor de un símbolo puede ser un número o 60 veces ese número dependiendo de la posición que tenga. Para nosotros en el número 888 el primer 8 significa “ochocientos”, el segundo “ochenta” y el tercero “ocho”; pero para un babilonio un símbolo como:

Significa $8 \times 60 \times 60 = 28{,}800$; el segundo es $8 \times 60 = 480$ y el último representa simplemente el 8. Así que el número que se quiere representar es $28{,}800 + 480 + 8 = 29{,}288$.Cuando lo babilonios utilizaban sus observaciones astronómicas para predecir los eclipses, ya sea solares o lunares, los ciudadanos quedaban sorprendidos por la precisión con la que los sacerdotes predecían estos eventos, sin embargo la mayoría de dichos sacerdotes no conocían el método empleado para hacer la predicción pero sí sabían leer las tablillas que contenían la información. Lo más importante para ellos era cómo utilizarla, el procedimiento quedaba para los especialistas.Un sistema que ha cautivado a muchos historiadores el sistema base 20, inventado por los mayas. Tiene una estructura semejante al sistema base60 de los babilonios. Por ejemplo, el número 952 para los mayas sería $9 \times 20 \times 20 + 5 \times 20 + 2 = 3{,}702$.

Una expresión algebráica es aquella que en sus términos contiene una o mas variables, por ejemplo:

$$(3x^2 + x + 6)\ \frac{ax+by}{4xy-cz}\ (2x + 3)$$

Las variables también representan valores o cosas desconocidas. Manejar simbología algebraíca permite trabajar con relaciones complejas más fácilmente que si tuviéramos que usar sólo palabras, el álgebra es una notación y una simbología que permite expresar de manera sencilla situaciones de la vida cotidiana y laboral.

Ejemplos:

1. En lugar de decir: "si a un número cualquiera le sumo siete y le quito cuatro, obtengo el mismo resultado que si a ese mismo número le sumo tres". Si denotamos como x cualquier número, podemos traducir en lenguaje algebraico el enunciado anterior como: $x + 7 - 4 = x + 3$
2. El volumen v de un cubo de arista a es la arista elevada al cubo, en lenguaje algebraíco: $v = a^3$
3. La ecuación de balance de energía en una bomba de aceite. Representamos por P la presión, v la velocidad del flujo de aceite, g la gravedad y $\boxed{?}$ representa la
   altura del aceite por encima del punto en donde se ejerce la presión. El subíndice 1 indica estas cantidades en un punto del sistema, y el subíndice 2 indica estas cantidades en otro punto del sistema. Considerando que la energía total en el punto inicial es igual a la densidad del aceite más el cuadrado de la velocidad entre dos más la gravedad por la altura y aplicando el balance de energía: la energía total en un punto del sistema debe ser igual a la energía total en otro punto del sistema, en lenguaje algebráico escribimos:

$$P_1 + 0.5v_1^2 + \rho g \boxed{?}_1 = P_2 + 0.5v_2^2 + \rho g \boxed{?}_2$$

Por lo tanto, el álgebra es un lenguaje simbólico del cual la ciencia y la tecnología utilizan sus propiedades para expresar relaciones de sumo interés.

Adición y sustracción de polinomios

Las expresiones algebraicas mas simples son los monomios, un monomio es una expresión de la forma (ver Figura 1.7):

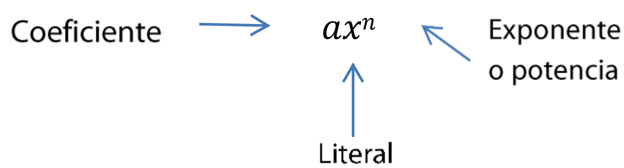


Figura 1.7 Expresión algebraica

Un binomio es una suma de dos monomios y un trinomio es una suma de tres monomios. Un polinomio está compuesto por la suma o resta de monomios, por ejemplo: $3x^3 + 8x^2 + 6x$. Es decir, un polinomio en x es una suma de cualquier número de monomios en x. Otra forma de decirlo es la siguiente.

Definición de polinomio. Un polinomio en x es una suma de la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, en donde n es un entero no negativo y cada coeficiente a_k es un número real. Si $a_n \neq 0$, se dice que el polinomio tiene grado n.

Únicamente se pueden sumar términos semejantes, para ello, sus coeficientes se suman y las literales y exponentes no se modifican.

Ejemplo 1.4 Hallar la suma $x^3 + 2x^2 - 5x + 7 + 4x^3 - 5x^2 + 3$

Para obtener la suma de cualquiera dos polinomios en x, sumamos los coeficientes de potencias semejantes de x,

$$x^3 + 2x^2 - 5x + 7 \quad + \quad 4x^3 - 5x^2 + 3$$

$$= x^3 + 2x^2 - 5x + 7 + 4x^3 - 5x^2 + 3$$ Eliminar paréntesis

$$= (1 + 4)x^3 + (2 - 5)x^2 - 5x + (7 + 3)$$ Sumar coeficientes de potencias semejantes de x

$$= 5x^3 - 3x^2 - 5x + 10$$ Simplificar

Multiplicación

Para obtener el producto de polinomios o de otras expresiones algebraicas, necesitamos utilizar varias veces la propiedad distributiva, por ejemplo:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Es decir cada elemento del primer factor $(a+b)$, multiplica a cada elemento del segundo factor $(c+d)$, en general se sigue esta regla para multiplicar polinomios.

Productos notables

Productos notables es el nombre que reciben multiplicaciones con expresiones algebraicas que cumplen ciertas reglas fijas, cuyo resultado se puede escribir mediante simple inspección, sin verificar la multiplicación. Su aplicación simplifica y sistematiza la resolución de muchas multiplicaciones habituales.

Representaciones geométricas

Se propone trabajar con una metodología no tradicional para la enseñanza-aprendizaje de los productos notables (multiplicación de binomios) y factorización a través de una herramienta geométrica, la cual consiste en analizar dichos productos utilizando sumas de sub-áreas de un rectángulo o cuadrado cuyos lados se construyen usando los binomios a multiplicar y con ello formar una matriz de $2x2$, dónde cada uno de los elementos de la matriz representa una sección del área total. De tal forma que la suma de todas las sub-áreas permite encontrar el resultado de dicho producto de una manera más fácil, clara y comprensible. A continuación se describe la metodología.

Para determinar el producto $a+b\ (c+d)$ se construye un rectángulo de altura $a+b$ y base $(c+d)$, como se observa en la Figura 1. 8

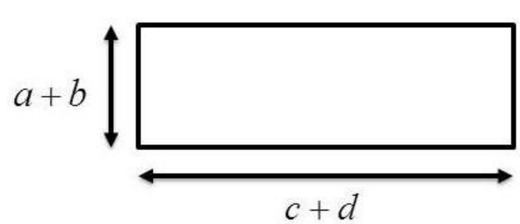


Figura 1.8 Construcción del rectángulo.

Por la forma en que se tiene la base y altura, el rectángulo se divide en cuatro secciones rectangulares (matriz $2x2$), ver Figura 1.9.

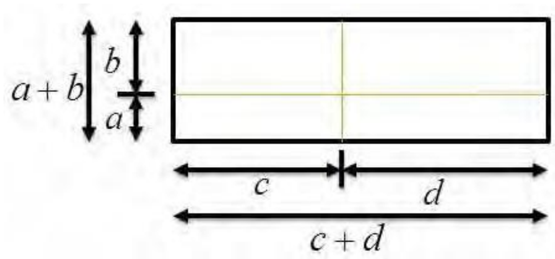


Figura 1.9 Rectángulo dividido en 4 secciones.

El área de cada sección es ac, bc, ad y bd respectivamente. Al sumarse dichas áreas (Figura 1.10) permiten encontrar el resultado del producto deseado:

$$a + b\ c + d = ac + bc + ad + bd$$

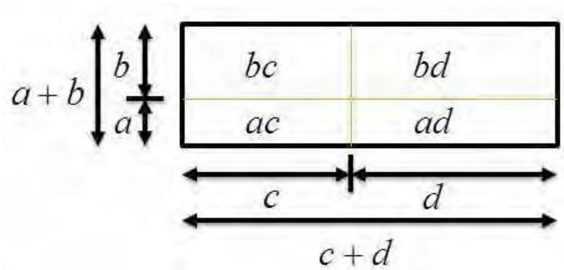


Figura 1.10 Construcción geométrica del rectángulo base.

A continuación se dan ejemplos de binomios donde uno o más de los términos son negativos.

Por si estabas con el pendiente…

El nacimiento de los decimales. Simón Stevin (Matemático holandés), hacia 1585 estudió la aritmética italiana del periodo renacentista y la notación indoarábiga transmitida por Leonardo de Pisa (Fibonacci). Encontró engorrosos cálculos con fracciones, por lo que se dedicó a inventar un sistema similar pero más fácil de comprender: el sistema decimal (base 10).

Su notación no incluía el punto decimal, pero condujo rápidamente a ello. Por ejemplo, si escribimos 8.642, Stevin escribía 8⓪ 6① 4② 2③ el primer símbolo representa a la parte entera, el segundo a las décimas y así sucesivamente. Cuando las personas se acostumbraron a este sistema solo se conservó el primer símbolo y los demás se desecharon, y al ser contraída representa el punto decimal.

Ejemplo 1.5 Determine $x + 4\ (y - 2)$ utilizando la representación geométrica.

Se construye el rectángulo con base $x + 4$ y altura $(y - 2)$, donde se divide en cuatro secciones rectangulares, ver Figura 1.11.

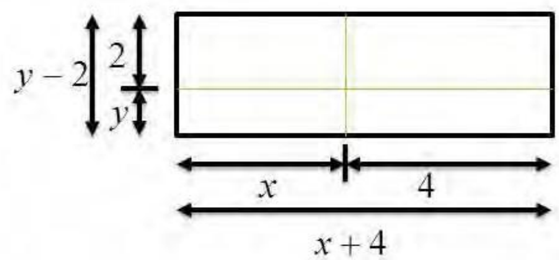


Figura 1.11Rectángulo con base$x + 4$ y altura $y{-}2$.

Luego, la altura del rectángulo se tiene un número negativo (-2), se marca el renglón de altura 2 con líneas verticales para indicar un cambio de signo (Figura 1.12).

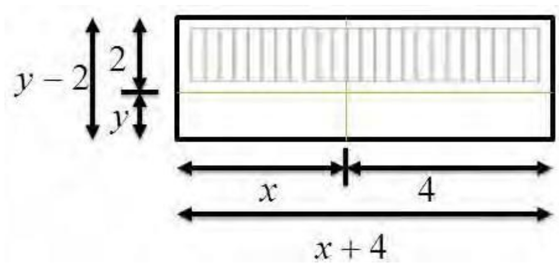


Figura 1.12Representación del signo negativo de un término.

Finalmente, se determina el área de cada sección, por lo que al sumarlas (ver Figura 1.13) se tiene: $x + 4\ y - 2 = xy - 2x + 4y - 8$

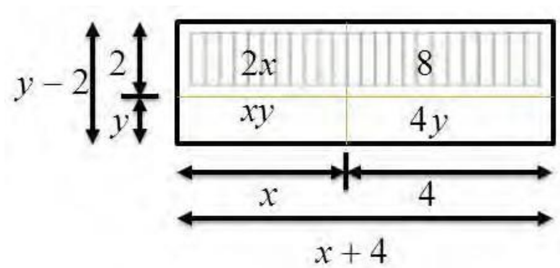


Figura 1.13Rectángulo de $x + 4\ (y - 2)$.

Velocidad de perforación en un pozo

Ejemplo 1.6 Durante el proceso de perforación, de la primer etapa, de un pozo, los ingenieros deben supervisar la velocidad de perforación de la barrena para decidir en qué instante debe removerse por el desgaste sufrido. Mediante datos experimentales, los ingenieros han encontrado que la velocidad de perforación de la barrena puede ser modelada por la función $v = t + 3\ (8 - t)$, donde v está en $m/$? , y t en horas.


Desarrollo:

a) Elabore un bosquejo de la función.
b) ¿Cuál es la velocidad inicial de perforación?
c) ¿En qué momento se alcanza la velocidad máxima?
d) ¿Cuánto tiempo transcurre, desde el inicio de la perforación, para que se obtenga una velocidad de perforación igual a la inicial?
e) ¿En qué instante se debe remover la barrena? Cuándo la velocidad de perforación es $\frac{1}{6} v_o$, la barrena se debe retirar.

R&K

1. **Leer.** Barrena, tiempo, velocidad.
2. **Explorar.** $v = t + 3\ (8 - t)$, ¿ t?, ¿v_{max} ?
3. **Elegir estrategia.** Realizar el producto notable con representaciones geométricas, realizar gráfica.
4. **Resolver.** Se realiza el producto con representaciones geométricas y se grafica la función.

$$v = -t^2 + 8t - 3t + 24 = -t^2 + 5t + 24$$

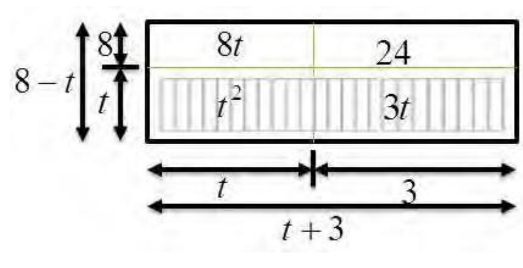


Figura 1.14a Representación geométrica

De esta ecuación si hacemos $v\ 0 = 24\ m$? , se obtiene la velocidad inicial. La velocidad máxima se obtiene analizando la gráfica de $v(t)$, Figura 1.14b, de donde se observa que la máxima velocidad es $v_{max} = 30\ m$ y se alcanza a las 2.5 . Por otro lado, para que obtenga la misma velocidad que la inicial, hacemos

$$v = -t^2 + 5t + 24 = 24$$

$$-t^2 + 5t = 0$$

$$t = 5 \boxed{?}rs$$

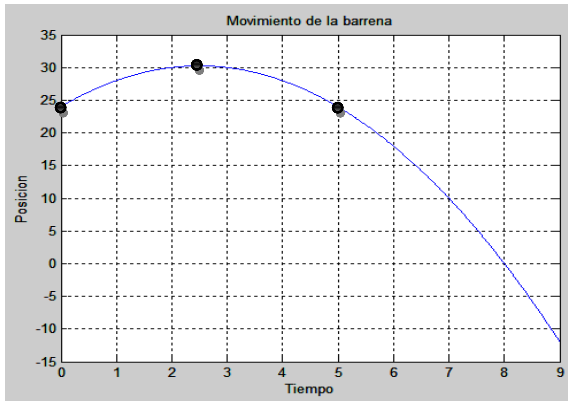


Figura 1.14.b Representación gráfica del movimiento de una barrena

Para encontrar el tiempo al cual se debe retirar la barrena, trabajamos de la siguiente manera

$$v = -t^2 + 5t + 24 = 4$$

$$-t^2 + 5t + 20 = 0$$

Para resolver esta ecuación haremos uso de la fórmula general.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Haciendo los cambios correspondientes nuestra ecuación en el tiempo queda como:

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 80}}{2} = 7.62 \boxed{?}rs$$

5. **Extender.** ¿Qué pasaría si la barrena permanece 8 $\boxed{?}rs$ perforando?

Retroalimentación.

- *¿Qué aprendí de estos ejercicios?*
- *¿Qué quedó claro y qué no?*

Producto de binomios con término común

Este producto corresponde a la multiplicación de binomios cuyo término común es x de la forma $x + a\ (x + b)$. Matemáticamente el producto es:

$$x + a\ x + b = x^2 + a + b\ x + ab$$

Sin embargo, veremos que utilizando las representaciones geométricas el producto se obtiene fácilmente.

Ejemplo 1.7 Hallar $x - 1\ (x + 5)$, utilizando la representación geométrica.

Para representar el producto de dos binomios con término común se construye el rectángulo con base $(x + 5)$ y altura $x - 1$, en el cual se forman cuatro regiones, donde una de ellas es un cuadrado con lado x, (Figura 1.15), luego se calcula el área de las regiones mencionadas y al sumarlas se obtiene el resultado del producto deseado: $x - 1\ x + 5 = x^2 + 4x - 5$

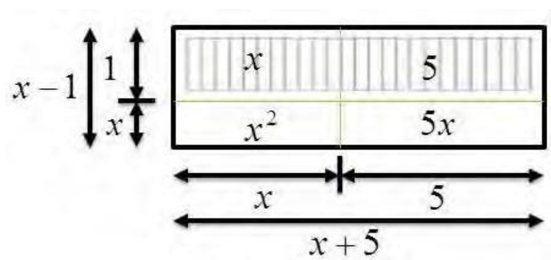


Figura 1.15 Rectángulo de $x - 1\ (x + 5)$.

Posicionamiento de un instrumento de exploración

Ejemplo 1.8 Como parte del proceso de exploración de nuevos pozos petroleros, los geólogos deciden tomar muestras geológicas de la zona en la que se va a trabajar. Se introduce un instrumento por una pequeña perforación para colectar las muestras de rocas. Para un caso particular, la posición del instrumento se modela con la ecuación
? $= t - 2\ (t -$. Donde [está en metros y t en minutos.

a) Elabore una gráfica de la posición
b) Describa el movimiento del instrumento
c) ¿Cuál es la profundidad máxima a la que llega?
d) ¿En qué tiempo alcanza la profundidad máxima?

R&K

Desarrollar:

1. **Leer.** Profundidad, tiempo, exploración.
2. **Explorar.** ¿Profundidad? ¿tiempo?
3. **Elegir estrategia.** Utilizar representaciones geométricas, graficar (ver Figura 1.16a)
4. **Resolver.** Haciendo el proceso de la representación geométrica se obtiene:

$$\boxed{?} = t - 2\ t - 6 = t^2 - 8t - 12$$

Analizando la Figura 1.16b se observa que a medida que transcurre el tiempo, la profundidad del instrumento aumenta proporcionalmente con el tiempo al cuadrado. De aquí se puede ver que la máxima profundidad es $\boxed{?} =$ y el tiempo que tarda en llegar es de $4min$.

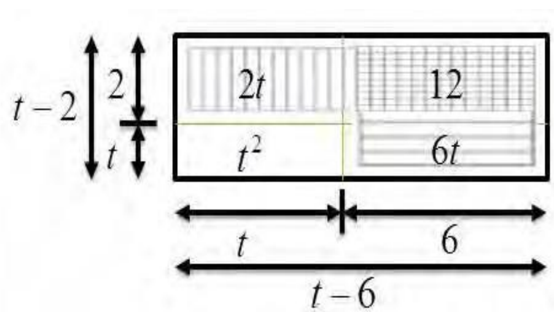


Figura 1.16a Rectángulo de $t - 2\ (t - 6)$.

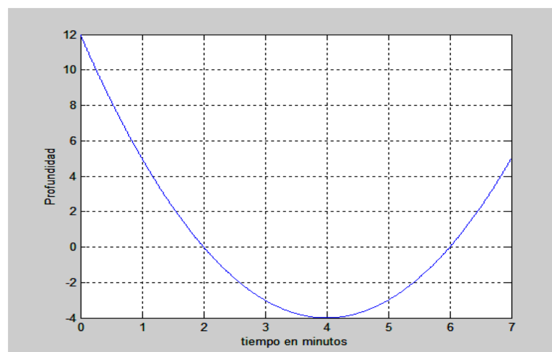


Figura 1.16b Gráfica de la función profundidad.

5. **Extender.** ¿En qué instantes el instrumento recolector tienen la misma profundidad?

Retroalimentación.

- *¿Qué aprendí de estos ejercicios?*
- *¿Qué quedó claro y qué no?*

Producto de binomios conjugados

Un binomio conjugado es un producto de la forma $x + y\, x - y$, para realizarlo se procede como sigue. Se dibuja un rectángulo con base $x + y$ y de altura $x - y$ como se observa en la Figura 1.17, en cual se forma un rectángulo de base y.

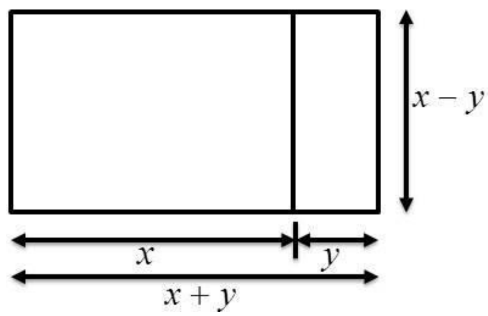


Figura 1.17Construcción del rectángulo $x + y\,(x - y)$

El rectangulo de base y, se traslada a la parte superior del rectangulo de base x, ver Figura 1.18.

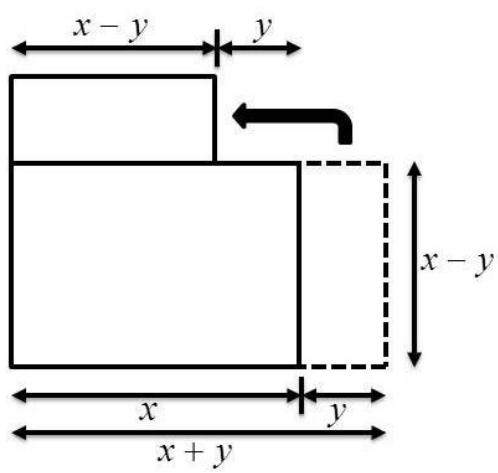


Figura 1.18Representación del traslado de la franja.

Al trasladar el rectángulo de base y, se forma un cuadrado de lado x(Figura 1.19) cuya área es x^2, dentro del cual se observa un cuadrado de área y^2 que no pertenece al área encerrada, por tal motivo $x + y\, x - y = x^2 - y^2$, donde la diferencia se representa asignando líneas verticales.

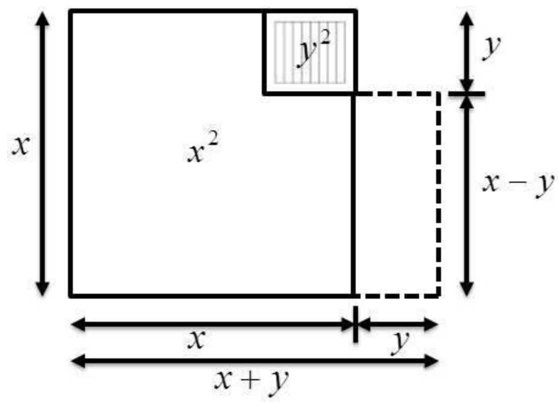


Figura 1.19 Representación del binomio conjugado

Ejemplo 1.9 Determine $x+4\ (x-4)$ usando la representación geométrica.

Se construye el cuadrado tal y como se muestra en la Figura 1.20. Obsérvese que en cada caso se eleva al cuadrado cada uno de los términos que forman los lados. El cuadrado más pequeño no pertenece al cuadrado mayor, así que el resultado del producto es: $x+4\ x-4=x^2-16$

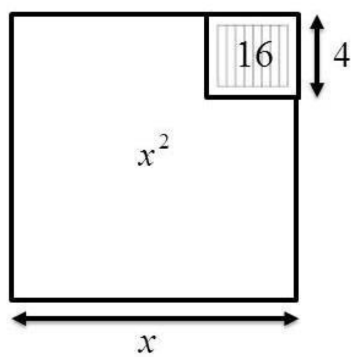


Figura 1.20 Representación geométrica del binomio conjugado

Binomio al cuadrado

Para el desarrollo del binomio $x + y\ ^2$ se dibuja un cuadrado cuyo lado es $x + y$, donde se forman cuatro sub-áreas cuadradas, como se ilustra en la Figura 1.21.

Desarrollo:

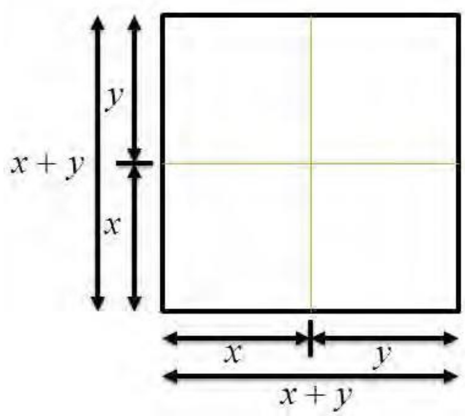


Figura 1.21Construcción del cuadrado para el binomio.

Posteriormente, se lleva a cabo el cálculo de cada sub-área, en este caso todos los términos son positivos, ver Figura 1.22, finalmente se suman y se simplifica obteniendo $x + y\ ^2 = x^2 + 2xy + y^2$

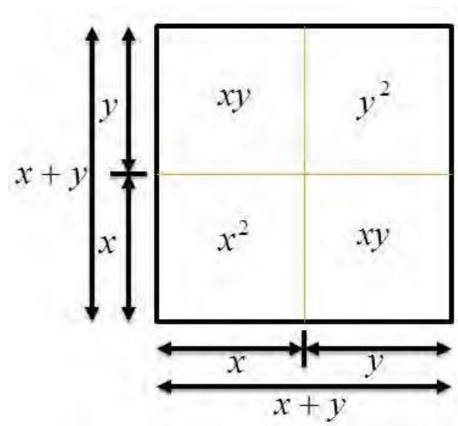


Figura 1.22 Cuadrado dividido en cuatro secciones.

Ahora, cuando uno de los términos del binomio es negativo, es decir $(x - y)^2$, en las secciones de lado y se trazan líneas (horizontales o verticales) para indicar el signo que tiene la variable, en donde resulta que la intersección de dichas líneas se forma una cuadricula que representa el signo positivo, ver Figura 1.23.

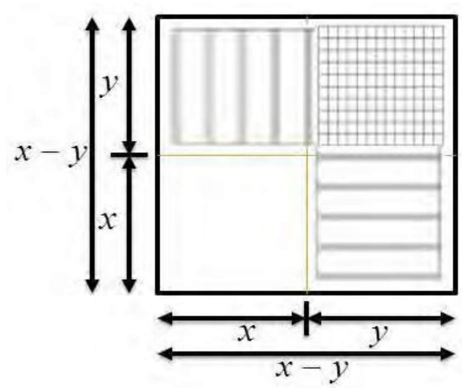


Figura 1.23 Construcción del cuadrado.

Finalmente, se obtienen las sumas de las sub-áreas (Figura 1.24) teniendo el resultado como se observa: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

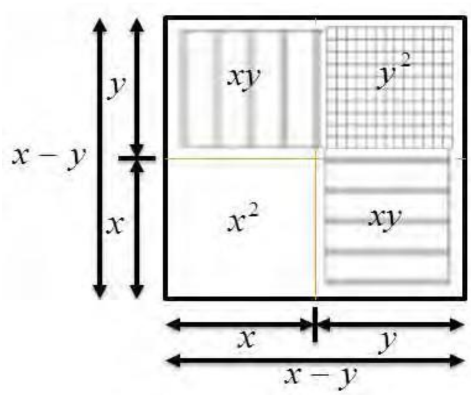


Figura 1.24 Representación del binomio cuadrado.

Ejemplo 1.10 Calcular $(x + 4)^2$, usando la representación geométrica.

Se forma el cuadrado con lados $(x + 4)$ y se multiplican término a término. Al sumar las sub-áreas se obtiene el resultado esperado: $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$.

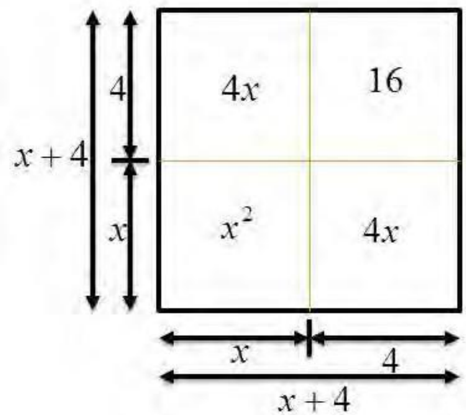


Figura 1.25 Representación geométrica del binomio alcuadrado

Expresiones fraccionarias

El cociente de dos expresiones algebraicas se llama expresión fraccionaria. Como caso especial, una expresión racional es el cociente $\frac{p}{q}$ de dos polinomios p y q.

Un principio fundamental de las fracciones establece que

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{d} = \frac{a}{b}\cdot 1 = \frac{a}{b}$$

donde $bd \neq 0$. Este proceso de simplificación describe que es posible cancelar un factor cumún distinto de cero en el numerador y denominador de un cociente. Se puede reducir una fracción a su expresión mínima eliminando los factores comunes del numerador y el denominador. Sólo se pueden eliminar los factores comunes, no los términos comunes que se suman, por ejemplo

$$\frac{(a+b)c}{(a+b)d} = \frac{c}{d}, \quad \frac{pqr}{rpv} = \frac{q}{v}$$

Decimos que una expresión racional esta reducida a su mínima expresión si el numerador y denominador no tienen factores polinomiales comunes de grado positivo ni factores enteros comunes mayores que 1. Para simplificar una expresión racional, se factorizan numerador y denominador y entonces suponiendo que los factores del denominador no son cero, se cancelan los factores comunes.

Ejemplo 1.11 Simplifique $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$, de forma directa.

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}$$ Factorizando todos los polinomios

$$= \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)}$$ Cancelando factores comunes

$$= \frac{(x+1)}{(x+2)}$$

Fracciones parciales

Una fracción es el cociente indicado de dos cantidades. Por ejemplo, si A es el dividendo y B es el divisor (no nulo), el cociente A/B es una fracción, recibiendo A el nombre de numerador y B el nombre de denominador. Las operaciones con fracciones se efectúan en álgebra del mismo modo que en aritmética. Sin embargo usaremos expresiones algebraicas en lugar de números.

Una fracción algebraica simple es aquella que en el numerador y el denominador son expresiones racionales enteras. Ejemplos de fracciones simples son

$$\frac{2}{x+1}, \quad \frac{x-1}{x^2+x+4} \quad \text{y} \quad \frac{x^2-2x+2}{x+1}$$

Una fracción simple se llama *propia* si el grado de numerador es menor que el grado del denominador, y se llama *impropia* si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador. Por ejemplo, $\frac{2}{x+1}$ y $\frac{x-1}{x^2+x+4}$ son fracciones propias, mientras que $\frac{x^2-2x+2}{x^2+1}$ y $\frac{x^2-2x+2}{x+1}$ son fracciones impropias.

Ejemplo 1.12 Descomponer en fracciones parciales simples la expresión que se da a continuación.

$$\frac{5x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

Los factores del denominador son todos lineales y distintos, entonces podemos escribir:

$$\frac{5x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \quad (1.1)$$

Siendo A, B y C constantes que deben determinarse. La igualdad (1.1) es válida para cualquier valor de x excepto $1, -1$ y -2. Quitando denominadores se obtiene la igualdad (1.2)

$$5x + 1 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1) \quad (1.2)$$

Hay dos formas para determinar los valores de A, B y C. Aquí se muestra uno de los más sencillos.

Tomamos los valores que fueron excluidos de la primera igualdad (1.1), es decir, $1, -1$ y -2 y los sustituimos en x. Con cada sustitución eliminamos las constantes con excepción de una. Así, para $x = 1$, la identidad (1.2) nos da $5 + 1 = A(1 + 1)(1 + 2)$, de donde $A = 1$.

Similarmente, para $x = -1$, la identidad (1.2) nos da $-5 + 1 = B(-1 - 1)(-1 + 2)$, de donde $B = 2$.

Finalmente, para $x = -2$, la identidad (1.2) nos da $-10 + 1 = C(-2 - 1)(-2 + 1)$, de donde $C = -3$.

Según lo anterior, la solución buscada es

$$\frac{5x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \quad (1.3)$$

Una comprobación completa del resultado se obtiene sumando las tres fracciones parciales obtenidas del segundo miembro de (1.3).

Modelación de la presión inicial en un pozo

Ejemplo 1.13 Durante el inicio de producción de un pozo petrolero, la presión en la tubería tiene un súbito incremento que se puede modelar con la función $P = \frac{50t}{t^2+6t+8}$, donde P está en Kilo Pascales y t en segundos. Para evitar daños a la tubería, se abre una válvula para aliviar la presión. Después de que la presión alcanza el 35% de la presión máxima alcanzada, se cierra la válvula para que el crudo fluya por la tubería.

a) Elabore una gráfica de la presión
b) ¿En qué momento se alcanza la máxima presión?
c) ¿En qué instante se debe cerrar la válvula?

Ry&

1. **Leer.** Presión, tiempo, pozo petrolero
2. **Explorar.** $35\% P_{max}$, ¿tiempo P_{max} ?, ¿tiempo válvula?
3. **Elegir estrategia.**Trabajar la función como fracciones parciales, factorizar con representaciones geométricas, graficar con fracciones.
4. **Resolver.** Se factoriza el denominador utilizando las representaciones geométricas, así que: $t^2 + 6t + 8 = (\mathrm{t} + 2)(\mathrm{t} + 4)$.

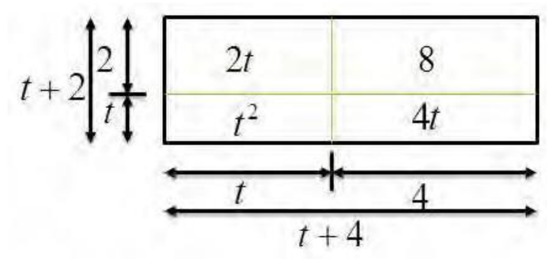


Figura 1.26a Factorización con representaciones geométricas

De esta manera la fracción se puede escribir como:

$$\frac{50t}{t^2 + 6t + 8} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+6}$$

Resolviendo para A y B

$$50t = A \;\; t + 6 \;\; + B(t + 2)$$

$A = -25$ y $B = 75$.

Por lo que la función de la presión se puede trabajar como

$$P\ t = \frac{50t}{t^2 + 6t + 8} = \frac{-25}{t+2} + \frac{75}{t+6}$$

Puede observarse que el segundo término permite hacer operaciones aritméticas más sencillas para obtener la tabla de datos. De la Figura 1.26 se puede deducir que el tiempo al cual ocurre la máxima presión es aproximadamente a los $2s$. La presión máxima es aproximadamente $8.5KPa$.

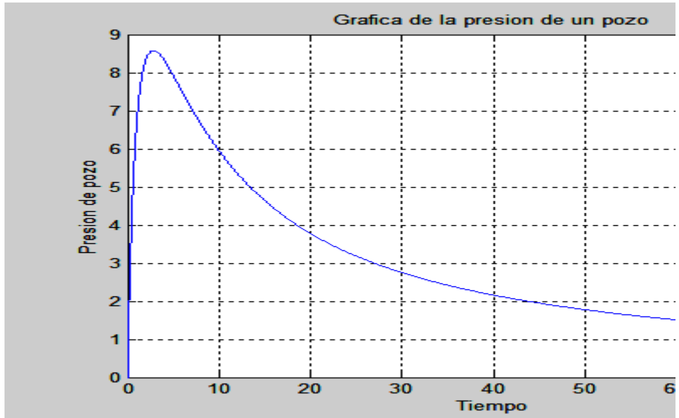


Figura 1.26 Gráfica de la función producción

Por último, la válvula debe cerrarse cuando la presión sea de $2.97KPa$, es decir a los $28\ s$ aproximadamente.

5. **Extender.** Observe que existen dos momentos es los cuales se alcanza la misma presión, ¿porqué no es recomendable cerrar la válvula durante los primeros segundos?

Retroalimentación.

- *¿Qué aprendí de estos ejercicios?*
- *¿Qué quedó claro y qué no?*

Ejercicios tradicionales

Desarrolle en los ejercicios del 1-9 utilizando representaciones geométricas, y simplifique en los ejercicios del 10-12. Del ejercicio 13-14 resuelva según el caso.

1.1 $(x+7)(x-3)$

1.2 $(m-6)(m-5)$

1.3 $(a^2-1)(a^2-7)$

1.4 $(2x+9)(2x-9)$

1.5 $(1-3ax)(3ax+1)$

1.6 $(a^2-3a)(a^2+3a)$

1.7 $(2x+3y)^2$

1.8 $(3m-4n)^2$

1.9 $(x^2-1)^2$

1.10 $\frac{3x-10}{x^2-x-6}$

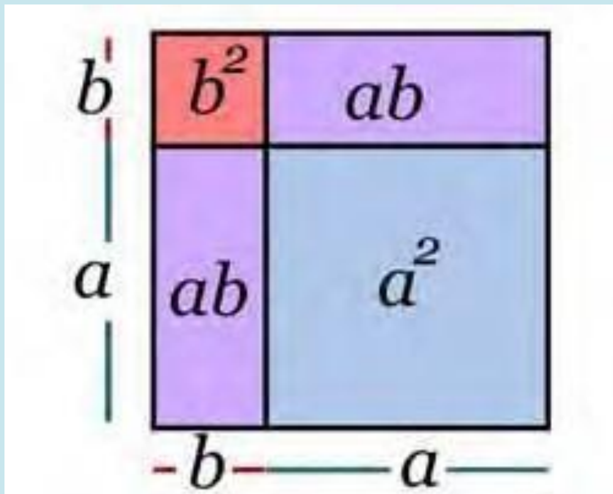
1.11 $\frac{x+1}{x^2+x-3}$

1.12 $\frac{x-3}{x^2-1}$

1.13 La compañía de manufacturera BarMex fabrica barriles de alta calidad para contener crudo. Los costos de inicio son $\$10{,}000\ dls$. Fabricar cada barril cuesta $\$100\ dls$, y se vende a $\$145.95 dls$ cada uno, ¿Cuántos deben vender para tener una ganancia de $\$70{,}000\ dls$?

1.14 Calcule el diámetro de una tubería de PVC si el área de la circunferencia es de $0.05\ plg^2$.

Capítulo II. Factorización de expresiones algebraicas



2.1 Trinomio cuadrado perfecto
2.2 Diferencias de cuadrado
2.3 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
2.4 Ecuaciones lineales
2.5 Problemas contextualizados

Trinomio cuadrado perfecto

Para descomponer $x^2 + 2xy + y^2$, se construye un cuadrado, que se divide en cuatro secciones y se colocan los términos cuadráticos del trinomio como se muestra en la Figura 2.1.

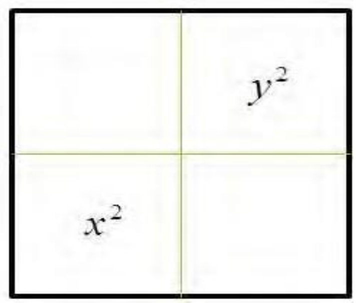


Figura 2.1. Construcción del cuadrado

El segundo término del trinomio se distribuye en las otras dos secciones indicando el signo correspondiente. Posteriormente, se obtiene el factor común de forma vertical y horizontal (Figura 2.2) de las regiones, donde resulta que $x^2 + 2xy + y^2 = x + y\ x + y = (x + y)^2$, que representa el área del cuadrado.

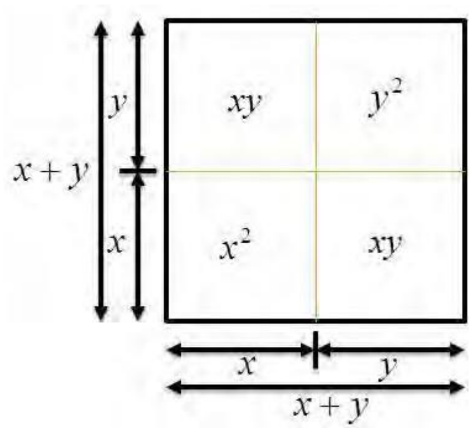


Figura 2.2. Representación de $(x + y)^2$

Ahora para descomponer $x^2 - 2xy + y^2$, se usa un procedimiento similar al anterior pero en este caso el segundo término del trinomio es negativo, ello se indica con líneas verticales u horizontales como se muestra en la Figura 2.3, nótese que hay una intersección donde se forma una cuadricula que representa una región positiva. Al realizar lo anterior resulta que $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$.

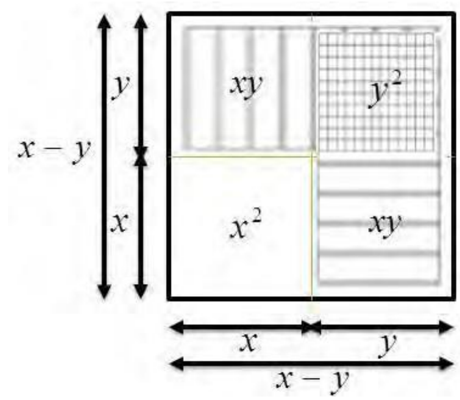


Figura 2.3. Representación de $(x-y)^2$

Ejemplo 2.1 Utilice la representación geométrica para descomponer x^2+6x+9.

Desarrollo:

Se inicia colocando los términos cuadrático e independiente en las esquinas del cuadrado (Figura 2.4), se buscan dos números que multiplicados produzcan el número nueve y sumados el número seis. Se procede a buscar términos semejantes para encontrar los lados del cuadrado. Por tal razón, la factorización es: $x^2+6x+9=(x+3)^2$.

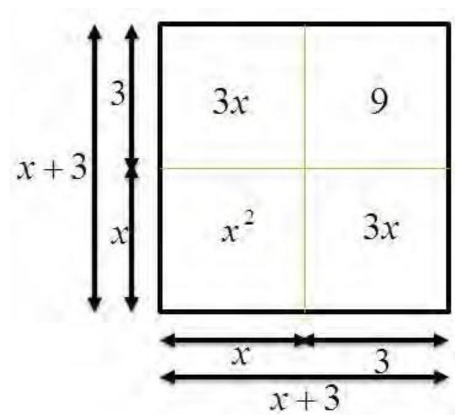


Figura 2.4 Representación geométrica del Ejemplo 2.1

Ejemplo 2.2 Factorice: $x^2-10x+25$, utilizado la representación geométrica.

Desarrollo:

Se procede como en el ejemplo anterior, colocando los términos en las secciones adecuadas para posteriormente buscar los términos semejantes. Observe que la esquina superior derecha tiene una cuadrícula (Figura 2.5), ésta surge debido al signo negativo en el segundo término del polinomio. De esta manera el resultado es: $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

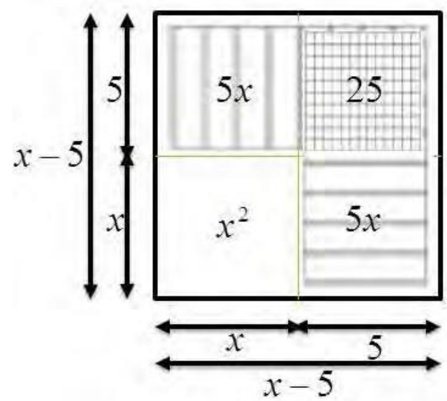


Figura 2.5 Representación geométrica del Ejemplo 2.1

Diferencia de cuadrados

Para factorizar $x^2 - y^2$, se necesita visualizar a x^2 y y^2 como áreas de cuadrados, entonces se construye un cuadrado de lado x y dentro de él un cuadrado de lado y (Figura 2.6), para indicar la diferencia se trazan líneas verticales en el cuadrado de área y^2.

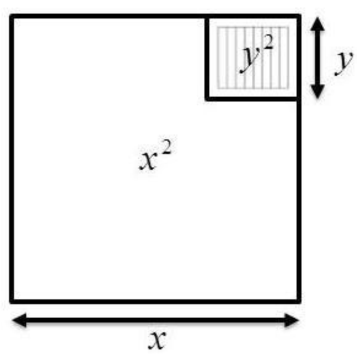


Figura 2.6 Representación de $x^2 - y^2$.

Al sustraer el cuadrado de área y^2 se obtiene dos rectángulos como se muestra en la Figura 2.7, donde el rectángulo de base y se traslada a un costado del rectángulo de base x.

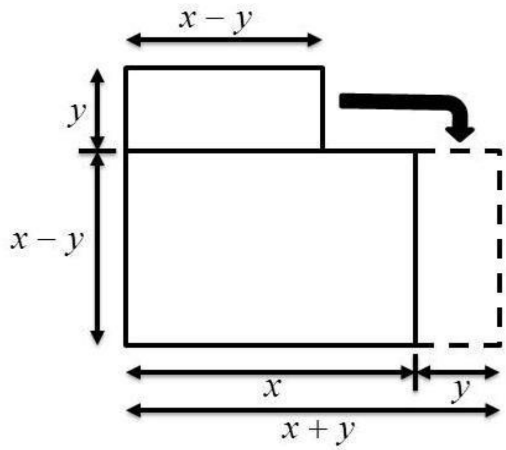


Figura 2.7 Traslado del rectángulo de base y .

Al realizar lo anterior se un obtiene un rectángulo de base $(x+y)$ y altura $(x-y)$, ver Figura 2.8, lo cual indica que $x^2-y^2=x+y\ (x-y)$.

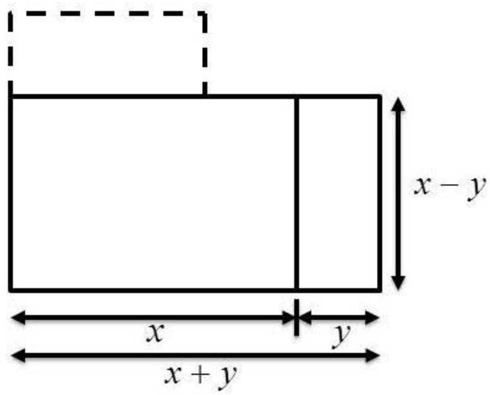


Figura 2.8 Representación dex^2-y^2 .

Por si estabas con el pendiente…

Uno de los primeros matemáticos en utilizar símbolos fue Diofanto de Alejandría, su notación difiere notablemente de la moderna, pero los resume en forma compacta. Francois Vieta utilizaba letras del alfabeto pera representar cantidades, por ejemplo las consonantes las utilizaba para cantidades conocidas y las vocales para las desconocidas. El símbolo de igualdad lo introdujo Robert Recorde, indicando que no podía pensar en dos cosas que sean iguales que dos rectas paralelas. Thomas Harriot introdujo los símbolos ">" y "<". Los paréntesis redondos "()"aparecen en 1544; los corchetes "[]" y las llaves "{}" las utilizaba Vieta hacia 1590. Descartes y Newton ya utilizaban una notación algebraica muy semejante a la nuestra.

Tabla 1.1 La notación de Diofanto

Significado	*Símbolos Diofanto*	*Símbolo actual*
Incógnita	γ	x
Potencia al cuadrado	$\Delta\gamma$	x^2
Potencia cúbica	$k\gamma$	x^3
Suma	$X+Y$	$X+Y$
Resta	$\pitchfork$	$X-Y$
Igualdad	ς	$=$

Trinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$

El análisis del trinomio $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ se hará con $a\neq 1$. Para factorizar una expresión como esta, se multiplica el coeficiente del término cuadrático y con el término independiente, es decir: $n=ac$ luego se buscan dos números cuya suma (resta) sea igual a b y el producto sea igual a n. De forma matemática:

$$kl=n; \qquad k+l=b \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.3 Descomponer el trinomio: $2x^2+11x+5$

Desarrollo:

Se construye un rectángulo, se divide en cuatro partes en donde se colocan el termino cuadrático $(2x^2)$ y la constante como se muestra en la Figura 2.9, para este caso $n=$

$ac = 10$; de acuerdo a la expresión (2.3), se tiene $k = 1$ y $l = 10$, los cuales se colocan en las dos secciones faltantes.

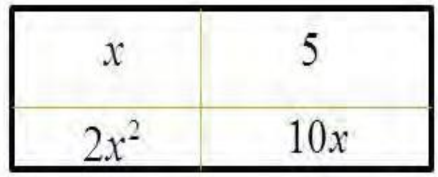


Figura 2.9 Representación de$2x^2 + 11x + 5$

Posteriormente, se obtienen el término común de forma vertical y horizontal (ver Figura 2.10), lo que resulta $2x^2 + 11x + 5 = x + 5\ (2x + 1)$.

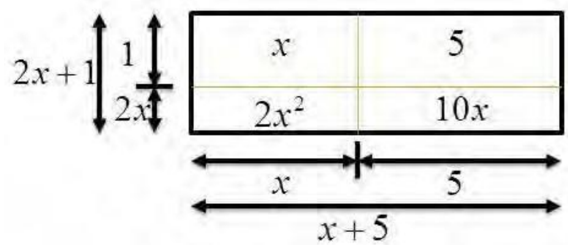


Figura 2.10 Construcción de $2x^2 + 11x + 5$.

Ejemplo 2.4 Desarrolle $6x^2 - 7x - 3$, utilice representación de geométrica.

El desarrollo de este polinomio se realiza de forma similar a los anteriores, en este caso se utilizan líneas horizontales (ver Figura 2.11). Aplicando las representaciones geométricas se llega: $6x^2 - 7x - 3 = 2x - 3\ (3x + 1)$

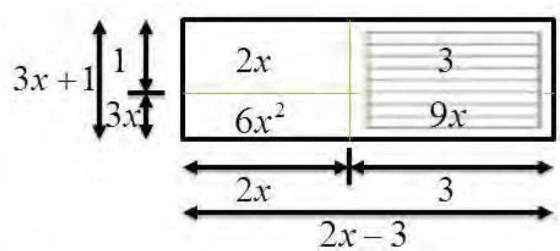


Figura 2.11 Construcción de $6x^2 - 7x - 3$.

Si se toma $a = 1$, se tiene un caso particular de $ax^2 + bx + c$.

Aplicación al movimiento vertical

Ejemplo2.5 Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba, y su altura se puede modelar mediante la ecuación ⍰ $= 3t^2$, donde ⍰ está en metros, y t en segundos. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que alcance una altura de $10\ m$?

Desarrollo:

R&K

1. **Leer**.- Lanzamiento vertical, tiempo, altura, factorización.
2. **Explorar**.- ⍰ $= 10\ m$? $t =$

Figura 2.12 Diagrama del cohete

3. **Elegir** estrategia.- Utilizar representaciones geométricas y factorizar; encontrar el tiempo.
4. **Resolver**. Se construye el rectángulo asociado a $3t^2 + t - 10 = 0$

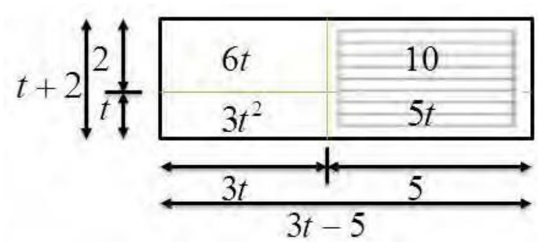


Figura 2.13Representación de $3t^2 + t - 1$

Factorizando: $3t - 5\ t + 2 = 0$. De donde $t_1 = \frac{5}{3}s\ t_2 = -2s$. Por lo que el tiempo que tarda en alcanzar la altura indica es $t_1 = \frac{5}{3}s$.

5. **Extender**. ¿Qué pasa si la altura es mayor o menor?

Retroalimentación.

Aplicación al movimiento horizontal

Ejemplo 2.6 Un automovilista, tiene un tiempo de reacción para quitar el pie del pedal de aceleración y colocarlo en el freno. Durante este tiempo recorre una determinada distancia d, llamada de frenado. Dicha distancia se puede modelar mediante la ecuación $10d = v^2 + 10v$, si el conductor observa que a $20\ m$ de distancia (supuesta de frenado) se encuentra un obstáculo y frena, ¿a qué velocidad debe ir al momento de aplicar los frenos para evitar la colisión?

R&K

1. **Leer**.- Movimiento horizontal, frenado, distancia, velocidad, tiempo
2. **Explorar**.- $¿v$?, distancia= $20\ m$

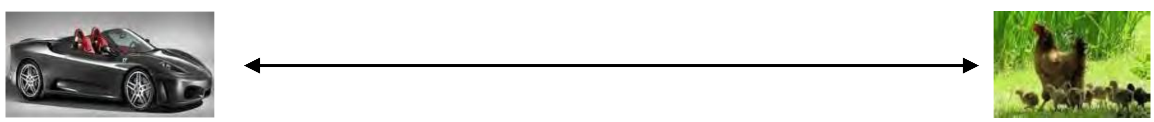


Figura 2.14 Diagrama de distancia de frenado

3. **Elegir** estrategia.- Utilizar representaciones geométricas; factorizar; encontrar la velocidad.
4. **Resolver**. Se construye el rectángulo: $v^2 + 10v - 200 = 0$

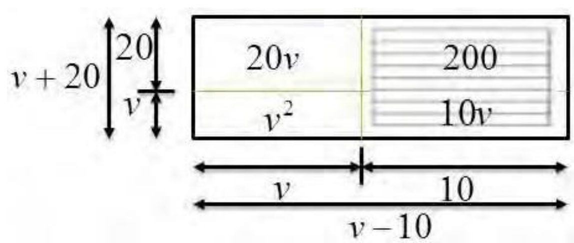


Figura 2.15 Representación de $v^2 + 10t - 200 = 0$.

Los factores son: $v - 10\ \ v + 20\ = 0$; por lo que la velocidad a la que debe tener al aplicar los frenos es de $10\ m/s$ para evitar la colisión, la segunda solución no tiene significado físico.

Utilizando la fórmula general.-

Los resultados se pueden obtener utilizando la expresión llamada *fórmula general*, la cual se describe a continuación:

Dada la ecuación, $ax^2 + bx + c = 0$, las raíces se pueden obtener mediante la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo que, de la ecuación que aparece en **Resolver**, se tiene $a = 1, b = 10, c = -200$

Las soluciones son:

$$v_1 = -20\, m/s; \quad v_2 = 10\, m/s.$$

5. **Extender**. ¿Qué pasaría si la velocidad que lleva es mayor? ¿de qué otra manera podría evitar el contacto?

Retroalimentación.

- *¿Qué aprendí de estos ejercicios?*
- *¿Qué quedó claro y qué no?*

Ecuaciones lineales

Definición. Una función lineal es aquella cuyo dominio son todos los números reales y además es un polinomio de primer grado. Es decir

$$f(x) = ax + b$$

Donde a y b son números reales.

Ejemplo 2.7 Resolver la siguiente ecuación lineal: $8x - 13 = 5x + 2$

Desarrollo: Operamos matemáticamente de la siguiente manera:

$$8x - 13 + 13 = 5x + 2 + 13$$

$$8x \ = 5x + 15$$

$$8x - 5x \ = 5x - 5x + 15$$

$$3x \ = 15$$

Por lo que la solución es:

$$\boldsymbol{x = 5}$$

Ejemplo 2.8 Resolver la siguiente ecuación lineal: $8 - \frac{5}{x} = 2 + \frac{3}{x}$

Operamos matemáticamente de la siguiente manera:

$$8 - 2 = \frac{5}{x} + \frac{3}{x}$$

$$6 = \frac{8}{x}$$

Aplicamos propiedad de inversos (despeje de la variable x)

$$\boldsymbol{x = \frac{4}{3}}$$

Aplicación del número de Reynold

Ejemplo 2.9 Las pruebas de laboratorio, acerca del número de Reynolds, para un fluido determinado se muestran en la Tabla 2.1. La tubería donde se realizó dicho análisis tiene un diámetro de $2\ plg$ y recordando que $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{VL}}{\nu}$, donde R es el número de Reynolds, V es la velocidad promedio de las partículas del fluido, L es el diámetro de la tubería, ν es la viscosidad dinámica. Utilice los datos de la Tabla 2.1 y encuentre la viscosidad dinámica del fluido. ¿De qué fluido se trata?

Tabla 2.1 Prueba de número de Reynolds

$Velocidad\ relativa$	$Número\ de\ Reynolds$
0	0
3	14.955
9	44.865
11	54.9
15	74.666

1. **Leer**. Fluido, viscosidad, diámetro de tubería, número de Reynolds, velocidad del fluido.
2. **Explorar.** $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{VL}}{\nu}$, V (independiente) y R (dependiente).
3. **Elegir estrategia.** El cociente $\frac{L}{\nu}$, se puede tomar como una constante. Graficar los datos para encontrar la relación entre las variables.
4. **Resolver.** La gráfica de los datos se muestra en la Figura 2.16

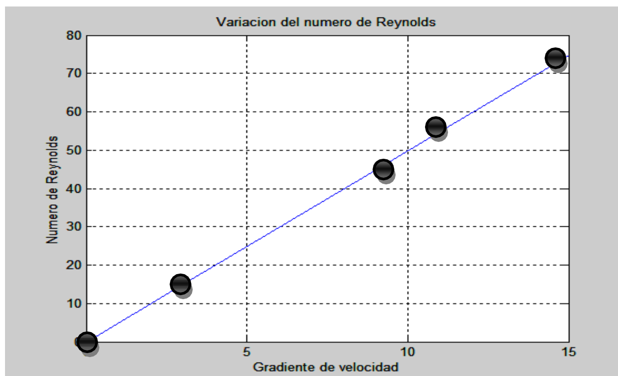


Figura 2.16 Relación lineal entre velocidad y número de Reynolds

Al graficar los datos se observa un comportamiento lineal por lo que $m = \frac{\mathrm{L}}{\nu}$ representa la pendiente de la recta. De esta manera

$$m = 4.985$$

Así que $\nu = 1.007\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$, este valor representa a la viscosidad dinámica del agua.

5. **Extender.** ¿Esta relación lineal podría permanecer para cualquier régimen de flujo?

Retroalimentación.

- *¿Qué aprendí de estos ejercicios?*
- *¿Qué quedó claro y qué no?*

Aplicación al movimiento rectilíneo uniforme

Ejemplo 2.10 Pepe ve pasar a una linda chica en un auto compacto, y calcula que viaja a 50 a velocidad constante sobre una carretera Federal. Le toma $5\,min$ a Pepe arreglarse, subir a su deportivo rojo y salir como bólido a 75 , supuesta constante. ¿Cuánto tiempo le toma a Pepe alcanzar a la chica bonita?

R&K

1. **Leer**. Movimiento horizontal, velocidad constante, distancia, tiempo
2. **Explorar**. Tiempo al cual recorren la misma distancia.

$x = 50t$

$x = 75(t - 0.08)$

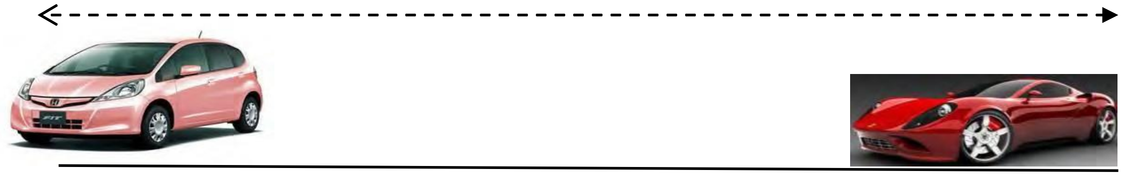


Figura 2.17 Diagrama de distancia de frenado

3. **Elegir** estrategia. Expresar la distancia en términos del tiempo, obtener una ecuación lineal y resolver para t.
4. **Resolver**. El segundo auto alcanza al primero cuando el número de millas recorridas es igual para ambos, es decir

$$75\ \ t - 0.08\ \ = 50t$$
$$75t - 6 = 50t$$
$$75t - 50t\ = 6$$
$$\boldsymbol{t = 14.4min}$$

5. **Extender**. ¿qué pasaría si la velocidad del auto 2 aumenta o disminuye? Si el auto 2 acelera, ¿cómo cambiaría su procedimiento?

Retroalimentación.

- *¿Qué aprendí de estos ejercicios?*
- *¿Qué quedó claro y qué no?*

Problemas contextualizados propuestos

2.1 Un contenedor de lodo de perforación que tiene una capacidad de $450\ m^3$ está completamente vacío y se comienza a llenar por medio de dos válvulas. Se abrió la válvula A durante un tiempo t_1, a una velocidad de $50\ lt/s$ y luego se cerró. Más tarde se abrió la válvula B a una velocidad de $50\ lt/s$, permaneciendo abierta el doble del tiempo que la primera hasta llenar el contenedor. ¿Cuánto tiempo permaneció abierta cada válvula?

2.2 Calcule el valor de la velocidad de un fluido, considerando que las pérdidas por fricción son de $0.5\ m$ y la constante $k = 0.02$ (recuerde que la aceleración por gravedad es igual a $9.81\ \frac{m}{s^2}$). Utilice la ecuación $f = k\frac{v^2}{2g}$

2.3 En una plataforma marina se tiene como soporte una viga de hierro de forma cilíndrica de radio $15\ cm$ y un largo 60 m. Si la densidad del hierro es $\rho = 7.86 \times 10^3 \frac{Kg}{m^3}$ ¿Cuánto pesa la viga? $m = V\rho$

2.4 Un contenedor cilíndrico vertical, de aguas residuales, de radio $1.75\ m$ y de largo $3m$ tiene agua hasta un nivel que se encuentra a $2\ metros$ del fondo, en estas condiciones el contenedor pesa $150Kg$. Hallar:

a. La presión ejercida por el líquido sobre la base del contenedor
b. ¿Cómo cambia la presión si el contenedor se encuentra completamente lleno? Suponga que el contenedor está cerrado.

2.5 Está circulando agua en una tubería la cual tiene un diámetro de ¾ de pulgada a una velocidad de $4\ ft/s$. ¿Cuál es el caudal ($\varphi = Av$) que circula en la tubería? Nota: expresar el resultado en m^3/s

2.6 Una compañía fabrica tuberías de revestimiento (en millas). El administrador indica que cuesta $\$500\ dls/mi$ hacer la tubería, que se vende en $\$1200\ dls/mi$ ¿Cuánta tubería de revestimiento debe fabricarse y venderse para tener una ganancia de $\$100{,}000\ dls$?

2.7 Se desea colocar la pintura base a una plataforma moderna, cuya área es $1600\ m^2$ y es modelada por $A = x^2 - 20x + 100$ en m^2, el litro de pintura rinde $6\ m^2$ y su costo es de $\$120$ pesos.

a. Hallar las dimensiones de la plataforma.
b. El gerente autoriza la ampliación de la plataforma para un helipuerto circular, cuyo radio es $40\ m$ menor que la dimensión de la plataforma, ¿Cuantos litros se necesita para pintar la plataforma y su anexo?
c. ¿Cuánto se gastaría en la pintura?

2.8 Diariamente una compañía puede vender x unidades de barriles de petróleo a p dólares cada unidad, en donde la relación entre p y x (precio y número de artículos vendidos), está dado por la ecuación de precio: $p = 140 - 4x$, donde x está en miles de barriles. Si el precio por barril en el último trimestre ha disminuido, ¿Cuantos barriles deben venderse para obtener ingresos de $\$1,200 dls$?

2.9 Roxlson es un negocio que fabrica y vende bentonita a Pemex. Suponga que el ingreso por venta es $R\ x = x(x - 50)$, donde R está en dólares por día y x en el número de sacos $(50Kg)$. Para tener un ingreso de $\$3,600$ dólares en ese periodo, ¿cuántos sacos de bentonita se deben vender? ¿Cuál sería su ingreso en un mes?

2.1 O Una compañía petrolera desea asfaltar el estacionamiento de sus instalaciones, el costo es de $700(x)\ \frac{pesos}{ft^3}$, donde x representa el ancho del estacionamiento.

a. Determine las dimensiones del estacionamiento rectangular, si su área es de $3,800\ ft^2$ y el largo $62\ ft$ menor que su ancho.

b. Si el grosor es de $5\ cm$, ¿cuál es el costo de asfaltar?

2.11 Petrotech, una compañía que inicia sus operaciones en México, proyecta que sus utilidades anuales, $P(t)$ en miles de dólares, durante los primeros $6\ años$ de operación pueden calcularse mediante la función $P\ t = 4t^2 - 20t + 25$, en donde t es el número de años en operación.

a. Calcule el tiempo necesario para que las utilidades decaigan a cero, según este modelo

b. Elabore una gráfica y encuentre el tiempo al cual se alcanza la utilidad máxima.

2.12 Se desea perforar la primera etapa de un pozo petrolero y se contrata a una compañía para hacerlo. La compañía tiene que perforar $500ft$ para encontrar el hidrocarburo e informa a los contratantes que acaba de adquirir un nuevo equipo que perfora una velocidad de un pie por minuto más rápido, lo cual les permitirá llegar al hidrocarburo 2.8 ? rs horas antes que con el equipo antiguo.

a. ¿Cuánto tarda el equipo antiguo en perforar?

b. Determine la velocidad a la que perfora el equipo nuevo.

c. Si la ganancia de la compañía está dada por $f\ t = \frac{995,736}{t-12.84}$, entonces ¿Cuál será la ganancia obtenida con el equipo antiguo y cual con el nuevo? Si en total, se perforaran $4500\ ft$, y bajo las mismas condiciones. ¿Cuál es la ganancia total para cada caso?

2.13 El precio de un barril de crudo es p dólares por unidad, suponga que un fabricante suministrara $3p^2 - 4p$ unidades del producto y que los consumidores demandarán $24 - p^2$ unidades. En el valor de p para el cual la oferta es igual a la demanda, se dice que el mercado está en equilibrio. Determina el valor de p.

Capítulo III. Introducción a la geometría plana

3.1 Ecuación de la recta

3.2 Ecuaciones cuadráticas

3.3 Ecuaciones racionales

3.4 Problemas contextualizados

Definición 3.1 Una recta que pasa por dos puntos se puede escribir como

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Definición 3.2 Sea L una recta que no es paralela al eje y sean $P_1(x, y)$ y $P_2(x, y)$ puntos distintos en L. La pendiente se define como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente queda indefinida si la recta es paralela al eje y.

Ejemplo 3.1 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por cada par de puntos y trace su gráfica.

a) $A(-2,9)$ y $B(3,1)$
b) $A(3,5)$ y $B(-2,-2)$


Desarrollo:

a) Se emplea la **Definición 3.2** para calcular la pendiente

$$m = \frac{1 - 9}{3 + 2} = -\frac{8}{5}$$

Haciendo uso de la **Definición 3.1** se tiene:

$$y - 9 = -\frac{8}{5}(x + 2)$$

Por lo que la ecuación queda como:

$$\boldsymbol{y = -\frac{8}{5}x + \frac{29}{5}}$$

En la Figura 3.1a se muestra la gráfica de esta función cuya pendiente es negativa, se muestran los puntos que cortan al eje horizontal y vertical.

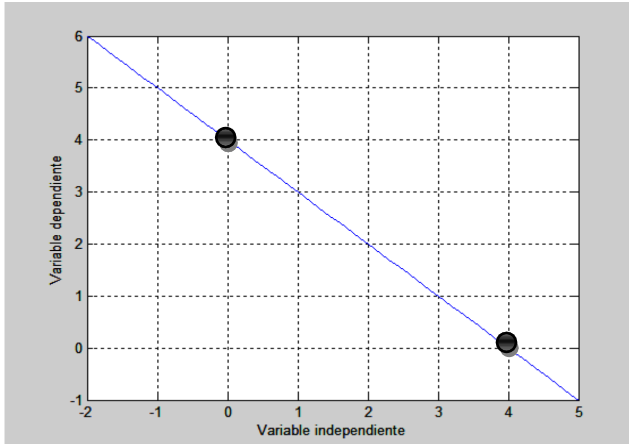


Figura 3.1a Gráfica de la recta con pendiente positiva

b) Utilizando la **Definición 3.2,** la pendiente será $m = \frac{-2-5}{-1-3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Haciendo uso de la **Definición 3.1** se llega a:

$$y - 5 = \frac{2}{3}(x - 3)$$

Por lo que la ecuación queda como: $\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x + 3}$

En la Figura 3.1b se muestra la gráfica de esta función cuya pendiente es positiva, se muestran los puntos que cortan al eje horizontal y vertical.

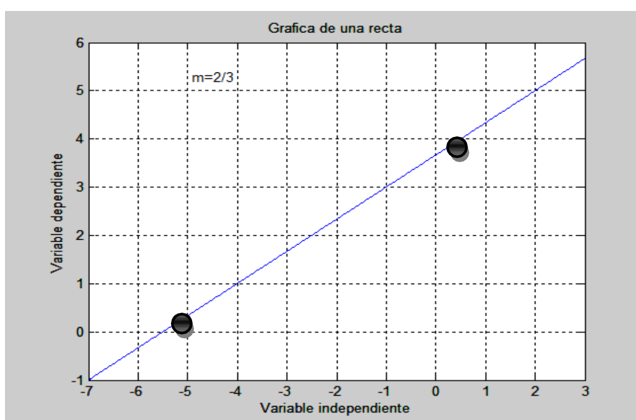


Figura 3.1b Gráfica de la recta con pendiente positiva

La Figura 3.1 representa la gráfica de una función con pendiente positiva, no obstante se pueden tener rectas con diferentes pendientes. En la Figura 3.2 se muestran algunas rectas con pendiente positiva y punto al origen negativo (azul); pendiente negativa y punto al origen positivo (roja); y pendiente nula con punto al origen positivo (verde).

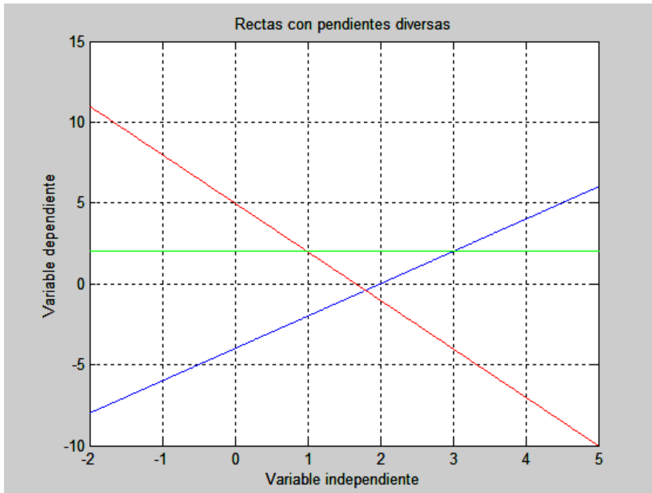


Figura 3.2 Grafica de rectas con pendientes positiva, negativa y cero.

Por si estabas con el pendiente…

La geometría como palabra tiene dos raíces griegas: geo=tierra y metrón= medida; o sea, significa "medida de la tierra". Su origen, unos tres mil años A.C, se remonta al Medio Oriente, en particular al Antiguo Egipto, en que se necesitaba medir predios agrarios y en la construcción de pirámides y monumentos. Esta concepción geométrica se aceptaba sin demostración y era producto de la práctica. Estos conocimientos pasaron a los griegos y fue Thales de Mileto quien hace unos 6 siglos A.C inició la geometría demostrativa. Euclides fue otro gran matemático griego, del Siglo III A.C, quien usando un razonamiento deductivo parte de conceptos básicos primarios no demostrables ya que se captan a través de los sentidos tales como punto, recta, plano y espacio, que son el punto de partida de sus definiciones, axiomas y postulados. Por ejemplo un punto puede estar representado por la huella que deja sobre un papel, la presión de la punta de un alfiler, una recta está sugerida por un hilo a plomo, un plano está sugerido por la superficie de un lago quieto. El espacio euclidiano puede considerarse constituido por todos los puntos existentes, o sea, el espacio en que nos movemos.

Predicción del peso en niños

Ejemplo 3.2 Un bebé puede pesar hasta $10\ \text{lb}$ al nacer y tres años más tarde el peso del niño llega a ser $30\ \text{lb}$. Suponga que el peso P (en libras), hasta los 12 años, está linealmente relacionado con la edad t (en años):

a) Exprese P en términos de t
b) ¿Cuál es el peso del niño a los seis años de edad?
c) ¿A qué edad pesará $70\ \text{lb}$?
d) Elabore una gráfica de esta ecuación.

1. **Leer**. Crecimiento lineal, peso, edad
2. **Explorar**. $P\ 0 = 10\ \text{lb}\ P, 3 = 30\ \text{lb}\ P\ 70$.
3. **Elegir estrategia**. Buscar la ecuación de la recta, determinar la pendiente y el punto al origen.
4. **Resolver.**

a)

$$P\ \ t\ \ = mt + b$$

Aplicamos primera condición inicial.

$$P\ \ 0\ \ = m\ \ 0\ \ + b\ \ = 10$$

La segunda condición implica que

$$P\ \ 3\ \ = 3m + 10 =\ 30$$

Por tal razón

$$P\ t = \frac{20}{3} t + 10$$

b) De esta manera el peso a los 6 años es:

$$P\ t = \frac{20}{3} 6 + 10 = 50\ \text{lb}$$.

c) Para calcular la edad que tendrá cuando pese $70\ \text{lb}$, despejamos t.

$$t = \frac{3}{20}\;\; 70 - 10 = 9\; años$$

d) La gráfica de la función se muestra en la Figura 3.3, donde se puede observar el crecimiento lineal de un niño con el paso de los años. Los puntos indicados en la figura representan las soluciones a los dos incisos anteriores.

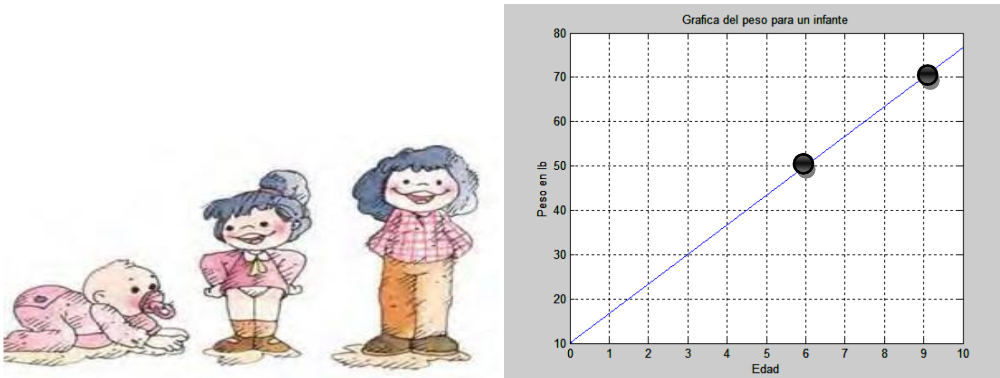


Figura 3.3 Representación del crecimiento de un infante

5. **Extender.** ¿Podría esta ecuación predecir si un niño podría llegar a ser obeso o padecer desnutrición?

Retroalimentación.

- *¿Qué aprendí de estos ejercicios?*
- *¿Qué quedó claro y qué no?*

Funciones cuadráticas

Definición 3.3 Una función algebraica es cuadrática si $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ y $a \neq 0$.

Ejemplo 3.3. Trace la gráfica de la función $f_1(x) = -\frac{1}{2}x^2$ y $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

a) Compare ambas gráficas
b) Encuentre el punto máximo en ambos casos y compare
c) ¿Cuáles son los puntos donde intercepta la curva al eje horizontal?

a) Para obtener las gráficas, se elabora una tabla con valores $-5 < x < 5$, para ambos casos. La Figura 3.4 de la izquierda representa una parábola que se abre hacia abajo y corta al eje horizontal en un solo punto (el origen), por otro lado la gráfica de la derecha es una parábola que corta al eje horizontal en dos puntos; esta es una de las diferencias entre ambas gráficas.
b) El punto máximo para el primer caso se obtiene en el (0,0) y para la segunda gráfica, el punto máximo se obtiene en (0,2). De esto se puede observar que la gráfica sube de “nivel” en el eje vertical.
c) La función $f_2(x)$, corta el eje horizontal en los puntos $x = -2$ y $x = 2$.

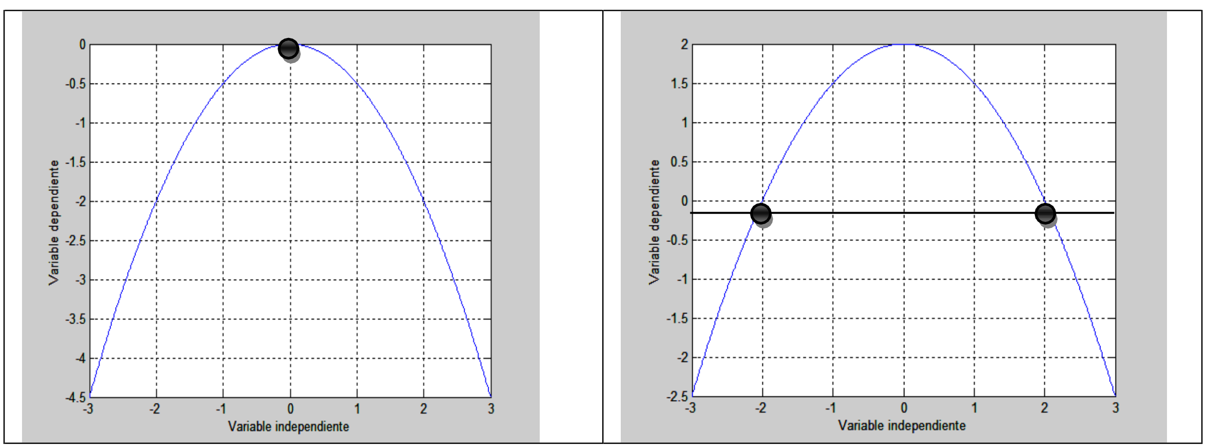
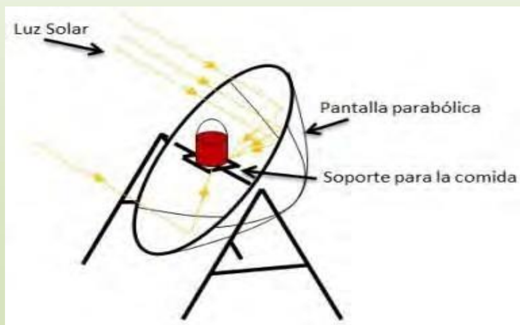


Figura 3.4 *Izquierda*. Gráfica de la función f_1. *Derecha*. Gráfica de la función f_2

Si ahora $a = \frac{1}{2}$, ¿qué pasa con la gráfica? y ¿si $c = -4$? Encuentre un patrón

Por si estabas con el pendiente…

La parábola aparece en muchas ramas de las ciencias debido a que su forma corresponde a gráficas de las ecuaciones cuadráticas. Las parábolas son trayectorias ideales de los cuerpos que se mueven bajo la influencia exclusiva de la gravedad. Una propiedad muy importante es la descrita por Apolonio quien menciona que un espejo parabólico refleja de forma paralela los rayos emitidos desde su foco. Otro ejemplo sería el de una antena parabólica, o un telescopio, las emisiones de luz de una estrella lejana se acercan a la tierra como rayos paralelos, situando el eje del reflector parabólico paralelo a dichos rayos, estos se reflejan en el foco de la superficie parabólica. Recíprocamente todos los rayos que emanan de la bombilla (situada en el foco) del reflector parabólico son paralelos. Algo muy interesante que se aplica mucho en china y que ayuda a ahorrar gas, dinero y esfuerzo son las cocinas solares.



Ejemplo 3.4 Analice la gráfica de la función $f(x)$ de la **Definición 3.3** para los casos mostrados en la Tabla 3.1

Tabla 3.1 Valores a considerar en $f(x)$

Parámetros
$a > 1; b = 0; c = 0$
$a > 1; b < 0; c = 0$
$a < 1; b > 1; c < 0$
$a < 1; b > 1; c > 1$

En la Figura 3.5 se muestran las gráficas de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, para algunos valores acorde a la Tabla 3.1. Las funciones utilizadas fueron

1. $f(x) = 5x^2$
2. $f(x) = 2x^2 - 3x$
3. $f(x) = -4x^2 + 5x$
4. $f(x) = -2x^2 + 8x + 3$

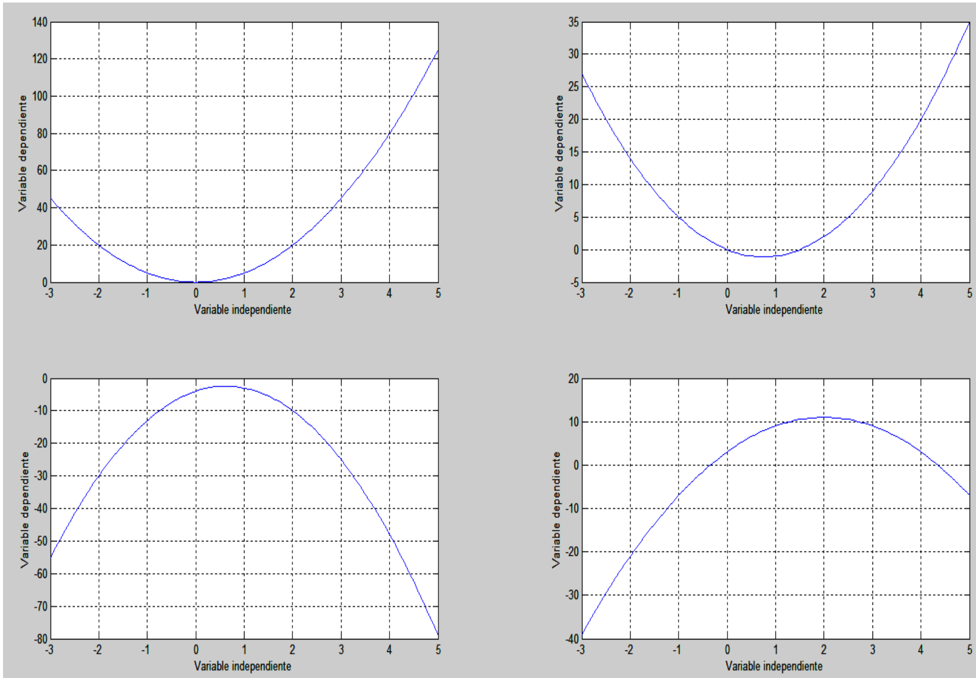


Figura 3.5Representación graficas de diversas funciones cuadráticas

Observe los pequeños cambios en las curvas, cuando el coeficiente del término cuadrático es positivo, la gráfica se abre hacia arriba y se mueve hacia la derecha o izquierda si el término lineal es positivo o negativo. Algo semejante ocurre cuando el término cuadrático es negativo, solo que la curva se abre hacia abajo.

Ejemplo 3.5 Refiérase al Ejercicio 2.8 del Capítulo II. Elabore una gráfica de la función que representa el área de la plataforma. Identifique la sección de la gráfica que corresponde al área real.

Se elabora la Tabla 3.1 con $-30 < t < 50$ para números enteros, recordando que $A = x^2 - 20x + 100$, y $A = 1600\ m^2$. La forma de la gráfica de esta función está representada por una parábola que se abre hacia arriba y se muestra en la Figura 3.5

Tabla 3.1 Datos generados con la función *cuadrática*.

$t(s)$	-40	-30	-20	0	5	20	30	40	50	60
? (m)	900	0	-700	-1500	-1575	-1500	-1200	-700	0	900

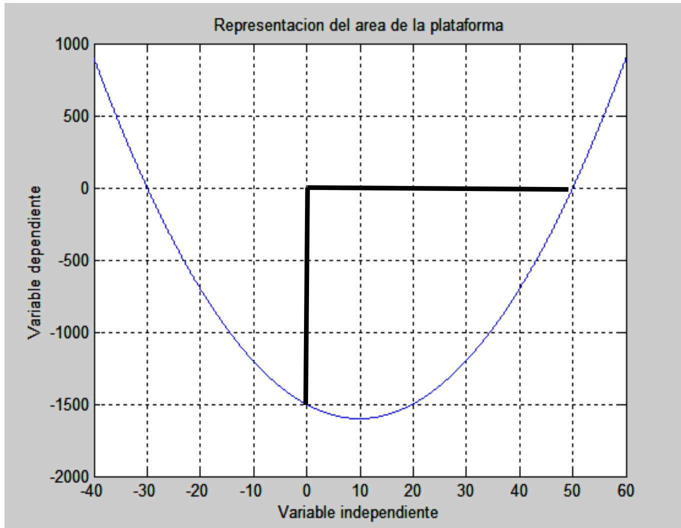


Figura 3.5Representación gráfica del área de la plataforma

Debe observarse que el área de la plataforma está modelada por el área que limitan las rectas en color negro y la curva azul. El área se puede calcular utilizando métodos de integración, sin embargo en este libro no se incluye ese método.

Por si estabas con el pendiente…

Los modelos matemáticos se usan generalmente para describir conjuntos de datos y pueden representarse por diferentes tipos de funciones tales como lineales, cuadráticas, cúbicas, racionales y trigonométricas.

En 1637, el matemático francés René Descartes revoluciono las matemáticas al unir sus dos ramas principales: Álgebra y geometría. Descartes hizo numerosas contribuciones a la filosofía, la ciencia y las matemáticas. En su libro La Géométrie, publicado en 1637, describió la idea de representar los puntos del plano por medio de pares de números reales y las curvas en el plano mediante ecuaciones. Con ayuda del plano coordenado de Descartes, los conceptos geométricos se pudieron formular de manera analítica y los algebraicos visualizarse de forma gráfica.

Funciones racionales

Definición 3.4. Se dice que una función es racional si

$$f\ x = \frac{g(x)}{\boxed{?}\,(x)}$$

Donde $g(x)$ y son polinomios. El dominio de $f\ x$ está formado por todos los números reales excepto los ceros del denominador.

Ejemplo 3.6 Obtenga la gráfica de la función $f\ x = \frac{12}{x-2}$ y analice su comportamiento.

Desarrollo:

Primero se genera una tabla de valores $2 < x < 6$, con un paso de 0.5 , ver Tabla 3.2. Se ubican los datos en el plano cartesiano y se observa que el comportamiento de los mismos tiene un decaimiento progresivo, es decir a medida que aumenta la variable independiente, la función $f\ x$ disminuye de valor, inicialmente el cambio es grande sin embargo, al aumentar el valor de x la función disminuye más lentamente.

Tabla 3.2 Generación de datos para la función $f\ x$.

x	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
$f(x)$	24	12	8	6	4.8	4	3.42	3

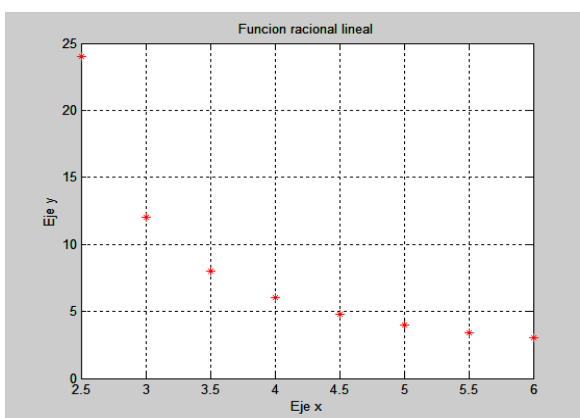


Figura 3.4 Gráfica del comportamiento de una función racional

¿Qué ocurre con $f\ x$ cuando $x \to \infty$? ¿Qué ocurre cuando $x \to 2$?

Aplicación a una prueba PVT

Ejemplo 3.7 Los datos de la Tabla 3.3 representan la relación entre presión y densidad relativa para un gas natural sometido a temperatura constante ($T = 112.4°C$) del pozo Hélido-3.

a) Elabore una gráfica de los datos y explique su comportamiento

b) Discuta con sus compañeros qué tipo de función puede modelar los datos

c) ¿Converge a algún valor la densidad?

Desarrollo:

Tabla 3.3 Datos presión vs densidad

$Presión\ \frac{Kg}{m^2}$	0	8	30	70	110	140
$\rho\ \frac{Kg}{m^3}$	1.7	1.28	0.97	0.88	0.85	0.84

a) Se realiza la gráfica de la Tabla 3.3, se observa un comportamiento ascendente en la densidad del gas al disminuir la presión (en este caso la gráfica se interpreta de derecha a izquierda), esto puedo ocurrir en yacimientos con comportamiento retrógrado.

b) Los datos se pueden modelar mediante una función racional con denominador lineal de la forma $\rho = \frac{k}{P+b}$.

c) Si se observa la Figura 3.5, se puede notar que a medida que la presión disminuye la densidad tiende a un valor fijo aproximado $\rho = 1.75\ \frac{Kg}{m^3}$, lo cual podría indicar un cambio de fase.

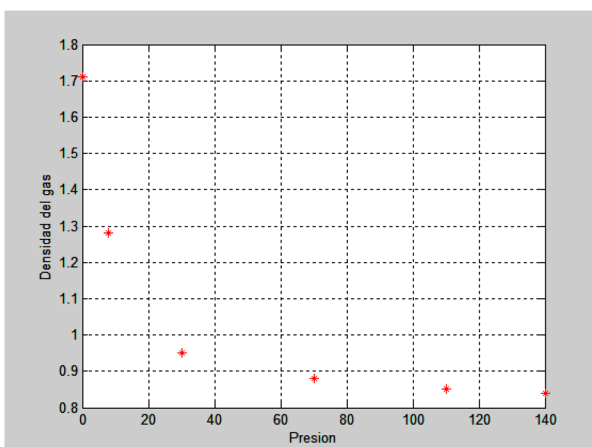


Figura 3.5 Grafica de datos del pozo Hélido-3

Retroalimentación.

- *¿Qué aprendí de estos ejercicios?*
- *¿Qué quedó claro y qué no?*

Descarga de un contenedor de combustible

Ejemplo 3.8 En una planta distribuidora de combustible se quiere instalar un sistema de bombeo automatizado SBA105, el nivel de descarga del contendor de gasolina se puede modelar mediante la función: $V = \frac{55000}{20t+150}$, donde V está en metros cúbicos y t en minutos, según los técnicos. Con el sistema actual de la planta, el tiempo estimado para llenar un tráiler de $40{,}000$ lts es de $14\ min$, el gerente decidirá instalar el SBA105 si el tiempo se reduce en al menos 35%. Utilice la Tabla 3.4, elabore una gráfica y diga si le conviene al gerente hacer la inversión.

Tabla 3.4 Medida del volumen en función del tiempo

$t(min)$	0	10	20	40	60	80	100	120
$V(m^3)$	366.66	323.52	289.47	239.13	203.7	177.41	157.14	141.02

Desarrollo: **R&K**

1. **Leer.** Volumen, tiempo, capacidad del tráiler.
2. **Explorar.** Se cuenta con valores de tiempo y la función modeladora.
3. **Elegir estrategia.** Graficar la Tabla 3.4, calcular la diferencia de volumen entre dos datos sucesivos.
4. **Resolver.** $V(0) = 366.66m^3$, a los $10min$ el volumen es $V(10) = 323.52m^3$, por lo que la cantidad de combustible entregada sería $V = 43.14m^3$. De aquí se deduce que el tiempo estimado para atender al tráiler es menos de $10min$. Por lo cual se puede sugerir al gerente instalar el SBA105.

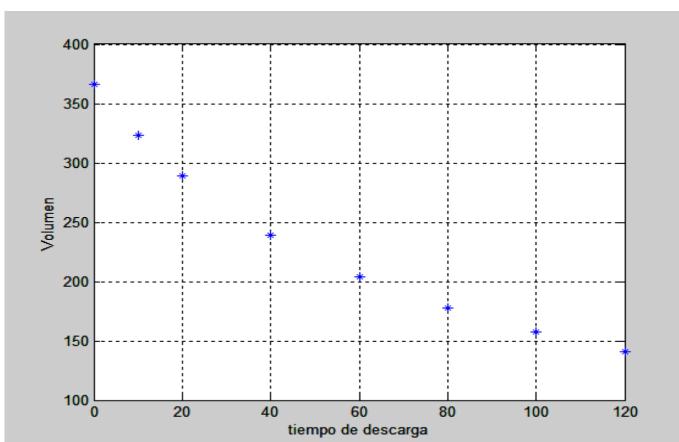


Figura 3.6 Volumen de la gasolina en el tanque

5. **Extender.** ¿Podría atender a otro tráiler de la misma capacidad en los siguientes $10min$?

Problemas contextualizados propuestos

3.1 Estudios oceanográficos indican que la temperatura del agua de mar desciende a medida que la profundidad aumenta. En un estudio se observó que en el Golfo de México que la temperatura en la superficie es de $26°\ C$ y a $500\ m$ de profundidad es de $5°\ C$. Si el comportamiento es lineal

a. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona la temperatura con la profundidad.

b. ¿Qué temperatura tiene a $150\ m$ de profundidad?

c. ¿A qué profundidad se encuentra una temperatura de $3°\ C$?

3.2 La relación entre la temperatura del aire $T\ (en\ °F)$ y la altitud ? (en pies sobre el nivel del mar) es aproximadamente lineal. Si la temperatura al nivel del mar es $60°F$, un aumento de $5000\ ft$ en altitud baja la temperatura del aire en alrededor de $18°$

a. Exprese T en términos de ? y trace la gráfica en un sistema de coordenadas adecuado.

b. Aproxime la temperatura del aire a una altitud de $15{,}000\ ft$

c. Aproxime la altitud a la que la temperatura sea Oº.

3.3 La temperatura dentro de un pozo a una profundidad de $450m$ es de $53°C$,a $900\ m$ es de $105°C$. Suponiendo un incremento de la temperatura de manera constante,

a. Exprese la temperatura T en función de la profundidad,

b. ¿Cuál será la temperatura a una profundidad de $1350m$?

c. ¿A qué profundidad se alcanzará una temperatura de $76.4°C$?

3.4 Un contenedor con $3000\ m^3$ de aceite, se descarga a través de una tubería. Un fluxómetro indica que a los cuatro segundos de iniciada la descarga el volumen en el contenedor es de $2200\ m^3$. Asumiendo una tendencia lineal en esta descarga,

a. ¿Cuál será el volumen a los $5s$?

b. ¿En qué momento quedará vacío el contenedor?

3.5 Para continuar con la perforación de un pozo, un ingeniero quImIco toma muestras del fluido que se está utilizando y necesita obtener la viscosidad para su tratamiento. Basados en la Tabla P3.5 que se muestra, determine:

a. La grafica de estos datos y describa el comportamiento que tiene

b. La viscosidad del fluido

Tabla P3.5 Datos del fluido de perforación

ω (rpm)	$\tau\ (lb/100\ ft^2)$
3	3.96
6	7.92
100	132

Nota: Un fluido newtoniano es un fluido cuya viscosidad puede considerarse constante en el tiempo. Los fluidos newtonianos son uno de los fluidos más sencillos de describir. El mejor ejemplo de este tipo de fluidos es el agua en contraposición al pegamento, la miel o los geles y la sangre que son ejemplos de fluido no newtoniano.

$$\tau = \mu\omega$$

donde τ: esfuerzo cortante; ω : velocidad de corte; μ : viscosidad.

3.6 Si la temperatura permanece constante, la presión de un gas encerrado es inversamente proporcional al volumen (ley de gas ideal: $(PV = nRT)$. Para realizar una prueba PVT del gas H_2S se introduce a un pistón cilíndrico de 7 plg de largo, alcanzando una presión de 28 lb/plg^2. Si el pistón se expande longitudinalmente a 10 plg, encuentre:

a. La nueva presión en el cilindro
b. Trace una gráfica de la relación entre la presión y el volumen
c. Describa su comportamiento

3.7 Se estima que las pérdidas por el derrame del pozo Terra II puede llegar a los millones de pesos. Como parte del plan de reparación de daños se ha contratado a la empresa LIMTAB para limpiar la zona de contaminación; el nivel de contaminación (concentración de impurezas) puede modelarse con la ecuación

$$C\ t = \frac{300}{200t + 85}$$

a. Trace la gráfica de C para $0 < t < 50$ (días)
b. Describa el comportamiento del nivel de contaminación del suelo
c. ¿En qué tiempo se alcanza una concentración de 5%?
d. ¿Qué ocurre con $C(t)$ después de este tiempo?

3.8 Una tubería de $8plg$ transporta aceite SAE-10W ($\eta = 0.33Ns/m^2$ a $40°C$) y está sometida a una presión manométrica de $15000Pa$. Si la longitud de la tubería es de $250\ m$ y haciendo uso de la ecuación de Poiseuille:

a. ¿Cómo cambia el flujo con la longitud de la tubería?
b. ¿Cuál será el flujo a la mitad de la tubería?
c. ¿Qué cambios propondría en el diseño del sistema de tuberías para que el flujo no decaiga?

$$\emptyset = \frac{\pi\Delta P\ r^4}{8\eta(L+5)}$$

3.9 Los datos de la Tabla P3.9 de abajo muestran los resultados de un análisis PVT elaborado en un laboratorio especializado.

a. Elabore una gráfica de los datos y describa el comportamiento del gas

b. ¿Qué tipo de función puede modelar esos datos? Encuentre la constante de proporcionalidad.

c. ¿Podría decir qué le pasa a la densidad del gas a medida que aumenta la presión?

Tabla P3.9 Datos del PVT

$P(Kg/cm2\ )$	$Factor\ volumen\ (m3/m3$
0	1.30
3	0.75
8	0.271
30	0.075
70	0.0319
110	0.0198
140	0.016

4.1 Función exponencial natural

4.2 Función logaritmo

4.3 Funciones trigonométricas

4.4 Problemas contextualizados

Capítulo IV. Funciones trascendentes

Definición 4.1. La función exponencial natural se define como

$$f(x) = e^x$$

Donde $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828183$.

En la Tabla 4.1 se muestran algunas propiedades de la función exponencial natural,

Tabla 4.1 Propiedades de la exponencial.

Sean x, y
$e^{xy} = e^x + e^y$
2) $e^{x+y} = e^x e^y$
3) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Ley de Crecimiento. Sea q_0 el valor de una cantidad q al tiempo $t = 0$. Si q cambia instantáneamente a una razón proporcional a su valor actual entonces

$$q(t) = q_0 e^{kt}$$

Donde k es una constante de proporcionalidad.

Por si estabas con el pendiente…

En Matemáticas existen algunos números que son muy famosos. Ya conocemos el número π y el número áureo φ; vamos a hablar del número ***e****, que debe su nombre al matemático alemán Leonard Euler. El número* ***e*** *es también la base de los logaritmos naturales o neperianos (inventados por John Napier). Su valor es* ***e*** $= 2.718281828459045\ldots$*.. y aparece si tratamos de formar logaritmos partiendo de una serie geométrica cuya razón común es ligeramente mayor que 1. La fórmula anterior sugiere que hay una base "natural" para los logaritmos, que no es 10 ni 2, sino* ***e****. El logaritmo natural de x es un número y que satisface la condición $x = e^y$. El número es muy importante por ser la base para las funciones exponenciales, y por ello se ha sugerido que Euler llamara* ***e*** *por significar "exponencial". El número* ***e*** *tiene numerosas aplicaciones en todas las ramas de la ciencia, la economía, la ingeniería petrolera, etc.*

Crecimiento poblacional

Ejemplo 4.1. La población de una ciudad en el año 2000, era de 215,750 habitantes. Suponiendo que la población crece a razón constante del 7% cada año, prediga la cantidad de habitantes en el año 2020. Elabore una gráfica.

Desarrollo:

1. **Leer**. Crecimiento, tiempo, número de habitantes.
2. **Explorar.** $t_0 = 0$; $q_0 = 215{,}750$ habitantes .
3. **Estrategia.** Buscar el intervalo de tiempo, utilizar la ley de crecimiento exponencial y sustituir valores.
4. **Resolver.** El intervalo de tiempo a utilizar es $t = 2020 - 2000 = 20$años . Se sustituyen los valores en la ley de crecimiento.

$$q\ t = q_0 e^{kt} = 215750 e^{0.07(20)} = 874{,}909 \text{ habitantes}$$

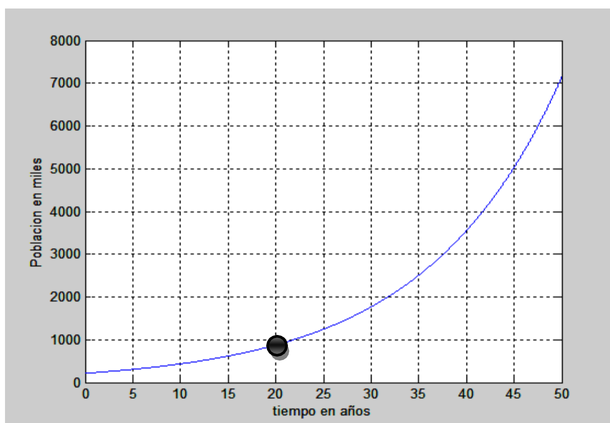


Figura 4.1 Gráfica de la ley de crecimiento

5. **Extender.** Prediga la cantidad de habitantes para el año 2030. ¿Esta función sería válida para cualquier tiempo t?

Modelo para predecir la estatura de un niño

Ejemplo 4.2. El modelo de Jenns es generalmente considerado como la fórmula más precisa para predecir la estatura de niños de preescolar. Si y es la estatura de los niños en cm,t la edad en años, entonces

$$y = 79.041 + 6.39t - e^{3.261 - 0.993t}$$

a) Para $1\ 4 < t < 6$, prediga la estatura de un niño de 4.2 años de edad
b) Elabore una gráfica de la función estatura

Desarrollo:

a) Sustituyendo los valores en la función de crecimiento se tiene

$$y(4.2) = 79.041 + 6.39\ 4.2 - e^{3.261 - 0.993\ 4.2} = 105.47cm$$

b) En la Figura 4.2 se muestra el crecimiento de un niño(a) hasta los seis años de acuerdo al modelo de Jenns.

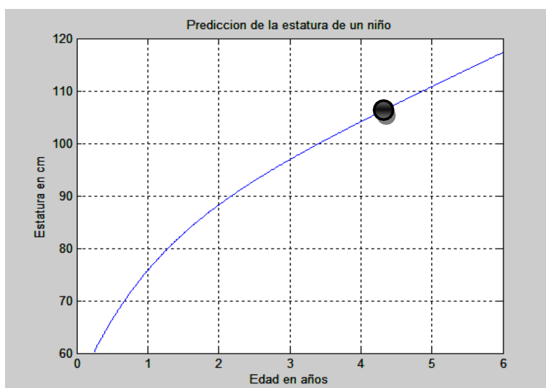


Figura 4.2 Representación gráfica de la estatura de un niño

Retroalimentación.

- *¿Qué aprendí de estos ejercicios?*
- *¿Qué quedó claro y qué no?*

Función logaritmo

Definición 4.2. Sea a un número real diferente de 1. El logaritmo de x con base a está definido por

$$y = log_a x \quad si \;\; y\, solo\, si \quad x = a^y \text{ para toda } x > 0 \text{ y todo número real } y.$$

Tabla 4.2 Propiedades de los logaritmos

Si u y w
1) $log_a uw = log_a u + log_a w$
$log_a \frac{u}{w} = log_a u - log_a w$
3) $log_a u^n = n log_a u$

La función logarítmica natural y la función exponencial natural son funciones inversas una de la otra, es decir

$$\ln\ x = log_e x \quad \text{para toda } x > 0$$

Una forma de relacionarlas es

Tabla 4.3Relación logaritmos-exponencial

Logarítmica	Exponencial
$log\ z = 3$	$10^3 = z$
$ln(\ z) = 8$	$e^8 = z$

Por si estabas con el pendiente…

El descubrimiento de los logaritmos no se produjo aisladamente, por un único proceso. Dos caminos condujeron a su hallazgo: los cálculos trigonométricos para las investigaciones astronómicas aplicables a la navegación, y el cálculo de las riquezas acumuladas en lo que se refiere a las reglas de interés compuesto. Históricamente, el descubrimiento de los logaritmos empezó con John Napier, barón de Murchiston en Escocia. Empezó a trabajar alrededor de 1594 en métodos más teóricos y le llevo 20 años perfeccionarlo y publicarlo.

La siguiente mejora llegó con Henry Briggs, quien fue el primero que hizo las tablas logarítmicas en base 10, en el año 1631, en su obra Arithmetic Logarithmica, explica el objetivo de la invención de los logaritmos: "… son números inventados para resolver más fácilmente los problemas de aritmética y geometría con ellos se evitan todas las molestias de las multiplicaciones y de las divisiones; de manera que, en lugar de multiplicaciones, se hacen solamente adiciones, y en lugar de divisiones se hacen sustracciones. La laboriosa operación de extraer raíces, tan poco grata, se efectúa con suma facilidad. En una palabra, con los logaritmos se resuelven con la mayor sencillez y comodidad todos los problemas, no sólo de aritmética y geometría, sino también de astronomía." John Speidell calculó logaritmos de funciones trigonométricas, publicados como Nuevos Logaritmos en 1619 y JobstBürgi publicó su propia obra sobre logaritmos en 1610, y es muy posible que tuviera la idea básica en 1588, mucho antes que Napier.

La escala Richter

Ejemplo 4.3. En esta escala la magnitud R de un terremoto de intensidad I está dada por $R = \log \frac{I}{I_0}$, donde I_0 es cierta intensidad mínima.

a) Si la intensidad de cierto terremoto es $1000I_0$, encuentre R.
b) Elabore una gráfica de la función R.

Desarrollo:

a) Sustituyendo en la expresión de R, se obtiene $R = log \frac{1000\, I_0}{I_0} = 3$.
b) En la Figura 4.3 se muestra la relación entre intensidad con la magnitud del terremoto. En esta gráfica se puede observar que la relación no es lineal, de hecho si queremos trasladar la escala al sistema cartesiano encontraremos que la relación entre una variable y otra es de tipo exponencial.

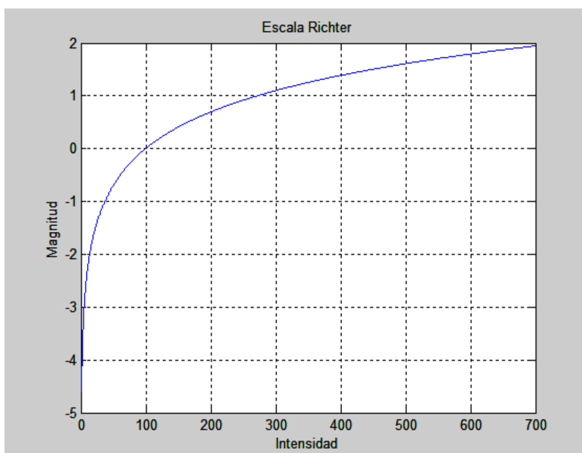


Figura 4.3 Representación de la intensidad de un terremoto

Retroalimentación.

- *¿Qué aprendí de estos ejercicios?*
- *¿Qué quedó claro y qué no?*

Definición 4.3. Un radián θ es la medida del ángulo central de un círculo subtendido por un arco igual en longitud al radio del círculo.

Definición 4.4. La longitud de arco s de una circunferencia de radio r que subtiende un ángulo central de θ radianes, ese define como

$$s = r\theta.$$

Definición 4.5. Si θ es la medida en radianes de un ángulo central de una circunferencia de radio r, entonces el área de un sector circular determinado por θ, se define como

$$A = \frac{1}{2}\theta r^2$$

Definición 4.6. La velocidad angular y la velocidad lineal de una partícula que describe una circunferencia de radio r están dadas por

$$\omega = r\theta \qquad \text{Velocidad angular}$$

$$V = \omega r \qquad \text{Velocidad lineal}$$

Ejemplo 4.4. Una barrena de $12\ plg$ de radio como la que se muestra en la Figura 4.4, gira a una tasa constante de $250\ rpm$. Encuentre:

a) La velocidad angular en rad/s
b) La velocidad lineal de una gota de fluido de perforación que sale disparada tangencialmente de la barrena

Desarrollo:

Se realiza la conversión a rad/seg, teniendo en cuenta que $1rev = 2\pi rad$.

$$\omega = 250rpm \quad \frac{2\pi\ rad}{1rev} \quad \frac{1min}{60s} \quad = 26.1799rad/s$$

Por otro lado, la velocidad lineal se obtiene con

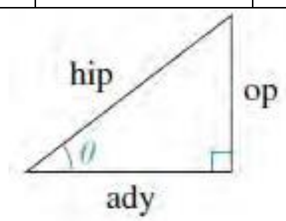
$$V = \omega r = 7.8853\text{m/s}$$

Figura 4.4 Barrena de perforación

Definición 4.7. Las funciones trigonométricas se definen, a partir del triángulo rectángulo, como se muestra en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4 Definición de funciones trigonométricas básicas

$sen\theta = \frac{op}{hip}$	$\cos\theta = \frac{ady}{hip}$	$tan\theta = \frac{op}{ady}$
$csc\theta = \frac{hip}{op}$	$sec\theta = \frac{hip}{ady}$	$ctg\theta = \frac{ady}{op}$



Identidades de Pitágoras.

$\mathbf{\cos^2\theta + sen^2\theta = 1}$	$\mathbf{\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta}$	$\mathbf{\csc^2\theta = 1 + ctg^2\theta}$

Por si estabas con el pendiente…

El origen de la palabra “Trigonometría” proviene del griego "trigonos" (triángulo) y "metros" (metria) y básicamente significa “medir triángulos”. La trigonometría es una de las técnicas matemáticas más utilizadas; está implicada en todo lo que va de topografía a la navegación y a los sistemas de navegación GPS en los automóviles. Su uso en ciencia y tecnología es tan común que normalmente pasa desapercibido.

Los babilonios y los egipcios, hace más de 3000 años, fueron los primeros en utilizar los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas para efectuar medidas en agricultura y para construir pirámides. Posteriormente se desarrolló más con el estudio de la astronomía mediante la predicción de las rutas, posiciones de los cuerpos celestes, para mejorar la exactitud en la navegación, en el cálculo del tiempo y los calendarios. El estudio de la trigonometría pasó después a Grecia y más tarde se difundió por India y Arabia. Desde Arabia se extendió por Europa, donde a mediados del siglo XV inicia una independencia de la astronomía.

Ejemplo 4.5. Un trabajador, situado a $40ft$ de la base de una torre de perforación observa que el ángulo entre el suelo y la cima de la torre es de $50°C$. Determine la altura de la torre.

Desarrollo:

R&K

1. **Leer.** Base de la torre, altura, función tangente.
2. **Explorar.** Base $= 40ft$ ángulo $= 50°C$.
3. **Elegir estrategia.** Utilizar la función tangente y despejar el cateto opuesto
4. **Resolver.**

$$tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{?}{x}$$

Despejando

$$xtan\theta \ = \mathrm{h}$$

$$? \ = 40\ tan\ 50° \ = 14.301m$$

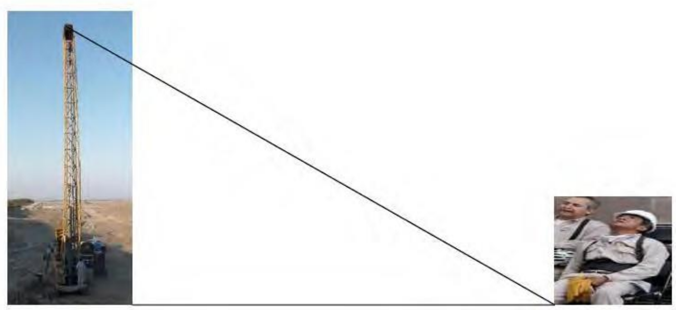


Figura 4.5 Esquema para encontrar la altura de una torre

5. **Extender.** Si el trabajador se acerca a la torre, ¿obtendría el mismo resultado? ¿qué parámetros cambiarían?

Temperatura para un pozo costa afuera

Ejemplo 4.6 La variación de la temperatura, desde la superficie del mar hasta la cima del yacimiento, en la trayectoria que tendrá un pozo costa afuera, puede modelarse mediante la ecuación $T(t) = 50\cos\left(\frac{3.45t}{750} + 8.9\right) + 14.6$, donde t está en m y T en $°C$.

a) Construya una tabla para localizar las profundidades a las cuales hay mayor o menor temperatura
b) Elabore una gráfica de la función $T(t)$
c) ¿Cuál sería la temperatura a los $1000m$?

La temperatura a los $1000m$, es: $T(1000) = 44.346°C$

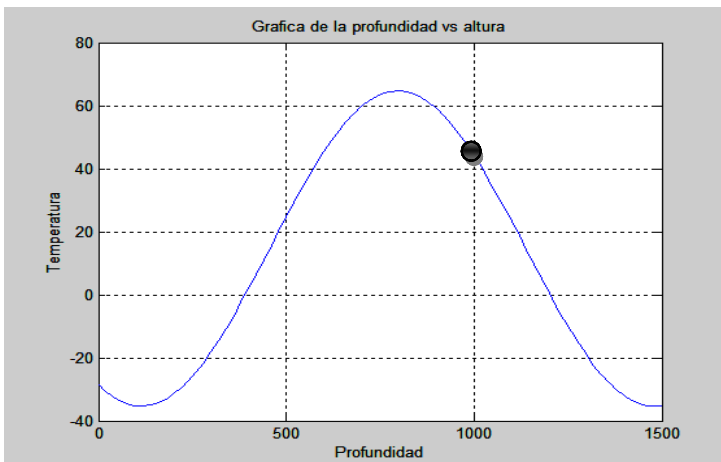


Figura 4.6 Modelo de temperaturas en un pozo

Este modelo indica que la temperatura del pozo tiene variaciones bien definidas, de donde puede observarse que la temperatura máxima es aproximadamente $65°C$ y las temperaturas mínimas pueden ser del orden de los $-35°C$. De esta manera se puede pensar en el diseño adecuado de las tuberías que se va a introducir para que soporten las temperaturas correspondientes a cada zona.

Retroalimentación.

- *¿Qué aprendí de estos ejercicios?*
- *¿Qué quedó claro y qué no?*

Ejemplo 4.7 Stonehenge en Inglaterra, fue construido usando bloques de piedra maciza de más de $99\,900\ lb$ cada uno. Levantar un bloque requería de 500 personas que lo subían por una rampa inclinada a un ángulo 9°. Calcule la distancia que un bloque era movido para levantarlo a una altura de $9.03m$.

Desarrollo:

$$sen\theta = \frac{op}{\boxed{?}\,ip}$$

Despejando ***hip***, se llega a

$$\boldsymbol{hip} = \frac{op}{sen\theta} = \frac{9.03}{sen(9°)} = \mathbf{191.7735}\ \boldsymbol{ft}$$

Observe que el resultado se expresa en pies.

Figura 4.7 Esquema para la construcción de Stonehenge

Retroalimentación.

- *¿Qué aprendí de estos ejercicios?*
- *¿Qué quedó claro y qué no?*

Problemas contextualizados propuestos

4.1 La presión atmosférica (bajo ciertas condiciones) se puede modelar mediante la función

$$P(y) = Ae^{-0.0065\,y}$$

Donde $P(Pa)$,$y(mi)$. Encuentre:

a. El valor de la constante A

b. La presión a una altura de 3.5 mi

4.2 La desintegración de un material radioactivo se puede modelar mediante la función:

$$\mathrm{M}(\mathrm{t}) = \mathrm{M}_0\mathrm{e}^{-0.0269\mathrm{t}}$$

Si la cantidad inicial es del material es de $475\ gr$, aproxime la cantidad de masa después de:

a. $65\ días$

b. $150\ días$

c. $300\ días$

4.3 La densidad atmosférica a una altitud h aparece en la Tabla P4.3. Con esos datos, encuentre:

a. Una función $f(h) = C_0 e^{kh}$ que aproxime la densidad, C_0, y k son constantes

b. ¿Cuál será la densidad a $3000m$ y a $9000m$?

Tabla P4.3 Relación densidad-altitud

Altitud (m)	Densidad (Kg/m^3)
0	1.225
2000	1.007
4000	0.819
6000	0.660
8000	0.526
10000	0.414

4.4 Un país tiene actualmente reservas de hidrocarburos de $50\ mil\ millones$ de barriles; el año pasado consumió 6.5 $mil\ millones$ de hidrocarburo. Los datos de años pasados y las proyecciones de la población sugieren que la cantidad total T en millones de barriles que se usarán en t años está dada por la fórmula $T = 416(e^{0.041t} - 1)$. Si el país utiliza solo sus recursos propios, ¿cuándo se agotaran las reservas?

4.5 Un método para estimar el grosor (profundidad) de una zona geológica es usar la fórmula $\ln \lambda_0 - \ln \lambda = kx$, donde λ_0 representa la longitud de onda de la señal que envía el ecógrafo, λ representa la longitud de onda de esa señal después de pasar una capa de x metros de profundidad y k es la constante de absorción. Suponga que para una señal $\lambda_0 = 8700\, nm$ penetra en una zona y después de recorrer cierta distancia su longitud de onda es $\lambda = 3295\, nm$, ¿Cuál es la profundidad de esta zona? tome $k = 0.039$.

4.6 En latitudes medias a veces es posible estimar la distancia entre regiones consecutivas de baja presión. Si ϕ es la latitud (en grados), R es el radio de la Tierra (en kilómetros) y v es la velocidad horizontal del viento (en), entonces la distancia d (en kilómetros) de una zona de baja presión a la siguiente se puede estimar usando la fórmula

$$d = 2\pi \left(\frac{vr}{0.52\cos(\phi)} \right)^{1/3}$$

A una altitud de 48° el radio de la Tierra es aproximadamente 6369 Km.

a. Calcule d si la velocidad del viento es de $45Km/$,

b. Si y son constantes, ¿cómo varía cuando aumenta la latitud?

4.7 Los puntos en los lados terminales de ángulos desempeñan un importante papel en el diseño de brazos de robot. Suponga que un robot tiene un brazo recto de $18\, plg$ de largo, que puede girar alrededor del origen en un plano de coordenadas. Si la mano del robot está situada en $(18, 0)plg$ y luego gira todo un ángulo de 60° ¿cuál es la nueva ubicación de la mano?

4.8 Suponga que el brazo de robot del ejercicio 4.7 puede cambiar su longitud además de girar alrededor del origen. Si la mano está inicialmente en $(12, 12)plg$, ¿aproximadamente cuántos grados debe girar el brazo y cuánto debe cambiar su longitud para mover la mano a $(16, 10)plg$?

4.9 Un electroencefalograma (Figura P4.9) de ondas del cerebro humano durante el sueño profundo puede aproximarse con la función $y = 0.58 sen(3.75t - 2)$ para representar estas ondas donde y se mide en cm y t en seg,

a. ¿Cuál es el período?

b. ¿Cuál es la amplitud de esta señal? Nota: $\omega = 2\pi/T$

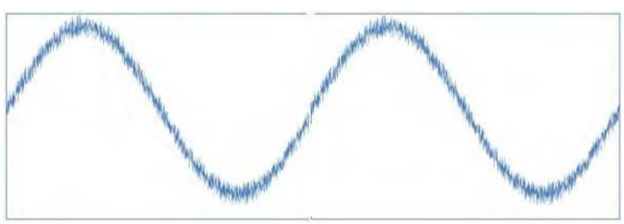


Figura P4.9 Representación de un EFG

4.10 Con base en años de datos meteorológicos, la temperatura esperada $T\ (en\ °C)$ en cierta Ciudad, se puede calcular con $T = 36 sen\left(\frac{2\pi}{365}(t - 101)\right) + 14$.

a. Trace la gráfica de T para $0 < t < 365$

b. Pronostique cuándo ocurrirá el día más frío y cuándo el día más caluroso

4.11 En la Figura P4.11 se muestra parte de un diseño para un tobogán acuático. La altura de los postes es como se indica. Encuentre la distancia de separación que debe existir entre los postes

a. A y B
b. B y C
c. C y D
d. ¿Cuál es la distancia lineal mínima (sobre el terreno) que se necesita para construir el tobogán?
e. Si el tobogán requiere como mínimo de $2m$ de ancho, ¿cuál es el área que se requiere para construirlo?

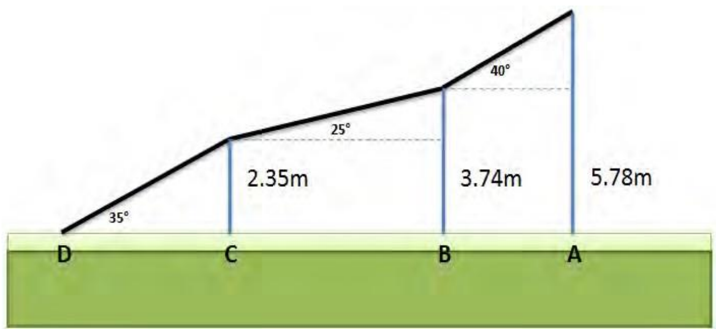


Figura P4.11. Tobogán acuático

4.12 Durante un intervalo de $45\ minutos$, tsunamis cerca de Hawai causados por un terremoto ocurrido en Chile en Abril de 2014 podrían tener una aproximación con la ecuación $y = 8sen\,\frac{\pi t}{6}$, donde y está en pies y t en minutos, Figura P4.12.

a. Encuentre la amplitud y periodo de las olas
b. Si la distancia desde una cresta de la ola a la siguiente era de $21\ km$, ¿cuál era la velocidad de la ola?

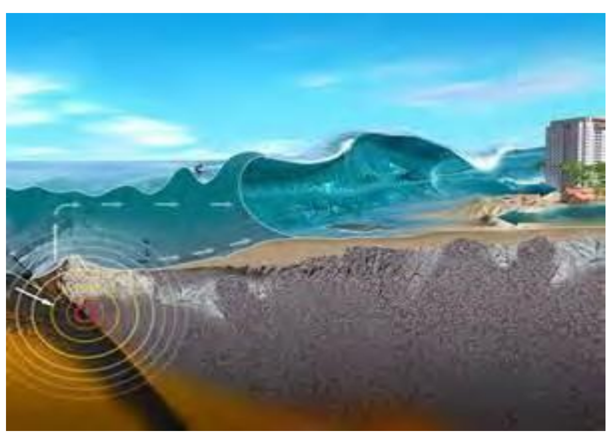


Figura P4.12 Simulación de olas de tsunamis

11 Bibliografía

1. Stewart, 1 (2008). Historia de las matemáticas en los últimos 10,000 años. Drakontos, España.
2. Ibañez, P. García, G (201O). *Matemáticas l. Aritmética y álgebra, con enfoque en competencias.* Cengage Learning, Querétaro, Mex.
3. Carson, J. A Problem With Problem Solving: Teaching Thinking Without Teaching Knowledge. *The mathematics educator,* **17,** 7-14(2007).
4. Swokowski, E. Cole, J (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* Cengage Learning, México.
5. Lehman, C (2011). *Álgebra.* Editorial Limusa, México.
6. Manual de preparación pre-universitaria, Teoría, conceptos, ejercicios resueltos y propuestos. Editorial Lexus editores S.A. Edición 2008.
7. Kline, M (1974). *Why Johnny can 't add: The failure of the new math.* Vintage Book, USA.
8. Gómez, J (2002). *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas.* Paidós, México.