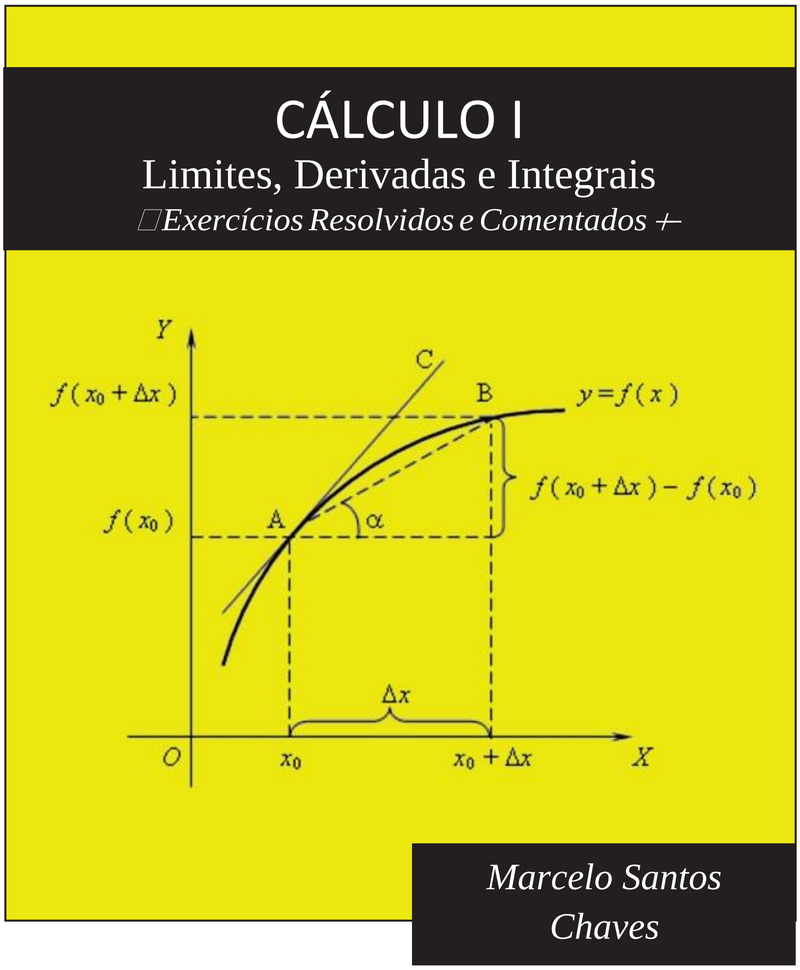
BIBLIOTECA VIRTUAL eumed.net

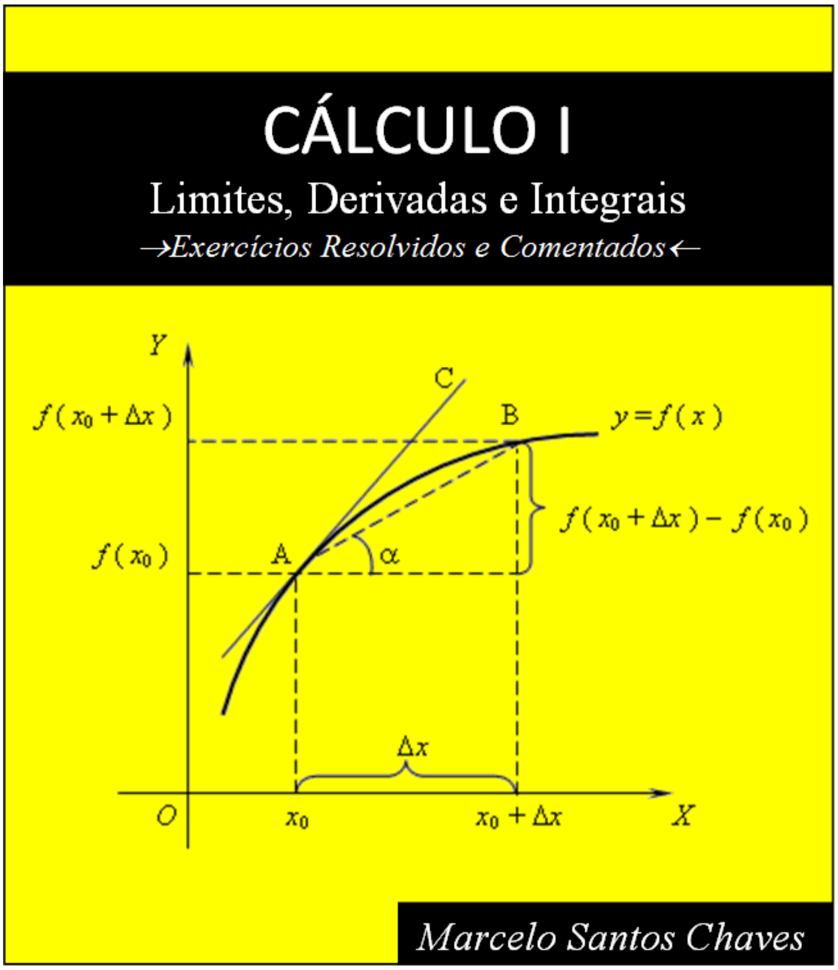


1371

Limites, derivadas e integrais

Marcelo Santos Chaves

CAPA DO LIVRO



CÁLCULO I: LIMITES, DERIVADAS E INTEGRAIS

Exercícios Resolvidos e Comentados

MARCELO SANTOS CHAVES

Belém-PA
Janeiro2014

C512c Chaves, Marcelo Santos

Cálculo I: Limites, Derivadas e Integrais (exercícios resolvidos e comentados).

93p. :il. Color. ; 21x30 cm.
Inclui referências
ISBN-13: 978-84-16036-29-5

1. Matemática. 2. Cálculo Diferencial e Integral. 3. Exercícios. 4. I. Título.

CDD 510

A modesta contribuição que aqui segue transcrita dedico ao infinito Deus que nos concedeu o dom da vida e ao meu paizinho e professor Otávio, in memoriam, pela intransigência e perseverança na moldagem de minha educação e qualificação acadêmica. Que este livro seja a expressão do profundo amor que nos une, nesta vida e na outra.

EPÍGRAFES

“Se eu enxerguei mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes.”

***sir* Isaac Newton**

"Um nome pode permitir que sejas lembrado, mas apenas as ideias o tornaram um imortal.”

Marcelo Santos Chaves

APRESENTAÇÃO

No Brasil as evidencias quanto ao fracasso na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) são elevadas, causando visíveis prejuízos no aproveitamento de discentes da área das ciências exatas, ao ponto de conduzi-los a sucessivas reprovações ou até mesmo ocasionando o seu jubilamento (desligamento compulsório do curso). Essas são as conclusões de Bressan (2009), Rezende (2003), Frota (2001), Baruffi (1999) entre outros. Face a este cenário desfavorável na *práxis* do ensino superior, um dos grandes desafios na área de ciências exatas atualmente é, sem sombra de dúvidas, encontrar formas de superar o fracasso no ensino do Cálculo. E é sob tal motivação que o presente trabalho se propõe a constituir-se em um escopo sistemático de técnicas de resolução de problemas sobre Limites, Derivadas e Integrais, ambicionando uma ilustração didática e objetiva capaz de transpor o conhecimento cientificopara um conhecimento capaz de tornar-se efetivamente ensinável.

PRESENTATION

In Brazil the evidence about the failure in the discipline of Differential and Integral Calculus (CDI) are generally high, causing visible damage in the exploitation of students in the area of exact sciences, to the point of leading them to successive failures or even causing the your jubilamento (off course). These are the findings of Bressan (2009), Rezende (2003), Frota (2001), Baruffi (1999) among others. Against this unfavorable scenario in the praxis of higher education a major challenge in the field of exact sciences is currently without a doubt, find ways to overcome failure in the teaching of calculus. And under such motivation is that this paper proposes to form themselves into a systematic scope of technical troubleshooting on Limits, Derivatives and Integrals, coveting a didactic illustration and objectively able to translate scientific knowledge into a knowledge capable of making be effectively taught.

.

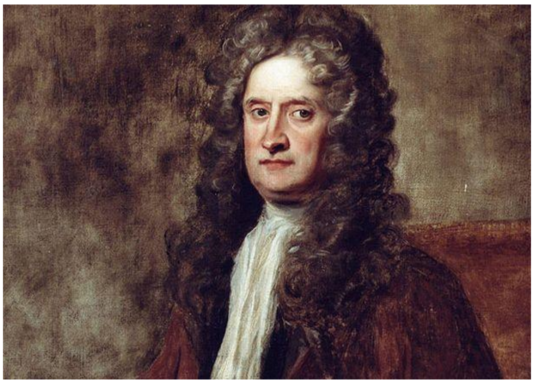
PRESENTACIÓN

En Brasil, la evidencia sobre el fracaso en la disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) son generalmente altos , causando daños visibles en la explotación de los estudiantes en el área de las ciencias exactas , hasta el punto de llevarlos a los sucesivos fracasos o incluso causar la Su jubilamento (por supuesto) . Estas son las conclusiones de Bressan (2009), Rezende (2003), Frota (2001), Baruffi (1999) entre otros. Frente a este escenario desfavorable en la praxis de la educación superior un gran reto en el campo de las ciencias exactas es actualmente , sin duda , encontrar la manera de superar el fracaso en la enseñanza del cálculo . Y bajo esa motivación es que este trabajo se propone constituirse en un ámbito de aplicación sistemática de la solución de problemas técnicos de límites, derivadas e integrales , codiciar una ilustración didáctica y objetivamente capaces de traducir el conocimiento científico en un saber capaz de hacer enseñar con eficacia.

SUMÁRIO

UM POUCO SOBRE A HISTORIA DO CALCULO

É bastante comum nos depararmos com literaturas que ratificam um entendimento. O de que *sir* Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foram oscriadores do Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Mas será possível tomar ao pé da letra tal assertiva enquanto verdade? Stewart (2010), por exemplo, pontifica que as ideias fundamentais por trás da integração foram examinadas há pelo menos 2500 anos pelos antigos gregos, tais como Eudóxio e Arquimedes. Além disso, assim como Alarcón *et. al* (2005), sabemos que os métodos para encontrar as tangentes foram criadas, entre outros, por Pierre de Fermat (1601-1665) e Isaac Barrow (1630-1677). Da mesma forma, concordamos com Almeida (2003) na constatação de que Barrow, na condição de professor em Cambridge que exerceu grande influência sobre Newton, foi o pioneiro no entendimento quanto à existência de uma relação inversa entre a derivação e a integração. Assim, concluímos que, o que Newton e Leibniz fizeramnão tratou-se de uma criação genuína na acepção da palavra, e sim utilizaram a relação descoberta por Barrow, para constituírem o *Teorema Fundamental do Cálculo*, e assim desenvolver o CDI enquanto disciplina matemática sistemática e ensinável. Portanto, é sob estes termos e ressalvas que atribuímos a Newton e a Leibniz a primazia no desenvolvimento do CDI.



***sir* Isaac Newton**

Isaac Barrow

CAPÍTULO I

ESTUDO DOS LIMITES

1. LIMITES E CONTINUIDADES

1) $\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

Solução:

$Faça \to u^3 = x$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = \lim_{u\to 1} \frac{u^3-1}{\sqrt[3]{u^3}-1}$$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = \lim_{u\to 1} \frac{u^3-1}{u-1}$$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = \lim_{u\to 1} \frac{(u-1)\cdot\left(u^2+u+1\right)}{(u-1)}$$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = \lim_{u\to 1} \left(u^2+u+1\right)$$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = 1^2+1+1$$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = 1$$

2) $\lim_{e\to 0} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+e}-\sqrt{x}}{e}$

Solução:

$$\lim_{e\to 0} f(x) = \lim_{e\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+e}-\sqrt{x}}{e}\right]\times\left[\frac{\sqrt{x+e}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+e}+\sqrt{x}}\right]$$

$$\lim_{e\to 0} f(x) = \lim_{e\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+e}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{e\times\left(\sqrt{x+e}\times\sqrt{x}\right)}$$

$$\lim_{e\to 0} f(x) = \lim_{e\to 0}\frac{x+e-x}{e\times\left(\sqrt{x+e}\times\sqrt{x}\right)}$$

$$\lim_{e\to 0} f(x) = \lim_{e\to 0}\frac{e}{e\times\left(\sqrt{x+e}\times\sqrt{x}\right)}$$

$$\lim_{e\to 0} f(x) = \lim_{e\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+e}\times\sqrt{x}\right)}$$

$$\lim_{e\to 0} f(x) = \lim_{e\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+0}\times\sqrt{x}\right)}$$

$$\lim_{e\to 0} f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{x}\times\sqrt{x}\right)}$$

$$\lim_{e\to 0} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{e\to 0} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{e\to 0} f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4x}$$

$$\lim_{e\to 0} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

3) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$

Solução:

$Faça \rightarrow x = u^3$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = \lim_{u\to 1} \frac{u^3-1}{u-\sqrt{u^3}}$$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = \lim_{u\to 1} \frac{u^3-1}{u-u\sqrt{u}}$$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = \lim_{u\to 1} \frac{u^3-1}{u-u\sqrt{u}} \cdot \frac{u+u\sqrt{u}}{u+u\sqrt{u}}$$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = \lim_{u\to 1} \frac{\left(u^3-1\right)\cdot\left(u+u\sqrt{u}\right)}{u^2-u^2\left(\sqrt{u}\right)^2}$$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = \lim_{u\to 1} \frac{\left(u^3-1\right)\cdot\left(u+u\sqrt{u}\right)}{u^2-u^3}$$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = \lim_{u\to 1} \frac{(u-1)\cdot\left(u^2+u+1\right)\cdot\left(u+u\sqrt{u}\right)}{-u^2\cdot(u-1)}$$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = \lim_{u\to 1} \frac{\left(u^2+u+1\right)\cdot\left(u+\sqrt{u}\,u\right)}{-u^2}$$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = \frac{\left(1^2+1+1\right)\cdot\left(1+1\sqrt{1}\right)}{-1^2}$$

$$\lim_{u\to 1} f(u) = -\frac{3\times 2}{1}$$

$$\underline{\lim_{u\to 1} f(u) = -6}$$

4) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

Solução:

$Faça \rightarrow u = \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow x = u^3 - 1$

$$\lim_{u\to 0} f(u) = \lim_{u\to 0} \frac{u-1}{u^3-1}$$

$$\lim_{u\to 0} f(u) = \lim_{u\to 0} \frac{(u-1)}{(u-1)\cdot\left(u^2+u+1\right)}$$

$$\lim_{u\to 0} f(u) = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\left(u^2+u+1\right)}$$

$$\lim_{u\to 0} f(u) = \frac{1}{1^2+1+1}$$

$$\underline{\lim_{u\to 0} f(u) = 1}$$

5) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

Solução:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}{x\cdot\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x+3-3}{x\cdot\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{0+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{4\times 3}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

6) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{5-3x^3}{8x+2}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5-3x^3}{8x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(\frac{5}{x}-3x^2\right)}{x\cdot\left(8+\frac{2}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(5\cdot\frac{1}{x}-3x^2\right)}{\left(8+2\cdot\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\left[5\cdot 0-3\cdot(+\infty)^2\right]}{(8+2\cdot 0)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-\infty}{8}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

7) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-5x^3+2}{7x^3+3}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^3+2}{7x^3+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3\cdot\left(5-\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(7+\frac{3}{x^3}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\left(5-2\cdot\frac{1}{x^3}\right)}{\left(7+3\cdot\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-(5-2\cdot 0)}{(7+3\cdot 0)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-5}{7}$$

8) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right]}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

9) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\bullet\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2}\bullet\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2}\bullet\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)+x\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2\cdot 0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{0}{1+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{0}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-1}\right)\cdot x - x^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(\sqrt{x^2-1}\right)\cdot x - x^2\right]\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\cdot x + x^2}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\cdot x + x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\left(\sqrt{x^2-1}\right)\cdot x\right]^2 - \left(x^2\right)^2}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\cdot x + x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2-1\right)\cdot x^2 - x^4}{x^2\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^2 - x^4}{x^2\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{x}+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2}\bullet\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}+1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\frac{x\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x}+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-0}+1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-1}{1+1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2}}$$

11) $\lim\limits_{v\to+\infty} f(v) = \lim\limits_{v\to+\infty} \dfrac{v\sqrt{v}-1}{3v-1}$

Solução:

Faça $\rightarrow v = x^2$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x^2}-1}{3x^2-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cdot x-1}{3x^2-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{3x^2-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cdot\left(x-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty-0}{3-0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

12) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^4-16}{8-x^3}$

Solução:

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^4-16}{8-x^3}$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^4-16}{8-x^3}\cdot\frac{(-1)}{(-1)}$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{\left[(x^2)^2-(4)^2\right]\cdot(-1)}{x^3-8}$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{(x^2+4)\cdot(x^2-4)\cdot(-1)}{x^3-2^3}$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{(x^2+4)\cdot(x^2-2^2)\cdot(-1)}{(x-2)\cdot(x^2+2x+2^2)}$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(-1)}{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(-1)}{(x^2+2x+4)}$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \frac{(2^2+4)\cdot(2+2)\cdot(-1)}{(2^2+2\cdot2+4)}$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \frac{8\times4\times(-1)}{4+4+4}$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \frac{-32}{12}$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = -\frac{8}{3}$$

$$13)\quad \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$$

Solução:

$$Faça \rightarrow x = t^6$$

$$\lim_{t\to 1} f(t) = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[3]{t^6}-1}{\sqrt{t^6}-1}$$

$$\lim_{t\to 1} f(t) = \lim_{t\to 1} \frac{t^2-1}{t^3-1}$$

$$\lim_{t\to 1} f(t) = \lim_{t\to 1} \frac{t^2-1^2}{t^3-1^3}$$

$$\lim_{t\to 1} f(t) = \lim_{t\to 1} \frac{(t+1)\cdot(t-1)}{(t-1)\cdot\left(t^2+1\cdot t+1^2\right)}$$

$$\lim_{t\to 1} f(t) = \lim_{t\to 1} \frac{t+1}{t^2+t+1}$$

$$\lim_{t\to 1} f(t) = \frac{1+1}{1^2+1+1}$$

$$\underline{\lim_{t\to 1} f(t) = \frac{2}{3}}$$

1.1 LIMITES LATERAIS

1) Dado $f(x) = \begin{cases} x^2-4, \ se\ x<1 \\ -1, \ se\ x=1 \\ 3-x, \ se\ x>1 \end{cases}$, calcule os limites das funções e esboce o gráfico.

Solução:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2-4 = 1^2-4 = -3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3-x = 3-1 = 2$$

$$\text{Como}: \lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x), \text{Então} \lim_{x\to 1} f(x) = \text{Não Existe}$$

Agora vamos estabelecer os pontos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \; se \; x < 1 \rightarrow (1,-3) \\ -1, \; se \; x = 1 \rightarrow (1,-1) \\ 3 - x, \; se \; x > 1 \rightarrow (1,\, 2) \end{cases}$$

$$f(x) = x^2 - 4 \rightarrow Parábola$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{4}$$

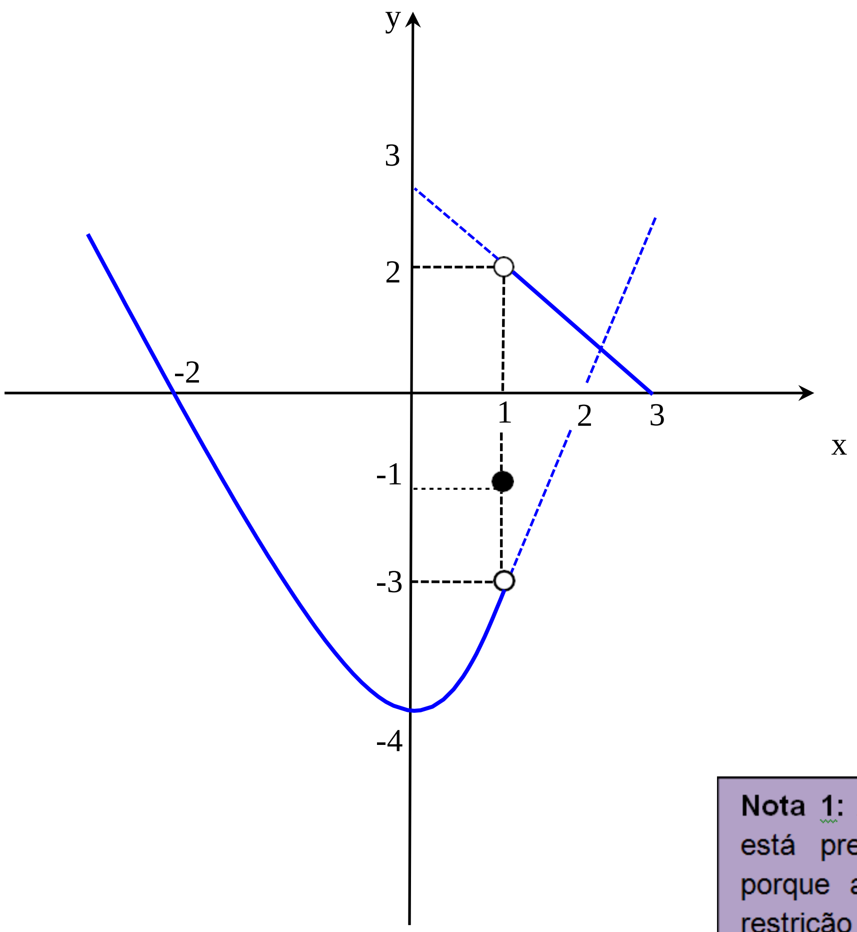
$$x = \pm 2$$

$$f(x) = 3 - x \rightarrow reta$$

$$3 - x = 0$$

$$x = 3$$

Esboço do Gráfico (Ráio x)



Nota 1: A Parábola descrita no gráfico está preenchida até o ponto (1,-3), porque a função $x^2 - 4$ possui uma restrição $x < 1$.
Nota 2: A Reta descrita no gráfico está preenchida a partir o ponto (1, 2), porque a função 3 – x possui uma restrição $x > 1$.

2) Dado $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, \; se \; x > 1 \\ 2, \; se \; x = 1 \\ 4x + 1, \; se \; x < 1 \end{cases}$, calcule os limites das funções e esboce o gráfico.

Solução:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 3x - 2 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 4x + 1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$$
$$\text{Como}: \lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x), \text{Então} \lim_{x \to 1} f(x) = \text{Não Existe}$$

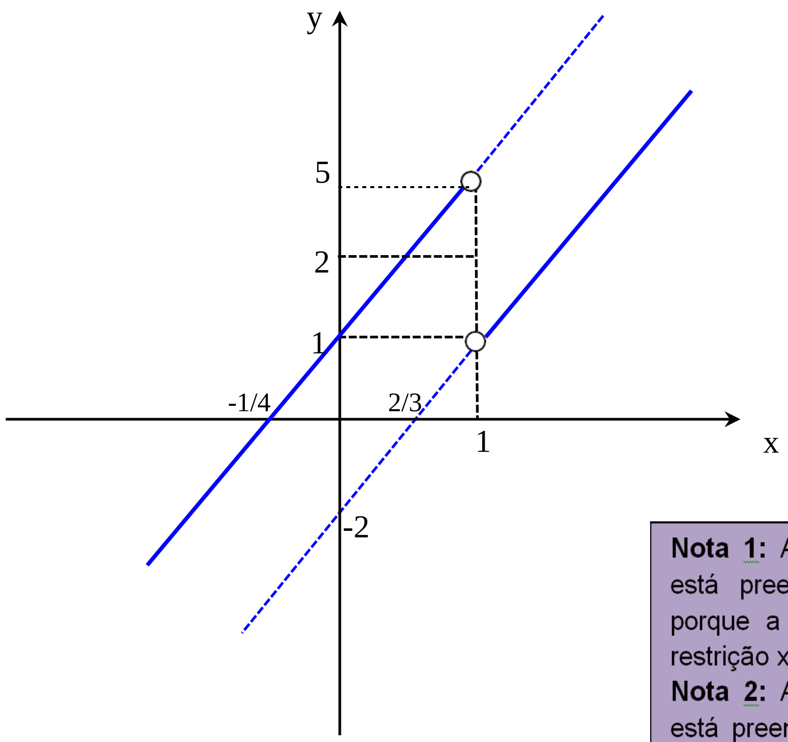
Vamos estabelecer os pontos:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, \; se \; x > 1 \rightarrow (1,\, 1) \\ 2, \; se \; x = 1 \rightarrow (1,\, 2) \\ 4x + 1, \; se \; x < 1 \rightarrow (1, 5) \end{cases}$$

$$f(x) = 3x - 2 \rightarrow reta$$
$$3x - 2 = 0$$
$$x = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = 4x + 1 \rightarrow reta$$
$$4x + 1 = 0$$
$$x = -\frac{1}{4}$$

Esboço do Gráfico (Raio x)



Nota 1: A 1º Reta descrita no gráfico está preenchida até o ponto (1, 5), porque a função 4x + 1 possui uma restrição x < 1.
Nota 2: A 2º Reta descrita no gráfico está preenchida a partir o ponto (1, 1), porque a função 3x - 2 possui uma restrição x > 1.

3) Dado $f(x)=\begin{cases} x^2+1, \; se \; x<2 \\ 2, \; se \; x=2 \\ 9-x^2, \; se \; x>2 \end{cases}$, calcule os limites das funções e esboce o gráfico.

Solução:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 9-x^2 = 9-2^2 = 5$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2+1 = 2^2+1 = 5$$

$$\text{Como}: \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x), \text{ Então } \lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

Vamos estabelecer os pontos:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, \; se \; x<2 \to (2,5) \\ 2, \; se \; x=2 \to (2,2) \\ 9-x^2, \; se \; x>2 \to (2,5) \end{cases}$$

$f(x) = x^2+1 \to Parábola$

$x^2+1=0$

$x=\sqrt{-1}$

$x = \nexists$

Não há raízes para função

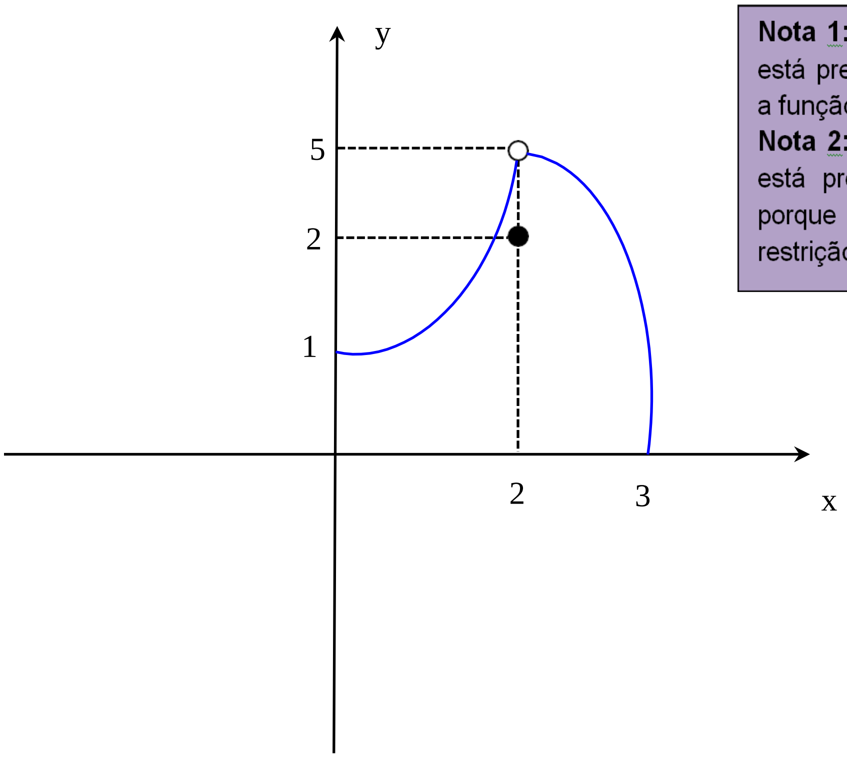
$f(x) = 9-x^2 \to Parábola$

$9-x^2=0$

$x=\sqrt{9}$

$x=\pm 3$

Esboço do Gráfico (Raio x)



Nota 1: A 1º Parábola descrita no gráfico está preenchida até o ponto (2, 5), porque a função $x^2 + 1$ possui uma restrição $x < 2$.
Nota 2: A 2º Parábola descrita no gráfico está preenchida a partir o ponto (2, 5), porque a função $9 - x^2$ possui uma restrição $x > 2$.

4) Dado $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \le 3 \\ 3x-7, & x > 3 \end{cases}$, calcule os limites abaixo e esboce o gráfico.

$a)\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x);\qquad d)\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x);$

$b)\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x);\qquad e)\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x);$

$c)\ \lim\limits_{x\to 3} f(x);\qquad f)\ \lim\limits_{x\to 5} f(x).$

Solução:

$$a)\ \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x-1$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 3-1$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \underline{2}$$

$$b)\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 3x-7$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3\cdot 3-7$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \underline{2}$$

$$c)\ \lim_{x\to 3} f(x)$$
$$Seja\ \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x),\ temos:\ \lim_{x\to 3} f(x) = \underline{2}$$

Nas alternativas a seguir veja que para $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$, temos ***x*** para valores maiores que **3**, pois sua tendência é **5**, logo, somente a função $3x-7$ satisfaz $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$, pois sua restrição é definida para $x > 3$. Façamos então:

$$d)\quad \lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} 3x-7$$
$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 3\cdot 5 - 7$$
$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \underline{8}$$

$$e)\quad \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} 3x-7$$
$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = 3\cdot 5 - 7$$
$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \underline{8}$$

$$f)\quad \lim_{x\to 5} f(x)$$
$$Seja \lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x),\ temos:\ \lim_{x\to 5} f(x) = \underline{8}$$

Esboço do Gráfico:

Vamos estabelecer os pontos para $x \to 3$:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \le 3 \to (3, 2) \\ 3x-7, & x > 3 \to (3, 2) \end{cases}$$

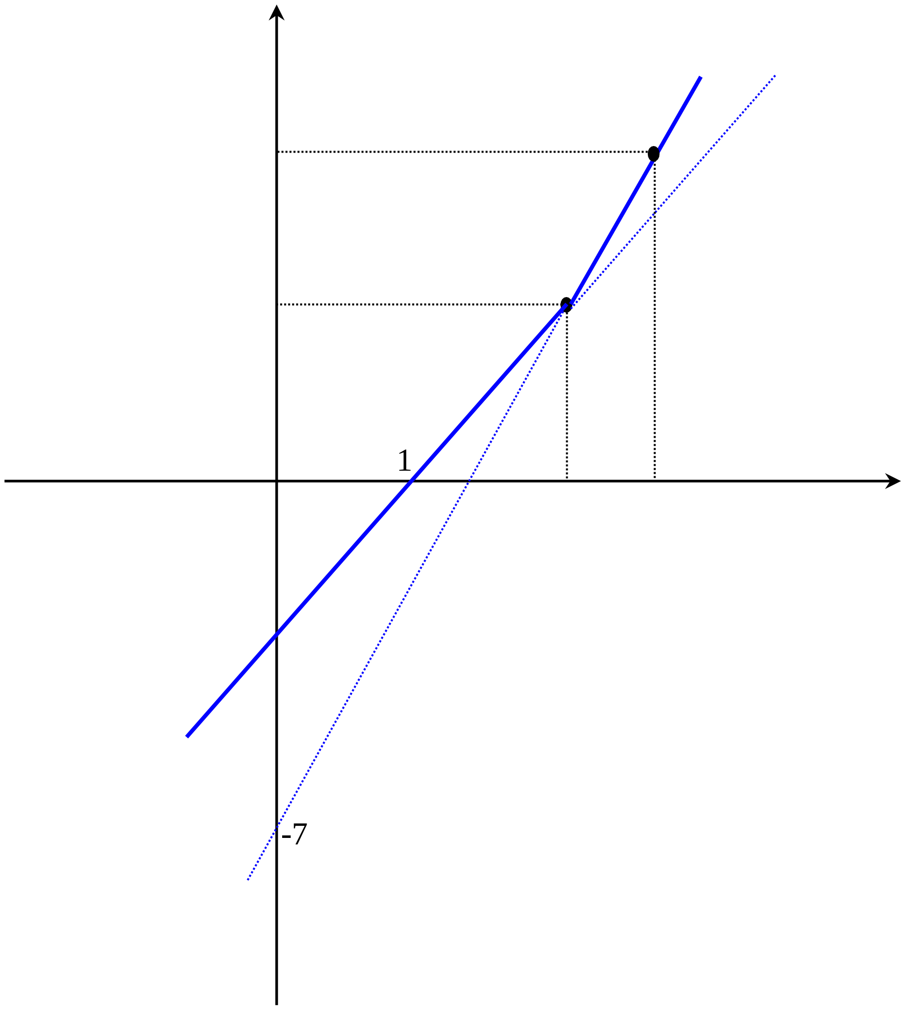
$$f(x) = x-1 \to reta$$
$$x-1 = 0$$
$$x = 1$$

$$f(x) = 3x-7 \to reta$$
$$3x-7 = 0$$
$$3x = 7$$
$$x = \frac{7}{3}$$

Vamos estabelecer os pontos para $x \to 5$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-7,\ x > 3 \to (5, 8),\ p/\lim_{x\to 5^-} f(x) \\ 3x-7,\ x > 3 \to (5, 8),\ p/\lim_{x\to 5^+} f(x) \end{cases}$$

Daí ilustramos:


1
-7

1.2 LIMITES NO INFINITO E LIMITES INFINITOS

1.2.1 Limites no Infinito

Se "**n**" é um número inteiro positivo, então:

I) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

II) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

As expressões $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0^0, 0\times\infty, \infty^0, 1^\infty$ são todas indeterminações.

Veja algumas resoluções:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5-3x^3}{8x+2}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5-3x^3}{8x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(\frac{5}{x}-3x^2\right)}{x\cdot\left(8+\frac{2}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(5\cdot\frac{1}{x}-3x^2\right)}{\left(8+2\cdot\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\left[5\cdot 0-3\cdot(+\infty)^2\right]}{(8+2\cdot 0)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-\infty}{8}$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x^3+2}{7x^3+3}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^3+2}{7x^3+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3\cdot\left(5-\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(7+\frac{3}{x^3}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\left(5-2\cdot\frac{1}{x^3}\right)}{\left(7+3\cdot\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-(5-2\cdot 0)}{(7+3\cdot 0)}$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-5}{7}}$$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right]}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2\cdot 0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{0}{1+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{0}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-1}\right)\cdot x - x^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(\sqrt{x^2-1}\right)\cdot x - x^2\right]\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\cdot x + x^2}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\cdot x + x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\left(\sqrt{x^2-1}\right)\cdot x\right]^2-\left(x^2\right)^2}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\cdot x + x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2-1\right)\cdot x^2 - x^4}{x^2\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^2 - x^4}{x^2\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{x}+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2}\bullet\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}+1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\frac{x\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x}+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-0}+1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-1}{1+1} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$$

6) $\lim\limits_{v\to+\infty} f(v) = \lim\limits_{v\to+\infty} \dfrac{v\sqrt{v}-1}{3v-1}$

Solução:

$Faça \rightarrow v = x^2$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x^2}-1}{3x^2-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cdot x-1}{3x^2-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{3x^2-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cdot\left(x-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty-0}{3-0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{3}$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3}{x+2}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(x+\frac{3}{x}\right)}{x\cdot\left(8+\frac{2}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(x+3\cdot\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\left(8+2\cdot\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty+0}{1+0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{1}$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

1.2.2 Limites Infinitos

Se “**n**” é um número inteiro positivo qualquer, então:

$$I)\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$II)\quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, \text{ se } "n" \text{ é par} \\ -\infty, \text{ se } "n" \text{ é ímpar} \end{cases}$$

As expressões $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0^0, 0 \times \infty, \infty^0, 1^\infty$ são todas indeterminações.

Veja algumas resoluções:

$$1)\ \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(x^3 + \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)$$

Solução:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(x^3 + \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^3 + \lim_{x\to 0} \sqrt{x} + \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 + 0 + \infty$$

$$\underline{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x^2}$$

Solução:

$$\text{Condição: } |x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$$

$$\underline{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$$

3) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x^2}$

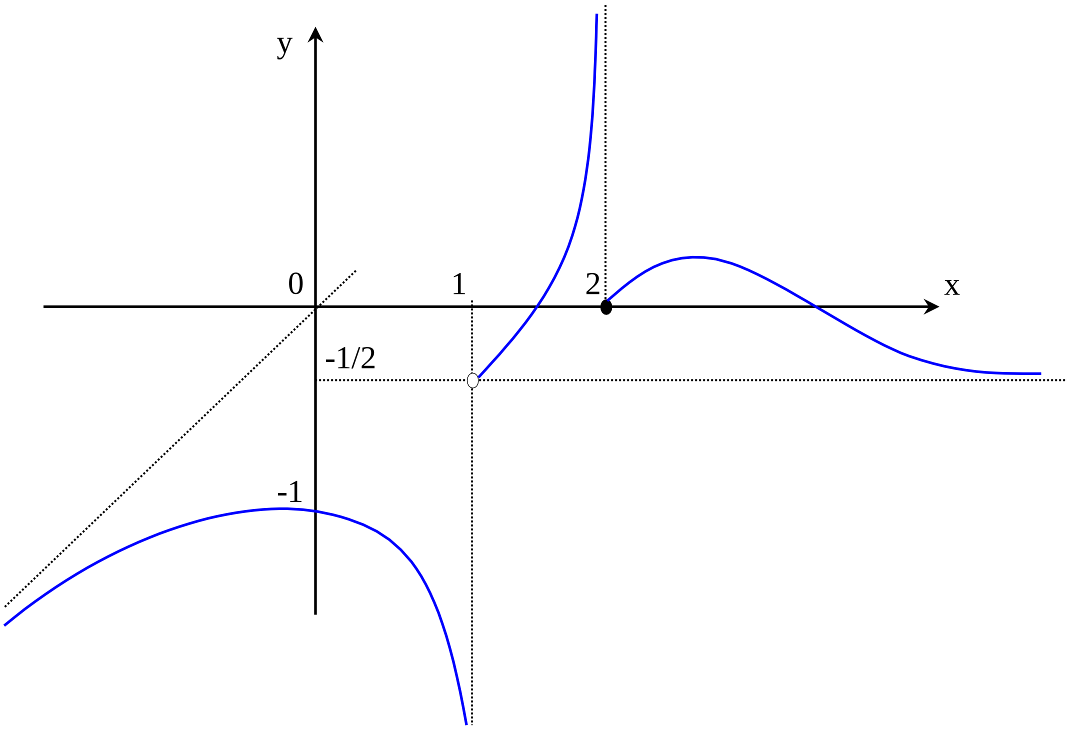
Solução:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x^2}$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x^2}$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x^1}$$

Como o exponte de x é ímpar, temos :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -(-\infty)$$
$$\underline{\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty}$$

4) Na figura abaixo está esboçado o gráfico de uma função $y = f(x)$. Complete as igualdades.



a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \underline{-\infty}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \underline{-\frac{1}{2}}$ c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \underline{+\infty}$ d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \underline{0}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \underline{-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \underline{-1}$ g) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \underline{-\frac{1}{2}}$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \underline{-\infty}$

1.3 LIMITES EXPONENCIAIS

Relação Fundamental:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Inversão de variável:

Se $x=\dfrac{1}{y}$

Então $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$

Artifícios de auxilio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a^{k\cdot x}-1}{x}=k\cdot\ln a$$

$$\lim_{y\to 0}(1+ky)^{\frac{\ell}{y}}=e^{k\cdot\ell}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\ell\cdot x}=e^{k\cdot\ell}$$

Veja algumas resoluções:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^{n+1}$

Solução:

$$Faça: n+1=\frac{1}{y} \therefore n=\frac{1}{y}-1 \therefore \begin{cases} n\to\infty \\ \infty+1=\infty \therefore y\to\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{y\to\infty} f(y) = \lim_{y\to\infty}\left[\frac{2\cdot\left(\frac{1}{y}-1\right)+3}{2\cdot\left(\frac{1}{y}-1\right)-1}\right]^{\frac{1}{y}}$$

$$\lim_{y\to\infty} f(y) = \lim_{y\to\infty}\left[\frac{\frac{2}{y}-2+3}{\frac{2}{y}-2-1}\right]^{\frac{1}{y}}$$

$$\lim_{y\to\infty} f(y) = \lim_{y\to\infty}\left[\frac{\frac{2}{y}+1}{\frac{2}{y}-3}\right]^{\frac{1}{y}}$$

$$\lim_{y\to\infty} f(y) = \lim_{y\to\infty}\frac{\left(2\cdot\frac{1}{y}+1\right)^{\frac{1}{y}}}{\left(2\cdot\frac{1}{y}-3\right)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\lim_{y\to\infty} f(y) = \frac{\lim\limits_{y\to\infty} 2^{\frac{1}{y}}\cdot\lim\limits_{y\to\infty}\left(\frac{1}{y}+1\right)^{\frac{1}{y}}}{\lim\limits_{y\to\infty} 2^{\frac{1}{y}}\bullet\lim\limits_{y\to\infty}\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\lim_{y\to\infty} f(y) = \frac{2^0\cdot e}{2^0\cdot\left(\frac{1}{\infty}-1\right)^{\frac{1}{\infty}}} \Rightarrow \lim_{y\to\infty} f(y) = \frac{1\cdot e}{1\cdot(-1)} \Rightarrow \underline{\lim_{y\to\infty} f(y) = -e}$$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{Tg\,x}\right)^{Tg\,x}$

Solução:

$$\text{Faça}: \frac{1}{Tg\,x} = y \therefore Tg\,x = \frac{1}{y} \therefore \begin{cases} x \to \frac{\pi}{2} \\ Tg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \therefore y \to 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{Tg\,x}\right)^{Tg\,x}$$

$$\lim_{y\to 1} f(y) = \lim_{y\to 1} (1+y)^{\frac{1}{y}}$$

$$\lim_{y\to 1} f(y) = (1+1)^{\frac{1}{1}}$$

$$\underline{\lim_{y\to 1} f(y) = 2}$$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} (1 + Cos\,x)^{\frac{1}{Cos\,x}}$

Solução:

$$\text{Faça}: \frac{1}{Cos\,x} = \frac{1}{y} \therefore y = Cos\,x \therefore \begin{cases} x \to \frac{3\pi}{2} \\ Cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \therefore y \to 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} (1 + Cos\,x)^{\frac{1}{Cos\,x}}$$

$$\lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}$$

$$\underline{\lim_{y\to 0} f(y) = e}$$

4) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)^x$

Solução:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)^x$$

$$Faça: y = \frac{10}{x} \therefore x = \frac{10}{y} \therefore \begin{cases} x\to\infty \\ \frac{10}{x} = 0 \therefore y\to 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)^x$$

$$\lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{10}{y}}$$

$$\lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{10}$$

$$\lim_{y\to 0} f(y) = e^{10}$$

5) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{10^{x-2}-1}{x-2}$

Solução:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{10^{x-2}-1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \ln 10$$

6) $\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}\frac{4^{\frac{x+3}{5}}-1}{5\cdot\frac{x+3}{5}}$

Solução:

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}\frac{4^{\frac{x+3}{5}}-1}{5\cdot\frac{x+3}{5}}$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}\frac{1}{5}\cdot\frac{4^{\frac{x+3}{5}}-1}{\frac{x+3}{5}}$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}\frac{1}{5}\cdot\lim_{x\to -3}\frac{4^{\frac{x+3}{5}}-1}{\frac{x+3}{5}}$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \frac{1}{5}\cdot\ln 4$$

7) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{5^x-25}{x-2}$

Solução:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{5^x-25}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{5^x-5^2}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{5^2\cdot\left(\frac{5^x}{5^2}-1\right)}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{5^2\cdot 5^{(x-2)}-1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}5^2\cdot\lim_{x\to 2}\frac{5^{(x-2)}-1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5^2\cdot\ln 5$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 25\ln 5$$

8) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{3^{\frac{x-1}{4}}-1}{Sen5\cdot(x-1)}$

Solução:

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{3^{\left(\frac{x-1}{4}\right)}-1}{Sen5\cdot(x-1)} \Rightarrow \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{3^{\left(\frac{x-1}{4}\right)}-1}{Sen5x-5} \Rightarrow \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\dfrac{3^{\left(\frac{x-1}{4}\right)}-1}{5x-5}}{\dfrac{Sen5x-5}{5x-5}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\dfrac{3^{\left(\frac{x-1}{4}\right)}-1}{5\cdot(x-1)\cdot\left(\frac{4}{4}\right)}}{\dfrac{Sen5x-5}{5x-5}} \Rightarrow \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\dfrac{3^{\left(\frac{x-1}{4}\right)}-1}{5\cdot4\cdot\left(\frac{x-1}{4}\right)}}{\dfrac{Sen5x-5}{5x-5}} \Rightarrow \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{3^{\left(\frac{x-1}{4}\right)}-1}{\left(\frac{x-1}{4}\right)}}{\dfrac{Sen5x-5}{5x-5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{20} \bullet \lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^{\left(\frac{x-1}{4}\right)}-1}{\left(\frac{x-1}{4}\right)}}{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{Sen5x-5}{5x-5}} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to1} f(x) = \frac{1}{20}\cdot\ln 3}$$

9) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$

Solução:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-bx} \cdot \left[\left(\dfrac{e^{-ax}}{e^{-bx}}\right) - 1\right]}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-bx} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\left[\left(\dfrac{e^{-a}}{e^{-b}}\right)^{x} - 1\right]}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^{-b\cdot 0} \bullet \ln\left(\frac{e^{-a}}{e^{-b}}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^{0} \cdot \left(\ln e^{-a} - \ln e^{-b}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \cdot \left(\log_e^{e^{-a}} - \log_e^{e^{-b}}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -a - (-b)$$

$$\underline{\lim_{x\to 0} f(x) = b - a}$$

1.4 LIMITES TRIGONOMÉTRICOS

Relação Fundamental:

$$\lim_{x\to 0} \frac{Sen\,x}{x} = 1$$

Veja algumas resoluções:

1) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{Sen2x}{x}$

Solução:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{Sen2x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{Sen2x}{x} \cdot \frac{2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{Sen2x}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{Sen2x}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2 \times 1$$

$$\underline{\lim_{x\to 0} f(x) = 2}$$

2) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{Sen3x}{Sen4x}$

Solução:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{Sen3x}{Sen4x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{Sen3x}{x}}{\frac{Sen4x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{Sen3x}{x} \cdot \frac{3}{3}}{\frac{Sen4x}{x} \cdot \frac{4}{4}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3 \cdot \frac{Sen3x}{3x}}{4 \cdot \frac{Sen4x}{4x}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\lim_{x\to 0} 3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{Sen3x}{3x}}{\lim_{x\to 0} 4 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{Sen4x}{4x}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3 \times 1}{4 \times 1}$$

$$\underline{\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{4}}$$

3) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{Tgx}{x}$

Solução:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{Tgx}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{Senx}{Cosx}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{Senx}{Cosx} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{Senx}{x} \cdot \frac{1}{Cosx}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \cdot \frac{1}{Cos0}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \times 1$$

$$\underline{\lim_{x\to 0} f(x) = 1}$$

4) $\lim_{x\to \theta} f(x) = \lim_{x\to \theta} \frac{Cos\theta - 1}{\theta}$

Solução:

$$\lim_{x\to \theta} f(x) = \lim_{x\to \theta} \frac{Cos\theta - 1}{\theta}$$

$$\lim_{x\to \theta} f(x) = \lim_{x\to \theta} \frac{Cos\theta - 1}{\theta} \cdot \frac{Cos\theta + 1}{Cos\theta + 1}$$

$$\lim_{x\to \theta} f(x) = \lim_{x\to \theta} \frac{Cos^2\theta - 1^2}{\theta \cdot (Cos\theta + 1)}$$

$$\lim_{x\to \theta} f(x) = \lim_{x\to \theta} \frac{Cos^2\theta - 1}{\theta \cdot (Cos\theta + 1)}$$

$$\lim_{x\to \theta} f(x) = \lim_{x\to \theta} \frac{-Sen^2\theta}{\theta \cdot (Cos\theta + 1)}$$

$$\lim_{x\to \theta} f(x) = \lim_{x\to \theta} -1 \cdot \frac{(Sen\theta) \cdot (Sen\theta)}{\theta \cdot (Cos\theta + 1)}$$

$$\lim_{x\to \theta} f(x) = \lim_{x\to \theta} -1 \cdot \frac{Sen\theta}{\theta} \cdot \frac{Sen\theta}{Cos\theta + 1}$$

$$\lim_{x\to \theta} f(x) = -1 \times 1 \cdot \frac{Sen0}{Cos0 + 1}$$

$$\lim_{x\to \theta} f(x) = -1 \cdot \frac{0}{1+1}$$

$$\lim_{x\to \theta} f(x) = -1 \times 0$$

$$\underline{\lim_{x\to \theta} f(x) = 0}$$

5) $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{Sen9x}{x}$

Solução:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{Sen9x}{x}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{Sen9x}{x} \cdot \frac{9}{9}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} 9 \cdot \frac{Sen9x}{9x}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} 9 \cdot \lim_{x\to0} \frac{Sen9x}{9x}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = 9 \cdot 1$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = 9$$

6) $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{Sen4x}{3x}$

Solução:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{Sen4x}{3x}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{1}{3} \cdot \lim_{x\to0} \frac{Sen4x}{x} \cdot \frac{4}{4}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{1}{3} \cdot \lim_{x\to0} 4 \cdot \frac{Sen4x}{4x}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{1}{3} \cdot \lim_{x\to0} 4 \cdot \lim_{x\to0} \frac{Sen4x}{4x}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 1$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{4}{3}$$

7) $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{Sen10x}{Sen7x}$

Solução:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{Sen10x}{Sen7x}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{\frac{Sen\,10x}{x}}{\frac{Sen7x}{x}}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{\frac{Sen10x}{x} \cdot \frac{10}{10}}{\frac{Sen7x}{x} \cdot \frac{7}{7}}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{\lim_{x\to0} 10 \cdot \lim_{x\to0} \frac{Sen10x}{10x}}{\lim_{x\to0} 7 \cdot \lim_{x\to0} \frac{Sen\,7x}{7x}}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{10 \cdot 1}{7 \cdot 1}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{10}{7}$$

8) $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{Sen\,ax}{Senbx}$

Solução:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{Sen\,ax}{Senbx}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{\frac{Sen\,ax}{x}}{\frac{Senbx}{x}}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{\frac{Sen\,ax}{x} \cdot \frac{a}{a}}{\frac{Senbx}{x} \cdot \frac{b}{b}}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{\lim_{x\to0} a \cdot \lim_{x\to0} \frac{Sen\,ax}{ax}}{\lim_{x\to0} b \cdot \lim_{x\to0} \frac{Sen\,bx}{bx}}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{a}{b}$$

9) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{Tg\,ax}{x}$

Solução:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{Tg\,ax}{x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{\frac{Sen\,ax}{Cos\,ax}}{x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{Sen\,ax}{Cos\,ax}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{Sen\,ax}{Cos\,ax}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{a}{a}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} a\cdot\frac{Sen\,ax}{ax}\cdot\frac{1}{Cos\,ax}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} a\cdot\lim_{x\to0}\frac{Sen\,ax}{ax}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{Cos\,ax}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = a\cdot1\cdot\frac{1}{Cos\,0}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = a\cdot1\cdot\frac{1}{1}$$

$$\underline{\lim_{x\to0} f(x) = a}$$

10) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{Tg^3\left(\frac{x+1}{4}\right)}{(x+1)^3}$

Solução:

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{Tg^3\left(\frac{x+1}{4}\right)}{(x+1)^3}$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{\sqrt[3]{Tg^3\left(\frac{x+1}{4}\right)}}{\sqrt[3]{(x+1)^3}}$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{Tg\left(\frac{x+1}{4}\right)}{(x+1)}$$

$Faça \to u = \dfrac{x+1}{4} \therefore\ x = 4u-1$

$Se: x \to -1 \therefore\ u \to \pi$

$$\lim_{u\to\pi} f(x) = \lim_{u\to\pi} \frac{Tg\,u}{4u-1+1}$$

$$\lim_{u\to\pi} f(x) = \lim_{u\to\pi} \frac{Tg\,u}{4u}$$

$$\lim_{u\to\pi} f(x) = \lim_{u\to\pi} \frac{\frac{Senu}{Cosu}}{4u}$$

$$\lim_{u\to\pi} f(x) = \lim_{u\to\pi} \frac{Senu}{Cosu}\cdot\frac{1}{4u}$$

$$\lim_{u\to\pi} f(x) = \lim_{u\to\pi} \frac{Senu}{Cosu}\cdot\lim_{u\to\pi}\frac{1}{4u}$$

$$\lim_{u\to\pi} f(x) = \frac{Sen\pi}{Cos\pi}\cdot\frac{1}{4\pi}$$

$$\lim_{u\to\pi} f(x) = \frac{0}{-1}\cdot\frac{1}{4\pi}$$

$$\underline{\lim_{u\to\pi} f(x) = 0}$$

11) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

Solução:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-1\cdot(\cos x - 1)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}\cdot\frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1^2}{x\cdot(\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x\cdot(\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x\cdot(\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{-(\sin x)\cdot(\sin x)}{x\cdot(\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{-1\cdot(\sin x)}{x}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)}{(\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1\times(-1)\cdot\frac{\sin 0}{\cos 0 + 1}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1\times(-1)\cdot\frac{0}{1+1}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1\times(-1)\times 0$$

$$\underline{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$$

12) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Solução:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-1\cdot(\cos x - 1)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}\cdot\frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1^2}{x^2\cdot(\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2\cdot(\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{Sen}^2 x}{x^2\cdot(\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{-(\operatorname{Sen} x)\cdot(\operatorname{Sen} x)}{x\cdot x\cdot(\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{Sen} x)}{x}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{Sen} x)}{x}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{-1}{(\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1\times 1\times 1\cdot \frac{-1}{\cos 0 + 1}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1\cdot \frac{-1}{1+1}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}}$$

13) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} (x-3)\cdot \text{Cosec}(\pi x)$

Solução:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} (x-3)\cdot \text{Cosec}(\pi x)$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} (x-3)\cdot \frac{1}{Sen(\pi x)}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)}{Sen(\pi - \pi x)}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)}{Sen(3\pi - \pi x)}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{(x-3)}{(x-3)}}{\frac{Sen(3\pi - \pi x)}{(x-3)}}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\frac{\pi\cdot Sen(3\pi - \pi x)}{\pi\cdot (x-3)}}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\frac{\pi\cdot Sen(3\pi - \pi x)}{(\pi x - 3\pi)}}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\pi\cdot\frac{Sen(\pi x - 3\pi)}{(\pi x - 3\pi)}}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to 3} 1}{\lim\limits_{x\to 3}\pi\cdot \lim\limits_{x\to 3}\frac{Sen(\pi x - 3\pi)}{(\pi x - 3\pi)}}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{1}{\pi\cdot 1}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{1}{\pi}$$

14) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x - Sen2x}{2x + 3Sen4x}$

Solução:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{6x - Sen2x}{2x + 3Sen4x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{6x - Sen2x\cdot\frac{2x}{2x}}{2x + 3Sen4x\cdot\frac{4x}{4x}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{6x - 2x\cdot\left(\frac{Sen2x}{2x}\right)}{2x + 3\cdot 4x\cdot\left(\frac{Sen4x}{4x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{6x - 2x\cdot\left(\frac{Sen2x}{2x}\right)}{2x + 12x\cdot\left(\frac{Sen4x}{4x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(6-2)\cdot\left(\frac{Sen2x}{2x}\right)}{x\cdot(2+12)\cdot\left(\frac{Sen4x}{4x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(6-2)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{Sen2x}{2x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}(2+12)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{Sen4x}{4x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{6-2\times 1}{2+12\times 1}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{4}{14}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{7}$$

15) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Cos\ 2x - Cos\ 3x}{x^2}$

Solução:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{Cos\ 2x - Cos\ 3x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-2Sen\left(\frac{2x+3x}{2}\right)\cdot Sen\left(\frac{2x-3x}{2}\right)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-2Sen\left(\frac{5x}{2}\right)\cdot Sen\left(-\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-2Sen\left(\frac{5x}{2}\right)\cdot\left[-Sen\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2Sen\left(\frac{5x}{2}\right)\cdot Sen\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2Sen\left(\frac{5x}{2}\right)}{x}\cdot\frac{Sen\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2Sen\left(\frac{5x}{2}\right)}{x}\cdot\frac{Sen\left(\frac{x}{2}\right)}{x\cdot\left(\frac{2}{2}\right)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2Sen\left(\frac{5x}{2}\right)}{x}\cdot\frac{Sen\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{Sen\left(\frac{5x}{2}\right)\cdot\frac{5}{2}}{x\cdot\left(\frac{5}{2}\right)}\cdot\frac{Sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{2}\cdot Sen\left(\frac{5x}{2}\right)}{\left(\frac{5x}{2}\right)}\cdot\frac{Sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\bullet\lim_{x\to 0}\frac{Sen\left(\frac{5x}{2}\right)}{\left(\frac{5x}{2}\right)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{Sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{5}{2}\times 1\times 1$$

$$\Rightarrow \underline{\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{5}{2}}$$

16) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}$

Solução:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\cos x + 1 - 2\operatorname{Sen}^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos x - 2\operatorname{Sen}^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\left[1 - \cos x - \operatorname{Sen}^2 x\right]}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\left[2\operatorname{Sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{Sen}^2 x\right]}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{4\operatorname{Sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\operatorname{Sen}^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{4\operatorname{Sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} - \frac{2\operatorname{Sen}^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{4\operatorname{Sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x\cdot x} - \frac{2\operatorname{Sen}^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{4\operatorname{Sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x\cdot\left(\frac{2}{2}\right)\cdot x\cdot\left(\frac{2}{2}\right)} - \frac{2\operatorname{Sen}^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{4\operatorname{Sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\cdot 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{2\operatorname{Sen}^2 x}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{4\operatorname{Sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2} - \frac{2\operatorname{Sen}^2 x}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} - \lim_{x\to 0} 2\cdot\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Sen}^2 x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1 - 2$$

$$\Rightarrow \underline{\lim_{x\to 0} f(x) = -1}$$

CAPÍTULO II

ESTUDO DAS DERIVADAS

2. DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

2.1 REGRAS DE DERIVAÇÃO

2.1.1 Derivação pela Regra do Produto

Formula:

$$h(x) = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Veja algumas resoluções:

$1)\quad y = (2x+1)\cdot(3x^2+6)$

Solução:

$$y' = (2x+1)' \cdot (3x^2+6) + (2x+1)\cdot(3x^2+6)'$$
$$y' = 2\cdot(3x^2+6) + (2x+1)\cdot 6x$$
$$y' = 6x^2 + 12 + 12x^2 + 6x$$
$$\underline{y' = 18x^2 + 6x + 12}$$

$2)\quad f(x) = (1+3x)\cdot(5-2x)$

Solução:

$$f'(x) = (1+3x)\cdot(5-2x)' + (5-2x)\cdot(1+3x)'$$
$$f'(x) = (1+3x)\cdot(-2) + (5-2x)\cdot 3$$
$$f'(x) = -2 - 6x + 15 - 6x$$
$$\underline{f'(x) = -12x + 13}$$

$3)\quad f(x) = (1+5x^2)\cdot(2+3x)$

Solução:

$$f'(x) = (1+5x^2)\cdot(2+3x)' + (2+3x)\cdot(1+5x^2)'$$
$$f'(x) = (1+5x^2)\cdot 3 + (2+3x)\cdot 10x$$
$$f'(x) = 3 + 15x^2 + 20x + 30x^2$$
$$\underline{f'(x) = 45x^2 + 20x + 3}$$

2.1.2 Derivação pela Regra do Quociente

Formula:

$$h(x) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - f'(x) \cdot g(x)}{[f(x)]^2}$$

Veja algumas resoluções:

$$1)\quad y = \frac{2x+4}{3x-1}$$

Solução:

$$y' = \frac{(2x+4)' \cdot (3x-1) - (2x+4) \cdot (3x-1)'}{(3x-1)^2}$$

$$y' = \frac{2 \cdot (3x-1) - (2x+4) \cdot 3}{(3x-1)^2}$$

$$y' = \frac{6x-2-(6x+12)}{(3x-1)^2} \Rightarrow y' = \frac{6x-2-6x-12}{(3x-1)^2} \Rightarrow y' = \frac{-2-12}{(3x-1)^2} \Rightarrow y' = -\frac{\square 14}{(3x-1)^2}$$

$$2)\quad f(x) = \frac{x-8}{3x-4}$$

Solução:

$$f'(x) = \frac{(3x-4) \cdot (x-8)' - (x-8) \cdot (3x-4)'}{(3x-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(3x-4) \cdot 1 - (x-8) \cdot 3}{(3x-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x-4-3x+24}{(3x-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{20}{(3x-4)^2}$$

$$3)\quad f(x)=\frac{4x^2+5x}{(x+3)^2}$$

Solução:

$$f'(x)=\frac{(x+3)^2\cdot(4x^2+5x)' - (4x^2+5x)\cdot\left[(x+3)^2\right]'}{\left[(x+3)^2\right]^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+3)^2\cdot(8x+5) - (4x^2+5x)\cdot 2(x+3)\cdot(x+3)'}{(x+3)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x+3)^2\cdot(8x+5) - (4x^2+5x)\cdot(2x+6)\cdot 1}{(x+3)^4}$$

$$\underline{f'(x)=\frac{(x+3)^2\cdot(8x+5) - (4x^2+5x)\cdot(2x+6)}{(x+3)^4}}$$

2.1.3 Derivação pela Regra da Potência

Formula:

$$f'(x)=n\cdot[u(x)]^{n-1}\cdot[u(x)]'$$

Veja algumas resoluções:

$$1)\quad y=(x^2+5x+7)^7$$

Solução:

$$y'=7\cdot(x^2+5x+7)^6\cdot(x^2+5x+7)'$$

$$y'=7\cdot(x^2+5x+7)^6\cdot(2x+5)$$

$$\underline{y'=(x^2+5x+7)^6\cdot(14x+35)}$$

$$2)\quad f(x)=\sqrt{\left(x^2+2x+14\right)}$$

Solução:

$$f(x)=\left(x^2+2x+14\right)^{1/2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+2x+14\right)^{-1/2}\cdot\left(x^2+2x+14\right)'$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+2x+14\right)^{-1/2}\cdot\left(2x+2\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(x^2+2x+14\right)^{1/2}}\bullet\left(2x+2\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+14}}$$

$$\underline{f'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+14}}}$$

2.2 DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES PARTICULARES

2.2.1 Derivação de Função Exponencial

Formula:

$$f'(a^u)=a^u\cdot u'\cdot\ln a$$

Veja algumas resoluções:

$$1)\quad y=3^{2x^2+3x+1}$$

Solução:

$$y'=3^{2x^2+3x+1}\cdot\left(2x^2+3x+1\right)'\cdot ln3$$

$$\underline{y'=3^{2x^2+3x+1}\cdot\left(4x+3\right).ln3}$$

2) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}$

Solução:

$$y' = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \left[\sqrt{x}\right]' \cdot \ln\frac{1}{2} \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \left[(x)^{\frac{1}{2}}\right]' \cdot \ln\frac{1}{2} \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x)^{\frac{1}{2}}} \ln\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\frac{1}{2}$$

2.2.2 Derivação de Função Exponencial de Base *e*

Formula:

$$f'(x) = e^{x} \cdot (x)'$$

Exemplo:

$$f(x) = e^{(x^2+x)}$$

Solução:

$$f'(x) = e^{(x^2+x)} \cdot (x^2 + x)'$$

$$f'(x) = e^{(x^2+x)} \cdot 2x$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{(x^2+x)}$$

2.2.3 Derivação de um Logaritmo Natural

Formula:

$$f'u = \frac{u'}{u}$$

Exemplo:

$$y = ln\left(3x^2 - 7\right)$$

Solução:

$$y' = \frac{\left(3x^2 - 7\right)'}{3x^2 - 7}$$

$$y' = \frac{6x}{3x^2 - 7}$$

2.2.4 Derivação de Função Logarítmica

Formula:

$$f'\left(log_a^{\,u}\right) = \frac{u'}{u \cdot lna}$$

Exemplo:

$$y = log_2^{\left(3x^2 + 7x - 1\right)}$$

Solução:

$$y' = \frac{\left(3x^2 + 7x - 1\right)'}{\left(3x^2 + 7x - 1\right) \cdot ln\,2}$$

$$y' = \frac{6x + 7}{\left(3x^2 + 7x - 1\right) \cdot ln\,2}$$

2.3 DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Relações Fundamentais:

1) $y = Senx$

Solução:

$y' = Cos\,x \cdot x'$

2) $y = Cos\,x$

Solução:

$y' = -\,Senx \cdot x'$

3) $y = Tg\,x$

Solução:

$y' = Sec^2\,x \cdot x'$

4) $y = Cotg\,x$

Solução:

$y' = -x' \cdot Cossec^2\,x$

5) $y = Secx$

Solução:

$y' = x' \cdot Secx \cdot Tg\,x$

6) $y = Cos\,sec\,x$

Solução:

$y' = -x' \cdot Cos\,sec\,x \cdot Cotg\,x$

Veja algumas resoluções:

$1)\ y = Sec\ \sqrt{x-1}$

Solução:

$y' = \left(\sqrt{x-1}\right)' \cdot Sec\ \sqrt{x-1} \cdot Tg\ \sqrt{x-1}$

$y' = \left[(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]' \cdot Sec\ \sqrt{x-1} \cdot Tg\ \sqrt{x-1}$

$y' = \frac{1}{2} \cdot (x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot Sec\ \sqrt{x-1} \cdot Tg\ \sqrt{x-1}$

$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot Sec\ \sqrt{x-1} \cdot Tg\ \sqrt{x-1}$

$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot Sec\ \sqrt{x-1} \cdot Tg\ \sqrt{x-1}$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot Sec\ \sqrt{x-1} \cdot Tg\ \sqrt{x-1}$

$2)\ y = Cos\ sec\ \left(x^2+4\right)$

Solução:

$y' = -\left(x^2+4\right)' \cdot Cos\ sec\ \left(x^2+4\right) \cdot Cotg\ \left(x^2+4\right)$

$y' = -2x \cdot Cos\ sec\ \left(x^2+4\right) \cdot Cotg\ \left(x^2+4\right)$

$3)\ y = Cotg\ \left(x^3-2x\right)$

Solução:

$y' = -\left(x^3-2x\right)' \cdot Cos\ sec^2\left(x^3-2x\right)$

$y' = -\left(3x^2-2\right) \cdot Cos\ sec^2\left(x^3-2x\right)$

$y' = \left(-3x^2+2\right) \cdot Cos\ sec^2\left(x^3-2x\right)$

$4)\ y = Cos\ 3x^2$

Solução:

$y' = -\left(3x^2\right)' \cdot Sen\ 3x^2$

$y' = -\left(3x^2\right)' \cdot Sen\ 3x^2$

$y' = -6\ x \cdot Sen\ 3x^2$

$5)\ y = Tg^3\left(3x+1\right)$

Solução:

$y' = 3 \cdot Tg\ \left(3x+1\right)^{3-1} \cdot Tg\ \left(3x+1\right)'$

$y' = 3 \cdot Tg\ \left(3x+1\right)^2 \cdot Sec^2\left(3x+1\right) \cdot \left(3x+1\right)'$

$y' = 3 \cdot Tg\ \left(3x+1\right)^2 \cdot Sec^2\left(3x+1\right) \cdot 3$

$y' = 9 \cdot Tg\ \left(3x+1\right)^2 \cdot Sec^2\left(3x+1\right)$

2.4 DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Formulas Fundamental:

$$1)\quad (arc\ Sen\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$2)\quad (arc\ Cos\, u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$3)\quad (arc\, Tg\ u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$4)\quad (arc\ Sec\, u)' = \frac{u'}{|u|\cdot\sqrt{u^2-1}}$$

$$5)\quad (arc\, Cossec\, u)' = \frac{-u'}{|u|\cdot\sqrt{u^2-1}}$$

Veja algumas resoluções:

1) $y = arc\ Sen\ \sqrt{x}$

Solução:

$$y' = \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} \Rightarrow y' = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}$$

2) $y = arc\ Tg\, x^2$

Solução:

$$y' = \frac{\left(x^2\right)'}{1+\left(x^2\right)^2}$$

$$y' = \frac{2x}{\left(1+x^4\right)}$$

2.5 DERIVAÇÕES DE ORDEM SUCESSIVAS

Veja algumas resoluções:

$1)\quad y = 3x^5 + 8x^2, \quad n = 6$

Solução:

$y' = 15x^4 + 16x$

$y'' = 60x^3 + 16$

$y''' = 180x^2$

$y'''' = 360x$

$y''''' = 360$

$\underline{y'''''' = 0}$

$2)\quad y = e^{\frac{x}{2}}, \quad n = 3$

Solução:

$y' = e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)'$

$y' = e^{\frac{x}{2}} \cdot$

$y' = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$

$y'' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x\right)'$

$y'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}}$

$y'' = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow y''' = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x\right)' \Rightarrow$

$\Rightarrow y''' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \underline{y''' = \frac{1}{8} \cdot e^{\frac{x}{2}}}$

2.6 DERIVAÇÕES HÍBRIDAS

2.6.1 Envolvendo Regra da Potência e Quociente

Veja algumas resoluções:

$1)\quad y = \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^5$

Solução:

$y' = 5 \cdot \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)'$

$y' = 5 \cdot \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{(3x+2)' \cdot (x+1) - (3x+2) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2}\right)$

$y' = 5 \cdot \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{3 \cdot (x+1) - (3x+2) \cdot 1}{(x+1)^2}\right)$

$y' = 5 \cdot \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{3x+3-3x-2}{(x+1)^2}\right)$

$\underline{y' = 5 \cdot \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)}$

$$2)\quad f(x)=\frac{\left(5x^2+3x\right)^4}{\left(2x^2+x\right)^3}$$

Solução:

$$f'(x)=\frac{\left(2x^2+x\right)^3\cdot\left[\left(5x^2+3x\right)^4\right]'-\left(5x^2+3x\right)^4\cdot\left[\left(2x^2+x\right)^3\right]'}{\left[\left(2x^2+x\right)^3\right]^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(2x^2+x\right)^3\cdot 4\cdot\left(5x^2+3x\right)^3\cdot\left(5x^2+3x\right)'-\left(5x^2+3x\right)^4\cdot 3\cdot\left(2x^2+x\right)^2\cdot\left(2x^2+x\right)'}{\left[\left(2x^2+x\right)^3\right]^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(2x^2+x\right)^3\cdot 4\cdot\left(5x^2+3x\right)^3\cdot(10x+3)-\left(5x^2+3x\right)^4\cdot 3\cdot\left(2x^2+x\right)^2\cdot(4x+1)}{\left[\left(2x^2+x\right)^3\right]^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(2x^2+x\right)^3\cdot\left(5x^2+3x\right)^3\cdot(40x+12)-\left(5x^2+3x\right)^4\cdot\left(2x^2+x\right)^2\cdot(12x+3)}{\left(2x^2+x\right)^6}$$

2.6.2 Envolvendo Regra da Potência e Produto

Veja algumas resoluções:

$$1)\quad y=\left(3x^2+1\right)^3\cdot\left(x-x^2\right)^2$$

Solução:

$$y'=\left[\left(3x^2+1\right)^3\right]'\cdot\left(x-x^2\right)^2+\left(3x^2+1\right)^3\cdot\left[\left(x-x^2\right)^2\right]'$$

$$y'=3\cdot\left(3x^2+1\right)^2\cdot\left(3x^2+1\right)'\cdot\left(x-x^2\right)^2+\left(3x^2+1\right)^3\cdot 2\cdot\left(x-x^2\right)\cdot\left(x-x^2\right)'$$

$$y'=3\cdot\left(3x^2+1\right)^2\cdot 6x\cdot\left(x-x^2\right)^2+\left(3x^2+1\right)^3\cdot 2\cdot\left(x-x^2\right)\cdot(1-2x)$$

$$y'=18x\cdot\left(3x^2+1\right)^2\cdot\left(x-x^2\right)^2+\left(3x^2+1\right)^3\cdot\left(2x-2x^2\right)\cdot(1-2x)$$

$$2)\quad f(x)=\left(5x^2+3x\right)^4\cdot(2x^2+x)^3$$

Solução:

$$f'(x)=\left(5x^2+3x\right)^4\cdot(2x^2+x)^3{}'+(2x^2+x)^3\cdot\left(5x^2+3x\right)^4{}'$$

$$f'(x)=\left(5x^2+3x\right)^4\cdot 3\cdot(2x^2+x)^2\cdot(2x^2+x)'+(2x^2+x)^3\cdot 4\cdot\left(5x^2+3x\right)^3\cdot\left(5x^2+3x\right)$$

$$f'(x)=\left(5x^2+3x\right)^4\cdot 3\cdot(2x^2+x)^2\cdot(4x+1)+(2x^2+x)^3\cdot 4\cdot\left(5x^2+3x\right)^3\cdot(10x+3)$$

$$f'(x)=\left(5x^2+3x\right)^4\cdot(2x^2+x)^2\cdot(12x+3)+(2x^2+x)^3\cdot\left(5x^2+3x\right)^3\cdot(40x+12)$$

2.6.3 Envolvendo Regra do Quociente e Função Exponencial na base *e*

Exemplo:

$$y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

Solução:

$$y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' \cdot \ln e$$

$$y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{(x+1)' \cdot (x-1) - (x+1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2}\right) \cdot 1$$

$$y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2}\right) \Rightarrow y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}\right) \Rightarrow \underline{y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)}$$

2.6.4 Envolvendo Regra do Produto e Função Exponencial na base *e*

Exemplo:

$$y = e^{x \cdot \ln x}$$

Solução:

$$y' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \cdot \ln x)' \cdot \ln e$$

$$y' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(x' \cdot \ln x + x \cdot \ln x'\right) \cdot 1$$

$$y' = e^{x \cdot \ln x} \bullet \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{x'}{x}\right)$$

$$y' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$\underline{y' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (\ln x + 1)}$$

2.6.5 Envolvendo Logaritmo Natural e Regra do Quociente

Exemplo:

$$y = ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right)$$

Solução:

$$y' = \frac{\left(\frac{e^x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{e^x}{x+1}\right)} \Rightarrow y' = \frac{\frac{\left(e^x\right)' \cdot (x+1) - \left(e^x\right) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2}}{\left(\frac{e^x}{x+1}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\frac{e^x \cdot (x+1) - \left(e^x\right) \cdot 1}{(x+1)^2}}{\left(\frac{e^x}{x+1}\right)} \Rightarrow y' = \frac{\frac{e^x \cdot (x+1) - e^x}{(x+1)^2}}{\left(\frac{e^x}{x+1}\right)} \Rightarrow y' = \frac{\frac{e^x \cdot [(x+1) - 1]}{(x+1)^2}}{\left(\frac{e^x}{x+1}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{e^x \cdot [x+1-1]}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x+1)}{e^x} \Rightarrow y' = \frac{\square x}{(x+1)}$$

2.6.6 Envolvendo Funções Trigonométricas e Regra do Quociente

Exemplo:

$$y = \frac{Cos\ 4x}{1 - Sen\ 4\,x}$$

Solução:

$$y' = \frac{(Cos\ 4x)' \cdot (1 - Sen\ 4x) - (Cos\ 4x) \cdot (1 - Sen\ 4x)'}{(1 - Sen\ 4x)^2}$$

$$y' = \frac{(-4x)' \cdot (Sen\ 4x) \cdot (1 - Sen\ 4x) - (Cos\ 4x) \cdot (-4x)' \cdot (Cos\ 4x)}{(1 - Sen\ 4x)^2}$$

$$y' = \frac{-4 \cdot (Sen\,4x) \cdot (1 - Sen\,4x) + 4 \cdot (Cos\,4x) \cdot (Cos\,4x)}{(1 - Sen\ 4x)^2}$$

$$y' = \frac{-4 \cdot Sen\ 4\,x + 4 \cdot Sen^2\ 4\,x + 4 \cdot Cos^2\ 4\,x}{(1 - Sen\ 4x)^2}$$

$$y' = \frac{-4 \cdot Sen\ 4x + 4 \cdot \left(Sen^2\ 4x + Cos^2\ 4x\right)}{(1 - Sen\ 4x)^2}$$

$$y' = \frac{-4 \cdot Sen\ 4x + 4 \cdot (1)}{(1 - Sen\ 4x)^2}$$

$$y' = \frac{4 \cdot (-Sen\,4x + 1)}{(1 - Sen\ 4x)^2}$$

$$y' = \frac{4}{(1 - Sen\ 4x)}$$

2.6.7 Envolvendo Funções Trigonométricas e Regra do Logaritmo Natural

Exemplo:

$$y = ln\left(Cos\ sec\ x + Cotg\ x\right)$$

Solução:

$$y' = \frac{\left(Cos\,sec\ x + Cotg\ x\right)'}{\left(Cos\ sec\ x + Cotg\ x\right)}$$

$$y' = \frac{\left(Cos\,sec\ x\right)' + \left(Cotg\ x\right)'}{\left(Cos\ sec\ x + Cotg\ x\right)}$$

$$y' = \frac{\left(-Cos\,sec\ x \cdot Cotg\ x\ \right) + \left(-Cos\,sec^2\ x\right)}{\left(Cos\ sec\ x + Cotg\ x\right)} \Rightarrow y' = \frac{-Cos\,sec\ x \cdot Cotg\ x - Cos\,sec^2\ x}{\left(Cos\,sec\ x + Cotg\ x\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-Cos\ sec\ x \cdot \left(Cotg\ x + Cos\ secx\right)}{\left(Cos\ sec\ x + Cotg\ x\right)} \Rightarrow \underline{y' = -Cos\ sec\ x}$$

2.6.8 Envolvendo Funções Trigonométricas Inversas e Regra da Função Composta

Exemplo:

$$y = x^{\,Sen\ x}$$

Solução:

$$y' = Sen\ x \cdot x^{\,Sen\ x - 1} \cdot x' + x^{\,Sen\ x} \cdot Sen\ x' \cdot ln\ x$$

$$y' = Sen\ x \cdot x^{Sen\ x} \cdot x^{-1} \cdot 1 + x^{Sen\ x} \cdot Cos\ x \cdot ln\,x$$

$$y' = Sen\ x \cdot x^{Sen\ x} \cdot \frac{1}{x^1} + x^{\,Sen\ x} \cdot Cos\ x \cdot ln\ x$$

$$y' = \frac{Sen\ x \cdot x^{Sen\ x}}{x} + x^{\,Sen\ x} \cdot Cos\ x \cdot ln\,x$$

$$\underline{y' = x^{\,Sen\ x} \cdot \left(\frac{Sen\ x}{x} + Cos\ x \cdot ln\ x\right)}$$

2.6.9 Envolvendo Funções Trigonométricas Inversas e Regra da Função Potência

Exemplo:

$$y = (1 + arc\ Cos\ 3x)^3$$

Solução:

$$y' = 3 \cdot (1 + arc\ Cos\ 3x)^{3-1} \cdot (1 + arc\ Cos\ 3x)'$$

$$y' = 3 \cdot (1 + arc\ Cos\ 3x)^2 \cdot \left(0 + \frac{-(3x)'}{\sqrt{1-(3x)^2}} \right)$$

$$y' = 3 \cdot (1 + arc\ Cos\ 3x)^2 \cdot \left(\frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}} \right)$$

$$y' = -\frac{9 \cdot (1 + arc\ Cos\ 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}$$

2.6.10 Envolvendo Funções Trigonométricas Inversas e Regra do Logaritmo Natural

Exemplo:

$$y = ln\left(arc\ Tg\ x^2\right)$$

Solução:

$$y' = \frac{\left(arc\ Tg\ x^2\right)'}{\left(arc\ Tg\ x^2\right)}$$

$$y' = \frac{\dfrac{\left(x^2\right)'}{1+\left(x^2\right)^2}}{\left(arc\ Tg\ x^2\right)} \Rightarrow y' = \frac{\dfrac{2x}{\left(1+x^4\right)}}{\left(arc\ Tg\ x^2\right)} \Rightarrow y' = \left(\frac{2x}{1+x^4}\right) \cdot \left(\frac{1}{arc\ Tg\ x^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x}{\left(1+x^4\right) \cdot \left(arc\ Tg\ x^2\right)}$$

2.6.11 Envolvendo Funções Trigonométricas Inversas e Regra da Função Exponencial

Exemplo:

$$y = 3^{arc\ Sen\ x^3}$$

Solução:

$$y' = 3^{arc\ Sen\ x^3} \cdot \left(arc\ Sen\ x^3\right)' \cdot ln3$$

$$y' = 3^{arc\ Sen\ x^3} \cdot \left[\frac{\left(x^3\right)'}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} \right] \cdot ln3$$

$$y' = 3^{arc\ Sen\ x^3} \cdot \left[\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} \right] \cdot ln\ 3$$

$$y' = \frac{3^{arc\ Sen\ x^3} \cdot 3x^2 \cdot ln\ 3}{\sqrt{1-x^6}}$$

2.6.12 Envolvendo Funções Trigonométricas Inversas e Regra da Função Composta

Exemplo:

$$y = \left(Tg\ x\right)^{arc\ tg\ x}$$

Solução:

$$y' = \left(arc\ tg\ x\right) \cdot \left(Tg\ x\right)^{arc\ tg\ x - 1} \cdot \left(Tg\ x\right)' + \left(Tg\ x\right)^{arc\ tg\ x} \cdot \left(arc\ tg\ x\right)' \cdot lnTg$$

$$y' = \left(arc\ tg\ x\right) \cdot \left(Tg\ x\right)^{arc\ tg\ x} \cdot \left(Tg\ x\right)^{-1} \cdot \left(Tg\ x\right)' + \left(Tg\ x\right)^{arc\ tg\ x} \cdot \left(arc\ tg\ x\right)' \cdot lnTg$$

$$y' = \left(arc\ tg\ x\right) \cdot \left(Tg\ x\right)^{arc\ tg\ x} \cdot \frac{1}{\left(Tg\ x\right)^1} \cdot Sec^2 x \cdot x' + \left(Tg\ x\right)^{arc\ tg\ x} \cdot \frac{x'}{1+x^2} \cdot lnTg$$

$$y' = \left(arc\ tg\ x\right) \cdot \left(Tg\ x\right)^{arc\ tg\ x} \cdot \frac{1}{\left(Tg\ x\right)} \cdot Sec^2 x \cdot 1 + \left(Tg\ x\right)^{arc\ tg\ x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot lnTg$$

$$y' = \frac{\left(arc\ tg\ x\right) \cdot \left(Tg\ x\right)^{arc\ tg\ x} \cdot Sec^2 x}{\left(Tg\ x\right)} + \frac{\left(Tg\ x\right)^{arc\ tg\ x} \cdot lnTg}{1+x^2}$$

CAPÍTULO III

ESTUDO DAS INTEGRAIS

3. INTEGRAIS INDEFINIDAS

3.1 REGRAS DE INTEGRAÇÃO

3.1.1 Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

Formula:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Exemplo:

$$\int x^4\,dx$$

$$f(x) = \frac{x^{4+1}}{4+1}$$

$$f(x) = \frac{x^5}{5} + C$$

3.1.2 Para uma Função Exponencial

Formula:

$$\int a^{k\cdot x}\,dx = \frac{a^{k\cdot x}}{k\cdot \ln a} + C$$

Exemplo:

$$\int 3^{4x}\,dx = \frac{3^{4x}}{4\cdot \ln 3} + C$$

3.1.3 Para uma Função Exponencial de base *e*

Formula:

$$\int e^{k\cdot x}dx = \frac{e^{k\cdot x}}{k} + C$$

Exemplo:

$$\int e^{6x}dx = \frac{e^{6x}}{6} + C$$

3.1.4 Para Deslocamento de uma Constante

Formula:

$$\int a \cdot dx$$
$$a\int dx = ax + C$$

Exemplo:

$$\int 2dx$$
$$2\int dx = 2x + C$$

3.1.5 Para uma Função Logaritmo Natural

Formula:

$$\int \frac{1}{x} dx = ln(x) + C$$

Exemplo:

$$\int \frac{6}{x} dx \Rightarrow \int 6 \cdot \frac{1}{x} dx = 6 \cdot ln(x) + C$$

3.1.6 Para uma Soma e Subtração

Formula:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx$$
$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Exemplo:

$$\int\left(3x^2-4x^3\right)dx$$

Solução:

$$\int 3x^2\,dx-\int 4x^3\,dx$$

$$3\int x^2\,dx-4\int x^3\,dx$$

$$=3\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}-4\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1}$$

$$=3\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^4}{4}$$

$$=x^3-x^4+C$$

3.1.7 Veja algumas Resoluções

1) $\int(5-4t)dt$

Solução:

$$\int 5dt-\int 4tdt$$

$$5\int dt-4\int tdt$$

$$f(x)=5t-4\cdot\frac{t^{1+1}}{1+1}$$

$$f(x)=5t-4\cdot\frac{t^2}{2}$$

$$f(x)=5t-2t^2+C$$

2) $\int\left(\dfrac{12+12x-3x^3}{x^4}\right)dx$

Solução:

$$\int\frac{12}{x^4}+\int\frac{12x}{x^4}-\int\frac{3x^3}{x^4}$$

$$\int 12x^{-4}dx+\int 12x\cdot\left(x^{-4}\right)dx-\int 3x^3\cdot\left(x^{-4}\right)dx$$

$$f(x)=12\cdot\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+12\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}-3\int\frac{1}{x}dx$$

$$f(x)=12\cdot\frac{x^{-3}}{-3}+12\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-3ln(x)$$

$$f(x)=-4x^{-3}+6x^{-2}-3ln(x)+C$$

3) $\int\left(2+x^2\right)\times\left(3+x^2\right)dx$

Solução:

$$\int\left(6+2x^2+3x^2+x^4\right)dx$$

$$\int\left(6+5x^2+x^4\right)dx$$

$$\int 6dx+\int 5x^2dx+\int x^4dx$$

$$f(x)=6x+5\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}+\frac{x^{4+1}}{4+1}$$

$$f(x)=6x+5\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+C$$

4) $\dfrac{dy}{dx}=3x^2-4x^3$

Solução:

$$dy=\left(3x^2-4x^3\right)dx$$

$$\int dy=\int\left(3x^2-4x^3\right)dx$$

$$y=\int 3x^2dx-\int 4x^3dx$$

$$y=3\times\frac{x^{2+1}}{2+1}-4\times\frac{x^{3+1}}{3+1}$$

$$y=3\times\frac{x^3}{3}-4\times\frac{x^4}{4}$$

$$y=x^3-x^4+C$$

$5)\quad \int \sqrt{x}dx$

Solução:

$\int x^{1/2}\,dx$

$f(x) = \dfrac{x^{(1/2)+1}}{(1/2)+1} + C$

$6)\quad \dfrac{dy}{dx} = 200x^4$

Solução:

$dy = 200x^4\,dx$

$\int dy = \int 200x^4\,dx$

$y = 200 \times \dfrac{x^{4+1}}{4+1}$

$y = 200 \times \dfrac{x^5}{5}$

$y = 40x^5 + C$

$7)\quad \int 4z^{-1}dz$

Solução:

$4\int \frac{1}{z}dz$

$f(x) = 4\ln(z) + C$

3.2 TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

3.2.1 Método da Substituição

Formula:

$$\int f[g(x)]\cdot g'(x)\cdot dx = \int f(u)\cdot du$$

Veja algumas aplicações:

$1)\quad \int (3x+5)^2 \cdot 3dx$

Solução:

$u = 3x + 5$

$\dfrac{du}{dx} = 3 \therefore\ du = 3dx$

Logo:

$\int u^2\,du$

$F(x) = \dfrac{u^3}{3}$

$F(x) = \dfrac{(3x+5)^3}{3} + C$

$2)\quad \int e^{5x} \cdot 5dx$

Solução:

$u = 5x$

$\dfrac{du}{dx} = 5 \therefore\ du = 5dx$

Logo:

$\int e^u\,du$

$F(x) = e^u$

$F(x) = e^{5x} + C$

$$3)\quad \int \frac{1}{1+x^2} \bullet 2x dx$$

Solução:

$$u = 1 + x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \therefore du = 2xdx$$

Logo:

$$\int \frac{1}{u} \cdot du$$

$$F(x) = \ln(u)$$

$$F(x) = \ln(1 + x^2) + C$$

$$4)\quad \int (x+3)^{10} \cdot dx$$

Solução:

$$u = x + 3$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \therefore du = dx$$

Logo :

$$\int u^{10} \cdot du$$

$$F(x) = \frac{u^{11}}{11}$$

$$F(x) = \frac{(x+3)^{11}}{11} + C$$

3.2.2 Método Integração por Partes

Formula:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \cdot dx$$

$$\int u \cdot dv = (u \cdot v) - \int v \cdot du$$

Veja algumas aplicações:

$$1)\quad \int xe^x dx$$

Solução:

$$u = x$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \therefore du = dx$$

$$dv = e^x\, dx$$

$$\int dv = \int e^x dx$$

$$v = e^x$$

$$\int u \cdot dv = (x \cdot e^x) - \int e^x \cdot dx$$

$$\int u \cdot dv = xe^x - e^x$$

$$\int u \cdot dv = e^x(x - 1) + C$$

2) $\int x \cdot \ln x \, dx$

Solução:

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \therefore du = \frac{dx}{x}$

$dv = xdx$

$\int dv = \int xdx$

$v = \frac{x^2}{2}$

$\int u \cdot dv = (u \cdot v) - \int v \times du$

$\int u \cdot dv = (\ln x) \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}$

$\int u \cdot dv = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int xdx$

$\int u \cdot dv = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

3) $\int x^2 e^x dx$

Solução:

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \therefore du = 2xdx$

$dv = e^x dx$

$\int dv = \int e^x dx$

$v = e^x$

$\int u \cdot dv = (u \cdot v) - \int v \cdot du$

$\int u \cdot dv = (x^2) \cdot (e^x) - \int e^x \cdot 2x \, dx$

$\int u \cdot dv = x^2 e^x - 2 \int e^x x \, dx$

$\int u \cdot dv = x^2 e^x - 2 \cdot \left[(x-1) \cdot e^x \right] + C$

3.2.2.1 Obtenção de Formulas de Redução

Através da técnica de integração por partes é possível a obtenção de Fórmulas de Redução para determinados tipos de integrais trigonométricas. Estas fórmulas expressam uma integral com potência de função em termos de integrais que expressam uma potência de valor menorem relação aquela função.

Formulas:

$$\int Sen^n x \cdot dx = -\frac{1}{n} \cdot Sen^{n-1} x \cdot Cos\, x + \frac{n-1}{n} \cdot \int Sen^{n-2} x \cdot dx$$

$$\int Cos^n x \cdot dx = \frac{1}{n} \cdot Cos^{n-1} x \cdot Sen\, x + \frac{n-1}{n} \cdot \int Cos^{n-2} x \cdot dx$$

Veja algumas aplicações:

$1)\quad \int Sen^3 x \cdot dx$

Solução:

$$\int Sen^3 x \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot Sen^{3-1} x \cdot Cos\, x + \frac{3-1}{3} \cdot \int Sen^{3-2} x \cdot dx$$

$$\int Sen^3 x \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot Sen^2 x \cdot Cos\, x + \frac{2}{3} \cdot \int Senx \cdot dx$$

$$\int Sen^3 x \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot Sen^2 x \cdot Cos\, x - \frac{2}{3} \cdot Cos\, x$$

$$\int Sen^3 x \cdot dx = Cos\, x \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot Sen^2 x - \frac{2}{3} \right) + C$$

$2)\quad \int Cos^4 x \cdot dx$

Solução:

$$\int Cos^4 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot Cos^{4-1} x \cdot Senx + \frac{4-1}{4} \cdot \int Cos^{4-2} x \cdot dx$$

$$\int Cos^4 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot Cos^3 x \cdot Senx + \frac{3}{4} \cdot \int Cos^2 x \cdot dx$$

$$\int Cos^4 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot Cos^3 x \cdot Senx + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot Cos^{2-1} x \cdot Senx + \frac{2-1}{2} \cdot \int Cos^{2-2} x \cdot dx \right)$$

$$\int Cos^4 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot Cos^3 x \cdot Senx + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot Cos\, x \cdot Senx + \frac{1}{2} \cdot \int 1 \cdot dx \right)$$

$$\int Cos^4 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot Cos^3 x \cdot Senx + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot Cos\, x \cdot Senx + \frac{1}{2} \cdot x \right)$$

$$\int Cos^4 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot Cos^3 x \cdot Senx + \frac{3}{8} \cdot Cos\, x \cdot Senx + \frac{3}{8} \cdot x$$

$$\int Cos^4 x \cdot dx = Senx \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot Cos^3 x + \frac{3}{8} \cdot Cos\, x \right) + \frac{3}{8} \cdot x + C$$

3.2.3 Aplicações envolvendo as Técnicas de Integração

$1)\quad \int x\,Sen\,5x\,dx$

Solução:

Consideramos:

$$u = x \qquad dv = Sen\,5x\,dx$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \qquad \int dv = \int Sen\,5x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int Sen\,5x\,dx$$

Veja que obtivemos uma 2º integral:

$$\int Sen\,5x\,dx$$

Logo façamos:

$$t = 5x \qquad \int Sen\,5x\,dx$$

$$\frac{dt}{dx} = 5 \qquad \int Sen\,t \cdot \frac{dt}{5}$$

$$dt = 5 \cdot dx \qquad \frac{1}{5}\int Sen\,t \cdot dt \Rightarrow \frac{1}{5}\cdot\left(-Cos\,t\right) \Rightarrow -\frac{1}{5}\cdot Cos\,5x$$

Daí:

$$v = \int Sen\,5x\,dx$$

$$v = -\frac{1}{5}\cdot Cos\,5x$$

Temos:

$$\int x \cdot Sen\,5x\,dx = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int x \cdot Sen\,5x\,dx = x \cdot \left(-\frac{1}{5}\cdot Cos\,5x\right) - \int -\frac{1}{5}\cdot Cos\,5x \cdot dx$$

$$\int x \cdot Sen\,5x\,dx = -\frac{1}{5}\cdot x \cdot Cos\,5x + \frac{1}{5}\int Cos\,5x \cdot dx$$

Veja que obtivemos uma 3º integral:

$$\int Cos\,5x \cdot dx$$

Logo façamos:

$$w = 5x \qquad \int Cos\ 5x\ dx$$

$$\frac{dw}{dx} = 5 \qquad \int Cos\ w \cdot \frac{dw}{5}$$

$$dw = 5 \cdot dx \qquad \frac{1}{5}\int Cos\ w \cdot dw \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot Sen\ w \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot Sen\ 5x$$

Continuando coma integral primária:

$$\int x \cdot Sen\ 5x\ dx = -\frac{1}{5} \cdot x \cdot Cos\ 5x + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot Sen\ 5x$$

$$\int x \cdot Sen\ 5x\ dx = -\frac{1}{5} \cdot x \cdot Cos\ 5x + \frac{1}{25} \cdot Sen\ 5x$$

Por tanto:

$$\int x \cdot Sen\ 5x\ dx = -\frac{1}{5} \cdot x \cdot Cos\ 5x + \frac{1}{25} \cdot Sen\ 5x + C$$

2) $\int ln(1-x)\ dx$

Solução:

Consideramos:

$$u = \ln(1-x) \qquad dv = dx$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{1-x} \qquad \int dv = \int dx$$

$$du = -\frac{1}{1-x} \bullet dx \qquad v = x$$

Logo Façamos:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int \ln(1-x)\ dx = \ln(1-x) \cdot x - \int x \cdot \left(-\frac{1}{1-x}\right) \cdot dx$$

$$\int \ln(1-x)\ dx = \ln(1-x) \cdot x + \int x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right) dx$$

Veja que obtivemos uma 2º integral:

$$\int x \left(\frac{1}{1-}\right) \cdot dx$$

Logo façamos:

$$t = x \qquad dw = \frac{1}{1-x} \bullet dx$$

$$\frac{dt}{dx} = 1 \qquad \int dw = \int \frac{1}{1-x} \cdot dx$$

$$dt = dx \qquad w = \ln(1-x)$$

Continuando com a integral primária:

$$\int \ln(1-x)\ dx = \ln(1-x) \cdot x + \int \left(x \cdot \frac{1}{1-} \right) \cdot dx$$

$$\int \ln(1-x)\ dx = \ln(1-x) \cdot x + \left[t \cdot w - \int w \cdot dt \right]$$

$$\int \ln(1-x)\, dx = \ln(1-x) \cdot x + \left[x \cdot \ln(1-x) - \int \ln(1-x) \cdot dx \right]$$

$$\int \ln(1-x)\, dx = \ln(1-x) \cdot x + x \cdot \ln(1-x) - \int \ln(1-x) \cdot dx$$

Faça a transposição:

$$\int \ln(1-x)\ dx = M$$

$$\int \ln(1-x)\, dx = \ln(1-x) \cdot x + x \cdot \ln(1-x) - \int \ln(1-x) \cdot dx$$

$$M = \ln(1-x) \cdot x + x \cdot \ln(1-x) - M$$

$$M + M = \ln(1-x) \cdot x + x \cdot \ln(1-x)$$

$$2M = 2 \cdot \left[\ln(1-x) \cdot x \right]$$

$$M = \ln(1-x) \cdot x$$

Por tanto:

$$\int \ln(1-x)\ dx = \ln(1-x) \cdot x + C$$

3) $\int t\ e^{4t}\ dt$

Solução:

Consideramos:

$$u = t \qquad dv = e^{4t} \cdot dt$$

$$\frac{du}{dt} = 1 \qquad \int dv = \int e^{4t} \cdot dt$$

$$du = dt \qquad v = \int e^{4t} \cdot dt$$

Veja que obtivemos uma 2º integral:

$$\int e^{4t} \cdot dt$$

Logo façamos:

$$\int e^{4t} \cdot dt$$

$$w = 4t \qquad \int e^{w} \cdot \frac{dw}{4}$$

$$\frac{dw}{dt} = 4 \qquad \frac{1}{4} \cdot \int e^{w} \cdot dw$$

$$dw = 4 \cdot dt \qquad \frac{1}{4} \cdot e^{w} \cdot dw$$

Então:

$$v = \int e^{4t} \cdot dt = \frac{1}{4} \cdot e^{w} \cdot dw$$

Voltemos a integral primária:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int t\, e^{4t}\, dt = t \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot e^{4t}\right) - \int \frac{1}{4} \cdot e^{4t} \cdot dt$$

$$\int t\, e^{4t}\, dt = t \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot e^{4t}\right) - \frac{1}{4} \int e^{4t} \cdot dt$$

$$\int t\, e^{4t}\, dt = t \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot e^{4t}\right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{4t}$$

$$\int t\, e^{4t}\, dt = t \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot e^{4t}\right) - \frac{1}{16} \cdot e^{4t}$$

Por tanto:

$$\int t\, e^{4t}\, dt = t \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot e^{4t}\right) - \frac{1}{16} \cdot e^{4t} + C$$

$4)\quad \int (x+1)\cdot Cos\ 2x\ dx$

Solução:

Consideramos:

$$u = x + 1 \qquad dv = Cos\ 2x\ dx$$
$$\frac{du}{dx} = 1 \qquad \int dv = \int Cos\ 2x\ dx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}\cdot Sen\ 2x$$

Voltemos a integral primária:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$
$$\int (x+1) Cos\ 2x\ dx = (x+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot Sen\ 2x - \int\frac{1}{2}\cdot Sen\ 2x\cdot dx$$
$$\int (x+1) Cos\ 2x\ dx = (x+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot Sen\ 2x - \frac{1}{2}\int Sen\ 2x\cdot dx$$
$$\int (x+1) Cos\ 2x\ dx = (x+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot Sen\ 2x - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot Cos\ x\right)$$
$$\int (x+1) Cos\ 2x\ dx = (x+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot Sen\ 2x - \frac{1}{4}\cdot Cos\ x$$

Por tanto:

$$\int (x+1)\cdot Cos\ 2x\ dx = (x+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot Sen\ 2x - \frac{1}{4}\cdot Cos\ x + C$$

$5)\quad \int x\ ln\ 3x\ dx$

Consideramos:

$$u = \ln 3x \qquad dv = x\ dx$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{3x} \qquad \int dv = \int x\ dx$$
$$du = \frac{1}{x}\cdot dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Voltemos a integral primária:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int x \ln 3x \, dx = \ln 3x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$\int x \ln 3x \, dx = \ln 3x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x \cdot dx$$

$$\int x \ln 3x \, dx = \ln 3x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \ln 3x \, dx = \ln 3x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}$$

Por tanto:

$$\int x \ln 3x \, dx = \ln 3x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

6) $\int Cos^3 x \, dx$

Solução:

Vamos reescrever a Integral:

$$Cos^2 x \cdot Cosx \cdot dx$$

Consideramos:

$u = Cos^2 x$

$\frac{du}{dx} = -2 \cdot Cos\, x \cdot Sen\, x$

$du = -2 \cdot Cos\, x \cdot Sen\, x \cdot dx$

$dv = Cos\, x\, dx$

$\int dv = \int Cos\, x\, dx$

$v = Sen\, x$

Temos:

$$\int Cos^3 x\,dx = Cos^2 x \cdot Sen\,x - \int Sen\,x \cdot (-2 \cdot Cos\,x \cdot Sen\,x \cdot dx)$$
$$\int Cos^3 x\,dx = Cos^2 x \cdot Sen\,x + 2\int Sen\,x \cdot Cos\,x \cdot Sen\,x \cdot dx$$
$$\int Cos^3 x\,dx = Cos^2 x \cdot Sen\,x + 2\int Sen^2 x \cdot Cos\,x \cdot dx$$
$$\int Cos^3 x\,dx = Cos^2 x \cdot Sen\,x + 2\int \left(1 - Cos^2 x\right) \cdot Cos\,x \cdot dx$$
$$\int Cos^3 x\,dx = Cos^2 x \cdot Sen\,x + 2\int Cos\,x \cdot dx - Cos^3 x \cdot dx$$
$$\int Cos^3 x\,dx = Cos^2 x \cdot Sen\,x + 2\left[\int Cos\,x \cdot dx - \int Cos^3 x \cdot dx\right]$$
$$\int Cos^3 x\,dx = Cos^2 x \cdot Sen\,x + 2 \cdot \left[Sen\,x - \int Cos^3 x \cdot dx\right]$$
$$\int Cos^3 x\,dx = Cos^2 x \cdot Sen\,x + 2 \cdot Sen\,x - 2\int Cos^3 x \cdot dx$$

Faça a transposição:

$$\int Cos^3 x\,dx = M$$

$$\int Cos^3 x\,dx = Cos^2 x \cdot Sen\,x + 2 \cdot Sen\,x - 2\int Cos^3 x \cdot dx$$
$$M = Cos^2 x \cdot Sen\,x + 2 \cdot Sen\,x - 2M$$
$$M + 2M = Cos^2 x \cdot Sen\,x + 2 \cdot Sen\,x$$
$$3M = Cos^2 x \cdot Sen\,x + 2 \cdot Sen\,x$$
$$M = \frac{1}{3} \cdot Cos^2 x \cdot Sen\,x + \frac{2}{3} \cdot Sen\,x$$
$$\int Cos^3 x\,dx = \frac{1}{3} \cdot Cos^2 x \cdot Sen\,x + \frac{2}{3} \cdot Sen\,x$$
$$\int Cos^3 x\,dx = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - Sen^2 x\right) \cdot Sen\,x + \frac{2}{3} \cdot Sen\,x$$
$$\int Cos^3 x\,dx = \frac{1}{3} \cdot Sen\,x - \frac{1}{3} \cdot Sen^3 x + \frac{2}{3} \cdot Sen\,x$$
$$\int Cos^3 x\,dx = Sen\,x - \frac{1}{3} \cdot Sen^3 x$$

Por tanto:

$$\int Cos^3 x\,dx = Sen\,x - \frac{1}{3} \cdot Sen^3 x + C$$

7) $\int e^x \, Cos\,\frac{x}{2}\,dx$

Solução:

Consideramos:

$u = e^x$

$\frac{du}{dx} = e^x$

$du = e^x \cdot dx$

$dv = Cos\,\frac{x}{2}\,dx$

$\int dv = \int Cos\,\frac{x}{2}\,dx$

$v = 2 \cdot Sen\,\frac{x}{2}$

Temos:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int e^x \, Cos\,\frac{x}{2}\,dx = e^x \cdot 2 \cdot Sen\,\frac{x}{2} - \int 2 \cdot Sen\,\frac{x}{2} \cdot e^x \cdot dx$$

$$\int e^x \, Cos\,\frac{x}{2}\,dx = e^x \cdot 2 \cdot Sen\,\frac{x}{2} - 2\int Sen\,\frac{x}{2} \cdot e^x \cdot dx$$

Veja que obtivemos uma 2º integral:

$$\int Sen\,\frac{x}{2} \cdot e^x \cdot dx$$

Logo façamos:

$t = e^x$

$\frac{dt}{dx} = e^x$

$dt = e^x \cdot dx$

$dw = Sen\,\frac{x}{2}\,dx$

$\int dw = \int Sen\,\frac{x}{2}\,dx$

$w = -2 \cdot Cos\,\frac{x}{2}$

Então:

$$\int t \cdot dw = t \cdot w - \int w \cdot dt$$

$$\int Sen\,\frac{x}{2} \cdot e^x \cdot dx = e^x \cdot \left(-2 \cdot Cos\,\frac{x}{2} \right) - \int -2 \cdot Cos\,\frac{x}{2} \cdot e^x \cdot dx$$

$$\int Sen\,\frac{x}{2} \cdot e^x \cdot dx = -e^x \cdot 2 \cdot Cos\,\frac{x}{2} + 2\int e^x \cdot Cos\,\frac{x}{2} \cdot dx$$

Continuando com a integral primária:

$$\int e^x \, Cos\,\frac{x}{2}\, dx = e^x \cdot Sen\,\frac{x}{2} - \int Sen\,\frac{x}{2} \cdot e^x \cdot dx$$

$$\int e^x \, Cos\,\frac{x}{2}\, dx = e^x \cdot Sen\,\frac{x}{2} - \left[- e^x \cdot 2 \cdot Cos\,\frac{x}{2} + 2\int e^x \cdot Cos\,\frac{x}{2} \cdot dx \right]$$

$$\int e^x \, Cos\,\frac{x}{2}\, dx = e^x \cdot Sen\,\frac{x}{2} + e^x \cdot 2 \cdot Cos\,\frac{x}{2} - 2\int e^x \cdot Cos\,\frac{x}{2} \cdot dx$$

Faça a transposição:

$$\int e^x \, Cos\,\frac{x}{2}\, dx = M$$

$$M = e^x \cdot Sen\,\frac{x}{2} + e^x \cdot 2 \cdot Cos\,\frac{x}{2} - 2M$$

$$M + 2M = e^x \cdot Sen\,\frac{x}{2} + e^x \cdot 2 \cdot Cos\,\frac{x}{2}$$

$$3M = e^x \cdot Sen\,\frac{x}{2} + e^x \cdot 2 \cdot Cos\,\frac{x}{2}$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot e^x \cdot Sen\,\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \cdot e^x \cdot 2 \cdot Cos\,\frac{x}{2}$$

$$\int e^x \, Cos\,\frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{3} \cdot e^x \cdot Sen\,\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \cdot e^x \cdot 2 \cdot Cos\,\frac{x}{2}$$

Por tanto:

$$\int e^x \, Cos\,\frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{3} \cdot e^x \cdot Sen\,\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \cdot e^x \cdot 2 \cdot Cos\,\frac{x}{2} + C$$

8) $\int \sqrt{x}\, \ln x \, dx$

Solução:

Vamos reescrever a Integral:

$$\int x^{\frac{1}{2}} \ln x \, dx$$

Consideramos:

$$u = \ln x \qquad dv = x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \int dv = \int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \therefore v = \frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}$$

Temos:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx = \ln x \cdot \frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}} - \int \frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx$$

$$\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx = \ln x \cdot \frac{2}{5}\cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{5}\int x^{\frac{5}{2}}\cdot x^{-1}\cdot dx$$

$$\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx = \ln x \cdot \frac{2}{5}\cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{5}\int x^{\frac{3}{2}}\cdot dx$$

$$\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx = \ln x \cdot \frac{2}{5}\cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{5}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}$$

$$\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx = \ln x \cdot \frac{2}{5}\cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{5}\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}$$

$$\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx = \ln x \cdot \frac{2}{5}\cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{5}\cdot x^{\frac{7}{2}}\cdot\frac{2}{7}$$

$$\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx = \ln x \cdot \frac{2}{5}\cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{4}{35}\cdot x^{\frac{7}{2}}$$

Por tanto:

$$\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx = \frac{2}{5}\cdot \ln x \cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{4}{35}\cdot \sqrt[7]{x^2} + C$$

$9)\quad \int Cos\,sec^3\,x\,dx$

Solução:

Vamos reescrever a Integral:

$$\int Cos\,\sec^2 x \cdot Cos\,\sec x \cdot dx$$

Consideramos:

$$u = Cos\ \sec x \qquad dv = Cos\ \sec^2 x\ dx$$

$$\frac{du}{dx} = -Cos\ \sec x \cdot Cotg\ x \qquad \int dv = \int Cos\ \sec^2 x\ dx$$

$$du = -Cos\ \sec x \cdot Cotg\ x \cdot dx \qquad v = -Cotg\ x$$

Temos:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int Cos\ \sec^3 x\ dx = Cos\ \sec x \cdot (-\ Cotg\ x) - \int -\ Cotg\ x \cdot (-\ Cos\ \sec x \cdot Cotg\ x \cdot dx)$$

$$\int Cos\ \sec^3 x\ dx = -Cos\ \sec x \cdot Cotg\ x - \int Cotg\ x \cdot Cos\ \sec x \cdot Cotg\ x \cdot dx$$

$$\int Cos\ \sec^3 x\ dx = -Cos\ \sec x \cdot Cotg\ x - \int Cotg^{\,2} x \cdot Cos\ \sec x \cdot dx$$

$$\int Cos\ \sec^3 x\ dx = -Cos\ \sec x \cdot Cotg\ x - \int \left(Cos\ \sec^2 x - 1\right) \cdot Cos\ \sec x \cdot dx$$

$$\int Cos\ \sec^3 x\ dx = -Cos\ \sec x \cdot Cotg\ x - \int Cos\ \sec^3 x - Cos\ \sec x \cdot dx$$

$$\int Cos \sec^3 x\ dx = -Cos \sec x \cdot Cotg\ x - \left[\int Cos \sec^3 x \cdot dx - \int Cos \sec x \cdot dx\right]$$

$$\int Cos \sec^3 x\ dx = -Cos \sec x \cdot Cotg\ x - \int Cos \sec^3 x \cdot dx + \int Cos \sec x \cdot dx$$

$$\int Cos \sec^3 x\ dx = -Cos \sec x \cdot Cotg\ x + \int Cos \sec x \cdot dx - \int Cos \sec^3 x \cdot dx$$

$$\int Cos\ \sec^3 x\ dx = -Cos\ \sec x \cdot Cotg\ x + \ln \left|Cos\ \sec x - Cotg\ x\right| - \int Cos\ \sec^3 x \cdot dx$$

Faça a transposição:

$$\int Cos\ \sec^3 x\ dx = M$$

$$M = -Cos \sec x \cdot Cotg\ x + \ln \left|Cos \sec x - Cotg\ x\right| - M$$

$$M + M = -Cos \sec x \cdot Cotg\ x + \ln \left|Cos \sec x - Cotg\ x\right|$$

$$2M = -Cos \sec x \cdot Cotg\ x + \ln \left|Cos \sec x - Cotg\ x\right|$$

$$M = -\frac{1}{2} \cdot Cos\ \sec x \cdot Cotg\ x + \frac{1}{2} \cdot \ln \left|Cos\ \sec x - Cotg\ x\right|$$

$$\int Cos\ \sec^3 x\ dx = -\frac{1}{2} \cdot Cos\ \sec x \cdot Cotg\ x + \frac{1}{2} \cdot \ln \left|Cos\ \sec x - Cotg\ x\right|$$

Por tanto:

$$\int Cos\ \sec^3 x\ dx = -\frac{1}{2} \cdot Cos\ \sec x \cdot Cotg\ x + \frac{1}{2} \cdot \ln \left|Cos\ \sec x - Cotg\ x\right| + C$$

10) $\int x^2 \, Cos\ \alpha\, x\, dx$

Solução:

Consideramos:

$$u = x^2 \qquad dv = Cos\alpha\ x\ dx$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \qquad \int dv = \int Cos\ \alpha\ x\ dx$$

$$du = 2x \cdot dx \qquad v = \frac{1}{\alpha} \cdot Sen\alpha\, x$$

Temos:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int x^2 Cos\alpha\, x\ dx = x^2 \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot Sen\alpha\, x - \int \frac{1}{\alpha} \cdot Sen\alpha\, x \cdot 2x \cdot dx$$

$$\int x^2 Cos\alpha\, x\ dx = x^2 \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot Sen\alpha\, x - \frac{2}{\alpha} \int Sen\alpha\, x \cdot x \cdot dx$$

Veja que obtivemos uma 2º integral:

$$\int Sen\ \alpha\, x \cdot x \cdot dx$$

Logo façamos:

$$t = x \qquad dw = Sen\ \alpha\, x\ dx$$

$$\frac{dt}{dx} = 1 \qquad \int dw = \int Sen\ \alpha\, x\ dx$$

$$dt = dx \qquad w = -\frac{1}{\alpha} \cdot Cos\ \alpha\, x$$

Então:

$$\int t \cdot dw = t \cdot w - \int w \cdot dt$$

$$\int Sen\ \alpha\ x \cdot x \cdot dx = x \cdot \left(-\frac{1}{\alpha} \cdot Cos\ \alpha\ x \right) - \int -\frac{1}{\alpha} \cdot Cos\ \alpha\ \ x \cdot dx$$

$$\int Sen\ \alpha\ x \cdot x \cdot dx = -x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot Cos\ \alpha\ \ x + \frac{1}{\alpha} \int Cos\ \alpha\ \ x \cdot dx$$

$$\int Sen\ \alpha\ x \cdot x \cdot dx = -x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot Cos\ \alpha\ \ x + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha}\ Sen\ \alpha\, x$$

$$\int Sen\ \alpha\ x \cdot x \cdot dx = -x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot Cos\ \alpha\ \ x + \frac{1}{\alpha^2} \bullet Sen\ \alpha\, x$$

Continuando com a integral primária:

$$\int x^2 Cos\alpha\, x\, dx = x^2 \cdot Sen\ \alpha x - 2\int Sen\ \alpha x \cdot x \cdot dx$$

$$\int x^2 Cos\alpha\, x\, dx = x^2 \cdot Sen\ \alpha x - 2 \cdot \left[-x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot Cos\ \alpha x + \frac{1}{\alpha^2} \cdot Sen\ \alpha x \right]$$

$$\int x^2 Cos\alpha\, x\, dx = x^2 \cdot Sen\ \alpha x + 2x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot Cos\ \alpha x - \frac{2}{\alpha^2} \bullet Sen\ \alpha x$$

Por tanto:

$$\int x^2 Cos\alpha\, x\, dx = x^2 \cdot Sen\ \alpha x + 2x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot Cos\ \alpha x - \frac{2}{\alpha^2} \bullet Sen\ \alpha x + C$$

11) $\int x^2 Sen\ x\ dx$

Solução:

Consideramos:

$u = x^2$	$dv = Sen\ x\ dx$
$\frac{du}{dx} = 2x$	$\int dv = \int Sen\ x\ dx$
$du = 2x \cdot dx$	$v = -Cos\ x$

Temos:

$$\int x^2\ Sen\ x\ dx = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int x^2\ Sen\ x\ dx = x^2 \cdot (-Cos\ x) - \int -Cos\ x \cdot 2x \cdot dx$$

$$\int x^2 Sen\ x\ dx = -x^2 \cdot Cos\ x + \int Cos\ x \cdot 2x \cdot dx$$

Veja que obtivemos uma 2º integral:

$$\int Cos\ x \cdot 2x \cdot dx$$

Logo façamos:

$t = 2x$	$dw = Cos\ x\ dx$
$\frac{dt}{dx} = 2$	$w = \int Cos\ x\ dx$
$dt = 2 \cdot dx$	$w = Sen\ x$

Continuando com a integral primária:

$$\int x^2 Sen\ x\ dx = -x^2 \cdot Cos\ x + \int Cos\ x \cdot 2x \cdot dx$$
$$\int x^2 Sen\ x\ dx = -x^2 \cdot Cos\ x + \left[t \cdot w - \int w \cdot dt\right]$$
$$\int x^2\ Sen\ x\ dx = -x^2 \cdot Cos\ x + \left[2x \cdot Sen\ x - \int Sen\ x \cdot 2 \cdot dx\right]$$
$$\int x^2\ Sen\ x\ dx = -x^2 \cdot Cos\ x + \left[2x \cdot Sen\ x - 2\int Sen\ x \cdot dx\right]$$
$$\int x^2\ Sen\ x\ dx = -x^2 \cdot Cos\ x + \left[2x \cdot Sen\ x - 2 \cdot (-Cos\ x)\right]$$
$$\int x^2\ Sen\ x\ dx = -x^2 \cdot Cos\ x + \left[2x \cdot Sen\ x + 2 \cdot Cos\ x\right]$$
$$\int x^2\ Sen\ x\ dx = -x^2 \cdot Cos\ x + 2x \cdot Sen\ x + 2 \cdot Cos\ x$$

Por tanto:

$$\int x^2\ Sen\ x\ dx = -x^2 \cdot Cos\ x + 2x \cdot Sen\ x + 2 \cdot Cos\ x + C$$

12) $\int e^{2x}\ Sen\ x\ dx$

Solução:

Consideramos:

$$u = e^{2x} \qquad dv = Sen\ x\ dx$$
$$\frac{du}{dx} = 2 \cdot e^{2x} \qquad \int dv = \int Sen\ x\ dx$$
$$du = 2 \cdot e^{2x} \cdot dx \qquad v = -Cos\ x$$

Temos:

$$\int e^{2x}\ Sen\ x\ dx = u \cdot v - \int v \cdot du$$
$$\int e^{2x}\ Sen\ x\ dx = e^{2x} \cdot (-Cos\ x) - \int -Cos\ x \cdot 2 \cdot e^{2x} \cdot dx$$
$$\int e^{2x}\ Sen\ x\ dx = -e^{2x} \cdot Cos\ x + 2\int Cos\ x \cdot e^{2x} \cdot dx$$

Veja que obtivemos uma 2º integral:

$$\int Cos\ x \cdot e^{2x} \cdot dx$$

Logo façamos:

$$t = e^{2x}$$
$$\frac{dt}{dx} = 2 \cdot e^{2x}$$
$$dt = 2 \cdot e^{2x} \cdot dx$$

$$dw = Cos\ x\ dx$$
$$w = \int Cos\ x\ dx$$
$$w = Sen\ x$$

Continuando com a integral primária:

$$\int e^{2x}\ Sen\ x\ dx = -e^{2x} \cdot Cos\ x + 2\int\ Cos\ x \cdot e^{2x} \cdot dx$$
$$\int e^{2x}\ Sen\ x\ dx = -e^{2x} \cdot Cos\ x + 2 \cdot \left[t \cdot w - \int w \cdot dt \right]$$
$$\int e^{2x}\ Sen\ x\ dx = -e^{2x} \cdot Cos\ x + 2 \cdot \left[e^{2x} \cdot Sen\ x - \int Sen\ x \cdot 2 \cdot e^{2x} \cdot dx \right]$$
$$\int e^{2x}\ Sen\ x\ dx = -e^{2x} \cdot Cos\ x + 2 \cdot e^{2x} \cdot Sen\ x - 2\int Sen\ x \cdot 2 \cdot e^{2x} \cdot dx$$
$$\int e^{2x}\ Sen\ x\ dx = -e^{2x} \cdot Cos\ x + 2 \cdot e^{2x} \cdot Sen\ x - 4\int e^{2x} \cdot Sen\ x \cdot dx$$

Faça a transposição:

$$\int e^{2x}\ Sen\ x\ dx = M$$

$$M = -e^{2x} \cdot Cos\ x + 2 \cdot e^{2x} \cdot Sen\ x - 4M$$
$$M + 4M = -e^{2x} \cdot Cos\ x + 2 \cdot e^{2x} \cdot Sen\ x$$
$$5M = -e^{2x} \cdot Cos\ x + 2 \cdot e^{2x} \cdot Sen\ x$$
$$M = -\frac{1}{5} \cdot e^{2x} \cdot Cos\ x + \frac{2}{5} \cdot e^{2x} \cdot Sen\ x$$

Por tanto:

$$\int e^{2x}\ Sen\ x\ dx = -\frac{1}{5} \cdot e^{2x} \cdot Cos\ x + \frac{2}{5} \cdot e^{2x} \cdot Sen\ x + C$$

13) $\int Sen^3 x\ dx$

Vamos reescrever a Integral:

$$\int\ Sen^2 x\ Sen\ x\ dx$$

Consideramos:

$$u = Sen^2 x$$
$$\frac{du}{dx} = 2 \cdot Sen\ x \cdot Cos\ x$$
$$du = 2 \cdot Sen\ x \cdot Cos\ x \cdot dx$$

$$dv = Sen\ x\ dx$$
$$\int dv = \int\ Sen\ x\ dx$$
$$v = -Cos\ x$$

Temos:

$$\int Sen^3\, x\, dx = u \cdot v - \int v \cdot du$$
$$\int Sen^3\, x\, dx = Sen^2\, x \cdot (- Cos\, x) - \int - Cos\, x \cdot 2 \cdot Sen\, x \cdot Cos\, x \cdot dx$$
$$\int Sen^3\, x\, dx = -Sen^2\, x \cdot Cos\, x + 2\int Cos^2\, x \cdot Sen\, x \cdot dx$$
$$\int Sen^3 x\, dx = -Sen^2 x \cdot Cos\ x + 2\int (1 - Sen^2 x) \cdot Sen\ x \cdot dx$$
$$\int Sen^3 x\, dx = -Sen^2 x \cdot Cos\ x + 2\int Sen\ x \cdot dx - Sen^3 x \cdot dx$$
$$\int Sen^3 x\, dx = -Sen^2 x \cdot Cos\ x + 2\left[\int Sen\ x \cdot dx - \int Sen^3 x \cdot dx\right]$$
$$\int Sen^3 x\, dx = -Sen^2 x \cdot Cos\ x + 2\int Sen\ x \cdot dx - 2\int Sen^3 x \cdot dx$$
$$\int Sen^3\, x\, dx = -Sen^2\, x \cdot Cos\, x + 2 \cdot [- Cos\, x] - 2\int Sen^3\, x \cdot dx$$
$$\int Sen^3\, x\, dx = -Sen^2\, x \cdot Cos\, x - 2Cos\, x - 2\int Sen^3\, x \cdot dx$$

Faça a transposição:

$$\int Sen^3 x\, dx = M$$

$$M = -Sen^2\, x \cdot Cos\, x - 2Cos\, x - 2M$$
$$M + 2M = -Sen^2\, x \cdot Cos\, x - 2Cos\, x$$
$$3M = -Sen^2\, x \cdot Cos\, x - 2Cos\, x$$
$$M = -\frac{1}{3} \cdot Sen^2 x \cdot Cos\, x - \frac{2}{3} \cdot Cos\, x$$

Por tanto:

$$\int Sen^3 x\, dx = -\frac{1}{3} \cdot Sen^2 x \cdot Cos\, x - \frac{2}{3} \cdot Cos\, x + C$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALARCÓN, Sérgio Alberto; SUESCÚN, Carlos Mario & DE LA TORRE, Andrés. **El método de las tangentes de Fermat**. In: Esculea Regional de Matemáticas – Universidad del Valle. Vol. XIII nº 2, Diciembre – Colombia, 2005.

ALMEIDA, Susana Gorete Monteiro. **História da Matemática:** Newton e Leibniz. In: Universidade Católica Portuguesa. Monografia. Lisboa-PT, 2003.

BARON, E.M. **The Origins of the Infinitesimal Calculus** (Pergamon Press), 1969.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999.

BERTOLONI, Meli D. **Equivalence and Priority**: Newton vs. Leibniz. Clarendon Press Oxford, 1993.

BOYER. Carl B. **Tópicos de História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Ed. Atual. São Paulo, 1992.

BRESSAN, P. M. **Calculo Diferencial e Integral I:** Investigação sobre dificuldades dos alunos. In:X Salão de IniciaçãoCientífica PUCRS. Porto Alegre-RS, 2009.

FROTA, M. C. R. **Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de Cálculo**. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (orgs.). Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC – 2001.

REZENDE, Wanderley Moura. **O Ensino de Cálculo:** Dificuldades de Natureza Epistemológica. Tese (Doutorado em Educação). USP, São Paulo, 2003.

STEWART, James. **Cálculo**: Volume I. Editora: Cengace Learning. São Paulo, 2010.

STRONG, Edward W. **Barrowand Newton**. In: Journal of the History of Philosophy. Volume 8, Numero 2, Nova York, Abril 1970.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Tabela de Identidades Trigonométricas

$sen^2x + cos^2x = 1$	$1 + tg^2x = sec^2x$
$1 + cotg^2x = cosec^2x$	$sen(-x) = -sen\, x$
$cos(-x) = cos\, x$	$tg(-x) = -tg\, x$
	$sen\, 2x = 2\, senx.cos\, x$
$cos\, 2x = cos^2x - sen^2x = 1 - 2\, sen^2x = 2\, cos^2x - 1$	
$\left\lvert sen\, \frac{x}{2} \right\rvert = \sqrt{\frac{1 - cos\, x}{2}}$	$\left\lvert cos\, \frac{x}{2} \right\rvert = \sqrt{\frac{1 + cos\, x}{2}}$
$tg\, \frac{x}{2} = \frac{1 - cos\, x}{sen\, x} = \frac{sen\, x}{1 + cos\, x}$	$sen\, x.\, cos\, y = \frac{1}{2}\, [sen\, (x - y) + sen\, (x + y)]$
$sen\, x.\, sen\, y = \frac{1}{2}\, [cos\, (x - y) - cos\, (x + y)]$	$cos\, x.\, cos\, y = \frac{1}{2}\, [cos\, (x - y) + cos\, (x + y)]$
$cos\, x.\, sen\, y = \frac{1}{2} [sen\, (x + y) - sen\, (x - y)]$	$sen\, x - sen\, y = 2sen\left(\frac{x - y}{2}\right).cos\left(\frac{x + y}{2}\right)$
$sen\, x.\, cos\, x = \frac{1}{2}\, sen\, 2x$	$1 - cos\, x = 2\, sen^2\, \frac{x}{2}$
$1 + cos\, x = 2\, cos^2\, \frac{x}{2}$	$1 \pm sen\, x = 1 \pm cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$cos\, 2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta$	

APÊNDICE B

Tabela de Derivadas Usuais

Função (y)	*Derivada (y')*
$y = u^n$	$\Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$
$y = u\,v$	$\Rightarrow y' = u'\,v + v'u$
$y = \dfrac{u}{v}$	$\Rightarrow y' = \dfrac{u'\,v - v'\,u}{v^2}$
$y = a^u$	$\Rightarrow y' = a^u(\ln a)\,u', \quad (a > 0, a \neq 1)$
$y = e^u$	$\Rightarrow y' = e^u u'$
$y = \log_a u$	$\Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}\log_a e$
$y = \ln u$	$\Rightarrow y' = \dfrac{1}{u}u'$
$y = u^v$	$\Rightarrow y' = v\,u^{v-1}u' + u^v(\ln u)\,v'$
$y = \text{sen}\, u$	$\Rightarrow y' = u'\cos u$
$y = \cos u$	$\Rightarrow y' = -u'\text{sen}\, u$
$y = \text{tg}\, u$	$\Rightarrow y' = u'\sec^2 u$
$y = \text{cotg}\, u$	$\Rightarrow y' = -u'\,\text{cosec}^2 u$
$y = \sec u$	$\Rightarrow y' = u'\sec u\,\text{tg}\, u$
$y = \text{cosec}\, u$	$\Rightarrow y' = -u'\text{cosec}\, u\,\text{cotg}\, u$
$y = arc\,\text{sen}\, u$	$\Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = arc\cos u$	$\Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = arc\,\text{tg}\, u$	$\Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
$y = arc\cot g\, u$	$\Rightarrow \dfrac{-u'}{1+u^2}$
$y = arc\sec u, \lvert u\rvert \geq 1$	$\Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}, \lvert u\rvert > 1$
$y = arc\,\text{cosec}\, u, \lvert u\rvert \geq 1$	$\Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}, \lvert u\rvert > 1$

APÊNDICE C

Tabela de Integrais

Integrais Usuais		
$\int du = u + C$	$\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C$	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$	$\int e^{u} du = e^{u} + C$	$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$
$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$	$\int \operatorname{tg} u \, du = \ln\|\sec u\| + C$	$\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln\|\operatorname{sen} u\| + C$
$\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln\|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u\| + C$	$\int \sec u \, du = \ln\|\sec u + \operatorname{tg} u\| + C$	$\int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + C$
$\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\operatorname{cotg} u + C$	$\int \sec u . \operatorname{tg} u \, du = \sec u + C$	$\int \operatorname{cosec} u . \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a} + C$	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C$	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec} \left\|\frac{u}{a}\right\| + C$
$\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$	$\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$	$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tgh} u + C$
$\int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\operatorname{cotgh} u + C$	$\int \operatorname{sech} u . \operatorname{tgh} u \, du = -\operatorname{sech} u + C$	$\int \operatorname{cosech} u . \operatorname{cotgh} u \, du = -\operatorname{cosech} u + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{u+a}{u-a}\right\| + C$	$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left\|\frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{u}\right\| + C$

Fórmulas de Recorrência
$\int \operatorname{sen}^n u \, du = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} u . \cos u + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \, du$
$\int \cos^n u \, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u . \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du$
$\int tg^{\,n} u \, du = \frac{1}{n-1} tg^{\,n-1} u - \int tg^{\,n-2} u \, du$
$\int \operatorname{cotg}^n u \, du = -\frac{1}{n-1} \operatorname{cotg}^{n-1} u - \int \operatorname{cotg}^{n-2} u \, du$
$\int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u . \operatorname{tg} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du$
$\int \operatorname{cosec}^n u \, du = -\frac{1}{n-1} \operatorname{cosec}^{n-2} u . \operatorname{cotg} u + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} u \, du$
$\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{u.(u^2 + a^2)^{1-n}}{2a^2(n-1)} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}}$