ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Y EN DIFERENCIAS FINITAS

Curso práctico

(Practical course of ordinary differential equations and finite differences)

JOSEP MARIA FRANQUET BERNIS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
CENTRO ASOCIADO DE TORTOSA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Y EN DIFERENCIAS FINITAS

Curso práctico

(Practical course of ordinary differential equations and finite differences)

JOSEP MARIA FRANQUET BERNIS

2013

Primera edición, octubre de 2013

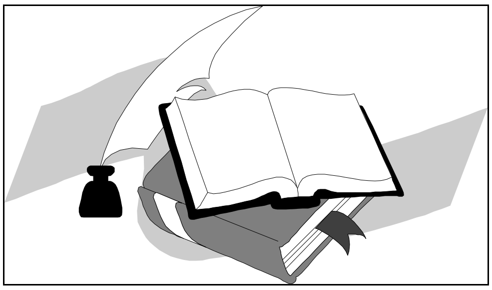
e-mail: jfbernis@iies.es

ISBN-13: 978-84-938420-1-7
ISBN-10: 84-938420-1-X

Depósito legal: T-1146-2013

Edita: UNED-Tortosa. C/ Cervantes, nº: 17, 43.500 TORTOSA
Imprime: **Gráfica Dertosense, S.L.**
C/ Cervantes, nº: 21, 43.500 Tortosa.
Tel.: 977 44 00 28
e-mail: graficadertosense@hotmail.com

Impreso en España
Printed in Spain



PRÓLOGO

El libro que ahora te presentamos, amable lector o lectora, está adaptado esencialmente a los programas oficiales correspondientes a un curso cuatrimestral (o incluso anual) de las Facultades de Ciencias, Ingeniería, Arquitectura y Economía de nuestras Universidades, por lo que se refiere al estudio y resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en diferencias finitas o recurrentes, ambas de provechosas aplicaciones en los campos reseñados.

Cada capítulo viene precedido por una serie de conocimientos teóricos, relativamente escuetos, que, a guisa de recordatorio, proporcionan al lector una referencia sucinta de todos aquellos conceptos, definiciones, proposiciones, lemas, teoremas, demostraciones, formulaciones y demás elementos teóricos indispensables -aunque no siempre suficientes- para la correcta resolución de los ejercicios prácticos que se proponen y resuelven a continuación de los epígrafes. Con ello, el lector podrá comprobar, de forma inmediata, que una parte considerable de los ejercicios posee un elevado nivel de detalle en su desarrollo resolutivo, pretendiéndose con ello patentizar la necesaria relación existente entre éstos y los conocimientos teóricos aludidos, puesto que dichos ejercicios constituyen un medio poderoso de adquisición y de consolidación de los expresados conocimientos. Eso sí, como siempre, todos aquellos errores que puedan aparecer en el texto serán de responsabilidad exclusiva de este autor.

De cualquier manera, y pese al elevado número de ejemplos que se ha pretendido cubrir, es sin duda la práctica profesional la que hará surgir problemas nuevos a los que habrá que enfrentarse y resolver con rigor científico a través de nuestros propios conocimientos. Esa labor se verá facilitada, en gran medida, merced al esfuerzo llevado a cabo para resolver el mayor número posible de ejercicios de cada tema; por esa razón no hemos querido tampoco escatimar su cantidad y diversidad.

Por otra parte, en aquellas cuestiones que, a juicio de este autor entrañan alguna mayor utilidad o dificultad, se insiste mediante ejercicios sucesivos con el objetivo de conseguir, de tal suerte, que el estudioso termine por conocer bien la materia pertinente. Algunos ejercicios se ilustran con una pequeña exposición teórica para facilitar su resolución, mientras otros tienen como finalidad el demostrar alguna propiedad relevante. Hay que tener en cuenta también que, en los últimos años, la aparición de computadoras de bajo costo y alta velocidad, con el *software* adecuado, ha dado lugar a nuevas técnicas de resolución que permiten modelar y resolver problemas complejos basados en sistemas de ecuaciones. Concretamente, las numerosas representaciones gráficas que aparecen en el libro, como reflejo visual de la resolución de los ejercicios, han sido elaboradas mayoritariamente con la ayuda del excelente sistema computerizado de álgebra *Wolfram Alpha Mathematica* fabricado por *Wolfram Research, Inc.* (http://www.wolfram.com/). Con este paquete, los usuarios "interactúan" de modo robusto. Entre sus muchas habilidades cuenta con una notable biblioteca de funciones clásicas (polinomios de Hermite, polinomios de Laguerre, …), resuelve integrales y ecuaciones diferenciales y en diferencias lineales así como sus sistemas, y sus gráficas ilustran poderosamente tanto curvas como superficies.

Antes del capítulo final de "Complementos", que simplemente ayuda a comprender mejor algunas de las cuestiones planteadas en el texto o bien abre perspectivas y señala nuevos horizontes de conocimiento y extensión de los conceptos tratados en nuestro libro, dedicamos otro capítulo a la resolución de problemas de aplicación a la Ciencia, la Técnica y la Economía de estos tipos de ecuaciones. Y es que el cultivo del mecanismo abstracto no deja huella útil alguna si no va acompañado del ejercicio de las facultades de abstracción y concreción a los problemas reales y de interpretación práctica de sus resultados. Tal es el carácter que no hemos querido obviar, en ningún momento, en la presente monografía matemática.

Al objeto de centrarnos exclusivamente en la materia objeto del libro, y de no alargar excesivamente su contenido, hemos prescindido expresamente de otros conceptos relacionados aunque no de menor interés, como los relativos a la profundización en los problemas de contorno y la función de Green, los métodos aproximados de integración gráficos (polígono de Euler y haz de isoclinas, curvas isopolares, antipodaria de Meissner) y numéricos (modificado de Euler, Runge-Kutta, Heun, punto medio, Adams-Bashforth-Moulton, Milne, aproximaciones sucesivas de Picard), los métodos perturbativos (perturbación regular, oscilador de van der Pol, WKB) y otros (serie de Taylor, implícitos, extrapolación), el cálculo de variaciones, el oscilador de Samuelson o las series de Fourier (expansiones de las funciones propias).

Al final del trabajo se incluye una lista de referencias bibliográficas de la que debo advertir, como suele suceder, que son todos los que están pero, evidentemente, que no están todos los que son. La selección ha sido hecha por gusto personal del autor y por aproximación al nivel del texto. Algunas de ellas, sin duda, serían la continuación natural de estas lecciones. Por cierto que, desde estas líneas, y en el marco limitado de estas reflexiones, quiero rendir tributo sincero de admiración y agradecimiento a los excelentes libros de texto y consulta existentes, citados en la bibliografía, sobre las materias objeto de tratamiento, habiendo sido influido notablemente, en mis estudios, por el brillante trabajo de sus autores.

Observarán que algunos ejercicios han sido resueltos, así como su enunciado, en lengua inglesa, y también algunas notas a pie de página. Con ello deseamos contribuir (¡también desde las matemáticas!) a las nuevas tendencias de la educación. Ya no hay excusa para aplazar los estudios de inglés: lo exige el Plan Bolonia. Europa quiere formar estudiantes que salgan al extranjero, puedan acceder a un puesto de trabajo fuera y sepan desenvolverse sin problemas en un país diferente, lo que exige la impartición de enseñanzas bilingües. Un reto que en el caso de España supondrá un esfuerzo adicional, dado el escaso desarrollo de las asignaturas de idiomas en el panorama educativo. Y es que con la entrada del EEES (Espacio Europeo de Educación Superior), a partir del curso académico 2009-2010, todo ha cambiado. El objetivo básico de la reforma consiste en promover la movilidad de estudiantes y profesionales por cualquier país europeo, a través de nuevos planes de estudio que incorporan enseñanzas bilingües y fomentan los periodos de formación en el extranjero. La internacionalización obligará al alumnado a acreditar un determinado nivel (B1 según el Marco Común Europeo de las Lenguas, un nivel intermedio) en un segundo idioma.

La tendencia es que los estudiantes aprendan inglés por razones prácticas. Es el segundo idioma más hablado del mundo y tiene un peso indiscutible en el mundo de los negocios, como precisa Bernie Maguire. A partir del curso académico 2011-2012, la prueba de acceso a la universidad obliga a los aspirantes a realizar una prueba oral de inglés o de otro idioma extranjero. Ello constituye un paso más, de singular importancia, en la reforma de nuestro sistema educativo, que tantas vicisitudes (no exentas de polémica, por cierto) está experimentando en los últimos tiempos.

A lo largo de cualquier trabajo científico, como el que ahora presentamos, se acumula toda una serie de débitos intelectuales y profesionales que resulta harto difícil describir en toda su extensión; pese a ello, algunos me parecen especialmente relevantes. Tampoco olvida, quien esto escribe, la formidable deuda de gratitud contraída con los que fueron sus guías y maestros, algunos de ellos ya desaparecidos. Mi reconocimiento, en fin, a las diversas instituciones que han apoyado la edición del presente libro y, particularmente, al Patronato del Centro Asociado en Tortosa de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), a la imprenta Gráfica Dertosense, S.L. por el cuidadoso esmero puesto en la edición de la obra, a nuestros competentes compañeros en las tareas docentes universitarias Mª Asunción Martorell y José Mª Velilla por sus acertadas observaciones y contribuciones y, en general, a todos cuantos se han interesado por la elaboración de esta monografía, aportando sugerencias y valiosos consejos dirigidos a la mejor consecución de nuestro empeño. Muy particularmente, quisiera agradecer a José María Franquet Jr. (¡cuántas horas!) su

farragoso trabajo de composición y tratamiento del texto, labor ésta no siempre fácil cuando se trata del lenguaje matemático.

Y para que del propio soñar nazcan nuevas y fecundas realizaciones, brindo nuestra aportación monográfica a todos los científicos y estudiosos de los temas ingenieriles y económicos y sus métodos cuantitativos, confiando y deseando que pueda reportar un extenso campo de utilidades a quienes, seducidos por una loable inquietud técnico-científica, o bien espoleados por la perentoriedad de mejorar su trabajo profesional, nos dispensen el inmenso honor de consultarla.

Tortosa, junio de 2013
EL AUTOR

PREFACE

The book presented to you herein, dear reader, is essentially adapted to the official programmes corresponding to a four- monthly (even yearly) course at the Faculties of Science, Engineering, Architecture, and Economics of our Universities, in what concerns the study and resolution of current differential equations and finite or recurrent differentials, both of much advantage in the applications in the above mentioned fields.

Each chapter comes preceded by a series of theoretical knowledge, relatively short, which, as a reminding, gives the reader a succinct reference of all those concepts, definitions, proposals, lemmas, theorems, formulations and other indispensable theoretical elements –not always sufficient though- for the correct resolution of the practicum exercises proposed and resolved following the epigraphs. With this, the reader will be able to realize instantly that a large part of the exercises possesses a high level of detail in the development of its solution, aiming at demonstrating the necessary relationship between those mentioned and the theoretical knowledge referred to, as the said exercises constitute a powerful means for the acquisition and consolidation of the above mentioned knowledge. It goes without saying that, as usual the author holds exclusive responsibility for those errors that might appear in the text.

In any case and despite the high number of examples we tried to deal with, the professional practice will undoubtedly give rise to new problems that will have to be faced and solved with scientific rigour through our own knowledge. This task will be made easier, to a large extent, thanks to the effort put into solving the greatest number of exercises in each unit; that's why we did not want to spare on quantity or diversity.

On the other hand and when the author judges so, those questions involving greater utility or difficulty will be insisted upon with a series of exercises that will be aimed at making the subject fully comprehensible for the scholar. Some exercises are illustrated with a short theoretical presentation to facilitate its solution, while others are meant to demonstrate a relevant property. We have to take into account that over the last years, the arrival of low cost high speed computers, with the right software, has provided us with new resolving techniques which allow for modelling and solving complex problems based on systems of equations. To be precise, the many graphic representations which appear in the text, as visual reflection for the solution of the exercises, have been produced with help from the excellent computerised system for algebra *Wolfram Alpha Mathematica,* made by *Wolfram Research, Inc.* (http://www.wolfram.com/). With this pack, the users 'interact' in a bold manner. Among its many abilities, it holds an outstanding library of classical functions (Hermite polynomials, Laguerre polynomials,…), it resolves integrals and differential equations, and at linear differentials and their systems and graphs illustrate powerfully curves as well as surfaces.

Before the final chapter 'Complements', that basically helps with the understanding of some of the questions set out in the text or it opens perspectives and signals new horizons of knowledge and extension of the concepts dealt with in this book, we dedicate another chapter to the resolution of problems that apply to Science, Technology, and Economics in these type of equations. The practice of the abstract mechanism does not leave any useful footprint if not accompanied by the exercise of the faculties of abstraction and concretion to real problems and the practical interpretation of their results. That's the characteristic we did not want to obviate, at any time, in this present mathematical monograph.

To focus exclusively on the subject matter of the book, and not to lengthen excessively its contents, we have ignored other related but not less interesting concepts, as the ones referring to the boundary condition problems and Green's function, the approximate methods of graphic integration (Euler's polygon and the set of isoclines, isopolar curves, Meissner's antipodal) and numeric (Eulerton's, Runge-Kutta, Heun, midpoint, Adams-Bashforth-Moulton, Milne, Picard's successive approximations), van der Pol's oscillator, WKB, implicit, Taylor's series, extrapolation, the calculation of variations, Samuelson's oscillator or Fourier's series (expansions of the proper functions).

At the end of the work we include a list of bibliographical references about which I have to warn you that, as it usually happens, does not include the whole of possibilities. The selection is the author's personal choice and according to the level of the text. Some of them would be, no doubt, the natural continuation of these lessons. By the way, and from these lines here I would like to pay tribute, honourably and gratefully, to the excellent text and consult books, cited in the bibliography, about the subject matter herein that have notably influenced my study because of the outstanding work of their authors.

You will notice that some of the exercises have been formulated and solved in English, as well as some footnotes. With this we would like to contribute (from mathematics as well) to the new trends in education. There is no excuse to put off the study of English: the Bologna Process so demands. Europe wants to educate students who would go abroad, work abroad and get about in a different country from theirs without trouble. This demands a bilingual system of education. A challenge that, in the case of Spain would require an additional effort given the poor development of foreign languages curricula in the educational arena. And this is so because everything has changed since the entry in the academic year 2009-2010 of the EHEA (European Higher Education Area). It aims basically at promoting the mobility among students and professionals in any European country, through new studies that include bilingual teachings and encourage educational stays abroad. The internationalisation will require the students to prove their level (B1 according to the Common European

Framework of Reference for Languages, intermediate level) in a second language.

The trend is that the students would learn English for practical reasons. It is the second most spoken language in the world and has a lot of weight in the business world as states Bernie Maguire. From the academic year 2011-2012, the University entry exam requires the students to take an oral exam in English or another foreign language. This constitutes a step forward, most important, in the reform of our educational system, which is going through many difficulties lately that are not free from controversy, by the way.

Any intellectual work as the one presented here, generates such a huge list of indebted intellectual and professional issues that is hard to cite completely herein, some seem relevant to me, though. Who that writes this does not forget either the enormous gratitude towards those who were his teachers or guides, some of them already gone. My appreciation to the institutions that have backed up the edition of this book, and particularly to the *Patronato del Centro Asociado en Tortosa de la Universidad Nacional de Educación a Distancia* (UNED), to the printing house Gráfica Dertosense, S.L. for their caring in the printing of this work, to ours competent fellows University teachers, Mª Asunción Martorell and José Mª Velilla for her accurate observations and contributions and, in general, to those who have been involved in the production of this monograph, making suggestions and giving valuable advice for the best outcome. So much particularly I would like to thank José María Franquet Jr. (how many hours!) his dense work in the composition and processing of the text, a task not that easy when it comes down to mathematical language.

And to make new and prolific productions from one's own dreaming, I offer our monograph contribution to all scientists and scholars of Engineering and Economics themes and their quantitative methods, in the hope and with the wish that it may be of extensive use for those that seduced by a praiseworthy technical-scientific interest, or compelled by an urge to better their professional work, may give us the honour of consulting it.

Tortosa, June 2013
THE AUTOR

PRÒLEG

El llibre que ara et presentem, amable lector o lectora, està adaptat essencialment als programes oficials corresponents a un curs quadrimestral (o fins i tot anual) de les Facultats de Ciències, Enginyeria, Arquitectura i Economia de les nostres Universitats, pel que es refereix a l'estudi i resolució de les equacions diferencials ordinàries i en diferències finites o recurrents, ambdues de profitoses aplicacions en els camps ressenyats.

Cada capítol ve precedit per un conjunt de coneixements teòrics, relativament escarits, que, a tall de recordatori, proporcionen al lector una referència succinta de tots aquells conceptes, definicions, proposicions, lemes, teoremes, demostracions, formulacions i endemés elements teòrics indispensables -encara que no sempre suficients- per a la correcta resolució dels exercicis que es proposen i resolen a continuació dels epígrafs. Amb això, el lector podrà comprovar, de forma immediata, que una part considerable dels exercicis posseeix un elevat nivell de detall en el seu desenvolupament resolutiu, pretenent-se amb això patentitzar la necessària relació existent entre aquests i els coneixements teòrics esmentats, ja que els exercicis constitueixen un poderós mitjà d'adquisició i de consolidació dels coneixements. Això sí, com sempre, tots aquells errors que puguin aparèixer al text seran de responsabilitat exclusiva d'aquest autor.

De qualsevol manera, i malgrat l'elevat nombre d'exemples que s'ha pretès cobrir, és sens dubte la pràctica professional la que farà sorgir problemes nous als que caldrà enfrontar-se i resoldre amb rigor científic a través dels nostres propis coneixements. Aquesta tasca es veurà facilitada, en gran mesura, mercès a l'esforç portat a terme per tal de resoldre el major número possible d'exercicis de cada tema; per aquesta raó no hem volgut tampoc escatimar la seva quantitat i diversitat.

D'altra banda, en aquelles qüestions que, a judici d'aquest autor comporten alguna major utilitat o dificultat, s'insisteix mitjançant exercicis successius amb l'objectiu d'aconseguir, així, que l'estudiós acabi per conèixer bé la matèria pertinent. Alguns exercicis s'il·lustren amb una petita exposició teòrica per a facilitar la seva resolució, mentre que altres tenen com a finalitat el demostrar alguna propietat rellevant. Altrament, cal tenir en compte que, als darrers anys, l'aparició de computadores de baix cost i elevada velocitat, amb el *software* adient, ha comportat noves tècniques de resolució que permeten modelar i resoldre problemes complexos basats en sistemes d'equacions. Concretament, les nombroses representacions gràfiques que apareixen al llibre, com a reflex visual de la resolució dels exercicis, han estat elaborades amb l'ajut de l'excel·lent programa *Wolfram Alpha Mathematica*, fabricat per *Wolfram Research, Inc*. (http://www.wolfram.com/). Amb aquest paquet, els usuaris "interactuen" de manera força eficient. Entre les seves habilitats ofereix una notable biblioteca de funcions clàssiques (polinomis d'Hermite, polinomis de Laguerre, …), resol integrals i equacions diferencials i en diferències lineals així com llurs sistemes, y les seves gràfiques il·lustren poderosament tant corbes com superfícies.

Abans del capítol final de "Complementos", que simplement ajuda a comprendre millor algunes de les qüestions plantejades en el text o bé obre perspectives i assenyala nous horitzons de coneixement i extensió dels conceptes tractats en el nostre llibre, dediquem un altre capítol a la resolució de problemes d'aplicació a la Ciència, a la Tècnica i la Economia d'aquests tipus d'equacions. I és que el cultiu del mecanisme abstracte no deixa empremta útil si no va acompanyat de l'exercici de les facultats d'abstracció i concreció als problemes reals i d'interpretació pràctica dels seus resultats. Aquest és el caràcter que no hem volgut obviar, en cap moment, a la present monografia matemàtica.

Amb l'objecte de centrar-nos exclusivament en la matèria objecte del llibre, i de no allargar excessivament el seu contingut, hem prescindit expressament d'altres conceptes relacionats, com ara els relatius a l'aprofundiment en els problemes de contorn i la funció de Green, els mètodes aproximats d'integració gràfics (polígon d'Euler i feix d'isoclines, corbes isopolars, antipodària de Meissner) i numèrics (modificat d'Euler, Runge-Kutta, Heun, punt mitjà, Adams-Bashforth-Moulton, Milne, aproximacions successives de Picard), els mètodes pertorbatius (pertorbació regular, oscil·lador de van der Pol, WKB) i d'altres (sèrie de Taylor, extrapolació, implícits), el càlcul de variacions, l'oscil·lador de Samuelson o les sèries de Fourier (expansions de les funcions pròpies).

Al final del treball s'inclou un llistat de referències bibliogràfiques de la que cal advertir, com sol succeir, que són tots els que estan però, evidentment, que no hi estan tots els que són. La selecció corresponent ha estat feta pel criteri personal de l'autor i per aproximació al nivell del text. Algunes d'aquestes, sens dubte, serien la continuació natural d'aquestes lliçons. Per cert que, des d'aquestes línees, i en el marc limitat d'aquestes reflexions, voldria rendir tribut sincer d'admiració i agraïment als excel·lents llibres de text i consulta existents, esmentats a la bibliografia, sobre les matèries objecte de tractament, havent estat influït notablement, en els meus estudis, pel brillant treball dels seus autors.

Observaran que alguns exercicis han estat resolts, així como el seu enunciat, en llengua anglesa, i també certes notes a peu de plana. Amb això desitgem contribuir (també des de les matemàtiques!) a les noves tendències de l'educació. Ja no hi ha excusa per a aplaçar els estudis d'anglès: ho exigeix el Pla Bolonya. Europa vol formar estudiants que surtin a l'estranger, puguin accedir a un lloc de treball fora i puguin surtir-se'n sense problemes en un país diferent, la qual cosa exigeix la impartició d'ensenyaments bilingües. Un repte que en el cas d'Espanya suposarà un esforç addicional, donat l'escàs desenvolupament de les assignatures d'idiomes al nostre panorama educatiu. I és que, amb l'entrada del EEES (Espai Europeu d'Educació Superior), a partir del curs acadèmic 2009-2010, tot ha canviat. L'objectiu bàsic de la reforma és el de promoure la mobilitat d'estudiants i professionals per qualsevol país europeu, a través de nous plans d'estudi que incorporen ensenyances bilingües i fomenten els períodes de formació a l'estranger. La internacionalització obligarà l'alumnat a acreditar un determinat nivell (B1 segons el Marc Comú Europeu de les Llengües, un nivell intermedi) en un segon idioma.

La tendència és que els estudiants aprenguin anglès per raons pràctiques. És el segon idioma més parlat del món i té un pes indiscutible en el món dels negocis, com precisa Bernie Maguire. Des del curs acadèmic 2011-2012, la prova d'accés a la universitat obliga els aspirants a realitzar una prova oral d'anglès o d'un altre idioma estranger. Això constitueix un pas més, de singular importància, en la reforma del nostre sistema educatiu, que tantes vicissituds (no exemptes de polèmica, por cert) està experimentant en els darrers temps.

Al llarg de qualsevol treball científic, com el que ara presentem, s'acumula tota una sèrie de dèbits intel·lectuals i professionals que resulta prou difícil descriure en tota la seva extensió; malgrat això, alguns em semblen especialment rellevants. Tampoc oblida, qui això escriu, el formidable deute de gratitud contreta amb els que foren els seus guies i mestres, alguns d'ells ja desapareguts. El meu reconeixement, a la fi, a les diverses institucions que han recolzat l'edició del present llibre i, particularment, al Patronat del Centre Associat de Tortosa de la Universitat Nacional d'Educació a Distància (UNED), a la impremta Gràfica Dertosense, S.L. per la cura posada en l'edició de l'obra, als nostres competents companys en las tasques docents universitàries Ma. Assumpció Martorell i Josep Ma. Velilla per les seves encertades observacions i contribucions i, en general, a tots quants s'han interessat per l'elaboració d'aquesta monografia, aportant suggeriments i valuosos consells dirigits a la millor consecució del nostre objectiu. Molt particularment, vull agrair a Josep Maria Franquet Jr. (quantes hores!) el seu enfarfegador treball de composició i tractament del text, tasca aquesta no sempre fàcil quan es tracta del llenguatge matemàtic.

I per que del propi somiar neixin noves i fecundes realitzacions, brindo la nostra aportació monogràfica a tots els científics i estudiosos dels temes enginyerils i econòmics i els seus mètodes quantitatius, confiant i desitjant que pugui reportar un extens camp d'utilitats als qui, seduïts per una lloable inquietud tècnico-científica, o bé esperonats per la peremptorietat de millorar el seu treball professional, ens dispensin l'immens honor de consultar-la.

Tortosa, juny de 2013
L'AUTOR

CAPÍTULO 0
GRAFO DEL LIBRO

1. DEFINICIONES BÁSICAS

La Teoría de Grafos constituye, sin duda, una parte importante de la Investigación Operativa de fecundas aplicaciones en la Economía y en la Técnica, aunque, como veremos seguidamente, también puede crear un extenso campo de utilidades en la Pedagogía y en las ciencias de la educación. Un "grafo" es la representación, por medio de conjuntos, de relaciones arbitrarias existentes entre diversos objetos. Existen dos tipos de grafos según que la relación entre los objetos sea unívoca o bien biunívoca (biyectiva). Los primeros forman los grafos dirigidos o dígrafos y los segundos los grafos no dirigidos o simplemente grafos. En la mayor parte de los algoritmos que son objeto de estudio se hace referencia a la terminología básica que se propone a continuación. Dicha terminología, sin embargo, no es estándar y puede llegar a variar en los distintos textos que pueden encontrarse sobre la materia.

En matemáticas y en las ciencias de la computación, la teoría de grafos (también llamada teoría de las gráficas) estudia las propiedades de los grafos (también llamadas gráficas). Un grafo es un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices (o nodos) y una selección de pares de vértices, llamados aristas (*arcs* en inglés) que pueden ser orientados o no. Típicamente, un grafo se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).

La teoría de los grafos es una de las partes teóricas de las matemáticas en la cual la noción de "correspondencia multívoca" resulta muy útil, esto es, cuando existe algún elemento del conjunto inicial con más de una imagen. Pues bien, consideremos ahora un conjunto finito $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ y una correspondencia multívoca Γ definida sobre este conjunto. Se dice que el par G = (V, Γ) constituye un grafo de orden n, que se puede representar con la ayuda de un dibujo denominado "representación sagital del grafo". A cada elemento v_i se le hace corresponder un punto sobre el papel, llamado "vértice" del grafo. Dos vértices v_i y v_j que están ligados por una flecha que va de v_i hacia v_j se denominan *adyacentes*. Esta flecha, llamada *arco del grafo*, representa la relación existente entre los dos elementos v_i y v_j del conjunto V.

Un grafo se dice que no tiene bucles cuando la diagonal principal de la matriz asociada a él no contiene más que ceros. Cuando $(v_i,v_i) = 1$, se dice que existe un bucle en el vértice v_i.

Sea a = (v_i,v_j) un arco cualquiera del grafo G. El vértice v_i se llama *extremidad inicial* del arco y el vértice v_j *extremidad terminal* del mismo. Se dice también que *a* es un arco incidente interiormente a v_j e incidente exteriormente a v_i. El *grado interior o exterior* de un vértice es el número de arcos incidentes interior o exteriormente a este vértice.

Se llama *camino* a una sucesión ordenada de arcos (a_1, a_2,…,a_p) tal que la extremidad terminal de cada arco coincida con la extremidad inicial del arco siguiente. Cuando la extremidad terminal del último arco se confunde con la extremidad inicial del primer arco, el camino (finito) forma un *circuito*. Salvo indicaciones contrarias, la longitud de un camino o de un circuito es igual al número de arcos que lo componen. Cuando estos arcos son todos distintos se dice que el camino o el circuito es *simple*, y cuando tienen por extremidad terminal (o inicial) vértices todos diferentes, se dice que es *elemental*.

Un camino o un circuito que pase una vez y una sola por cada vértice del grafo se denomina *hamiltoniano*. Tal camino o circuito puede estar caracterizado por la doble propiedad siguiente: ser elemental y de longitud *n*, en el caso de un circuito, o de longitud *n-1* en el caso de un camino, siendo *n* el orden del grafo.

Se utiliza con provecho, para la búsqueda de los caminos y de los circuitos hamiltonianos[1], el método de composición latina presentado por A. Kaufmann e Y. Malgrange en la *Revista de la Sociedad Francesa de Investigación Operativa*, VII, número 26, editada por Dunod, que no podemos exponer aquí por falta de espacio.

He aquí diferentes tipos de grafos que poseen propiedades particulares, a saber:

- *Grafo simétrico*: en que dos vértices adyacentes están siempre ligados por dos arcos (uno en cada sentido):

$$(v_i,v_j) \in A \Rightarrow (v_j,v_i) \in A;$$

- *Grafo antisimétrico*: en que dos vértices no están jamás ligados por dos arcos:

$$(v_i,v_j) \in A \Rightarrow (v_j,v_i) \notin A;$$

- *Grafo completo*: en que dos vértices cualesquiera son siempre adyacentes; o dicho de otro modo, que todo par de vértices está ligado al menos en una de las dos direcciones;

[1] **William Rowan Hamilton** (1805–1865) was an Irish physicist, astronomer, and mathematician, who made important contributions to classical mechanics, optics, and algebra. His studies of mechanical and optical systems led him to discover new mathematical concepts and techniques. His greatest contribution is perhaps the reformulation of Newtonian mechanics, now called Hamiltonian mechanics. This work has proven central to the modern study of classical field theories such as electromagnetism, and to the development of quantum mechanics. In mathematics, he is perhaps best known as the inventor of quaternions. Hamilton is said to have shown immense talent at a very early age. Astronomer Bishop Dr. John Brinkley remarked of the 18-year-old Hamilton, 'This young man, I do not say *will be*, but *is*, the first mathematician of his age.'

- *Grafo fuertemente conexo*: en que dos vértices distintos están siempre ligados, al menos, por dos caminos (uno en cada sentido);

- *Grafo transitivo*: en que existe siempre un arco que va del origen de un camino cualquiera a su extremidad; además, cada vértice posee un bucle;

- *Grafo sin circuitos*: en que no existe ningún circuito, ni siquiera un bucle;

- *Grafo simple*: en que existe una división de dos vértices en dos clases de tal forma que todo arco tenga su extremidad inicial en la primera y su extremidad terminal en la segunda. Un grafo simple está, a menudo, expresado así: G = (V, W, Γ).

Un "grafo dirigido" o "dígrafo" consiste en un conjunto de vértices V y un conjunto de arcos A. Los vértices se denominan *nodos* o *puntos*; los arcos también se conocen como *aristas* o *líneas* dirigidas que representan que, entre un par de vértices, existe una relación unívoca aRb pero no necesariamente bRa (en cuyo caso existiría un "circuito" entre esos nodos). De modo que los arcos se representan comúnmente por medio de pares ordenados (a,b), donde se dice que *a* es la cabeza y *b* la cola del arco y, a menudo, se representa también por medio de una flecha, tal como se muestra en la figura siguiente:

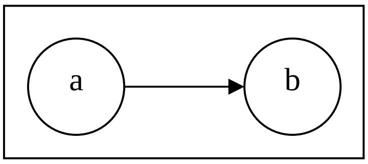


FIG. 0.1. Grafo dirigido.

También se puede definir el grafo como: $G = \{V, A\}$ donde $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ y $a_i = (v_j, v_k)$ tal que $v_j, v_k \in V$. En dicho grafo se entiende que $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$ y en muchos casos solo existe uno de los pares de vértices.

Un vértice que solo tiene arcos saliendo de él se denomina *fuente* y un vértice que solo tiene arcos dirigidos hacia él se denomina *sumidero*. Dicha nomenclatura resulta importante cuando los dígrafos se usan para resolver problemas de flujos.

Un grafo no dirigido, o grafo, al igual que un dígrafo, consiste de un conjunto de vértices V y un conjunto de arcos A. La diferencia entre ambos estriba en que la existencia de aRb presupone que bRa también existe y además que son iguales. De este modo, resulta indistinto hablar del arco (a,b) o (b,a), como tampoco tiene sentido hablar de la "cabeza" o la "cola" del arco. Estos grafos se representan esquemáticamente como lo indica la figura 0.2, donde los círculos representan los vértices y las líneas representan los arcos. Así:

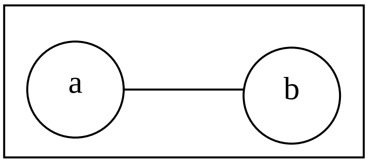


FIG. 0.2. Grafo no dirigido.

En este último caso, $G = \{V, A\}$ donde $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ y $a_i = (v_j, v_k)$ tal que $v_j, v_k \in V$. En dicho grafo se entiende que $(v_i, v_j) \Leftrightarrow (v_j, v_i)$ y además se cumple que: $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$, donde ambos pares de vértices representan precisamente el mismo arco.

Existen además grafos en donde los arcos tienen asociado algún valor (en nuestro caso podría ser el tiempo previsible de asimilación por el/la lector/a de un capítulo determinado de nuestro libro), en cuyo caso hablamos de "grafos ponderados" y ahora se representan los arcos como tripletas. Sigue, pues, existiendo la información de los vértices unidos por dicho arco, además de la información del peso o ponderación de dicho arco o actividad. Así pues, el arco se representa como: $a = (v_i, v_j, w)$ donde v_i, v_j son el origen y destino y w es el peso (el tiempo expresado en minutos, en nuestro caso), respectivamente.

Utilizando, pues, la nueva terminología, veamos que un nodo **b** se dice que es **adyacente** al nodo **a** si existe el arco (a,b). Téngase en cuenta que, para un grafo no dirigido, necesariamente **a** es también adyacente a **b**. Esto no ocurre en los grafos dirigidos donde la existencia de (a, b) no implica que (b, a) también exista. Este concepto resulta de particular importancia, dado que los grafos suelen representarse en la computadora por medio de listas o matrices de adyacencias.

Un arco (a,b) **incide** en el nodo *b*, de igual modo en un grafo no dirigido dicho arco también incide en el nodo *a* debido a que también existe el arco (b, a). El número de arcos que inciden en un nodo le otorga el **grado** a dicho nodo. El nodo con mayor grado en el grafo le indica el grado de dicho grafo. También se acostumbra a representar a un grafo por medio de listas o matrices de incidencias.

2. ORDENACIÓN EN NIVELES DEL GRAFO

2.1. CONCEPTUALIZACIÓN

A la hora de afrontar la construcción manual del grafo de un proyecto cualquiera resulta de gran utilidad ordenar las actividades por niveles. La ordenación por niveles permite construir el grafo en cuestión disponiendo los sucesos de forma tal que al trazar las actividades o prelaciones no aparezca un número excesivo de cruces, lo que dificultaría la interpretación del grafo del libro. En nuestro caso, los vértices serán los diferentes capítulos del mismo en número de nueve (o diez, considerando este mismo), y se entiende que los arcos denotan el tiempo necesario para llevar a cabo las actividades de estudio y comprensión necesarias para asimilar correctamente un capítulo determinado incidente, cuestión ésta que veremos más adelante, con lo que resultará, en definitiva, el siguiente grafo:

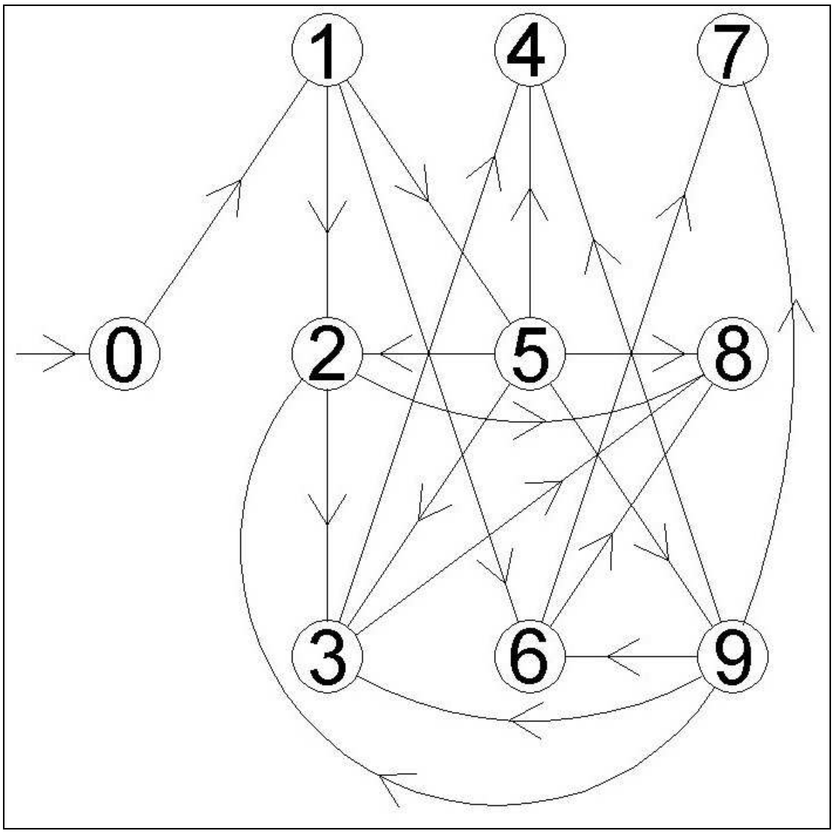


FIG. 0.3. Grafo del libro.

2.2. MÉTODO GRÁFICO

Para ello, se deberán seguir los siguientes pasos:

1.- Se busca en el grafo el subconjunto de vértices de los que no nace ningún arco. Este subconjunto constituye el último nivel del grafo.

2.- Seguidamente, suprimimos estos vértices y los arcos relacionados con ellos.

3.- En el subgrafo obtenido se vuelve a buscar el subconjunto de vértices de los que no nace ningún arco. Este subconjunto constituye el penúltimo nivel del grafo.

4.- A continuación, eliminamos estos vértices y los arcos relacionados con ellos.

5.- Repitiendo iterativamente este proceso obtenemos el grafo ordenado en niveles.

6.- Nótese, en fin, que en la numeración de los vértices de una actividad, el número del suceso origen siempre es menor que el número del suceso final.

2.3. MÉTODO MATRICIAL

Es el que emplearemos en nuestro caso. Para ello, se deberán seguir los siguientes pasos (algoritmo de Democron[2]):

1.- Concepto de matriz asociada a un grafo: Es una matriz cuadrada de dimensión n, igual al número de vértices, en la que sus elementos a_{ij} son 1 ó 0 dependiendo de si existe o no arco entre el vértice i y el vértice j.

2.- Ampliamos la matriz asociada al grafo por medio de un cierto vector columna V_1. Los elementos de este vector son iguales a la suma de los elementos de cada fila de la matriz asociada.

3.- Los elementos de la columna que sean ceros, nos indican los vértices que constituyen el último nivel del grafo.

4.- Ampliamos la matriz asociada por un nuevo vector columna V_2. Los elementos de este nuevo vector se obtienen restando, a los elementos de V_1, los elementos homólogos de la(s) columna(s) que corresponden a los vértices que en dicho vector V_1 toman el valor cero. Cuando el minuendo y el sustraendo sean cero se coloca una aspa en el vector en lugar de un cero.

5.- Debajo de la columna correspondiente a cada vector se van colocando los números de los vértices con los que se obtienen elementos de valor cero en el vector. Los elementos de V_2 que sean cero serán los vértices del penúltimo nivel.

6.- Repitiendo iterativamente este proceso obtenemos los vértices del resto de niveles, esto es, los demás vectores columna que representan la ordenación en niveles del grafo, hasta que aparezca el último vector en que todas sus componentes sean aspas.

Como puede verse, se trata en este caso de un grafo conexo y sin circuitos. De este modo, siguiendo el método matricial anteriormente expuesto que conduce a la ordenación de los vértices en niveles *hacia la antibase* por el método también conocido como de "eliminación de descendientes", podemos formar el correspondiente algoritmo de Demoucron, a saber:

---

[2] There is an algorithm from 1964 by Demoucron, Malgrange and Pertuiset which computes a planar embedding for a planar graph G = (V, E). This is an incremental algorithm as the embedding is computed step by step, where a step is the embedding of a new cycle of the graph. Assume we have already computed a embedding of a subgraph G' of G we have to look at the so called *fragments*.

ALGORITMO DE DEMOUCRON

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\vec{v}_0$	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$	$\vec{v}_5$	$\vec{v}_6$	$\vec{v}_7$
0		I									1	1	1	1	1	1	0	X
1			I			I	I				3	3	2	1	1	0	X	X
2				I					I		2	1	0	X	X	X	X	X
3					I				I		2	0	X	X	X	X	X	X
4											0	X	X	X	X	X	X	X
5			I	I	I				I	I	5	3	2	1	0	X	X	X
6								I	I		2	0	X	X	X	X	X	X
7											0	X	X	X	X	X	X	X
8											0	X	X	X	X	X	X	X
9			I	I	I		I	I			5	3	1	0	X	X	X	X
Σ	0	1	3	3	3	1	2	2	4	1								
											4 7 8 nivel sup.	3 6	2	9	5	1	0 nivel inf.	-

FIG. 0.4. Algoritmo de Demoucron.

MÉTODO:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 - 4 - 7 - 8$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - 3 - 6$$
$$\vec{v}_3 = \vec{v}_2 - 2$$
$$\vec{v}_4 = \vec{v}_3 - 9$$
$$\vec{v}_5 = \vec{v}_4 - 5$$
$$\vec{v}_6 = \vec{v}_5 - 1$$
$$\vec{v}_7 = \vec{v}_6 - 0$$

Ahora, el grafo ordenado del libro resulta ser el siguiente:

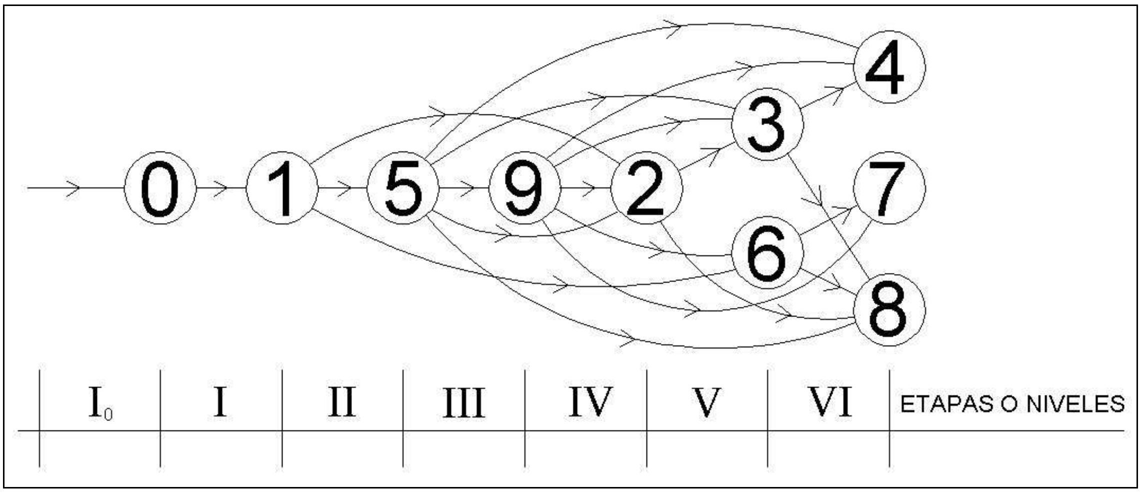


FIG. 0.5. Grafo ordenado en niveles del libro.

A través de la ordenación anterior, se ha puesto de manifiesto una prelación bien clara entre las diversas etapas del esquema aconsejable de estudio y asimilación de los contenidos del presente libro. En cualquier caso, debe cumplirse que:

1) Todos los capítulos del libro de un mismo nivel no deben poseer “ascendientes” en el nivel siguiente.

2) El orden de estudio de los vértices o capítulos de un mismo nivel es independiente.

3. PONDERACIÓN TEMPORAL DEL GRAFO

Por último, daremos a los arcos del grafo su correspondiente valor expresado en minutos. El tiempo que se tarda en desarrollar una actividad no se conoce con exactitud por lo que hay que realizar estimaciones de tiempo. El método PERT[3], por ejemplo, considera tres estimaciones de tiempo distintas, a saber:

[3] The **Program** (or **Project**) **Evaluation and Review Technique**, commonly abbreviated **PERT**, is a statistical tool, used in project management, that is designed to analyze and represent the tasks involved in completing a given project. First developed by the United States Navy in the 1950s, it is commonly used in conjunction with the critical path method (**CPM**). PERT is a method to analyze the involved tasks in completing a given project, especially the time needed to complete each task, and to identify the minimum time needed to complete the total project. PERT was developed primarily to simplify the planning and scheduling of large and complex projects. It was developed for the U.S. Navy Special Projects Office in 1957 to support the U.S. Navy's Polaris nuclear submarine project. It was able to incorporate uncertainty by making it possible to schedule a project while not knowing precisely the details and durations of all the activities. It is more of an event-oriented technique rather than start- and completion-oriented, and is used more in projects where time is the major factor rather than cost. It is applied to very large-scale, one-time, complex, non-routine infrastructure and Research and Development projects. An example of this was for the 1968 Winter Olympics in Grenoble which applied PERT from 1965 until the opening of the 1968 Games. This project model was the first of its kind, a revival for

- Estimación optimista (E_o): es el tiempo mínimo en que podría ejecutarse la actividad si no surgiera ningún contratiempo indeseable. A falta de otras determinaciones, le estableceremos aproximadamente aquí en 10' por página impresa, con independencia de si es completa o no, por lo que vendrá dado por (10·n) minutos, siendo *n* el número de páginas del capítulo en cuestión del libro.

- Estimación más probable o estimación modal (E_m): es el tiempo que se empleará en ejecutar la actividad en circunstancias normales; se supondrá, en este caso, un valor de (25·n) minutos.

- Estimación pesimista (E_p): es el tiempo máximo de ejecución de la actividad si las circunstancias de estudio son muy desfavorables; se supondrá, en este caso, un valor de (40·n) minutos.

El tiempo PERT (D) será la media aritmética ponderada o esperanza matemática de las estimaciones anteriores, esto es:

$$D = \frac{E_o + 4E_m + E_p}{6} = \frac{10 \cdot n + 100 \cdot n + 40 \cdot n}{6} = (25 \cdot n) \text{ minutos}$$

Por otra parte, podría también tenerse en cuenta la varianza y/o la desviación típica o "standard" de una actividad cualquiera, que se define así:

$$V^2 = \frac{(E_o - E_p)^2}{36} = \frac{(10 \cdot n - 40 \cdot n)^2}{36} = 25 \cdot n^2 ,$$

siendo la desviación típica o "standard" de valor: V = 5·n. Las actividades con mayor varianza tienen, obviamente, un mayor riesgo de error en la estimación de su duración.

Capítulo	n	D	V	t(h.)	%	% acum.
0	12	300	60	5'00	1'68	1'68
1	34	850	170	14'17	4'76	6'44
2	144	3.600	720	60'00	20'17	26'61
3	152	3.800	760	63'33	21'29	47'90
4	42	1.050	210	17'50	5'88	53'78
5	92	2.300	460	38'33	12'89	66'67
6	72	1.800	360	30'00	10'08	76'75
7	16	400	80	6'67	2'24	78'99
8	72 (74)	1.800	360	30'00	10'08	89'07
9	78	1.950	390	32'50	10'93	100
TOTAL	714 (716)	17.850	3.570	297'50	100	---

Veamos el cuadro anterior con el número de páginas y la duración de cada actividad D según los diferentes capítulos del libro, así como su

scientific management, founded by Frederick Taylor (Taylorism) and later refined by Henry Ford (Fordism). DuPont's critical path method was invented at roughly the same time as PERT.

correspondiente desviación típica V y el tiempo horario empleado en la asimilación de cada uno de ellos y el acumulado desde el inicio del estudio del libro. Obviamente, el coeficiente de variación de Pearson[4], que es una medida relativa de dispersión de los valores de la variable aleatoria estadística "duración de la actividad", será del: $\frac{V}{D}x100 = 20\%$, en todos los casos. Obsérvese también que la asimilación de la totalidad de los capítulos del libro comportaría, según los supuestos ya expresados, una duración de 17.850 minutos (exactamente un tiempo de 297 horas y media). Sería posible, sin embargo, alcanzar la asimilación de los capítulos del último nivel (de interesar ello) sin necesidad de pasar necesariamente por el estudio de algunos otros, ya fuera recorriendo trayectos de duración máxima o mínima, como se verá a continuación. Por otra parte, la media aritmética de la duración de cada actividad (estudio y asimilación de cada capítulo) sería de 17.850/10 = 1.785 minutos = 29'75 horas/capítulo, y se alcanzarían los 2/3 del estudio completo del texto al finalizar el Cap. 5, esto es, el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En definitiva, bajo estas condiciones temporales, el grafo del libro en el cual se han buscado los caminos de valor máximo y se ha añadido el capítulo ficticio O', quedará configurado del siguiente modo:

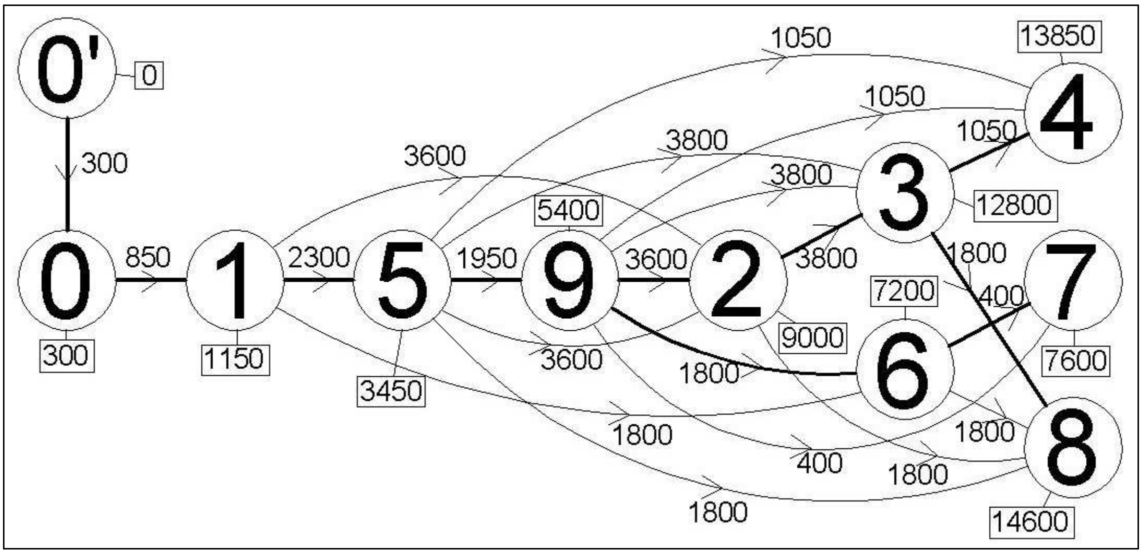


FIG. 0.6. Grafo con ponderación temporal de las actividades. Camino máximo.

[4] **Karl Pearson** (27 March 1857 – 27 April 1936) (originally named **Carl**) was an influential English mathematician who has been credited with establishing the discipline of mathematical statistics. In 1911 he founded the world's first university statistics department at University College London. He was a proponent of eugenics, and a protégé and biographer of Sir Francis Galton. Pearson's work was all-embracing in the wide application and development of mathematical statistics, and encompassed the fields of biology, epidemiology, anthropometry, medicine and social history. In 1901, with Weldon and Galton, he founded the journal *Biometrika* whose object was the development of statistical theory. He edited this journal until his death. Among those who assisted Pearson in his research were a number of female mathematicians who included Beatrice Mabel Cave-Browne-Cave and Frances Cave-Browne-Cave. He also founded the journal *Annals of Eugenics* (now *Annals of Human Genetics*) in 1925. He published the *Drapers' Company Research Memoirs* largely to provide a record of the output of the Department of Applied Statistics not published elsewhere.

Se han obtenido, pues, tres caminos de longitud o duración máxima, para alcanzar respectivamente los capítulos del último nivel o etapa, cuya traza ha sido remarcada convenientemente en la figura anterior, a saber:

[0’, 0, 1, 5, 9, 2, 3, 4] = 13.850 minutos (Cap. 4)
[0’, 0, 1, 5, 9, 6, 7] = 7.600 minutos (Cap. 7)
[0’, 0, 1, 5, 9, 2, 3, 8] = 14.600 minutos (Cap. 8)

Del mismo modo, el grafo del libro en el cual se han buscado los caminos de valor mínimo, quedará configurado del siguiente modo:

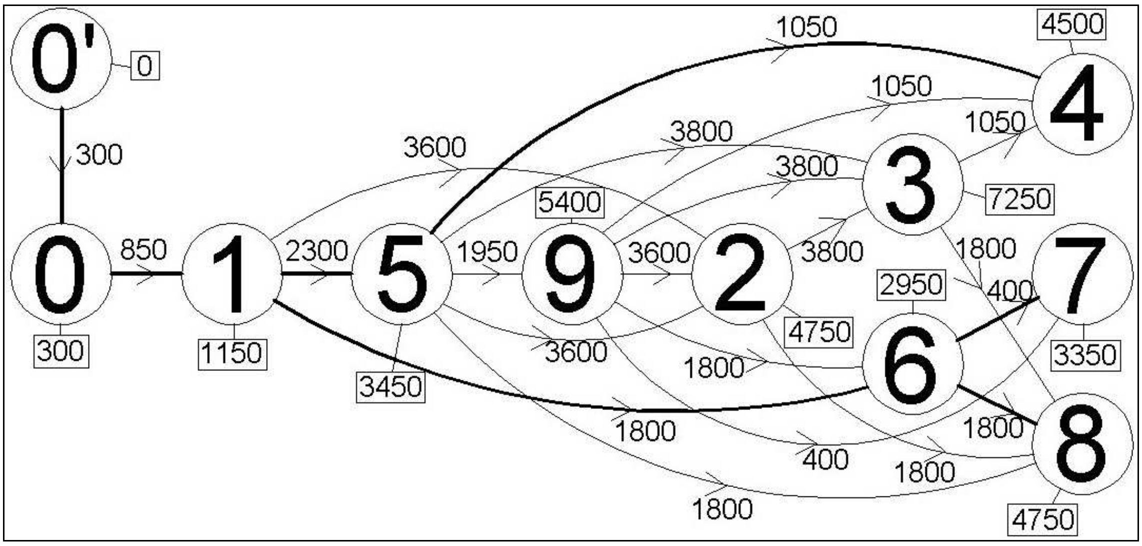


FIG. 0.7. Grafo con ponderación temporal de las actividades. Camino mínimo.

En nuestro caso podría emplearse una versión simplificada del *algoritmo de Dijkstra*, también llamado *algoritmo de caminos mínimos*, es un algoritmo para la determinación del camino más corto dado un vértice origen al resto de vértices en un grafo con pesos en cada arista. Su nombre se refiere a Edsger Dijkstra, quien lo describió por primera vez en el año 1959.

Se han obtenido tres caminos de longitud o duración mínima, para alcanzar respectivamente los capítulos del último nivel o etapa, cuya traza ha sido remarcada convenientemente en la figura anterior, a saber:

[0’, 0, 1, 5, 4] = 4.500 minutos (Cap. 4)
[0’, 0, 1, 6, 7] = 3.350 minutos (Cap. 7)
[0’, 0, 1, 6, 8] = 4.750 minutos (Cap. 8)

Obsérvese, en fin, que según el objetivo de asimilación de conocimientos que persigamos, las anteriores consideraciones nos permitirán escoger el itinerario más adecuado y menos costoso en el estudio del presente libro, pudiendo ahorrar mucho tiempo y esfuerzo. Lo expuesto hasta aquí, por ejemplo, también resultaría de aplicación al estudio de los capítulos del penúltimo nivel (Caps. 3 y 6) o de cualquier otro teniendo en cuenta, en cada caso, el camino de duración más conveniente a los intereses del lector.

4. CONSEJOS ELEMENTALES PARA EL ESTUDIO DEL LIBRO

Llegados a este punto, y una vez ordenados en niveles o etapas los diferentes capítulos del libro, así como presentadas las diferentes alternativas o itinerarios de su asimilación, me permito sugerir a nuestros lectores algunas ideas acerca de cómo enfocar más eficientemente el estudio y comprensión de nuestra monografía. Y así trataremos de:

- **Aumentar la rapidez y eficacia de la lectura:**

1. Se trata de aprender de manera inteligente a leer deprisa utilizando las técnicas adecuadas que permitan leer más y memorizar mayor cantidad de contenido en menos tiempo, y sacar más provecho de lo que se ha leído. Algunas de las aptitudes necesarias para una buena lectura son las siguientes:

    - Capacidad para leer y comprender a altas velocidades,
    - Capacidad para usar un ritmo variable en función de la finalidad y la dificultad del tema,
    - Capacidad para comprender las ideas principales o los pensamientos centrales del material de lectura,
    - Capacidad para comprender y retener los detalles, buena retención general,
    - Capacidad para apreciar la organización del material,
    - Capacidad para leer de manera crítica y valorativa.

2. Los lectores ineficaces leen todo a la misma velocidad, mientras que los lectores eficaces leen de tres a cinco veces más deprisa y comprenden mucho mejor las ideas principales.

- **Mejorar la concentración:**

1. Evitar las distracciones externas e internas.
2. Localizar un lugar de estudio adecuado.
3. Eliminar las interrupciones planteadas.
4. Eliminar las distracciones sonoras como ruidos o música con canciones.
5. Encontrar el momento favorable.
6. Marcar objetivos acerca de cuando empezar, interrumpir y terminar.
7. Controlar las inquietudes mentales.
8. Descansar periódicamente 10 minutos cada 50 de lectura o estudio.

- **Establecer el ambiente adecuado, dedicarle el tiempo estipulado, cuidar la vista, etc.**

CAPÍTULO 1
GENERALIDADES. MODELOS DINÁMICOS

1. DEFINICIONES BÁSICAS

1.1. ECUACIONES DIFERENCIALES E INTEGRALES

- ECUACIÓN DIFERENCIAL (E.D.) es toda aquella ecuación que contiene derivadas (parciales o totales) o diferenciales.

- ECUACIÓN INTEGRAL (E.I.) es aquella ecuación que contiene integrales en cuyo integrando aparece la función incógnita (no las veremos específicamente, salvo en el correspondiente capítulo de "Complementos").

- CLASIFICACIÓN DE LAS E.D.:

E.D.
- -Ordinaria (1 variable). Son las que veremos en el presente libro, junto con sus sistemas de ecuaciones (S.E.D.O.).
- -En derivadas parciales (varias variables), que también se representan abreviadamente por E.D.P.

- ORDEN de una E.D. es el orden de la derivada de > orden que en ella figura.

- GRADO de una E.D. es el exponente de la derivada de > orden.

Una E.D. será lineal cuando es de 1er. grado en la función y en sus derivadas.

Expresión general de la ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.) de orden **n** (función implícita):

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}) = 0$$

El problema que se plantea reside en determinar la función (y) que dio origen a la E.D. y que, verificando dicha ecuación, contiene, en general, **n** constantes arbitrarias. Se le llama, a dicha función, **integral general** (I.G.), que tiene la forma: $y = \varphi(x, c)$.

Si en la I.G. se dan valores definidos a las constantes arbitrarias se obtiene una **integral particular** (I.P.).

Otro tipo de solución lo constituye la **integral singular** (I.S.), caso de las ecuaciones de Clairaut y otras. Éstas son aquellas soluciones que no pueden deducirse de la integral general dando valores determinados a las constantes; es decir, aquellas soluciones que no están comprendidas en la integral general.

Si F(x, y, c) = 0 es la integral general, eliminando la constante *c* entre ella y la $F'_c(x, y, c) = 0$, o también eliminando y' entre la ecuación diferencial dada f(x, y, y') = 0 y $f_y(x, y, y') = 0$, hallaremos las soluciones.

Las ecuaciones diferenciales e integrales son muy utilizadas en todas las ramas de la ingeniería para el modelado de los fenómenos físicos. Su uso también es común tanto en las ciencias aplicadas o sociales (economía, sociología) como en las ciencias fundamentales (física, química, biología, …). Existen numerosos fenómenos y situaciones de la vida cotidiana, que siendo diferentes, tanto en su comportamiento puntual como en su evolución a lo largo del tiempo, a la hora de analizarlos tienen, desde el punto de vista técnico, una característica común: el hecho de que pueden modelarse mediante un recurso matemático muy potente, como son las ecuaciones diferenciales e integrales. Por ejemplo, las leyes que determinan la economía, la evolución de determinados sistemas técnicos, etc. Por ello es necesario familiarizarse con el lenguaje matemático y con las actividades de abstracción y prepararse en técnicas y métodos de análisis que permitan conocer la estructura general de los diversos fenómenos físico-químicos o económicos que se presentan en la vida real.

Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales e integrales, como instrumento matemático, constituyen una herramienta necesaria tanto para el estudio de gran parte de otras materias -pues prácticamente todas ellas las contienen- como para abordar el propio trabajo profesional del ingeniero, del científico o del economista, ya que dichas ecuaciones son fundamentales para poder desarrollar modelos matemáticos que van a servir para ayudar a comprender los diferentes fenómenos físicos o económicos que van a plantearse.

1.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

1.2.1. Existencia y unicidad

Existen diversos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, cada una de ellas con una forma de resolución distinta; para clasificarlas, hay que establecer la diferencia entre ecuaciones diferenciales de primer orden y ecuaciones de orden superior (ya que las primeras son, por lo general, de más fácil resolución).

El teorema de Peano-Picard garantiza la existencia de una solución y su unicidad para toda ecuación diferencial ordinaria lineal con coeficientes continuos en un intervalo, que tiene una solución única en dicho intervalo. Para el caso de las ecuaciones diferenciales no-lineales no existen resultados análogos al de Peano-Picard.

El teorema de Peano-Picard concluye la existencia mediante una demostración constructiva, para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Puesto que toda ecuación diferencial lineal de orden arbitrario puede reducirse a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, se sigue del teorema de Peano-Picard la existencia y unicidad de la solución. La idea del teorema es simple: construye una sucesión de Cauchy funciones cuyo límite es, precisamente, la solución del sistema. La demostración de la unicidad, por otra parte, resulta trivial. Aunque el teorema prueba la existencia y unicidad, el método constructivo puede no resultar un método práctico para encontrar una buena aproximación a la solución, y mucho menos la solución analítica.

En definitiva, sea la ecuación diferencial: $y' = f(x,y)$, donde la función $f(x,y)$ se halla definida en un rectángulo R del plano, esto es, para valores de *x* e *y* tales que: $|x - a| \leq \alpha$; $|y - b| \leq \beta$. Esta función verifica que: $|f(x,y)| \leq M$. Además, $f(x,y)$ verifica la denominada "condición de Lipschitz[1]" en el rectángulo R, a saber:

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq H|y_2 - y_1|$$

que acota la razón del incremento de *f* con respecto a *y* y con relación a Δy, para dos puntos de la misma abscisa. De hecho, esta condición la cumple toda función *f* que en R admite derivada parcial con respecto a *y*, acotada.

Así pues, se cumplen las siguientes condiciones:

a) $f(x,y)$ es una función continua en el rectángulo R.

b) la derivada parcial $\dfrac{\delta f}{\delta y}$ es continua en el rectángulo R.

Entonces, por cada punto del rectángulo pasa una y solo una solución de la ecuación diferencial. O sea, que cumplidas estas condiciones, se demuestra que existe una única función $y = \varphi(x)$, definida y continua en un entorno simétrico de $x = a$, de radio $\varepsilon \leq \alpha$, que satisfaciendo la ecuación dada, es tal que: $b = \varphi(a)$.

[1] **Rudolf Otto Sigismund Lipschitz** (1832 – 1903) was a German mathematician and professor at the University of Bonn from 1864. Peter Gustav Lejeune Dirichlet was his teacher. He supervised the early work of Felix Klein. While Lipschitz gave his name to the Lipschitz continuity condition, he worked in a broad range of areas. These included number theory, algebras with involution, mathematical analysis, differential geometry and classical mechanics. He wrote: *Lehrbuch der Analysis* (two volumes, Bonn 1877, 1880); *Wissenschaft und Staat* (Bonn, 1874); *Untersuchungen über die Summen von Quadraten* (Bonn, 1886); *Bedeutung der theoretischen Mechanik* (Berlin, 1876). Lipschitz discovered Clifford algebras in 1880, two years after William K. Clifford (1845–1879) and independently of him, and he was the first to use them in the study of orthogonal transformations. Up to 1950 people mentioned "Clifford-Lipschitz numbers" when they referred to this discovery of Lipschitz. Yet Lipschitz's name suddenly disappeared from the publications involving Clifford algebras; for instance Claude Chevalley (1909–1984) gave the name "Clifford group" to an object that is never mentioned in Clifford's works, but stems from Lipschitz's. Pertti Lounesto (1945–2002) contributed greatly to recalling the importance of Lipschitz's role.

Análogo teorema se puede formular también para las ecuaciones diferenciales de orden superior al primero (que veremos en el capítulo 3 de nuestro libro), pero no insistiremos allí sobre el tema por razones obvias de espacio y oportunidad.

1.2.2. Soluciones analíticas y numéricas

Existen métodos de resolución generales para las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales que permiten encontrar soluciones analíticas. En particular si los coeficientes de la ecuación lineal son constantes o periódicos la solución resulta casi siempre fácil de construir. Para coeficientes no constantes o no periódicos, pero que son desarrollables en serie de Taylor[2] o serie de Laurent[3] es aplicable con ciertas restricciones el método de Frobenius[4]. Otra posibilidad consiste en reducir una ecuación diferencial lineal de orden *n* a un sistema de *n* ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales no existen métodos generales.

Veamos, en fin, que algunos de los métodos de solución numérica de ecuaciones diferenciales son el método de Runge-Kutta[5], los de Euler o Heun, los métodos multipaso, el del punto medio y los métodos de extrapolación.

---

[2] A **Taylor series** is a representation of a function as an infinite sum of terms that are calculated from the values of the function's derivatives at a single point. The concept of a Taylor series was formally introduced by the English mathematician Brook Taylor in 1715. If the Taylor series is centred at zero, then that series is also called a **Maclaurin series**, named after the Scottish mathematician Colin Maclaurin, who made extensive use of this special case of Taylor series in the 18th century. It is common practice to approximate a function by using a finite number of terms of its Taylor series. Taylor's theorem gives quantitative estimates on the error in this approximation. Any finite number of initial terms of the Taylor series of a function is called a Taylor polynomial. The Taylor series of a function is the limit of that function's Taylor polynomials, provided that the limit exists. A function may not be equal to its Taylor series, even if its Taylor series converges at every point. A function that is equal to its Taylor series in an open interval (or a disc in the complex plane) is known as an analytic function.

[3] The **Laurent series** of a complex function $f(z)$ is a representation of that function as a power series which includes terms of negative degree. It may be used to express complex functions in cases where a Taylor series expansion cannot be applied. The Laurent series was named after and first published by Pierre Alphonse Laurent in 1843. Karl Weierstrass may have discovered it first in 1841 but did not publish it at the time.

[4] **Ferdinand Georg Frobenius** (October 26, 1849 – August 3, 1917) was a German mathematician, best known for his contributions to the theory of elliptic functions, differential equations and to group theory. He is known for the famous determinantal identities, known as Frobenius-Stickelberger formulae, governing elliptic functions, and for developing the theory of biquadratic forms. He was also the first to introduce the notion of rational approximations of functions (nowadays known as Pade approximants), and gave the first full proof for the Cayley–Hamilton theorem. He also lent his name to certain differential-geometric objects in modern mathematical physics, known as Frobenius manifolds.

[5] In numerical analysis, the Runge–Kutta methods are an important family of implicit and explicit iterative methods for the approximation of solutions of ordinary differential equations. These techniques were developed around 1900 by the German mathematicians C. Runge and M.W. Kutta. One member of the family of Runge–Kutta methods is often referred to as "RK4", "classical Runge–Kutta method" or simply as "*the* Runge–Kutta method".

1.3. ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

Las ecuaciones en diferencias finitas o recurrentes (campo discreto) pueden considerarse las hermanas de las ecuaciones diferenciales en el campo continuo. Aparecen ligadas a la descripción matemática de los fenómenos dinámicos o cronológicos, es decir, que varían con el tiempo (t). Muchos modelos matemáticos que se plantean en campos científicos como la física, la biología, la sociología y la misma economía, v. gr., incluyen ecuaciones en diferencias finitas en su formulación. No es de extrañar, por tanto, que éstas, junto con otras herramientas matemáticas propias de la Investigación Operativa[6] (como los procesos de Poisson o las cadenas de Markov[7] en la denominada "Programación dinámica") constituyan uno de los pilares fundamentales de la matemática aplicada al estudio de los fenómenos de evolución en el tiempo.

En líneas generales, hablamos de recurrencia cuando cada estado de un fenómeno determinado puede explicarse en términos de algún o algunos de los estados anteriores. Las ecuaciones recurrentes o en diferencias finitas, en tales casos, constituyen las expresiones matemáticas de esta explicación de cada estado del sistema en función de otros anteriores. En el capítulo correspondiente de nuestro libro (Cap. 6) tendremos ocasión de contemplar algunos ejemplos y ejercicios de lo aquí expuesto, tanto de este tipo de ecuaciones como de sus sistemas (Cap.7).

---

[6] In a nutshell, operational research (OR) is the discipline of applying advanced analytical methods to help make better decisions. By using techniques such as mathematical modelling to analyze complex situations, operations research gives executives the power to make more effective decisions and build more productive systems based on: a) More complete data, b) Consideration of all available options, c) Careful predictions of outcomes and estimates of risk, and d) The latest decision tools and techniques. Operational research encompasses a wide range of problem-solving techniques and methods applied in the pursuit of improved decision-making and efficiency, such as simulation, mathematical optimization, queuing theory and other stochastic-process models, Markov decision processes, econometric methods, data envelopment analysis, neural networks, expert systems, decision analysis, and the analytic hierarchy process. Nearly all of these techniques involve the construction of mathematical models that attempt to describe the system. Because of the computational and statistical nature of most of these fields, OR also has strong ties to computer science and analytics. Operational researchers faced with a new problem must determine which of these techniques are most appropriate given the nature of the system, the goals for improvement, and constraints on time and computing power.

[7] A *Markov chain*, named after Andrey Markov, is a mathematical system that undergoes transitions from one state to another, between a finite or countable number of possible states. It is a random process usually characterized as memoryless: the next state depends only on the current state and not on the sequence of events that preceded it. This specific kind of "memorylessness" is called the Markov property. Markov chains have many applications as statistical models of real-world processes. Formally, a Markov chain is a random process with the Markov property. Often, the term "Markov chain" is used to mean a Markov process which has a discrete (finite or countable) state-space. Usually a Markov chain is defined for a discrete set of times (i.e., a discrete-time Markov chain) although some authors use the same terminology where "time" can take continuous values. The use of the term in Markov chain Monte Carlo methodology covers cases where the process is in discrete time (discrete algorithm steps) with a continuous state space. The following concentrates on the discrete-time discrete-state-space case.

2. LA TEORÍA DE MODELOS

2.1. DEFINICIÓN Y CONCEPTOS PREVIOS

2.1.1. Síntesis histórica del concepto de "modelo"

Sería conveniente comenzar nuestra exposición definiendo lo que pudiera ser el concepto propio de "modelo".

Se habrá notado la aparición, en varias ocasiones, de la noción de "modelo" o de "interpretación" de una teoría matemática por medio de otra. No se trata, en absoluto, de una idea reciente o novedosa y, sin duda, puede verse en ella una manifestación permanente del sentimiento profundo de la unidad de las distintas "ciencias matemáticas". Respecto a ello, decía Descartes[8] que "no por ello dejan de acordarse en tanto que no tienen en cuenta otra cosa que las relaciones o proporciones que se encuentran en dichas ciencias".

Precisando el "acuerdo" del que hablaba Descartes, parece entreverse, por vez primera, la noción general de isomorfismo (que él llamaba "semejanza") y la posibilidad de "identificar" relaciones u operaciones isomorfas, dando, como ejemplos de ello, el de la adición y el de la multiplicación. No obstante, tan audaces ideas no tuvieron ningún eco entre sus contemporáneos, y habrá que esperar hasta el gran desarrollo del álgebra de mediados del siglo XIX para vislumbrar siquiera el comienzo de la materialización de los sueños leibnizianos (FRANQUET, 1990/91).

Es, precisamente, en este momento histórico, cuando los modelos se multiplican y se acostumbra a pasar de una teoría a otra mediante un simple cambio de lenguaje; el ejemplo más claro de lo que antecede es, seguramente, el de la dualidad en geometría proyectiva, donde la costumbre, muy frecuente en la época, de escribir en columnas contiguas los teoremas "duales", tuvo mucho que ver con la toma de conciencia de la noción de isomorfia. Por otra parte, mediante el descubrimiento de las coordenadas homogéneas -junto con Feuerbach y Plücker- A. F. Möbius no solo pudo entender, en términos puramente algebraicos, las nociones fundamentales de puntos impropios y de puntos imaginarios introducidos por Poncelet (1788-1867)[9] y apreciar en todo

[8] Como científico, R. Descartes produjo al menos dos importantes revoluciones. En matemáticas simplificó la notación algebraica y creó la geometría analítica. Fue el creador del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, lo cual abrió el camino al desarrollo del cálculo infinitesimal (diferencial e integral) por parte del matemático y físico inglés Isaac Newton y el filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz, con curiosa simultaneidad. Inventó la regla del paralelogramo, que permitió combinar, por primera vez, fuerzas no paralelas. En química, el sistema propuesto por Descartes consiguió desplazar al aristotélico, al proporcionar una explicación unificada de innumerables fenómenos de tipo magnético y óptico, en astronomía y en fisiología orgánica. De este modo, sentó los principios del determinismo físico y biológico, así como de la psicología fisiológica.

[9] Matemático francés nacido en Moselle y fallecido en París. Participó en el intento de invasión de Rusia por parte de Napoleón, donde fue abandonado por muerto en el campo de batalla. Durante su año y medio de prisión, ya en Francia, meditó sobre geometría. Sus pensamientos vieron la luz en 1822 cuando publicó su libro sobre geometría proyectiva, de forma que una serie de problemas difícilmente resolubles por procedimientos de la antigua geometría de las formas eran ahora fácilmente resueltos aplicando los nuevos métodos.

su valor (junto con Poncelet, Gergonne[10], Plücker[11] y Chasles[12]) el principio de dualidad, sino que pudo dar un tratamiento completo y moderno del invariante fundamental de la geometría proyectiva: la "razón doble" de cuatro puntos alineados.

El empleo, cada vez más extendido, de la noción de "modelo", permitiría también al siglo XIX llevar a cabo la unificación de las Matemáticas soñada por los pitagóricos. A principios del expresado siglo, los números enteros y las magnitudes continuadas parecían tan incompatibles entre sí como en la antigüedad; los números reales continuaban estando ligados a la noción de magnitud geométrica (longitud, superficie, volumen), a la que se había recurrido para obtener "modelos" de los números negativos e imaginarios puros y mixtos. Incluso, los números racionales estaban tradicionalmente relacionados con la idea de la división de una magnitud en partes iguales. Solo quedaban aparte los números enteros, como "productos exclusivos de nuestro espíritu", tal como decía Gauss en 1832, oponiéndolos a la noción de espacio.

Los primeros esfuerzos para aproximar la Aritmética y el Análisis Matemático se refirieron a los números racionales, positivos y negativos, y fueron debidos a Martin Ohm en 1822, siendo continuados hacia 1860 por varios autores, fundamentalmente Grassmann[13], Hankel[14] y Weierstrass[15] (en

---

[10] Joseph Diaz Gergonne (19 de junio de 1771 en Nancy, Francia - 4 de mayo de 1859, Montpellier, Francia) fue un matemático y lógico francés. En 1791, Gergonne fue capitán del ejército francés. Participó en la Batalla de Valmy el 20 de septiembre de 1792. Más adelante, se reintegró al ejército para participar en 1794 en la invasión francesa de España. Al pasar a la vida civil fue profesor en la recién creada École Centrale como profesor de "matemáticas trascendentales". En 1810, Gergonne funda la revista *Annales de mathématiques pures et appliquées* que en la época fue conocida como los *Annales de Gergonne* la publicación se mantuvo por 22 años hasta su retiro. Fue también profesor y más tarde rector de la Universidad de Montpellier. Gergonne introdujo la terminología de las coordenadas polares. Descubrió el principio de dualidad en Geometría proyectiva, cuando notó que cada teorema en el plano conectando puntos y líneas tenía un correspondiente con puntos y líneas intercambiados, siempre que el teorema no hiciera intervenir nociones métricas. En 1816, encontró una solución elegante al problema clásico de Apolonio consistente en hallar una circunferencia que toque otras tres circunferencias dadas.

[11] Julius Plücker (1801-1868), natural de Elberfeld, estudió física y matemáticas en varias universidades alemanas, y desde 1836 fue profesor de la de Bonn. Sus primeros trabajos matemáticos fueron de geometría sintética, pero en cuanto entró de lleno en la famosa polémica que enfrentaba a los geómetras analíticos con los sintéticos, se decantó por los primeros. En 1846, quizás harto de tanta controversia, abandonó las matemáticas para volver a la física, en la que hizo notables descubrimientos. En contra de lo que hubiera podido esperarse de él, se interesó más por la física experimental que por la física matemática. Según Clebsch, la contradicción expresada es solo aparente: Plücker tendía más a crear que a analizar, y esta tendencia era la fuente común de sus descubrimientos en física y en geometría.

[12] (Epernon, 1793-París, 1880). Matemático francés. Profesor en la Universidad de París, sus trabajos versaron sobre temas de geometría proyectiva y descriptiva; en especial sobre las secciones cónicas.

[13] Hermann Grassmann fue un matemático brillante cuyas creaciones en el análisis vectorial solo pueden compararse con las de Hamilton. Grassmann presentó su sistema en numerosas formas diferentes; de hecho escribió cuatro libros en los que presentó su sistema y los cuatro difieren substancialmente entre ellos. Hermann Grassmann nació en Stettin, cerca del Báltico. Su padre Justus Günther Grassmann, a pesar de ser un teólogo y estudioso en las ciencias físicas y matemáticas, insistía en que él sería felíz si Hermann se convirtiera en jardinero o en carpintero. A pesar de esto, Grassmann ingresa en 1827 en la Universidad de Berlín donde por seis semestres estudió principalmente filología y teología, pero de manera autónoma, leyó algunos escritos matemáticos de su padre. A su regreso a Stettin, inició sus

sus cursos no publicados). A este último, parece deberse la idea de obtener un "modelo" de los números racionales positivos y de los enteros negativos considerando clases de pares de números naturales o enteros positivos. Pero faltaba realizar, sin duda, la tarea más importante: la de obtener un modelo de los números irracionales o inconmensurables dentro de la teoría de los números racionales; hacia el año 1870, la solución de este problema era realmente urgente a la vista de la perentoriedad -surgida después de la aparición de fenómenos "patológicos" en Análisis- de prescindir del uso de cualquier intuición geométrica vaga de "magnitud" para definir el cuerpo de los números reales. Como sabemos, este problema fue resuelto en esta época, y casi simultáneamente, por Cantor[16], Dedekind[17], Méray[18] y Weierstrass, siguiendo, por cierto, métodos bastante diferentes.

---

estudios en matemáticas, física, historia natural, teología y filología, preparándose solo para presentar el examen estatal requerido para ser maestro. En 1839 escribió al comité examinador científico de Berlín sobre su deseo de escribir un trabajo que probara su competencia. Entonces, él inicia su trabajo en el estudio de la marea titulándolo *Theorie der Ebbe und Flut*. Este estudio lo completó en 1840 y es importante porque contenía la presentación de un sistema de análisis espacial basado en vectores. La información concerniente al origen de este trabajo puede encontrarse en una carta escrita por Grassmann en 1847 a Saint-Venant acerca del documento publicado a finales de 1845, en el cual Saint-Venant comunicó resultados idénticos a los resultados descubiertos con anterioridad por Grassmann. Éste presentó en su trabajo una parte sorprendente del análisis vectorial: adición y sustracción de vectores, las dos principales formas de producto vectorial, la diferencial en vectores y los elementos de la función vectorial lineal, todo ello expuesto de manera equivalente con sus homólogos modernos. Este trabajo fue algo más que el primer sistema importante del análisis vectorial; fue también el más grande trabajo en la nueva álgebra de su tiempo que puede compararse con la geometría no-euclidiana. Hacia el otoño de 1843, Grassmann había terminado de escribir otra de sus grandes obras; su *Ausdehnungslehre*, que se convirtió en un clásico. Es un libro difícil de leer y contiene una gran parte del análisis vectorial moderno y hecho de tal forma que difícilmente puede resumirse. En el periodo de 1844 a 1861, Grassmann publicó 17 documentos científicos en los que se incluyen importantes documentos de física, varios sobre lenguas y libros de texto matemáticos. Editó un documento sobre política y también materiales sobre la evangelización de China. Este periodo de su vida terminó con su segundo *Ausdehnungslehre*. Después de 1862, Grassmann publicó un libro de texto en alemán y en latín sobre matemáticas, además de varios escritos sobre religión y sobre música así como un libro sobre terminología botánica alemana. También inventó el “Heliostat” de Grassmann. Esta combinación de actividades se debió a su creciente desacuerdo con la poca atención que recibían sus creaciones matemáticas.

[14] (Halle, 1839-Schramberg, 1873). Matemático alemán. Sus trabajos versaron sobre geometría proyectiva y sobre la teoría de funciones de variable compleja. Estableció una representación de la función gamma por medio de una integral compleja y obtuvo soluciones a la ecuación diferencial de Bessel.

[15] Las ideas de Riemann (1826-1866) concernientes a la geometría del espacio tuvieron profundos efectos en el desarrollo de la teoría física moderna. Los escritos de Riemann de 1854 llegaron a ser un clásico en las matemáticas y estos resultados fueron incorporados dentro de la teoría de la relatividad y gravitación de Einstein. Influyó notablemente en el desarrollo de la teoría física moderna y proveía los conceptos y métodos usados después en la Teoría de la Relatividad. Era un original pensador y un anfitrión de numerosos métodos, teoremas y conceptos que hoy en día llevan su nombre.

[16] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, nacido en Mar. 3, 1845, muerto en Ene. 6, 1918, era un matemático ruso-alemán mejor conocido como el creador de la TEORIA CONJUNTISTA y por su descubrimiento de los números transfinitos. También adelantó el estudio de las series trigonométricas, fue el primero en probar la no numerabilidad de los números reales e hizo contribuciones significantes a la teoría de la dimensión. Cantor recibió su doctorado en 1867 y aceptó una posición en la Universidad de Halle en 1869, donde permaneció. Estrechamente relacionado al trabajo de Cantor en la teoría de los conjuntos transfinitos estuvo su definición del continuo como un conexo, conjunto perfecto. Nunca dudó de su absoluta confianza en su trabajo, pero seguidamente del descubrimiento de las paradojas de la teoría de conjuntos, dejó la teoría de los conjuntos transfinitos a matemáticos más jóvenes tales como David Hilbert, Bertrand Russell y Ernst Zermelo.

A partir de este momento, los números enteros pasan a ser el fundamento de todas las matemáticas clásicas. Además, los "modelos" basados en la Aritmética van adquiriendo cada vez más importancia con la extensión del método axiomático y la concepción de los objetos matemáticos como creaciones libres, prodigiosas y admirables del espíritu humano.

2.1.2. Definición y clases de modelos

Realizada una pequeña síntesis histórica del problema, veamos que en toda aplicación de la Matemática a los estudios de los fenómenos reales, se presenta un triple proceso, a saber:

a) Conceptualización.
b) Razonamiento lógico.
c) Desconceptualización.

, y debemos advertir, y lo haremos con palabras del profesor Richardson[19], que: "matematizar la teoría de un fenómeno no consiste simplemente en introducir ecuaciones y fórmulas en él, sino en moldearlo y fundirlo en un todo coherente, con sus postulados claramente enunciados, sus definiciones establecidas, sin fallos y con sus conclusiones rigurosamente obtenidas".

De este modo, podríamos definir el "modelo" como *una representación objetiva de algún aspecto de un problema por medio de una estructura, facilitando el tratamiento teórico y subjetivo, dirigido a resolver algunas cuestiones del problema.* Se trata, pues, de un esquema teórico de un sistema o realidad más o menos compleja que se elabora para facilitar cu comprensión y estudio.

---

[17] (Brunswick, actual Alemania, 1831-id., 1916). Matemático alemán. Estudió en la Universidad de Gotinga, donde tuvo como profesor a Gauss. Mientras trabajaba como *privatdozent* en dicha institución (1854-1858), entró en contacto con la obra de Dirichlet y se percató de la necesidad de abordar una redefinición de la teoría de los números irracionales en términos de sus propiedades aritméticas. En 1872 desarrolló el método denominado “corte de Dedekind”, mediante el cual definió un número irracional en función de las propiedades relativas de las dos particiones de elementos en que éste dividía el continuo de los números reales. Siete años más tarde propuso el concepto de «ideal», un conjunto de enteros algebraicos que satisfacen ecuaciones polinómicas que tienen como coeficientes números enteros ordinarios; así, el ideal principal de un entero «a» es el conjunto de múltiplos de dicho entero. Esta teoría posibilitó la aplicación de métodos de factorización a muchas estructuras algebraicas anteriormente descuidadas por el análisis matemático.

[18] Charles Méray nació el 12 de noviembre de 1835 en Chalon-sur-Saône, Francia. Inició sus estudios en la Escuela Normal Superior en París en 1854, a la edad de dieciocho años y se graduó en 1857. Luego de su graduación, comenzó a enseñar en el Liceo de St. Quentin, durante dos años, después de los cuales dejó la enseñanza durante siete. Posteriormente, regresa a dar lecciones en 1856, en la Universidad de Lyon, para ser más tarde nombrado, en 1867, Profesor de Matemáticas en la Universidad de Dijon, en donde trabajó por el resto de su vida. Méray pudo haber sido un reconocido matemático alrededor del mundo por sus ideas, pero la suerte no estuvo de su lado. En 1869, publicó el primer estudio de teoría aritmética acerca de los números irracionales; su base fue el trabajo de Lagrange. Esta fue la primera teoría coherente y rigurosa sobre números irracionales que se vio impresa. Murió el 2 de febrero de 1911 en Dijon, Francia.

[19] *Vide* H.W. RICHARDSON en *Economía regional*, Ed. Vicens-Vives, Barcelona, 1973, citado en la bibliografía.

Por tanto, cuando se van a aplicar las Matemáticas, la Estadística o la Investigación Operativa a una situación real, una labor previa que debe realizar el investigador es la recogida de datos mediante observaciones y medidas, por lo que induce relaciones y, a través de un proceso más o menos complicado de abstracción, construye un modelo o teoría. En esto consiste precisamente la fase de "conceptualización".

Sobre estos modelos, el investigador trabaja obteniendo teoremas y consecuencias; es la fase conocida como "razonamiento lógico" y puesta en marcha del modelo. Por último, mediante la fase de "desconceptualización", se interpretan estos resultados y se aplican a la situación real.

De un modo muy general, podemos clasificar los modelos utilizados en tres grandes tipos:

a) Modelos pictóricos o icónicos*:*

Son representaciones de estados, objetos o sucesos. En ellos, se representan las propiedades más interesantes de la situación real por medio de una transformación de escala. Por ejemplo, un mapa de carreteras representa la posición relativa de las distintas ciudades y las carreteras que las unen. En este último caso, se habrá recalcado la anchura de la vía de comunicación a una escala gráfica improcedente, dotándola, incluso, de un atractivo colorido.

b) Modelos analógicos:

Consisten en hacer una substitución adecuada de una propiedad de la situación real por otra en el modelo asociado, de acuerdo con ciertas reglas. Por ejemplo, las distintas alturas de una cadena montañosa quedan delimitadas por las curvas de nivel que, como es sabido, constituyen el lugar geométrico de los puntos del terreno que tienen idéntica altitud o cota taquimétrica con respecto al nivel medio del mar o a cualquier otro plano relativo de comparación. Y sin embargo, es obvio que en la realidad del terreno no aparecen las curvas de nivel surcando valles y montañas o serpenteando por las llanuras a la vista arrobada del observador.

c) Modelos simbólicos:

Consisten en expresar las magnitudes que intervienen en el problema de un modo abstracto (FRANQUET, 2008). A este último grupo pertenecen los modelos matemáticos. Generalmente, en su formulación, se siguen las siguientes etapas:

1.ª Se definen las variables que se consideran como más importantes en la explicación del proceso considerado.

2.ª Se establecen relaciones analíticas entre estas variables, como consecuencia de relaciones lógicas plausibles entre las mismas.

3.ª Se estudia la bondad del ajuste del modelo a los datos u observaciones realizados mediante la experimentación.

4.ª En caso de ser aceptado el modelo, se resuelve.

5.ª Se interpretan los resultados y se estudia su relación con la realidad.

6.ª Se hacen previsiones y proyecciones, que constituyen, en definitiva, el objetivo final de la formulación y estudio del modelo.

Respecto de la aplicabilidad de la metodología de los modelos matemáticos en los diferentes campos de las ciencias puras y sociales y de la técnica y la tecnología, podemos señalar tres modalidades principales, a saber:

1.ª Se relacionan magnitudes mediante el empleo de ecuaciones en diferencias finitas y sistemas de las mismas.
2.ª Se relacionan los flujos de entradas y salidas de un sistema a través de matrices y determinantes.
3.ª Se construyen simulaciones de las unidades más elementales que van integrándose en niveles más altos con sus iteraciones recíprocas, hasta llegar a la simulación global.

2.2. MODELOS PARA EL CONOCIMIENTO CIENTÍFICO

Siguiendo a Angel Alcaide[20], veamos que el método científico se basa muchas veces, en la utilización de *modelos* que, mediante un proceso de abstracción, simplifican la realidad que se quiere estudiar. Cuando en la Geometría elemental se establece el concepto de "línea", se debe pensar en una figura con una sola dimensión (la longitud), sin que pueda encontrarse en la realidad una línea -por fina que sea- que carezca de anchura e, incluso de altura o "grosor".

Aunque la creación de los modelos supone, en general, un meritorio trabajo científico, la tarea no se concluye hasta contrastar el modelo con la realidad y ello exige disponer de los datos adecuados. Bross[21], en su libro sobre *La decisión estadística* apunta que el empleo de los modelos presenta las siguientes *ventajas*:

a) Es el procedimiento seguido en los sistemas de predicción que ha tenido más éxito.

b) El modelo proporciona una estructura de referencia para la consideración del problema: los "fallos" del modelo señalan a veces una pista sobre las deficiencias de aquél; estos "fracasos" en el modelo del éter hicieron posible el formidable trabajo de Albert Einstein[22].

---

[20] *Vide* ALCAIDE INCHAUSTI, Ángel: *Estadística (Introducción). Unidades Didácticas*. Citado en la bibliografía.

[21] *Vide* BROSS, Irwin D.J.: *La decisión estadística.* Ed. Aguilar. Madrid, 1958. Citado en la bibliografía.

[22] He was daring, wildly ingenious, passionately curious. He saw a beam of light and imagined riding it; he looked up at the sky and envisioned that space-time was curved. Albert Einstein reinterpreted the inner workings of nature, the very essence of light, time, energy and gravity. His insights fundamentally changed the way we look at the universe—and made him the most famous scientist of the 20th century. Einstein's gifts inevitably resulted in his dwelling much in intellectual solitude and, for relaxation, music played an important part in his life. He married Mileva Maric in 1903 and they had a daughter and two sons; their marriage was dissolved in 1919 and in the same year he married his cousin, Elsa Löwenthal, who died in 1936. Einstein published more than 300 scientific papers along with over 150 non-scientific works. His great intellectual achievements and originality have made the word "Einstein" synonymous with genius. He died on April 18, 1955 at Princeton, New Jersey.

c) El modelo pone de manifiesto el problema de la abstracción, decidiendo su elaborador qué atributos del mundo real tienen que incorporarse al propio modelo.

d) Al expresar un problema en lenguaje simbólico se tiene la ventaja de la facilidad de manipulación de dicho lenguaje.

e) Los modelos matemáticos, proporcionan el medio más barato para realizar la predicción.

Pero frente a estas ventajas señala también Bross algunas *desventajas*, a saber:

A) Un modelo matemáticamente factible puede exigir grandes simplificaciones, lo que puede restarle exactitud.

B) El lenguaje simbólico está sujeto también a limitaciones.

C) Un científico puede aficionarse tanto a su modelo que, incluso podría llegar a insistir en que dicho modelo es el mundo real, perdiendo, precisamente, la noción de la realidad.

2.3. MODELOS DE SIMULACIÓN

Veamos ahora, dado que le hemos mencionado, unas ideas aclaratorias sobre el concepto de SIMULACIÓN.

Hasta hace relativamente pocos años, algunas disciplinas sociales no se han prestado a un desarrollo científico experimental. Faltaba el equivalente a los laboratorios donde se pueden hacer repetidas pruebas y comprobar hipótesis científicas (como, por ejemplo, el sometimiento de un circuito electrónico, de un metal, de un ácido, ... a diversos usuarios o "inputs" y posterior observación de sus reacciones).

De forma muy general, entendemos por SIMULACIÓN la creación de un modelo que reproduce fielmente una estructura, sus relaciones con el mundo circundante y la forma de reaccionar ante ciertos usuarios o "inputs". Una vez construido el Modelo, se pretende medir la eficacia de diversos usuarios, sin necesidad de recurrir a experiencias reales, sino basándose en experiencias "simuladas".

Las políticas a las que someteremos nuestro modelo están representadas por los "inputs" de la figura siguiente, mientras que su eficacia podrá ser evaluada a través de los correspondientes "outputs".

Fijémonos en que esta forma de proceder ha sido ya utilizada en diversos campos de la ciencia y de la ingeniería. Por ejemplo, la industria aeronáutica, antes de lanzar un nuevo avión al mercado, construye un Modelo o prototipo que se somete en un túnel de viento a distintas condiciones simuladas de presión, turbulencias, temperatura, etc. Lo mismo sucede con la fabricación de automóviles de turismo o de microaspersores para el riego localizado de alta frecuencia. Observando las reacciones del modelo a estos "inputs" se obtienen conclusiones acerca de su futuro comportamiento en condiciones reales de trabajo (vuelo, conducción, irrigación). De esta forma se determina si el modelo es satisfactorio y cuáles son las condiciones que ofrecen mejor rendimiento. De la misma manera, se pretende que el experimentador llegue a conclusiones fidedignas sobre la eficacia de las distintas medidas a aplicar.

Al simular el sistema o alguna de sus partes, es preciso llegar a un compromiso entre Realidad y Simplicidad. En general, el estudio de nuestro universo o de cualquier fenómeno muy complejo con el relacionado requiere cierta labor de simplificación por parte del investigador, labor consistente en trasladar un fenómeno real a un Modelo de Estructura más simple, pero que ponga de relieve sus aspectos más importantes.

El método científico ayuda a analizar los problemas desde una óptica tanto cualitativa como cuantificativa. La aceptación o nueva elaboración de hipótesis de trabajo se hallan sujetas a la validez en cada aplicación de las tesis que se deriven de ellas. Realidades más complejas exigen también la elaboración de modelos cada vez más sofisticados. Pero suponiendo que fuera posible construir un modelo tan complicado como el mismo fenómeno que se pretender analizar, nada se habría adelantado, ya que sería difícil de manipular y comprender como la propia realidad.

La simulación se puede aplicar, en principio, a todo problema relativo a un sistema cualquiera. Ahora bien, para poder simular correctamente el comportamiento de dicho sistema, será necesario:

a) Precisar unos objetivos que exijan acrecentamiento del conocimiento.

b) Establecer una maqueta con flujos físicos o informáticos.

c) Definir las transformaciones de cada bloque o subsistema físico.

d) Disponer de series fiables de valores para actuar como VE ("Variables de entrada") en el sistema contemplado.

La simulación exige, pues, partir de un pre-modelo con el triple objetivo de:

1) Contribuir a la elaboración de un modelo.
2) Validar las hipótesis de trabajo.
3) Medir las consecuencias de ciertas acciones correctoras del sistema y buscar -por acrecentamiento del conocimiento- su transformación en modelo.

Para simular el sistema es preciso expresar la transformación que se opera en cada uno de sus bloques. Veamos, como características más importantes de este proceso, las siguientes:

a) Se observa cómo la simulación de un gran sistema puede apoyarse en *investigaciones de optimización local*, que "ponen en cuestión" las prácticas actuales. La utilidad de la simulación es muy grande, en este caso, puesto que de otra forma resulta imposible prever las consecuencias, sobre el sistema global, de la combinación de un conjunto de acciones modificadora de diversos bloques.

b) Permite una *visión dinámica* de la evolución de un sistema, al reproducir ficticiamente el recorrido de varias trayectorias: en pocos minutos, con ordenadores suficientemente potentes, se pueden simular varios meses o años de funcionamiento de un sistema en condiciones diversas. No hay, por tanto, dificultad alguna en introducir transformaciones aleatorias complejas que, de otro modo, sería prácticamente imposible calcular.

c) Montar una gran simulación resulta caro en estudios, en programación y en duración de paso por ordenador; además, la interpretación de los resultados es delicada. Sin embargo, la simulación es un *instrumento potente y útil*, que permite "empujar" la modelización lo más lejos posible hasta la consecución de condiciones simples, sintéticas y generales, pudiéndose llegar al establecimiento de un bloque único, el MODELO, que recubre al sistema global cuya maqueta se ha expuesto, expresando las relaciones existentes entre las VE, VS, VI, VA y VES (respectivamente, las variables de entrada, salida, internas, de acción y esenciales, según el esquema melesiano).

d) Veamos, en fin, que la simulación constituye una *técnica didáctica* excelente, que permite visualizar el comportamiento de un sistema psicológico y controlar hipótesis sobre datos ya conocidos. Con ello, se facilita grandemente la comunicación entre los "especialistas" y los "prácticos".

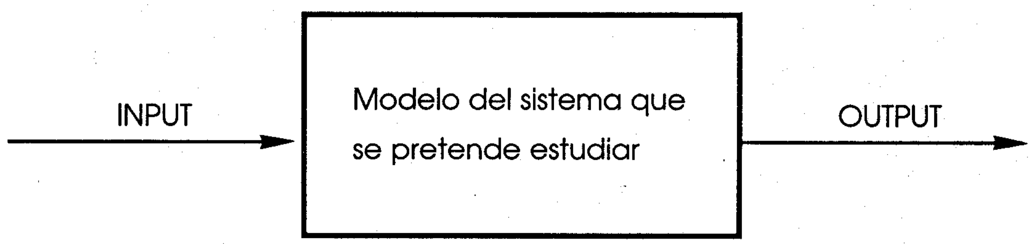


FIG. 1.1. Modelo del sistema en estudio.

La diferencia entre un modelo estático y un modelo dinámico (en el que se empleen justamente las ecuaciones diferenciales o en diferencias finitas que son objeto de estudio en el presente libro) se encuentra en la presencia de “variables con retardos” (“lags”, en inglés), o que vienen referidas a distintos momentos del tiempo, en alguna o algunas de las ecuaciones que constituyen el modelo dinámico. Algunos modelos económicos son un buen ejemplo de ello. Como estas variables con “lags” (retrasos, demoras, retardos o desplazamientos en el tiempo) son endógenas, aplicando el principio locacional, pero se comportan como exógenas, los miembros de la *Cowles Commission* han optado por denominarlas *predeterminadas,* e incluyen en este término tanto a las variables endógenas “desplazadas” como a las exógenas, desplazadas o no. De hecho, pueden considerarse como “variables explicativas” al conjunto de las exógenas y las predeterminadas.

Tanto los modelos estáticos como los dinámicos pueden ser “históricos”, siempre y cuando en sus ecuaciones figure explícita la variable independiente “tiempo”.

El ejemplo del modelo económico causal de la “telaraña” (R. Risco: “Curso elemental de Econometría”) permite aclarar la terminología empleada por Ragnar Risco[23] en su definición del sistema dinámico. En efecto, las ecuaciones que definen el modelo son “ecuaciones funcionales”, al ser del tipo de las denominadas “ecuaciones en diferencias finitas o recurrentes” en la terminología clásica del Análisis Matemático, y su solución no es un valor determinado, sino un conjunto de ellos.

La presencia de variables origina las ecuaciones funcionales y a ellas se refiere Risco cuando dice que “las variables en diferentes momentos del tiempo se incluyen de una manera esencial”. Si en lugar de variables con retardos a desplazamientos finitos de tiempo figuran, en el modelo, variables con desplazamientos infinitesimales (esto es, si en lugar de diferencias finitas figuraran derivadas), las ecuaciones funcionales o recurrentes antedichas se convertirían entonces en “ecuaciones diferenciales”, pasando del campo discreto al continuo.

Veamos, pues, que las ecuaciones en diferencias finitas y diferenciales ordinarias, así como las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales o las ecuaciones integrales, son herramientas que podemos implementar de modo de análisis en diferentes situaciones comunes. Constituyen una excelente representación de un gran número de situaciones dinámicas de la vida real y su teoría asociada es suficiente como para suministrar elementos útiles para su comprensión.

En muchas situaciones importantes que se presentan en diferentes campos del estudio del ser humano se requieren sistemas matemáticos elaborados para su simplificación o solución. Estos sistemas están, en gran parte, constituidos principalmente por ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias finitas.

A los modelos estáticos no históricos los denomina Samuelson[24] “modelos estacionarios” y a los dinámicos no históricos “modelos causales”.

---

[23] Economista noruego (1895-1973). Obtuvo el primer Premio Nobel de Economía que se concedió, en 1969, compartido con Jan Tinbergen, por haber desarrollado y aplicado modelos dinámicos al análisis de los procesos económicos. Estudió y enseñó en la Universidad de Oslo. Fue un miembro destacado de la llamada Escuela Sueca, fundada por K. Wicksell. Él puso nombre a la "Econometría" la rama que aúna el análisis estadístico y el aparato matemático con la economía. En 1930 fundó la *Econometric Society* junto con Irving Fisher y otros. Fue director de la prestigiosa revista *Econometrica* de 1933 a 1935.

[24] Paul Anthony Samuelson es un economista estadounidense, nacido en Gary, Indiana, de ascendencia judía, el 15 de mayo de 1915. Obtuvo el Premio Nobel de Economía en 1970, por el trabajo científico a través del cual ha desarrollado la teoría económica estática y dinámica y haber contribuido activamente a elevar el nivel del análisis en la ciencia económica. Es autor del manual "Curso de economía moderna",

2.4. LOS MODELOS Y LA TEORÍA DE SISTEMAS

2.4.1. La modelización

El profesor Lorenzo Ferrer Figueras, catedrático de Matemáticas de la Universidad de Valencia, desarrolla una interesante teoría acerca de las posibilidades del conocimiento y de la acción, donde se pone de manifiesto la importancia de la modelización y de la posterior experimentación sobre la realidad o sobre el propio modelo (simulación).

Una maqueta es una representación estática del individuo F observado, que no explica como éste funciona o evoluciona. Sin embargo, la modelización es una representación dinámica, en cuanto explica cómo funciona y/o evoluciona dicho sistema. Por ello, la explicación puede tener diversos niveles, de los que consideramos los tres siguientes:

1. Análisis de los factores del Sistema.

2. Conocimiento del funcionamiento de un bloque o subsistema.

3. Estudio del comportamiento dinámico de un gran sistema.

El modelo, entendido como una estructura explicativa de un fenómeno, tiene las siguientes características: A) Constituye una representación simplificada de la realidad. B) Es prospectivo, en tanto que explica el comportamiento futuro del Sistema (FERRER, 1972).

Según Minsky[25], "para un operador O, un objeto M es un modelo de un objeto A, en la medida en que O puede utilizar a M para responder a las cuestiones que le interesen respecto a A". De acuerdo con esta definición, cualquier razonamiento o decisión están basados en modelos; a veces explícitos y, otras veces, implícitos (FERRER, 1972).

El modelo es un sistema homomorfo del sistema que representa. Por tanto, modelo y sistema tienen el mismo comportamiento. El modelo en fin, será útil y eficaz en la medida que sea:

---

publicado por vez primera en 1945 y que es el libro de texto de Economía para estudiantes universitarios más vendido de la historia. En dicho manual, Samuelson señala las tres preguntas básicas que tiene que responder todo sistema económico: qué bienes y servicios (y en qué cantidad) se van a producir; cómo se van a producir esos bienes (utilizando los factores clásicos de producción: tierra, trabajo y capital); y para quién son dichos bienes y servicios. Además de pedagogo y divulgador, tiene muchas aportaciones originales. Está especialmente interesado en los aspectos dinámicos de la economía. Entre sus principales méritos figuran el desarrollo de las curvas de indiferencia, que permitieron evaluar la utilidad marginal decreciente de un bien sin recurrir a su cuantificación y el haber realizado aportaciones, entre otros economistas reconocidos, a la llamada "síntesis neoclásica", es decir, la fusión en un conjunto coherente de la economía de Keynes con la de sus predecesores.

[25] Hyman Philip Minsky, uno de los más destacados "post-keynesianos americanos", nació en Chicago y estudió en la *George Washington High School* de New York. Se licenció en matemáticas por la *University of Chicago* en 1941, pero se interesó posteriormente por la Economía y obtuvo el doctorado en Harvard en 1954, especializándose en finanzas.

- simple y elegante (facilita la comprensión).
- general (suscitará asociaciones, analogías).
- formalizado (facilita la simplicidad y posibilita la aplicación de diferentes técnicas de resolución).

2.4.2. Los modelos matemáticos

2.4.2.1. Variables exógenas y endógenas

En los análisis para la elaboración de teorías, muchos casos pueden ser cuantificados y expresados en el lenguaje formalizado de las matemáticas. La razón de ello es doble: de un lado, se debe al hecho de que gran parte de las magnitudes socioeconómicas son susceptibles de cuantificación, pudiendo ser expresadas como variables que toman valores dentro del conjunto (cuerpo o campo) de los números reales. De otro lado, las variables están interrelacionadas, pudiendo ser expresadas estas relaciones mediante funciones matemáticas adecuadas. Pues bien, las teorías, expresadas en lenguaje matemático, reciben la denominación de "modelos matemáticos".

Para poder profundizar más en la idea de "modelo matemático" es necesario no perder de vista que al ser el modelo la expresión formal de un análisis (o bien de una teoría) de carácter deductivista y que en dicho análisis se cumplen unos supuestos de partida, el modelo matemático consiste en la expresión de tales supuestos en lenguaje matemático a través de un conjunto de ecuaciones (a veces también de inecuaciones). Una vez construidos, ciertos modelos se pueden usar para predecir muchas situaciones físicas, como el pronóstico del tiempo climatológico, el crecimiento de un tumor cancerígeno o el resultado de la rueda de una ruleta; todos esos ejemplos pueden conectar con alguna forma de modelos matemáticos.

El conjunto de aquellas ecuaciones constituyen la "formulación" del modelo. Estas ecuaciones son las relaciones que, según los supuestos de partida, se dan entre las variables socioeconómicas. De estas variables, unas se suponen conocidas (variables exógenas o datos), y las demás son las incógnitas (variables endógenas) cuyos valores han de ser calculados en función de las exógenas.

Dicho lo anterior, veamos qué problemas se nos plantean al utilizar el modelo matemático y qué recursos matemáticos serán necesarios para resolverlos.

2.4.2.2. Problemas que se plantean

A) Primer problema

El primer problema con que nos enfrentamos es el de expresar los conceptos, y los supuestos de la respectiva teoría, en lenguaje matemático. En las teorías socioeconómicas de enfoque marginalista, la resolución de un problema viene facilitada porque en dicho enfoque se admiten los siguientes extremos:

a) Que las variables socioeconómicas son susceptibles de ser expresadas por números reales y que admiten variaciones infinitamente pequeñas. Es decir, son variables reales continuas.

b) Que las relaciones existentes entre las variables socioeconómicas pueden ser expresadas por funciones reales de diversos tipos, que suelen ser continuas y derivables repetida o iterativamente.

De hecho, la expresión de los conceptos en forma matemática está posibilitada por las dos características anteriores. Pero las dos características que admite el enfoque marginalista no solamente posibilitan la expresión de los conceptos en términos matemáticos sino que, además, permiten expresar los supuestos de la teoría en forma de ecuaciones (o inecuaciones) que forman el modelo matemático. Los supuestos de la teoría especifican cuáles son las relaciones que existen entre las variables socioeconómicas, y al ser estas relaciones expresables por medio de funciones reales, basta con utilizar el gran arsenal de funciones reales de que dispone la Matemática para poder expresar los supuestos de la teoría en forma de ecuaciones o inecuaciones. De este modo, queda la teoría expresada como un sistema de ecuaciones que constituyen la formulación del modelo matemático de la teoría en cuestión. Además, en muchos casos puede hacerse una representación gráfica del modelo, lo que le hace mucho más intuitivo.

Construir un modelo puede resultar un proceso prolongado y difícil que suele llevar varios años de investigación. Una vez formulados, quizás sea virtualmente imposible resolver los modelos de modo analítico. En este punto, el investigador cuenta con dos opciones: a) Simplificar, esto es, hacer pequeños cambios al modelo con el fin de mejorarlo y hacerlo más manejable; éste es un enfoque válido siempre y cuando la simplificación antedicha no comprometa excesivamente la conexión con el mundo real y, por lo tanto, su utilidad, y b) Dejar el modelo tal como está, y usar otras técnicas, tales como métodos gráficos o numéricos, lo que representa un enfoque cualitativo; en tanto que no tengamos una solución exacta, analítica, de algún modo obtenemos algo de información que puede arrojar cierta luz sobre el modelo y su aplicación (las herramientas tecnológicas pueden servir de gran ayuda en este enfoque).

Supongamos ahora que tenemos una situación de la vida real en que queremos encontrar la cantidad de material radiactivo existente en cierto elemento. La investigación debe ser capaz de construir un modelo para esta situación bajo la forma de una ecuación diferencial que parece “muy difícil” de entrada. Se puede usar la tecnología para ayudarnos a resolver la ecuación, puesto que los programas de computación nos dan una respuesta adecuada. Las respuestas tecnológicas son luego interpretadas o comunicadas a la luz de la situación de la vida real (en este caso, la cantidad de material radioactivo). La figura siguiente ilustra este ciclo.

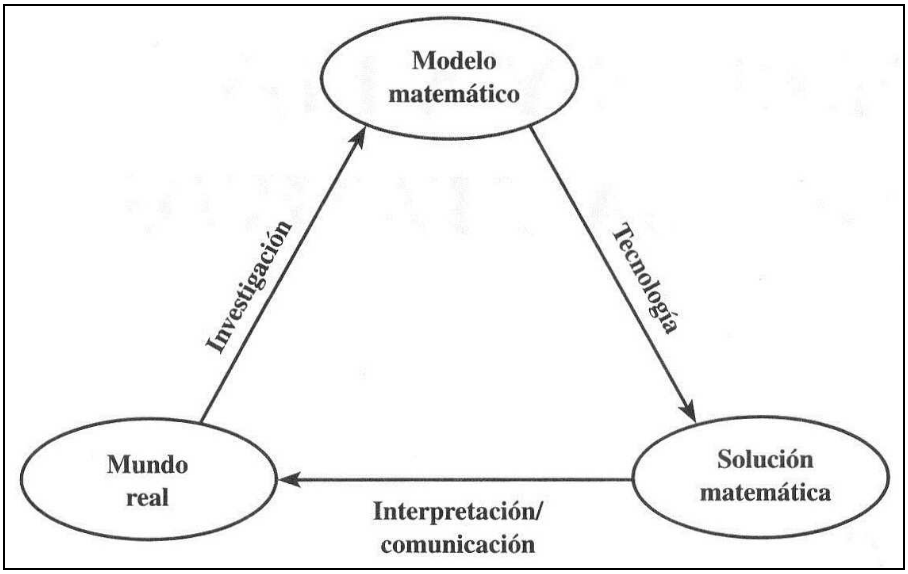


FIG. 1.2. Ciclo de un modelo matemático.

B) Segundo problema

El segundo problema que se nos plantea, una vez ya formulado el modelo, es el de deducir las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros que pueden figurar en las relaciones que forman el modelo.

Si se tiene en cuenta que un modelo matemático no es otra cosa que un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son las variables endógenas, se comprende fácilmente que el problema de deducir los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros, requiere la utilización de "técnicas matemáticas" para resolver sistemas de ecuaciones. Estas técnicas son muy variables dependiendo de la naturaleza de las ecuaciones que forman el modelo.

Las más usuales, en cualquier caso, son las siguientes:

- Cuando el modelo consiste en un sistema de ecuaciones lineales, ha de recurrirse a las "técnicas de resolución de sistemas lineales", donde la discusión del conocido teorema de Rouché-Frobenius-Krönecker adquiere singular relevancia. Si el número de ecuaciones es elevado, resulta preciso recurrir a los Métodos Matriciales (ver Cap. 9 de "Complementos"), que presentan la gran ventaja de ser resueltos hoy en día con el auxilio del ordenador y el software adecuado.

- Cuando el modelo consista en optimizar (maximizar o minimizar) una función cuyas variables estén sometidas a restricciones dadas por igualdades, la resolución del modelo requiere el empleo de las técnicas matemáticas propias del "Cálculo de Extremos Relativos" (máximos y mínimos locales) propias del Cálculo Infinitesimal clásico, como el método de los multiplicadores u operadores de Lagrange (caso condicionado). Si no hay restricciones se emplean también técnicas propias del Cálculo Diferencial.

- Cuando el modelo consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal cuyas variables estén sometidas a restricciones dadas por desigualdades lineales, ha de recurrirse a las técnicas de la “Programación lineal”, que es una parte de la Investigación Operativa.

- Cuando el modelo consiste en optimizar una función no lineal cuyas variables están sometidas a restricciones dadas por desigualdades lineales o no lineales, la resolución del modelo ha de hacerse a través de las técnicas matemáticas de la “Programación no lineal”, también propias de la Investigación de Operaciones, o bien a las condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn-Tucker.

Mediante el empleo de las técnicas anteriores, o bien de otras varias no mencionadas, se resuelve el problema de deducir los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros. Es precisamente en esta fase deductiva donde las Matemáticas colaboran en forma esencial con el análisis. La deducción matemática presenta la ventaja de su rapidez y de llegar allí donde la deducción verbal le es a veces imposible, como ya hemos señalado en la Introducción al presente libro. El dominio de las mencionadas técnicas matemáticas resulta de vital importancia si se quiere llegar a emplear el lenguaje matemático en los análisis a efectuar. Dicho dominio exige que, previamente, se conozcan las propiedades esenciales de las funciones reales, tanto de una variable como de varias.

C) Tercer problema

El tercero y último de los problemas que presenta un modelo matemático es el de deducir las conclusiones del modelo. Estas conclusiones suelen expresarse analizando cómo se ven afectados los valores de las variables endógenas, antes calculados, al producirse una alteración en una de las variables exógenas o en uno de los parámetros. Las variaciones que experimentan las variables endógenas ante una alteración en una de las variables exógenas o parámetros constituyen las “Predicciones del Modelo”. Estas predicciones son las que deben servir de base a la hora de tomar decisiones por parte del experimentador. La deducción de las conclusiones del modelo suele requerir el uso de las derivadas parciales cuyo tratamiento específico no es objeto del presente libro. Para analizar cómo se ve afectado el valor de una de las variables endógenas ante una alteración en una de las variables exógenas, basta con calcular la derivada parcial de la variable endógena respecto a la exógena.

La exposición efectuada hasta aquí ha pretendido resaltar dos cuestiones, sin ánimo de dejarlas resueltas:

- La primera de ellas es un intento de clarificar de qué manera las Matemáticas van a servir a las teorías al uso.

- La segunda de las cuestiones es la de anticipar cuáles van a ser las necesidades matemáticas, o parte de dichas necesidades, que demandan los análisis de enfoque marginalista.

Resumiendo todo lo expuesto hasta ahora, cabe destacar lo siguiente:

- Que muchas de las teorías de carácter deductivista pueden ser expuestas en forma matemática a través de los modelos matemáticos.

- Que el manejo de un modelo matemático presenta tres problemáticas diferenciadas temporalmente, a saber:

1. Formulación del modelo.

2. Deducción de los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros.

3. Deducción de las conclusiones del modelo, analizando cómo se ven afectados los valores de las variables endógenas ante una alteración en una de las variables exógenas o parámetros.

- Que la resolución de las anteriores disyuntivas requiere, desde el lado matemático, conocer las siguientes cuestiones:

a) Las propiedades generales de las funciones reales, tanto de una como de varias variables reales, así como los conceptos matemáticos de las mismas, orientado este estudio a exponer los conceptos en forma matemática y a expresar los supuestos de la teoría en la forma de un sistema de ecuaciones o inecuaciones que constituyen la formulación del modelo.

b) El desarrollo de técnicas matemáticas diversas (resolución de sistemas lineales, cálculo de extremos relativos, programación lineal y lineal paramétrica, programación no lineal, cuadrática, dinámica, en números enteros, hiperbólica, etc.) con las que se haga posible deducir los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros.

c) El cálculo de derivadas parciales, tanto de funciones simples o explícitas como de funciones compuestas o implícitas, con las que se haga posible la deducción de las conclusiones del modelo cuando se analicen cómo se ven afectados los valores de las variables endógenas ante una alteración de una de las variables exógenas o parámetros.

2.4.2.3. Formulación de los modelos matemáticos

Una vez resuelto el problema de saber expresar matemáticamente las relaciones de los modelos especificados en la teoría, estamos en condiciones de abordar la "formulación de los modelos". No obstante creemos necesario hacer antes algunas puntualizaciones en forma de preguntas, a saber:

a) ¿Cuáles son las variaciones endógenas y exógenas?

En primer lugar, para formular el modelo matemático de una cierta teoría, es necesario conocer qué es lo que trata de determinar dicha teoría. O dicho en otros términos: conocer cuáles son las variables endógenas y cuáles las exógenas. Las primeras son las que la teoría trata de determinar en términos de las exógenas.

b) ¿Aparecen explicitadas todas las relaciones?

Una vez aclarado este punto, es necesario fijarse en las especificaciones contenidas en los supuestos de la teoría e ir expresándolas en términos matemáticos. Ahora bien, ocurre que las Relaciones de Definición y de Condición no suelen venir explicitadas, y sin embargo han de aparecer en la formulación del modelo. Por ello, al formular un modelo debe tenerse sumo cuidado con las Relaciones de Definición y de Condición. Las Relaciones de Comportamiento siempre vienen especificadas en los supuestos de la teoría.

c) ¿Es el modelo completo?

Después de haber expresado en forma matemática las Relaciones que forman el modelo, debe procederse, a modo de comprobación, a observar si el modelo es completo. Para ello, ha de suceder que el número de ecuaciones sea igual al número de variables endógenas (incógnitas). De lo contrario, lo más probable es que falten ecuaciones (tal vez alguna de las Relaciones de Definición o de Condición no explicitadas) aunque también puede ser que se trate de un sistema compatible indeterminado en los términos definidos por el teorema de Rouché-Frobenius-Krönecker, es decir un modelo en el que haya más variables endógenas que ecuaciones y por tanto con infinitas soluciones para las variables endógenas. También podríamos encontrarnos con sistemas incompatibles (sin solución).

Veamos, en fin, que una de las características fundamentales de los modelos de análisis puede ser la aparición de la variable temporal que, según su presencia o no, se clasifican en dinámicos (no inerciales o inerciales) y estáticos. No nos extenderemos más en este tipo de modelos, cuyo estudio sería más propio de otra investigación.

2.4.3. Otra clasificación de los modelos

Pueden esquematizarse del siguiente modo:

MODELO DE REFERENCIA
- Modelo de información creciente
- Modelo de conocimiento
  - Modelo de análisis
  - Modelo funcional
  - Modelo de comportamiento dinámico del sistema

, cuyas definiciones respectivas son las siguientes:

- **Modelos de referencia**: son estructuras lógicas, proyectadas sobre la maqueta de un F (individuo observado o sujeto a experimentación) real, que permiten ampliar el proceso de acrecentamiento del conocimiento. Enriquecen y desarrollan los modelos implícitos a través de los cuales se ordenan y estructuran nuestras percepciones; para ello, explicitan las hipótesis de base o de partida, los objetivos finales, los factores en juego y sus interacciones.

- **Modelo de información creciente**: es una estructura de acogida e interpretación progresiva de la información. Debe tener las propiedades de un sistema: ser adaptativo y ser capaz de aprender.

- **Modelo de conocimiento**: reducen la indeterminación y explican las transformaciones.

- **Modelo de análisis**: reduce la variedad de un conjunto de elementos (serie de observaciones estadísticas sobre los factores) y halla clasificaciones explicativas (modelos de segmentación con técnicas matemáticas, estadísticas e informáticas).

- **Modelo funcional**: explica satisfactoriamente el comportamiento de las estructuras funcionales, define la naturaleza de las variables en juego (VE, VS, VI, VES, VA), así como su articulación lógica. Por último, permite comprender el funcionamiento de los bloques o subsistemas. Desde luego, la elaboración de estos modelos será necesaria para preparar la acción sobre el sistema.

- **Modelo de comportamiento dinámico de un sistema**: con gran frecuencia, el sistema aparece en régimen transitorio. Forrester[26] ha presentado un modelo de dinámica, basado en el mecanismo de “feedback” o retroalimentación industrial, que permite explorar los regímenes transitorios de un gran sistema y el establecimiento de curvas de respuesta de las VES (variables esenciales) para ciertas categorías de perturbaciones en las VE (variables de entrada). El modelo tiene en cuenta las interacciones entre los flujos que circulan. En cada red se tienen en cuenta los siguientes conceptos:

[26] En la década de los años 70 del siglo XX, hubo un avance decisivo en el campo de la computación y, como consecuencia, se desarrollaron programas para realizar simulaciones por ordenador. También se propusieron modelos con la intención de prever la evolución de la economía mundial. En el año 1972, se presentó el *Primer Informe del Club de Roma* titulado *The Limits to Growth*. Fue obra de Jay Forrester y Dennis Meadow, del MIT y en él, los autores desarrollaron el modelo **World2** formulado desde la perspectiva de la Dinámica de Sistemas. Este modelo fue uno de los primeros *Modelos Globales* que se han utilizado y también, junto con sus revisiones, uno de los más importantes. El modelo atrajo la atención de la comunidad dedicada a realizar prospecciones del futuro e impulsó el desarrollo de muchos modelos posteriores. Su característica principal era la habilidad para unir y combinar elementos, como la producción industrial, la población, cuestiones medioambientales, la alimentación y la energía en un mundo a escala aunque de forma agregada, es decir, sin considerar diferencias de desarrollo entre las distintas zonas geográficas. Mesarovic y Pestel desarrollaron el modelo **World Interdependence Model (WIM)**, que considera el mundo divido en regiones y con el que se preparó el *Segundo Informe del Club de Roma* en el año 1974 bajo el título *Mankind at the Turning Point*. Este tipo de modelos se denominan *Modelos Globales* y están caracterizados por los siguientes puntos:
- El modelo pretende hacer prospecciones del futuro.
- El modelo abarca todo el mundo o, al menos, las influencias recíprocas entre zonas amplias del planeta.
- El modelo intenta unir áreas diferentes pero relacionadas como la economía, la alimentación, el medio ambiente,...

los niveles, las tasas de flujos, las funciones de decisiones y los canales de información.

Con relación a esto último, conviene aclarar que los niveles son los puntos de acumulación de los flujos y resultan de la diferencia entre los flujos de entrada y de salida. Las tasas definen el flujo instantáneo entre los niveles, y corresponden a la actividad. Los niveles miden el estado que llega del sistema, a causa de la actividad. La fijación de las tasas, que corresponde al Sistema Gestor, viene dada por las VA (variables de acción), resultando funciones de decisión que representan elecciones o acciones programadas basadas en el valor de los niveles (FERRER, 1972).

En particular, la dinámica de un bloque de un sistema vendrá dada por la siguiente formulación:

$$E \rightarrow \boxed{\phi} \rightarrow S$$

$$\frac{d\phi}{dt} = S - E, \text{ de donde: } \phi = \int (S - E)dt = S \cdot T, \text{ y : } \frac{\phi}{T} = S; \text{ siendo:}$$

ϕ = nivel de flujo (corresponde al estado del sistema).
S = tasa de flujo de salida = flujo instantáneo (corresponde a la actividad).
E = tasa flujo de entrada = ídem anterior.
T = demora (constante).

De las expresiones anteriores, se deduce que:

$$\frac{d\phi}{dt} = T\frac{dS}{dt};$$

de donde, substituyendo en la ecuación inicial, se tiene:

$$S - T\frac{dS}{dt} = E,$$

o lo que es lo mismo, se llega a la denominada “ecuación de transferencia”:

$$(1 - T\frac{d}{dt})S = E$$

El modelo de dinámica industrial está constituido, en definitiva, por el conjunto de todas las ecuaciones que ligan las tasas y los niveles de flujo de los diferentes bloques del sistema. Así:

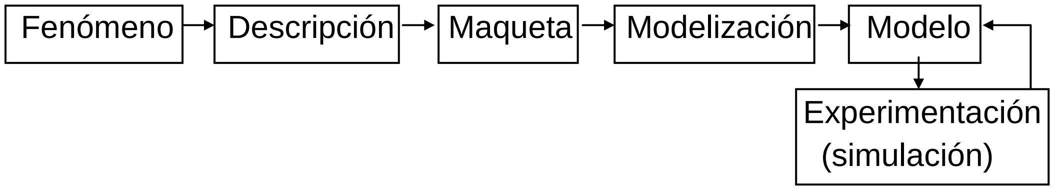


FIG. 1.3. Diagrama funcional de un modelo dinámico.

3. LOS MODELOS DINÁMICOS

3.1. CONCEPTUALIZACIÓN

Ya con anterioridad hemos introducido el concepto de *modelo dinámico* en contraposición conceptual al de *modelo estático*. Pues bien, los análisis dinámicos o estructurales son aquellos que van referidos a lo largo de un horizonte temporal durante el cual no cabe admitir que los factores seleccionados en la modelización permanezcan invariables, sino, por el contrario, se consideran como funciones del tiempo f(t), describiendo trayectorias temporales que, para las variables exógenas, se suponen determinadas fuera del análisis.

La ubicación de las variables en el tiempo es un rasgo relevante de los análisis dinámicos. Introduce en nuestro panorama una consideración temporal que puede hacerse de dos formas: considerar el tiempo como una variable continua o como una variable discreta. En el primer caso, en cada punto o instante del tiempo "le pasa algo" a la variable, en tanto que en el segundo la variable experimenta un cambio solo una vez en cada período. Cabe citar, como ejemplos en el análisis financiero, la capitalización continua y la capitalización anual, respectivamente.

El objetivo de un análisis dinámico es el estudio de la trayectoria temporal específica de alguna variable, sobre la base de una forma conocida de cambio temporal. Fijado este último y el valor que toma la variable y en un instante del tiempo, queda determinada la trayectoria temporal específica, y(t). El valor de la variable para t = 0, $y(0) = y_0$ se conoce por "condición inicial" del problema; al respecto solucionaremos algunos problemas de ecuaciones diferenciales y recurrentes que incluyen estas condiciones.

El cambio temporal puede adoptar muchas formas. La más simple es expresando la "tasa de cambio por unidad de tiempo" en función del tiempo y de la propia variable. Así:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f(t,y)$$

En la versión de tiempo continuo, la unidad de tiempo se puede tomar infinitamente pequeña (dt), y la tasa de cambio por unidad de tiempo va a asociada a la derivada:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt}$$

Dada la relación:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = f(t, y) ,$$

y la condición inicial $y(0) = y_0$, queda determinada la trayectoria temporal y(t). La ecuación anterior:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

es una "ecuación diferencial de primer orden". Su solución general se obtiene por integración y da como resultado una familia o haz de trayectorias, debido a la constante arbitraria que aparece al integrar. La condición inicial $y(0) = y_0$ permite precisamente determinar el valor de la constante de integración, quedando así conocida la trayectoria temporal específica de la variable, y(t). Algo parecido sucede también con las ecuaciones en diferencias finitas o recurrentes, como tendremos ocasión de comprobar oportunamente en los capítulos siguientes.

3.2. EL PROCESO DE POISSON

3.2.1. Conceptos previos

Contemplemos el ejemplo concreto de una estación de servicio de combustible, o de una estación de peaje de una autopista, o de una fila de salida para el pago en la caja de un hipermercado, lo que configura un fenómeno de espera o cola. Consideremos ahora, para mayor generalidad, que dichas llegadas de usuarios se producen siguiendo un proceso poissoniano. En efecto, dados unos cambios de estado en un S. (sistema), se dirán que siguen los postulados de Poisson[27] si se cumple que:

1- Los sucesos que conciernen a cambios en intervalos no solapados, son independientes.

[27] **Siméon Denis Poisson** (1781-1840), fue un físico y matemático francés al que se le conoce por sus diferentes trabajos en el campo de la electricidad; también hizo publicaciones sobre la geometría diferencial y la teoría de probabilidades. La primera memoria de Poisson sobre la electricidad fue en 1812, en que intentó calcular matemáticamente la distribución de las cargas eléctricas sobre la superficie de los conductores, y en 1824, cuando demostró que estas mismas formulaciones podían aplicarse de igual forma al magnetismo. El trabajo más importante de Poisson fue una serie de escritos acerca de las integrales definidas, y cuando tan solo tenía 18 años, escribió una memoria de diferencias finitas. Poisson enseñaba en la escuela Politécnica desde el año 1802 hasta 1808, en que llegó a ser un astrónomo del *Bureau des Longitudes*. En el campo de la astronomía estuvo fundamentalmente interesado en el movimiento de la Luna. En 1809 fue nominado como profesor de matemáticas puras en la nuevamente abierta facultad de ciencias. En 1837 publicó en *Recherches sur la probabilité des jugements*, un trabajo importante en la probabilidad, en el cual describe la probabilidad como un acontecimiento fortuito ocurrido en un tiempo o intervalo de espacio bajo las condiciones que la probabilidad de un acontecimiento ocurre es muy pequeña, pero el número de intentos es muy grande; entonces, el evento ocurre algunas veces. Durante toda su vida publicó entre 300 y 400 trabajos matemáticos incluyendo aplicaciones a la electricidad, el magnetismo y la astronomía.

2- La probabilidad de un número dado de cambios en un intervalo depende de la medida o longitud de este intervalo: $\longmapsto$, y **no** de su situación:
$\longmapsto \longmapsto$.

3- $\exists \lambda \in \Re \,/\, \lim_{h \to 0} \frac{P_i(h) - \lambda \times h}{h} = 0$, siendo : $\xleftrightarrow{h}$

4- $\forall\, n \in \underset{n \geq 2}{\{N\}} = \{Z^+\} \Rightarrow \lim_{h \to o} \frac{P_n(h)}{h} = 0$

Consecuentemente, habrá que analizar, en cada caso, si realmente la experiencia científica en cuestión se adapta a los postulados anteriormente expresados, y, acto seguido, proceder a su estudio como tal proceso poissoniano, del modo que a continuación se expone.

En estadística y simulación, un **Proceso de Poisson** (también conocido como "**Ley de los sucesos raros**") es un proceso de sucesos independientes donde:

1. El número de sucesos en dos intervalos independientes siempre es independiente.

2. La probabilidad de que un suceso ocurra en un intervalo es proporcional a la longitud del intervalo.

3. La probabilidad de que ocurra más de un suceso en un intervalo suficientemente pequeño es despreciable (no se producirán sucesos simultáneos).

4. Para procesos homogéneos hay una densidad media λ. Eso significa que la media de los sucesos en un intervalo de tiempo t es λ/t. También existen procesos de Poisson no homogéneos.

El tiempo que media entre dos sucesos de un proceso de Poisson con intensidad media λ es una variable aleatoria de distribución exponencial con parámetro λ.

Se pueden modelar muchos fenómenos como un proceso de Poisson. El número de sucesos en un intervalo de tiempo dado es una variable aleatoria de distribución de Poisson donde λ es la media de números de sucesos en este intervalo. El tiempo hasta que ocurre el suceso número k en un proceso de Poisson de intensidad λ es una variable aleatoria con distribución de probabilidad gamma o (lo que es lo mismo) con distribución de Erlang[28] con $\theta = 1/\lambda$.

---

[28] En estadística y simulación, la **distribución Erlang**, también llamada **distribución de Erlang**, es una distribución de probabilidad continua con dos parámetros *k* y θ cuya función de densidad, para valores $x > 0$ es la siguiente:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Imaginemos, ahora, un Sistema en un determinado estado en el instante t, caracterizándose dicho estado por la llegada de un número k de usuarios, entre 0 y t. Suponiendo que la probabilidad de pasar del estado k al k + 1 entre t y t + dt es igual a $\lambda \cdot dt$, siendo λ constante y considerando despreciable la probabilidad, por tratarse de un infinitésimo (o infinitesimal) de orden superior, de pasar del estado k al k + 2.

Puede verse, al respecto de lo expuesto, el esquema o figura siguiente:

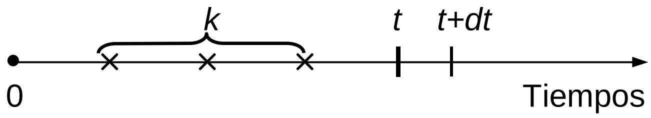


FIG. 1.4. Llegada de clientes a un sistema.

Teniendo en cuenta lo anterior, determinemos ahora la probabilidad de que el sistema en cuestión se encuentre en el estado *n* en el momento *t* + d*t*.

Esta probabilidad es igual:

– a la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado *n*-1 en el momento *t* y que se produzca una llegada de usuarios entre *t* y *t* + d*t*;
– más la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado *n* en el momento *t* y que no se produzca ninguna llegada de usuarios entre *t* y *t* + d*t*.

Podemos escribir:

$$p_n(t+dt) = p_{n-1}(t) \cdot \lambda \cdot dt + p_n(t)(1 - \lambda \cdot dt),$$

o bien, haciendo las operaciones pertinentes:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p_n(t)}{\Delta t} = p'_n(t) = \frac{p_n(t+dt) - p_n(t)}{dt} = \lambda \cdot p_{n-1}(t) - \lambda \cdot p_n(t) = \lambda \left[p_{n-1}(t) - p_n(t) \right]$$

La solución de esta ecuación diferencial, que se puede resolver como lineal de primer orden, es: $p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, siendo para t = 1: $p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$, que es la expresión de la *ley de Poisson*.

La ley de Poisson define, pues, un proceso de llegadas de usuarios (por unidad de tiempo) que responde a las hipótesis anteriormente especificadas. Su media o esperanza matemática y su varianza son:

La distribución de Erlang es el equivalente de la distribución gamma con el parámetro $\forall$ k = 1,2, ..., y $\lambda = 1/\theta$. Para *k* = 1 eso es la distribución exponencial. Se utiliza la distribución de Erlang para describir el tiempo de espera hasta el suceso número *k* en un proceso de Poisson.

$$E(n) = \lambda, \qquad Var(n) = \sigma^2 = \lambda .$$

En teoría de probabilidad y estadística, la distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta. Expresa la probabilidad de un número de eventos ocurriendo en un tiempo fijo si estos eventos ocurren con una tasa media conocida, y son independientes del tiempo desde el último evento.

La distribución de probabilidad de Poisson, que publicó, junto con su teoría de probabilidad, en 1838 en su trabajo titulado *Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile* (investigación sobre la probabilidad de los juicios en materias criminales y civiles), está dada por la expresión siguiente:

$$f(k;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},$$

donde:

e es la base del logaritmo natural o neperiano (*e* = 2’7182818284...),
k! es el factorial de *k*,
k es el número de ocurrencias de un evento determinado,
λ es un número real positivo, equivalente al número esperado de ocurrencias durante un intervalo dado. Por ejemplo, si los eventos ocurren de media cada 4 minutos, y se está interesado en el número de eventos ocurriendo en un intervalo de 10 minutos, se usaría como modelo una distribución de Poisson con: λ = 10/4 = 2’5.

Veamos, al respecto el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Si el 2% de los individuos analizados de un cierto colectivo tienen la expresión escrita defectuosa, se desea obtener la probabilidad de que 5 de 400 individuos (el 1’25%) de dicho colectivo tengan su expresión escrita defectuosa.

Solución:

$$k = 5, \lambda = 400(0.02) = 8$$

$$P(5;8) = \frac{8^5 e^{-8}}{5!} = 0.092$$

O sea, que la probabilidad buscada es del 9’2%. Si, por otra parte, como parecería natural, se buscase la probabilidad de que dicha expresión defectuosa la tuvieran 8 individuos del colectivo (el 2%), dicha probabilidad, con k = 8 y λ = 8, sería prácticamente del 14%.

Pues bien, la probabilidad de que el intervalo que separa dos acontecimientos sucesivos sea superior a un determinado valor τ, es igual a la probabilidad de que no se produzca ningún acontecimiento en el intervalo τ, por consiguiente, igual a $e^{-\lambda\tau}$.

Al respecto de lo que estamos exponiendo hasta ahora, puede resultar suficientemente aclaratorio el siguiente gráfico:

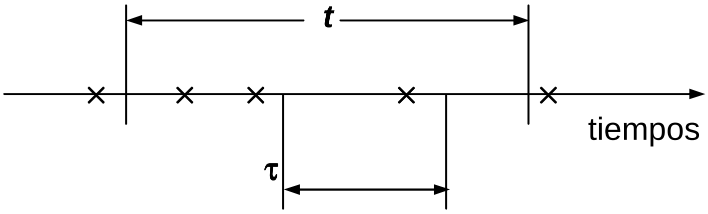


FIG. 1.5. Intervalo de tiempo τ de llegada de usuarios al sistema.

Si se designa por $F(\tau)$ la *función de distribución* de τ, la probabilidad de que el intervalo en cuestión sea superior a τ no es otra que $1 - F(\tau)$.

En estas condiciones: $F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$, resultando:

$$dF(\tau) = f(\tau)d\tau = e^{-\lambda\tau} \cdot d(\lambda\,\tau).$$

De este modo, en el marco de un proceso poissoniano, la ley de probabilidad de los intervalos que separan dos acontecimientos sucesivos no es otra que la ley exponencial. Su media y su varianza son:

$$\left.\begin{array}{r} E(\tau) = 1/\lambda \\ Var(\tau) = 1/\lambda^2 \end{array}\right\} \frac{[E(\tau)]^2}{Var(\tau)} = 1$$

En los fenómenos de espera[29], la ley de Poisson describe, a menudo, correctamente el proceso de llegada de los usuarios y la ley exponencial la distribución de las duraciones del servicio. En tal caso, la ley de llegadas viene definida por el *número medio de las llegadas por unidad de tiempo* y la ley de las duraciones del servicio por la tasa media de servicio (inversa del tiempo medio que separa dos acontecimientos sucesivos).

3.2.2. Fila de espera con varias estaciones

La figura que viene a continuación representa esquemáticamente esta situación. Llamemos:

[29] Las líneas de espera surgen en los sistemas porque los flujos de entrada y salida no están perfectamente sincronizados, es decir, que el número de unidades físicas (llegadas), intenta recibir un servicio de un número limitado de instalaciones o servidores. En un sistema donde existe un centro de servicio que consta, por ejemplo, de tres servidores, se formará una cola o espera en el momento que lleguen cuatro clientes al sistema, ya que el número de clientes presentes es mayor que el número de servidores del mismo. Un sistema de colas es un conjunto de partes o elementos organizados y relacionados que interactúan entre sí para lograr un determinado objetivo. Los sistemas reciben (entrada) datos, energía o materia del ambiente y proveen (salida) información, energía o materia.

S al número de estaciones del sistema.
ν al número de usuarios en la fila de espera.
j al número de usuarios recibiendo la prestación del servicio en las estaciones ($0 \leq j \leq S$).
n al número total de usuarios en el sistema, es decir, en espera y siendo procesados, esto es: $n = \nu + j$.
ρ al número de estaciones desocupadas.
$\mathbf{t_f}$ al tiempo medio de espera del usuario en la fila, antes de ser procesado, que no debe confundirse con la *latencia* de la respuesta (tiempo transcurrido, expresado en segundos, entre la presentación del usuario y el comienzo de la respuesta).

(Los valores medios correspondientes se representarán con un guión horizontal sobre la variable en cuestión).

La situación aparece clara. En tanto que $j < S$, es decir, mientras que todos los centros receptores no están ocupados, no hay filas de espera y cualquier usuario que llegue es procesado inmediatamente ($\nu = 0$). Por el contrario, si $j = S$, puede formarse una fila de espera y entonces $\nu \geq 0$.

La situación, gráficamente, podría esquematizarse así:

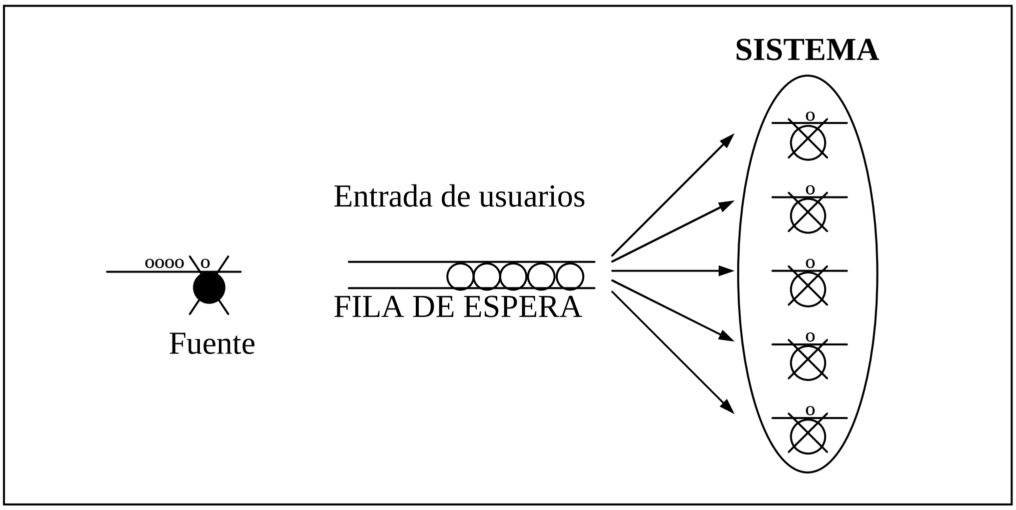


FIG. 1.6. Esquema de llegadas de usuarios al Sistema.

En este caso, las llegadas de usuarios son de naturaleza poissoniana y su tasa media de procesamiento es λ. Todos los centros receptores tienen igual tasa media de procesamiento **μ** que corresponde a una misma distribución exponencial.

En la figura anterior no hemos representado más que una sola fila de espera. Podemos considerar igualmente que hay varias filas, una ante cada centro receptor del sistema, como sucede frecuentemente en la realidad cotidiana; este último caso será equivalente al primero con la condición de que los usuarios no tengan ninguna prioridad ni preferencia por un centro receptor en particular y que cualquier usuario actúe desde la fila más corta. En el caso de tratarse de varios sistemas el problema podría multiplicarse tantas veces como fuera preciso.

Las *ecuaciones de estado* que describen tal fenómeno de espera se establecen fácilmente del siguiente modo:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t), \\ \dfrac{d}{dt} p_n(t) = \lambda \cdot p_{n-1}(t) - (\lambda + n \cdot \mu) p_n(t) + (n+1) \cdot \mu \cdot p_{n+1}(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, n / 1 \leq n < S, \\ \dfrac{d}{dt} p_n(t) = \lambda \cdot p_{n-1}(t) - (\lambda + S \cdot \mu) p_n(t) + S \cdot \mu \cdot p_{n+1}(t), \quad \forall n \geq S. \end{cases}$$

Estas ecuaciones no son más que un caso particular de las ecuaciones siguientes, más generales, que definen lo que se denomina un “proceso de nacimiento y de muerte” en el cual las llegadas y el proceso de percepción son poissonianos:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} p_n(t) = \lambda_{n-1} \cdot p_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) \cdot p_n(t) + \mu_{n+1} \cdot p_{n+1}(t), \forall\, n > 0 \\ \dfrac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda_0 \cdot p_0(t) + \mu_1 \cdot p_1(t) \end{cases}$$

en donde λ_n y μ_n son funciones de *n*.

Las ecuaciones anteriores generalizan numerosos casos particulares de los fenómenos de espera o de colas, como por ejemplo el de una tasa de procesamiento proporcional al número de usuarios existentes en el sistema:

$$(\lambda_n = \lambda;\ \mu_n = n \cdot \mu).$$

Situémonos ahora en el caso de “régimen permanente”, es decir, en el caso en que las probabilidades p_n, de un número *n* de unidades en el sistema, son independientes del tiempo, con lo que:

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = 0, \text{ para cualquier valor de } n.$$

Se pondrá $\psi = \lambda/\mu$. La cantidad ψ/S, denominada “*intensidad de tráfico*”, será tal que $(\psi/S) < 1$, es decir, $\psi < S$, si no la fila se haría infinita, al ser el número medio de llegadas de los usuarios superior al de salidas de los mismos.

3.2.3. Probabilidad p_n de que existan n unidades en el sistema

De las ecuaciones de estado se deducen inmediatamente las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} p_n &= p_0 \frac{\psi^n}{n!}; \quad 1 \le n < S, \\ p_n &= p_0 \frac{\psi^n}{S! \cdot S^{n-S}}; \quad n \ge S; \end{aligned}\right\}$$

donde:

$$p_0 = \frac{1}{\dfrac{\psi^S}{S!(1-\psi/S)} + 1 + \dfrac{\psi}{1!} + \dfrac{\psi^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\psi^{S-1}}{(S-1)!}}$$

o también $p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = e^{-\psi}$

En el caso particular de que exista un único centro receptor, o sea, S = 1, se tiene:

$$p_0 = 1 - \psi,$$
$$p_n = (1-\psi) \cdot \psi^n$$

Se pueden utilizar igualmente, para el cálculo de p_n, las fórmulas de retorno o recurrencia:

$$\left.\begin{aligned} p_n &= \frac{\psi}{n} p_{n-1}, \quad 1 \le n < S \\ p_n &= \frac{\psi}{S} p_{n-1}, \quad \forall n \ge S. \end{aligned}\right\}$$

En cualquier caso, la determinación de la probabilidad p_n de que existan n unidades de usuarios en el sistema, siendo la tasa media de llegadas λ y la tasa de percepción proporcional al número de usuarios en el sistema, se realiza del siguiente modo:

Volvamos a tomar las ecuaciones generales del proceso de nacimiento y muerte:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} p_n(t) = \lambda_{n-1} \cdot p_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \mu_{n+1} \cdot p_{n+1}(t), \quad \forall n > 0; \\ \dfrac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu_1 \cdot p_1(t). \end{cases}$$

Aquí, $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = n \cdot \mu$. En régimen permanente, se tendrá:

$$0 = \lambda \cdot p_{n-1} - (\lambda + n \cdot \mu) p_n + (n+1) \mu \cdot p_{n+1}, \quad n > 0;$$
$$0 = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1,$$

o sea:

$$(n + 1)\mu \cdot p_{n+1} = -\lambda \cdot p_{n-1} + (\lambda + n \cdot \mu) p_n,$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0,$$

como:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0, \\ 2\mu \cdot p_2 = (\lambda + \mu) p_1 - \lambda \cdot p_0, \\ 3\mu \cdot p_3 = (\lambda + 2\mu) p_2 - \lambda \cdot p_1, \\ 4\mu \cdot p_4 = (\lambda + 3\mu) p_3 - \lambda \cdot p_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{cases}$$

y así sucesivamente, de donde:

$$p_n = \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} p_0 \text{; pero: } \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1\text{; luego:}$$

$$p_0 + p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} = 1,$$

$$p_n + p_0 (e^{\lambda / \mu} - 1) = 1,$$

$$p_0 = e^{-\lambda / \mu};$$

y finalmente:

$$\boxed{p_n = \frac{(\lambda / \mu)^n e^{-\lambda / \mu}}{n!} = \frac{p_0 \times \psi^n}{n!}}.$$

CAPÍTULO 2
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

1. ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES

En líneas generales, resolver una ecuación diferencial ordinaria de primer orden consiste en encontrar la "familia o haz de curvas" $y = y(x,c)$ que satisfaga la susodicha ecuación, es decir, tal que: $y'(x,c) = f[x, y(x,c)], \forall c$. Este haz de curvas se denomina *haz integral, integral general o solución general* de la ecuación diferencial, y cada una de las curvas que lo componen son *soluciones o integrales particulares* de esta ecuación. En general, las soluciones particulares las podemos hallar dando valores a la constante *c* en la solución general, como veremos en el ejemplo siguiente.

Pues bien, si una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se puede escribir en la forma:

$$f_1(x)\cdot dx = f_2(y)\cdot dy$$

recibe el nombre de ecuación de variables separables o separadas. En definitiva, en este tipo de ecuaciones los factores que multiplican a *dx* y *dy* son, respectivamente, funciones solamente de *x* o de *y*.

La integral general se obtiene mediante una cuadratura (se entiende por "cuadratura" la obtención de una primitiva); siendo $F_1(x)$ y $F_2(y)$, respectivamente, las primitivas de $f_1(x)$ y $f_2(y)$, se tendrá:

$$\int f_1(x)\cdot dx = \int f_2(y)\cdot dy$$

de donde, se obtiene la integral general, dependiendo de una única constante arbitraria:

$$F_1(x) = F_2(y) + c$$

Si nos hubieran dado alguna condición inicial, por ejemplo, "pasar por un punto determinado", la constante se determina imponiendo la referida condición.

Algunas ecuaciones diferenciales no son de variables separadas, pero pueden reducirse a ellas mediante cambios de variables adecuados. Esto ocurre con las ecuaciones de la forma:

$$\boxed{y' = f(ax + by + c)}\ ,$$

que se reducen a variables separadas con el cambio: $z = ax + by + c$.

Entonces, $z' = a + by'$, lo que transforma la ecuación planteada en:

$\frac{z'-a}{b} = f(z)$, que ya es de variables separadas.

Si las ecuaciones se presentan bajo la forma:

$f(x)\cdot f_1(y)\cdot dx + \varphi(x)\cdot \varphi_1(y)\cdot dy = 0$, se deduce que:

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx + \int \frac{\varphi_1(y)}{f_1(y)}dy = c$$

se transforman en el tipo de variables separadas dividiendo por el producto $f_1(y)\cdot\varphi(x)$.

Veamos, en fin, que las EDO del tipo: $y' + y\cdot f(x) = 0$ son también ecuaciones de variables separables, puesto que se pueden escribir en la forma: $\frac{dy}{y} = -f(x)\cdot dx$. Integrando: $\ln y = -\int f(x)\cdot dx + C$, y resulta la I.G.: $\boxed{y = e^{-\int f(x)\cdot dx + C} = K\cdot e^{-\int f(x)\cdot dx)}}$, donde se ha hecho: $K = e^C$.

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Resolver la EDO: $y'(x^2 - x) - y = 0$.

Solución:

Escribiendo dy/dx en lugar de y', se obtiene la nueva expresión:

$\frac{dy}{dx}(x^2 - x) = y$, que también se puede escribir así separando las variables: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2 - x}$. Calculando, ahora, las integrales indefinidas mediante una cuadratura, se obtiene:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln y + K' = \ln y + \ln K = \ln K\cdot y;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x} = \ln(x-1) - \ln x + \ln C = \ln \frac{C(x-1)}{x}$$

puesto que se cumple que: $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 - x} - \frac{x-1}{x^2 - x} = \frac{1}{x^2 - x}$;

de donde manipulando convenientemente las constantes de integración se llegaría a: $K \cdot y = C\dfrac{x-1}{x}$, y entonces se obtendría la integral general:

$$\boxed{y = C'\frac{x-1}{x}}, \text{ habiendo hecho: } C' = C/K.$$

Obsérvese que solo se ha tomado en la integración una constante escrita en forma logarítmica, puesto que la integral general depende de una única constante. Si nos hubieran dado la condición de que la curva integral debe pasar por el punto (2,1), la constante se determina como sigue:

$$1 = C'\frac{2-1}{2};\quad 1 = \frac{1}{2}C';\quad C' = 2$$

Luego la integral particular correspondiente sería: $y_p = \dfrac{2(x-1)}{x}$, esto es, la curva concreta del haz o familia de soluciones que pasando por el punto dado, satisface la ecuación problema. Su clasificación conduce a la de una cónica no degenerada, puesto que su invariante proyectivo o cúbico es:

$$I_3 = |A| = \begin{vmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1/2 \neq 0$$

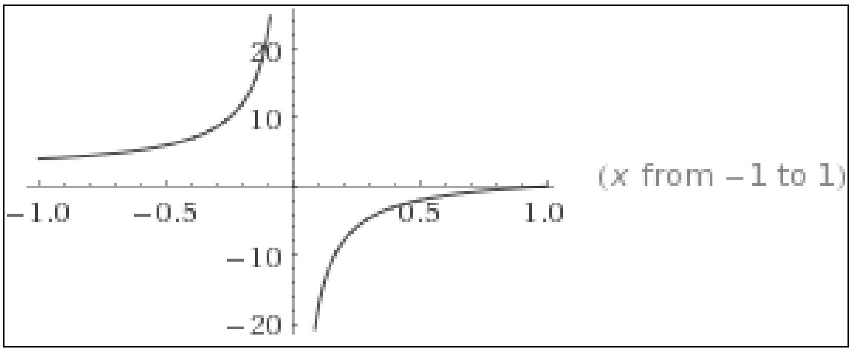
Además, el invariante afín o cuadrático (adjunto o cofactor del elemento a_{33}) resulta ser:

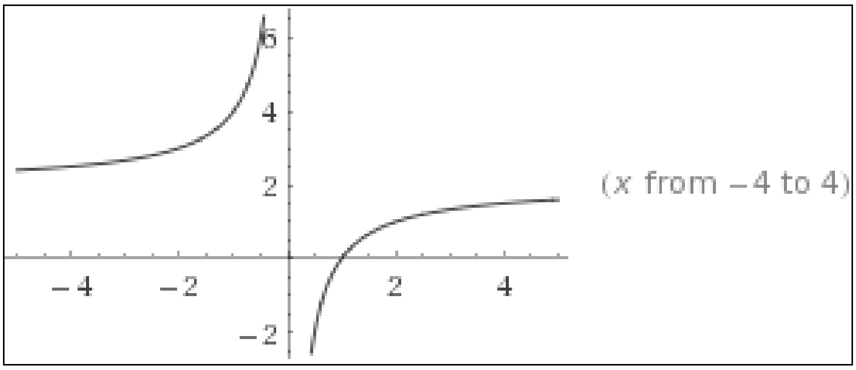
$$I_2 = A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{vmatrix} = -1/4 < 0,$$

luego se trata de una hipérbola real en que, además, el invariante métrico o lineal viene dado por: $I_1 = a_{11} + a_{22} = 0 + 0 = 0$, por lo que se trata de una hipérbola equilátera con centro en . Normalmente, la ecuación general de esta cónica se pasará a la forma reducida mediante una traslación y un giro. En este caso, debemos hallar las raíces de la ecuación: $r^2 - I_1 \cdot r + I_2 = 0$, esto es: $r^2 - 1/4 = 0$, de donde: $\alpha = 1/2$; $\beta = -1/2$; y la correspondiente ecuación reducida, en la que no existen términos cuadráticos, quedará así: $\alpha \cdot y^2 + \beta \cdot x^2 = -\dfrac{I_3}{I_2}$; o sea: $y^2 - x^2 = 4$. Las coordenadas de su centro vendrán dadas por:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} ;\text{ o sea: } x = 0 \text{ e } y = 2, \Rightarrow \text{ punto } (0,2).$$

La representación gráfica de esta solución particular, que es evidentemente una hipérbola, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 2

Resuelva la EDO: $x \cdot dx - y^2 dy = 0$.

Solución:

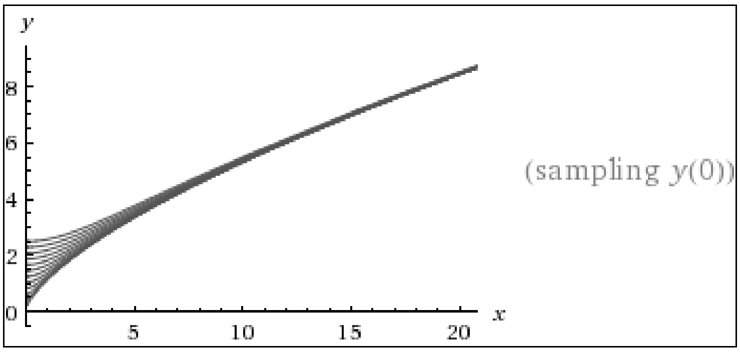
Para esta ecuación diferencial, A(x) = x, y B(y) = $-y^2$. Substituyendo estos valores en la ecuación: $\int A(x)dx + \int B(y)dy = c$, tenemos que:

$$\int x \cdot dx + \int (-y)^2 dy = c$$

la cual, después de aplicar las operaciones de integración indicadas, se convierte en $x^2/2 - y^3/3 = c$. Resolviendo explícitamente para *y*, obtenemos la solución general como:

$$\boxed{y = \left(\frac{3}{2}x^2 + k\right)^{1/3}}; \text{ habiendo hecho: } k = -3c$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 3

Resuelva la EDO: $y' = y^2x^3$.

Solución:

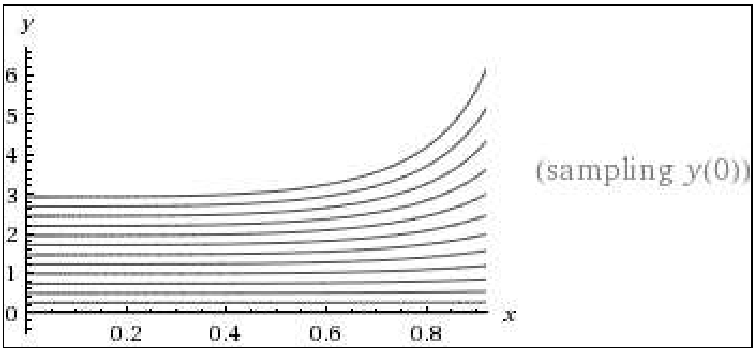
Primero volvemos a escribir esta ecuación en la forma diferencial (véase capítulo 3): $x^3dx - (1/y^2)dy = 0$. Luego $A(x) = x^3$, y $B(y) = -1/y^2$. Substituyendo estos valores en la ecuación: $\int A(x)dx + \int B(y)dy = c$, tenemos:

$$\int x^3 dx + \int (-1/y^2)dy = c$$

o bien realizando las operaciones de integración anteriormente indicadas, $x^4/4 + 1/y = c$. Resolviendo explícitamente para *y*, obtenemos la solución general así:

$\boxed{y = \dfrac{-4}{x^4 + k}}$; donde se ha hecho: k = - 4c.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 4

Resuelva la EDO: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 2}{y}$.

Solución:

Esta ecuación se puede volver a escribir en la forma diferencial: $(x^2+2)dx - y\cdot dy = 0$, la cual es separable con $A(x) = x^2 + 2$, y $B(y) = -y$. Su solución es: $\int A(x)dx + \int B(y)dy = c$, por lo que tenemos:

$$\int (x^2 + 2)dx - \int y\cdot dy = c \text{ o bien: } \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{2}y^2 = c\,.$$

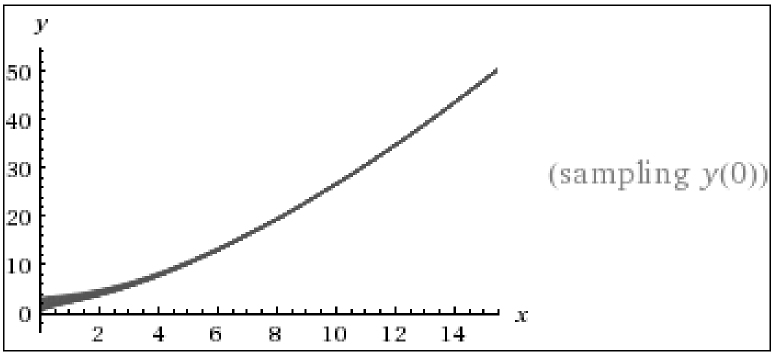
Resolviendo para *y*, obtenemos la solución buscada como:

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 4x + k$$

con k = -2c. Resolviendo explícitamente para *y*, obtenemos las dos posibles soluciones del problema planteado:

$$\boxed{y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4x + k} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4x + k}}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 5

Resuelva la EDO: $y' = \frac{x+1}{y^4+1}$.

Solución:

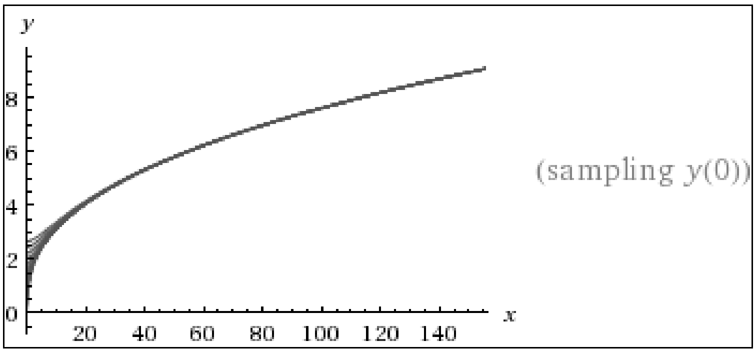
Esta ecuación, en forma diferencial, es: $(x + 1)dx + (-y^4 - 1)dy = 0$, la cual es de variables separables. Su solución es:

$$\int (x+1)\cdot dx + \int (-y^4 - 1)\cdot dy = c$$

o bien, llevando a cabo las pertinentes operaciones de integración:

$$\boxed{\frac{x^2}{2} + x - \frac{y^5}{5} - y = c}.$$

Puesto que es algebraicamente imposible resolver esta ecuación de manera explícita para *y*, la solución debe quedar en su presente forma implícita. La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 6

Resuelva la EDO: $dy = 2t(y^2 + 9)dt$.

Solución:

Esta ecuación se puede volver a escribir como: $\frac{dy}{y^2+9} - 2t{\cdot}dt = 0$

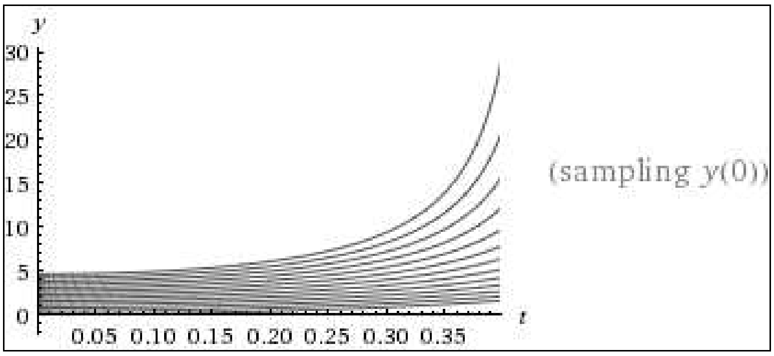
la cual es separable en las variables *y* y *t*. Su solución es: $\int \frac{dy}{y^2+9} - \int 2t{\cdot}dt = c$,

o bien, realizando las integrales dadas, se obtendrá que: $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{y}{3}\right) - t^2 = c$.

Resolviendo para y, obtenemos:

$$\boxed{\arctan\left(\frac{y}{3}\right) = 3(t^2 + c)\,; \quad \frac{y}{3} = \tan(3t^2 + 3c)\,; \quad y = 3\cdot\tan(3t^2 + k)}$$

, habiendo hecho: k = 3c. La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 7

Resuelva la EDO: $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2$.

Solución:

Esta ecuación se puede reescribir así en forma diferencial:

$$\frac{dx}{x^3 - 2x + 2} - dt = 0$$

la cual es separable en las variables x y t. Su solución es:

$$\int \frac{dx}{x^3 - 2x + 2} - \int dt = c$$

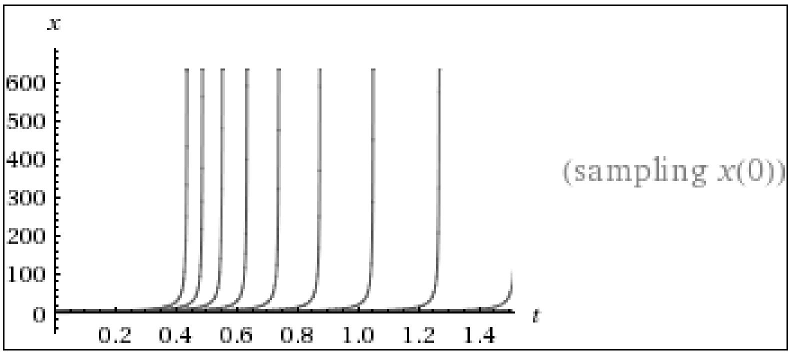
Calculando la primera integral al completar el cuadrado, obtenemos:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} - \int dt = c$$, o bien: arctan(x – 1) – t = c.

Resolviendo para x como función de t, obtenemos:

arctan(x – 1) = t + c ;   x – 1 = tan(t + c) ;

o bien la solución explícita: $\boxed{x = 1 + \tan(t + c)}$. La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 8

Resuelva la EDO: $x \cdot \cos x \cdot dx + (1 - 6y^5) \cdot dy = 0$; con: $y(\pi) = 0$.

Solución:

Aquí, $x_0 = \pi$, $y_0 = 0$, $A(x) = x \cdot \cos x$, y $B(y) = 1 - 6y^5$. Substituyendo estos valores en la ecuación $\int_{x_0}^{x} A(x)dx + \int_{y_0}^{y} B(y)dy = 0$, obtenemos:

$$\int_{\pi}^{x} x \cos x \cdot dx + \int_{0}^{y} (1-6y^5)dy = 0$$

Calculando estas integrales (la primera mediante integración por partes), encontramos que:

$$x \cdot \operatorname{sen} x\Big|_{\pi}^{x} + \cos x\Big|_{\pi}^{x} + (y-y^6)\Big|_{0}^{y} = 0\,,$$

o bien: $\boxed{x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x + 1 = y^6 - y}$.

Dado que no podemos resolver esta ecuación explícitamente para *y*, debemos conformarnos con la solución ya obtenida en su presente forma implícita.

Ejemplo 9

Solve the ordinary differential equation: $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$.

Solution:

Here: $xy^2(1 + x^2)\cdot dy + (1 + y^3)\cdot dx = 0$, or: $\dfrac{y^2}{1+y^3}dy + \dfrac{1}{x(1+x^2)} = 0$, and the variables are separated. Then:

$$\frac{y^2 dy}{1+y^3} + \frac{dx}{x} - \frac{x \cdot dx}{1+x^2} = 0, \text{and integrating this functions:}$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|1+y^3\right| + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = c\,, \text{and also:}$$

$$2\ln\left|1+y^3\right| + 6\ln|x| - 3\ln(1+x^2) = 6c\,,$$

$$\ln\frac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = 6c, \quad \text{and} \quad \frac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = e^{6c} = K.$$

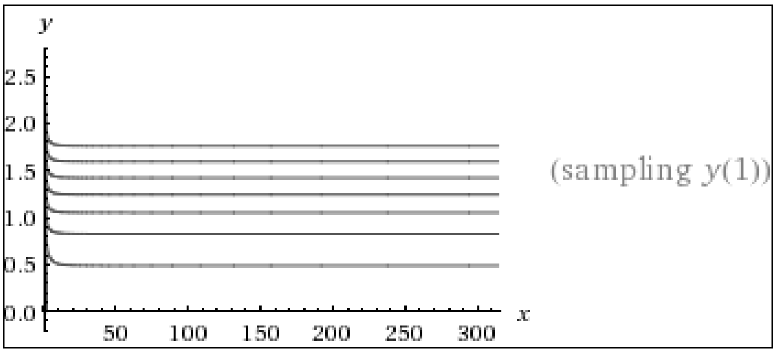
Then:

$$(1+y^3)^2 = \frac{K\cdot(1+x^2)^3}{x^6}; \quad 1+y^3 = \frac{K_1\cdot\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3};$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{K_1\cdot\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3} - 1} = \sqrt[3]{\frac{K_1\cdot\sqrt{(1+x^2)^3} - x^3}{x^3}};$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x}\left(\sqrt[3]{K_1\cdot\sqrt{(1+x^2)^3} - x^3}\right)} \to \text{G.I.}$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 10

Solve the ordinary differential equation: $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.

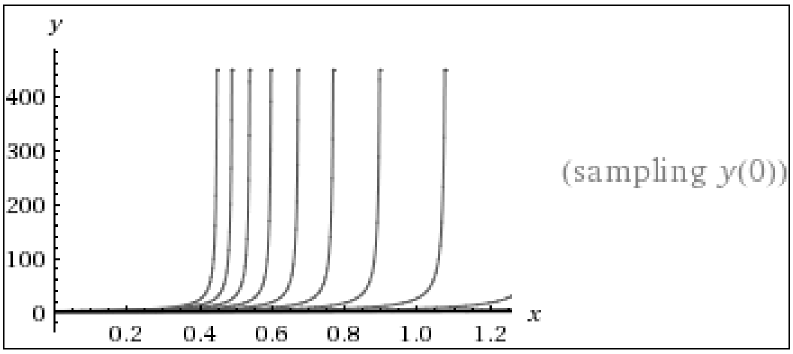
Solution:

Here $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$, and the variables are separated.

Then, arc tan y = arc tan x + arc tan C, and the general integral is:

$$\boxed{y = \tan(\arctan x + \arctan C) = \frac{x+C}{1-C\cdot x} = \tan(\arctan x + C')}$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 11

Solve the ordinary differential equation: $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}$.

Solution:

$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{\sin^2 x}$, and the variables are separated.

$\sec^2 y \cdot dy = \text{cosec}^2 x \cdot dx$, and tg y = -cotg x + C, and the general solution is:

$$\boxed{y = \text{arc tg } (C - \text{cotg } x)}$$

Ejemplo 12

Resolver la EDO: $x + y \cdot y' = 0$.

Solución:

Cuando uno se encuentra con una ecuación diferencial, lo primero que debe hacer es clasificarla. El primer tipo de ecuación que se ensaya es el de variables separadas. Para saber si una ecuación es de este tipo, una buena regla práctica es la siguiente:

Substituimos y' por $\frac{dy}{dx}$; en nuestro caso, nos queda $x + y\frac{dy}{dx} = 0$.

Ahora operamos como si $\frac{dy}{dx}$ fuera un cociente de dos magnitudes, y con la intención de dejar en un miembro todo lo que tenga y, y en el otro todo lo que tenga x. Podemos proceder, en nuestro ejemplo, de la forma siguiente: $x = -y\frac{dy}{dx}$, de donde xdx = - ydy.

Como hemos puesto en un miembro todo lo que tiene x y en el otro todo lo que tiene y, la ecuación es, pues, de variables separadas.

Ahora, para dar su solución, nos limitamos a integrar en ambos miembros mediante una cuadratura, así:

$\int xdx = \int -ydy$, resultando $\frac{x^2}{2} + C = -\frac{y^2}{2}$, que es la solución general implícita de la ecuación planteada.

Realmente, de cada integral sale una constante de integración, pero en la práctica solo se pone la constante a uno de los lados (el que se quiera). Podemos escribir la solución de una forma más reducida. Operamos para ello así:

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$, $y^2 + x^2 = 2C$. Si ahora hacemos k = 2C, escribimos al final la solución en forma explícita:

$$y^2 + x^2 = k; \qquad \boxed{y = \pm\sqrt{k - x^2}}.$$

Ejemplo 13

Resolver la EDO: $y' = x^2y^2$.

Solución:

Como en el ejercicio precedente, en primer lugar, comprobamos de qué clase de ecuación diferencial se trata. Volvemos a probar si es del tipo de variables separadas. Substituyendo y′ por $\frac{dy}{dx}$ nos queda:

$\frac{dy}{dx} = x^2y^2$, de donde $\frac{1}{y^2}dy = x^2dx$. Al tener en un miembro todo lo que tiene x, y en el otro todo lo que tiene y, la ecuación es de variables separadas.

Integrando en ambos miembros obtenemos $\int \frac{1}{y^2}dy = \int x^2dx$, resultando $-\frac{1}{y} = \frac{x^3}{3} + C$, que es la solución general de la ecuación.

También podemos escribirla como $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{y} = -C$.

Si k = -C, escribimos al final $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{y} = k$; $\boxed{y = \frac{3}{k' - x^3}}$, con: k’ = 3k.

Ejemplo 14

Resolver la EDO: y’ = x·e^4.

Solución:

Comprobamos, como siempre, que es una ecuación de variables separadas, substituyendo y’ por $\frac{dy}{dx}$, con lo que:

$\frac{dy}{dx} = x{\cdot}e^y$, de donde, despejando $e^{-y}dy = x\cdot dx$.

Ahora, si integramos en ambos miembros mediante una cuadratura:

$\int e^{-y}dy = \int x{\cdot}dx$, y resulta $C - e^{-y} = \frac{x^2}{2}$, que es la solución general de la ecuación. Podemos escribirla también de la forma: $e^{-y} = -\frac{x^2}{2} + C$.

Tomando logaritmos neperianos queda: $\boxed{y = -\ln\left(-\frac{x^2}{2} + C\right)}$.

Hemos de considerar que C no puede ser cualquiera, tiene que ser C>0 (siempre existirán valores de x para los cuales $-\frac{x^2}{2} + C > 0)$.

Ejemplo 15

Resolver la EDO: $y' = \frac{1}{x+y}$.

Solución:

Esta ecuación no es de variables separadas, pero puede reducirse a una de ellas mediante un cambio de variable. Nuestra ecuación es de la forma:

y' = f (ax + by + c), siendo a = b = 1 y c = 0, y f la función que asigna a cada número real su inverso $f: t \to \frac{1}{t}$. El cambio de variable consiste en definir una nueva variable z, también dependiente de x, de manera que: z = ax + by + c. Precisamente, al final del presente capítulo (epígrafe 11) tendremos ocasión de contemplar diversos casos de este tipo.

Entonces, según esto, el cambio de variable que debemos realizar es: z = x + y. Derivando respecto de x resulta que:

z' = 1+ y', de donde y' = z' – 1 y $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{z}$.

Substituimos en la ecuación y nos queda que $z' - 1 = \frac{1}{z}$.

Si la escribimos de la forma $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + 1$, o bien: $\frac{dz}{dx} = \frac{1+z}{z}$, podemos transformarla en: $\frac{z}{1+z} dz = dx$.

De este modo, ya tenemos una ecuación de variables separadas que resolveremos, como en los ejercicios anteriores, integrando en ambos miembros mediante una cuadratura. Esto es:

$\int \frac{z}{1+z} dz = \int dx$. de donde resulta que: $z - \ln|1 + z| = x + C$.

Ahora solo nos falta deshacer el cambio de variables, recordemos que era del tipo: z = x + y. Luego al final escribimos: $x + y - \ln|x + y + 1| = x + C$,

esto es, $\boxed{y = \ln|x + y + 1| + C}$, que es la solución general de la ecuación.

Ejemplo 16

Resolver la EDO: y' = 3x – 2y + 1.

Solución:

Se observa fácilmente que no es una ecuación de variables separadas, pero sí reducible a una de ellas mediante un cambio de variable adecuado.

Como ya vimos en el ejercicio anterior, se define una nueva variable z, dependiente de x. Hacemos: z = 3x – 2y + 1.

Derivando respecto de x y despejando luego la y' resulta que:

z' = 3 – 2y', de donde $y' = \frac{3 - z'}{2}$.

Substituyendo en la ecuación, nos quedará una ecuación de variables separadas, que ya sabemos resolver. Es decir,

$$\frac{3 - z'}{2} = z, \qquad z' = 3 - 2z, \qquad \frac{dz}{dx} = 3 - 2z.$$

Integramos ambos miembros de esta forma:

$\int \frac{dz}{3 - 2z} = \int dx$, de donde resulta que: $-\frac{1}{2}\ln|3 - 2z| = x + C$.

Volviendo a deshacer el cambio, z = 3x-2y+1 obtenemos:

$$-\frac{1}{2}\ln|1 - 6x + 4y| = x + C.$$

Podemos escribir la solución de una manera más reducida, haciendo:

$\ln|1 - 6x + 4y|^{-1/2} = x + C$

$|1 - 6x + 4y|^{-1/2} = e^{x+C}$

Si $e^c = k$, escribimos al final:

$|1 - 6x + 4y|^{-1/2} = ke^x$, y despejando la y: $\boxed{y = \frac{1}{k' \cdot e^{2x}} - \frac{1}{4} + \frac{3x}{2}}$, que es la integral general en forma explícita en que se ha hecho: $k' = 4k^2$.

Ejemplo 17

Resolver la EDO: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$; donde y(1) = 2.

Solución:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow y \cdot dy + x \cdot dx = 0$ (separando variables),

$\Rightarrow \quad \int y \cdot dy + \int x \cdot dx = c_1$ (integrando cada término de la ecuación),

$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c_1 \Leftrightarrow y^2 + x^2 = 2c_1 \Leftrightarrow y^2 + x^2 = c;\ y = \pm\sqrt{c - x^2} \quad (1)$

, habiendo substituido $c = 2c_1$. Substituyendo ahora: $x = 1$ e $y = 2$ en (1), da:
$2^2 + 1^2 = c \Leftrightarrow c = 5$ (2); $y^2 + x^2 = 5$ {(2) en (1)};

y resulta la integral particular pedida: $\boxed{y = \pm\sqrt{5 - x^2}}$;

Ejemplo 18

Resolver la EDO: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x};\ \text{con}: y(1) = 3$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \qquad \text{(separando variables)},$$

$$\Rightarrow \qquad \int\frac{dy}{y} + \int\frac{dx}{x} = c_1 \qquad \text{(integrando cada término de la ecuación)},$$

$$\Rightarrow \qquad \ln|y| + \ln|x| = c_1 \Leftrightarrow \ln|xy| = \ln c \Leftrightarrow xy = c \qquad \{\ln c = c_1\} \qquad (1)$$

Substituyendo: $x = 1$ y $y = 3$ en (1), da
$(1)(3) = c \Leftrightarrow c = 3$ (2);
$x\cdot y = 3$ {(2) en (1)}; y resulta la I.P.: $\boxed{y = \frac{3}{x}}$;

Ejemplo 19

Resolver la EDO: $3x(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 2)dy = 0$.

Solución:

$3x(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 2)dy = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{x^2 + 2}dx + \frac{y}{y^2 + 1}dy = 0$ (separando variables),

$\int\frac{y}{y^2+1}dy + \int\frac{x}{x^2+2}dx = c_1 \to \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \frac{3}{2}\ln(x^2+2) = c_1;\ \ln(y^2+1) + \ln(x^2+2)^3 =$
$2c_1 = c_2;\ (y^2+1)(x^2+2)^3 = c^{c_2} = c$; de donde se obtiene la I.G. buscada:

$$\boxed{y = \pm\sqrt{\frac{c}{(x^2+2)^3} - 1}}$$

Ejemplo 20

Resolver la EDO: $2y\cdot dx + e^{-3x}dy = 0$.

Solución:

$2y\cdot dx + e^{-3x}dy = 0 \Leftrightarrow 2e^{3x}dx + \dfrac{dy}{y} = 0$ (separando variables),

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int \frac{dy}{y} + \int 2e^{3x}dx = c_1$ (integrando cada término de la ecuación),

$\Rightarrow \quad \ln|y| + \dfrac{2}{3}e^{3x} = c_1 \Leftrightarrow 3\ln|y| + 2e^{3x} = 3c_1 \Leftrightarrow 3\ln|y| + 2e^{3x} = c$ $(c = 3c_1)$, de

donde se obtiene la I.G.: $\boxed{y = e^{\frac{c-2\cdot e^{3x}}{3}}}$.

Ejemplo 21

Resolver la EDO: $y' = \dfrac{x + xy^2}{4y}$; con: $y(1) = 0$.

Solución:

$$y' = \frac{x + xy^2}{4y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x(1+y^2)}{4y} \Leftrightarrow \frac{4y}{1+y^2}dy - xdx = 0 \quad \text{(separando variables)},$$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int \frac{4y}{1+y^2}dy - \int xdx = c_1$ (integrando cada término de la ecuación),

$\Rightarrow \quad \displaystyle 2\int \frac{2y}{1+y^2}dy - \int xdx = c_1 \Leftrightarrow 2\ln(1+y^2) - \frac{1}{2}x^2 = c_1 \Leftrightarrow 4\ln(1+y^2) - x^2 = 2c_1,$

$\Rightarrow \quad 4\ln(1 + y^2) - x^2 = c \;\; \{c = 2c_1\}$ (1). Las condiciones iniciales dadas son: $x = 1$, $y = 0$ (2). Substituyendo (2) en (1), se tiene:

$4\ln(1) - 1 = c \Leftrightarrow 4(0) - 1 = c \Leftrightarrow c = -1$ (3)

$4\ln(1 + y^2) - x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 4\ln(1 + y^2) = 1$ {(3) en (1)};

de donde se obtiene la I.P. buscada:

$$\boxed{y = \pm\sqrt{e^{\frac{x^2-1}{4}} - 1}}$$

Ejemplo 22

Resolver la EDO: $r\dfrac{d\varphi}{dr} = \varphi^2 + 1$.

Solución:

$r\dfrac{d\varphi}{dr} = \varphi^2 + 1 \Leftrightarrow \dfrac{d\varphi}{\varphi^2 + 1} - \dfrac{dr}{r} = 0$ (separando variables),

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int \frac{d\varphi}{\varphi^2 + 1} - \int \frac{dr}{r} = \ln c$ (integrando cada término de la ecuación);

$\arctan \varphi - \ln |r| = \ln c$; de donde se tiene la I.G.: $\boxed{\varphi = \text{tg}\,(\ln c\cdot r)}$

Ejemplo 23

Resolver la EDO: $\text{sen}^2 y\cdot dx + \cos^2 x\cdot dy = 0$; con: $y(\pi/4) = \pi/4$.

Solución:

$\text{sen}^2 y\cdot dx + \cos^2 x\cdot dy = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dx}{\cos^2 x} + \dfrac{dy}{\text{sen}^2 y} = 0 \Leftrightarrow \sec^2 x\cdot dx + \text{cosec}^2 y\cdot dy = 0$ (separando variables),

$\Rightarrow \int \sec^2 x\cdot dx + \int \text{cosec}^2 y\cdot dy = c \Leftrightarrow \tan x - \cot y = c$ (integrando cada término de la ecuación) (1), $x = \pi/4$, $y = \pi/4$ (2)

$\text{tg}(\pi/4) - \text{cotg}(\pi/4) = c \Leftrightarrow 1 - 1 = c \Leftrightarrow c = 0$ {(2) en (1)} (3)

Al substituir (3) en (1), se obtiene finalmente la I.P. buscada:

$\text{tg}\, x - \text{cotg}\, y = 0 \Leftrightarrow \text{tg}\, x = \text{cotg}\, y \Leftrightarrow \text{tg}\, x = \dfrac{1}{\tan y} \Leftrightarrow (\text{tg}\, x)\cdot(\text{tg}\, y) = 1$;

$\text{tg}\, y = \dfrac{1}{\text{tg}\, x} = \text{cotg}\, x$; $y = \boxed{\text{arc cotg}\, x}$

Ejemplo 24

Resolver la EDO: $x\sqrt{1+y^2}dx = y\sqrt{1+x^2}dy$.

Solución:

$x\sqrt{1+y^2}dx = y\sqrt{1+x^2}dy \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx - \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0$, (separando variables),

$\Rightarrow \int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx - \int \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = c_1$ (integrando cada término de la ecuación),

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{2ydy}{\sqrt{1+y^2}} = c_1 \Leftrightarrow \int \frac{2xdx}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{2ydy}{\sqrt{1+y^2}} = 2c_1 \quad (1)$$

Sea ahora:

$$\left.\begin{array}{l} u = 1 + x^2 \Rightarrow du = 2x\cdot dx \\ v = 1 + y^2 \Rightarrow dv = 2y\cdot dy \end{array}\right\} \quad (2)$$

Al substituir (2) en (1) nos quedan dos integrales de evaluación directa, esto es:

$\int \frac{du}{\sqrt{u}} - \int \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2c_1 \Leftrightarrow \int u^{-1/2}du - \int v^{-1/2}dv = c_2 \Leftrightarrow 2u^{1/2} - 2v^{1/2} = c_2$, ($c_2 = 2c_1$) (3),

$\Rightarrow \quad 2(1+x^2)^{1/2} - 2(1+y^2)^{1/2} = c_2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2} = \frac{1}{2}c_2$ {(2) en (3)};

$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2} = c$, (con $c = c_2/2$), de donde se obtiene la I.G.:

$$\boxed{y = \sqrt{x^2 + c^2 - 2c\sqrt{1+x^2}}}\ .$$

Ejemplo 25

Resolver la EDO: $2y\cdot\cos x\cdot dx + 3\text{sen } x\cdot dy = 0$; con: $y(\pi/2) = 2$.

Solución:

$2y\cdot\cos x\cdot dx + 3\text{sen } x\cdot dy = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos x}{3\text{sen } x}dx + \frac{dy}{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\cot x\cdot dx + \frac{dy}{y} = 0$

(separando variables),

$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}\int \cot x dx + \int \frac{dy}{y} = c_1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\ln|\text{sen } x| + \ln|y| = c_1$ (integrando cada término de la ecuación),

$\Rightarrow \quad 2\ln|\text{sen } x| + 3\ln|y| = 3c_1 \Leftrightarrow \ln|\text{sen}^2 x| + \ln|y^3| = 3c_1 \Leftrightarrow \ln|y^3\text{sen}^2 x| = c_2$,

$\Rightarrow \quad y^3\text{sen}^2 x = \exp(c_2) \Leftrightarrow y^3\text{sen}^2 x = c$ (1).

$\Rightarrow$ La condición inicial es que cuando: $x = \pi/2$ entonces $y = 2$, (2), luego:

$2^3\text{sen}^2(\pi/2) = c \Leftrightarrow 8(1^2) = c \Leftrightarrow c = 8$ (3)

Substituyendo (3) en (1), se obtiene la solución particular buscada:

$y^3\text{sen}^2 x = 8$, o sea: $\boxed{y = \sqrt[3]{\frac{8}{\text{sen}^2 x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{\text{sen}^2 x}}}$

Ejemplo 26

Resolver la EDO: $y' = 8xy + 3y$.

Solución:

$y' = 8xy + 3y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = (8x + 3)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = (8x + 3)dx$; (separando variables),

$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int (8x+3)dx \Leftrightarrow \ln|y| = 4x^2 + 3x + c_1$ (integrando cada término de la ecuación),

$\Rightarrow$ $\ln|y| = c_1 + 4x^2 + 3x \Leftrightarrow y = \exp(4x^2 + 3x + c_1) \Leftrightarrow y = \exp(c_1)\, e^{4x^2+3x}$;

(haciendo: $e^{c_1} = c$); y la I.G. buscada será: $\boxed{y = c{\cdot}e^{4x^2+3x}}$.

Ejemplo 27

Resolver la EDO: $\frac{dI}{dt} + 5I = 10;\ con: I(0) = 0$.

Solución:

$$\frac{dI}{dt} + 5I = 10 \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} = 10 - 5I \Leftrightarrow \frac{dI}{10-5I} = dt$$ (separando variables),

$\Rightarrow$ $\int \frac{dI}{10-5I} = \int dt \Leftrightarrow -\frac{1}{5}\ln|10-5I| = t + c_1$ (integrando cada término de la ecuación),

$\Rightarrow$ $\ln|10 - 5I| = -5t - 5c_1 \Leftrightarrow 10 - 5I =$

$$= e^{-5t-5c_1} \Leftrightarrow -5I = e^{-5c_1}e^{-5t} - 10 \Leftrightarrow I = -\frac{e^{-5c_1}}{5}e^{-5t} + 2,$$

$\Rightarrow$ $I = c{\cdot}e^{-5t} + 2 \quad \left\{ c = -\frac{e^{-5c_1}}{5} \right\}$ (1) . Las condiciones iniciales del problema son: si x = 0, I = 0 (2). Al substituir (2) en (1), se halla el valor de la constante c = -2 (3). Por último, al substituir (3) en (1), se obtiene la solución particular siguiente:

$$I = -2e^{-5t} + 2 \Leftrightarrow I = 2(-e^{-5t} + 1) \Leftrightarrow \boxed{I = 2(1 - e^{-5t})}.$$

Ejemplo 28

Resolver la EDO: $y{\cdot}dx + (x^3y^2 + x^3){\cdot}dy = 0$.

Solución:

$$y{\cdot}dx + (x^3y^2 + x^3)dy = 0 \Leftrightarrow y{\cdot}dx + x^3(y^2 + 1){\cdot}dy = 0,$$

$\Rightarrow$ $\frac{dx}{x^3} + \frac{(y^2+1)}{y}dy = 0$ (separando variables),

$\Rightarrow$ $\int \frac{dx}{x^3} + \int \frac{y^2+1}{y}dy = c_1 \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x^3} + \int\left(y + \frac{1}{y}\right)dy = c_1$ (integrando cada término de la ecuación),

$\Rightarrow$ $-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}y^2 + \ln|y| = c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - y^2 - 2\ln|y| = -2c_1 \Leftrightarrow x^{-2} - y^2 - \ln y^2 = c.$

Ejemplo 29

La pendiente de una familia de curvas en cualquier punto (x,y) está dada por la EDO: $\frac{dy}{dx} = \frac{3x + xy^2}{2y + x^2y}$. Hallar la ecuación del miembro de la familia o haz de curvas que pase por el punto (2, 1).

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x + xy^2}{2y + x^2y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(3 + y^2)x}{(2 + x^2)y} \Leftrightarrow \frac{y \cdot dy}{3 + y^2} + \frac{x \cdot dx}{2 + x^2} = 0$$ (separando variables)

$$\Rightarrow \quad \int \frac{ydy}{3 + y^2} + \int \frac{xdx}{2 + x^2} = c_1 \Leftrightarrow \int \frac{2ydy}{3 + y^2} + \int \frac{2xdx}{2 + x^2} = 2c_1$$ (integrando cada miembro mediante una cuadratura). Ahora:

$\ln(3 + y^2) + \ln(2 + x^2) = 2c_1 \Leftrightarrow \ln(3 + y^2) + \ln(2 + x^2) = c_2 \Leftrightarrow$
$\ln(3 + y^2)(2 + x^2) = c_2$, $(3 + y^2)(2 + x^2) = \exp(c_2) \Leftrightarrow (3 + y^2)(2 + x^2) = c$ (1)

Las condiciones iniciales dadas son las siguientes:

$x = 2$, $y = 1$ (2). De tal modo que, al substituir (2) en (1), se obtiene el valor de la constante: $(3 + 1^2)(2 + 2^2) = c \Leftrightarrow c = 4 \cdot 6 = 24$. (3)

Finalmente, al substituir (3) en (1), se obtiene el miembro de la familia de curvas buscado, a saber:

$$(3 + y^2)(2 + x^2) = 24 \; ; \; \boxed{y = \pm\sqrt{\frac{24}{2 + x^2} - 3}}$$

Ejemplo 30

Resolver la EDO: $\frac{dy}{dx} = \frac{(y-1)(x-2)(y+3)}{(x-1)(y-2)(x+3)}$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-1)(x-2)(y+3)}{(x-1)(y-2)(x+3)} \Leftrightarrow \frac{(y-2)dy}{(y-1)(y+3)} - \frac{(x-2)dx}{(x-1)(x+3)} = 0$$ (separando variables),

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(y-2)dy}{(y-1)(y+3)} - \int \frac{(x-2)dx}{(x-1)(x+3)} = c_1$$ (integrando cada término de la ecuación) (1)

Para hallar las integrales en (1), vamos a expresar los integrandos o funciones subintegrales como una suma de fracciones parciales, así:

$$\frac{y-2}{(y-1)(y+3)} \equiv \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+3} \Leftrightarrow y-2 \equiv A(y+3)+B(y-1),$$

$\Rightarrow$ $y - 2 \equiv Ay + 3A + By - B \Leftrightarrow y - 2 \equiv (A + B)y + (3A - B),$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ 3A-B=-2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 4A=-1 \Leftrightarrow A=-\frac{1}{4}; B=\frac{5}{4};$$

$$\frac{y-2}{(y-1)(y+3)} \equiv \frac{1}{4(y-1)} + \frac{5}{4(y+3)} \quad (2), \qquad \frac{x-2}{(x-1)(x+3)} \equiv -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{5}{4(x+3)} \quad (3)$$

Substituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$\int\left(-\frac{1}{4(y-1)} + \frac{5}{4(y+3)}\right)dy + \int\left(\frac{1}{4(x-1)} - \frac{5}{4(x+3)}\right)dx = c_1,$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{4}\ln|y-1| + \frac{5}{4}\ln|y+3| + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln|x+3| = c_1,$$

$$\Rightarrow \quad -\ln|y-1| + 5\ln|y+3| + \ln|x-1| - 5\ln|x+3| = 4c_1,$$

$$\Rightarrow \quad -\ln|y-1| + \ln\left|(y+3)^5\right| + \ln|x-1| - \ln\left|(x+3)^5\right| = c_2,$$

$$\Rightarrow \quad -\ln\left|(y-1)(x+3)^5\right| + \ln\left|(y+3)^5(x-1)\right| = c_2 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{(y+3)^5(x-1)}{(y-1)(x+3)^5}\right| = c_2,$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(y+3)^5(x-1)}{(y-1)(x+3)^5}\right| = \exp(c_2) \Leftrightarrow \frac{(y+3)^5(x-1)}{(y-1)(x+3)^5} = \pm\exp(c_2) \Leftrightarrow \frac{(y+3)^5(x-1)}{(y-1)(x+3)^5} = c,$$

Y en definitiva se tiene la I.G. expresada en forma implícita:

$$\boxed{(y+3)^5(x-1) = c(y-1)(x+3)^5}.$$

Ejemplo 31

Resolver la EDO: $x^3e^{2x^2+3y^2}dx = y^3e^{-x^2-2y^2}dy$.

Solución:

$$x^3e^{2x^2+3y^2}dx = y^3e^{-x^2-2y^2}dy \Leftrightarrow x^3e^{2x^2}e^{3y^2}dx = y^3e^{-x^2}e^{-2y^2}dy,$$

$\Rightarrow x^3e^{2x^2}e^{x^2}dx = y^3e^{-2y^2}e^{-3y^2}dy \Leftrightarrow x^3e^{3x^2}dx - y^3e^{-5y^2}dy = 0$,(separando variables),

$\Rightarrow \int x^3 \cdot e^{3x^2} \cdot dx - \int y^3 \cdot e^{-5y^2} \cdot dy = c_1$, (integrando cada término de la ecuación).

Para hallar las integrales anteriores, vamos a utilizar el método de integración por partes (previamente realizada una substitución adecuada), esto es:

$$\int x^3 \cdot e^{3x^2} \cdot dx = \frac{1}{6}\int x^2 \cdot e^{3x^2} \cdot 6x \cdot dx \qquad (1)$$

Sea ahora: $w = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{w}{3}; \;\Rightarrow\; dw = 6x \cdot dx \qquad (2)$

Substituyendo (2) en (1), nos da:

$\int x^3 \cdot e^{3x^2} \cdot dx = \frac{1}{6}\int \frac{w}{3} e^w \cdot dw = \frac{1}{18}\int w \cdot e^w \cdot dw$. Sea ahora:

$$\left.\begin{array}{l} u = w \Rightarrow du = dw \\ dv = e^w dw, \Rightarrow v = e^w \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{18}\int we^w dw = \frac{1}{18}\left(we^w - \int e^w dw\right) = \frac{1}{18}\left(we^w - e^w\right),$$

$$\Rightarrow \qquad \int x^3 \cdot e^{3x^2} \cdot dx = \frac{1}{18}\left(3x^2 \cdot e^{3x^2} - e^{3x^2}\right) = \frac{e^{3x^2}}{18}\left(3x^2 - 1\right) \qquad (3)$$

$$\int y^3 \cdot e^{-5y^2} \cdot dy = -\frac{1}{10}\int y^2 \cdot e^{-5y^2}\left(-10y \cdot dy\right) \qquad (4)$$

Sea ahora: $w = -5y^2 \Leftrightarrow y^2 = -\frac{w}{5}; \Rightarrow dw = -10y \cdot dy \qquad (5)$

Substituyendo (5) en (4), nos da:

$$\int y^3 \cdot e^{-5y^2} \cdot dy = -\frac{1}{10}\int -\frac{w}{5} e^w \cdot dw = \frac{1}{50}\int w \cdot e^w \cdot dw$$

Sea ahora: $\frac{1}{50}\int w \cdot e^w \cdot dw = \frac{1}{50}\left(w \cdot e^w - e^w\right)$,

$$\Rightarrow \qquad \int y^3 \cdot e^{-5y^3} \cdot dy = \frac{1}{50}\left(-5y^2 \cdot e^{-5y^2} - e^{-5y^2}\right) = -\frac{e^{-5y^2}}{50}\left(5y^2 + 1\right) \qquad (6)$$

Substituyendo (3) y (6) en la expresión inicial, se obtiene:

$$\frac{e^{3x^2}}{18}\left(3x^2 - 1\right) + \frac{e^{-5y^2}}{50}\left(5y^2 + 1\right) = c_1 \Leftrightarrow 25e^{3x^2}\left(3x^2 - 1\right) + 9e^{-5y^2}\left(5y^2 + 1\right) = 450c_1;$$

Y se deduce inmediatamente la I.G. buscada expresada en forma implícita:

$$\boxed{25\left(3x^2 - 1\right)e^{3x^2} + 9\left(5y^2 + 1\right)e^{-5y^2} = c.}$$

Ejemplo 32

Resolver la EDO: $\dfrac{dU}{ds}=\dfrac{U+1}{\sqrt{s}+\sqrt{sU}}$.

Solución:

$$\frac{dU}{ds}=\frac{U+1}{\sqrt{s}+\sqrt{sU}}=\frac{U+1}{\sqrt{s}+\sqrt{s}\,\sqrt{U}}=\frac{U+1}{\sqrt{s}\left(1+\sqrt{U}\right)}\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{U}}{U+1}dU-\frac{1}{\sqrt{s}}ds=0\,,$$

$\Rightarrow\qquad \dfrac{1+\sqrt{U}}{U+1}dU--s^{-1/2}ds=0\qquad$ (separando variables),

$\Rightarrow\qquad \displaystyle\int\frac{1+\sqrt{U}}{U+1}dU-\int s^{-1/2}ds=c_1\quad$ (integrando cada miembro de la ecuación),

$$\Rightarrow\qquad \int\frac{1}{U+1}dU+\int\frac{\sqrt{U}}{U+1}dU-\int s^{-1/2}ds=c\Leftrightarrow\ln|U+1|+\int\frac{\sqrt{U}}{U+1}dU-2s^{1/2}=c\qquad (1)$$

Hallamos la integral en (1), de la siguiente manera:

$\displaystyle\int\frac{\sqrt{U}}{U+1}dU=2\int\frac{U}{\left(\left(\sqrt{U}\right)^2+1\right)}\frac{dU}{2\sqrt{U}}\qquad$ (2). $\quad$ Sea ahora:

$v=\sqrt{U}\Leftrightarrow v^2=U,\Rightarrow dv=\dfrac{dU}{2\sqrt{U}}$ (3). Al substituir (3) en (2), da:

$$\int\frac{\sqrt{U}}{U+1}dU=2\int\frac{v^2}{v^2+1}dv=2\int\left(1-\frac{1}{v^2+1}\right)dv=2(v-\arctan v)=2\left(\sqrt{U}-\arctan\sqrt{U}\right),$$

$\Rightarrow\qquad \displaystyle\int\frac{\sqrt{U}}{U+1}dU=2\sqrt{U}-2\arctan\sqrt{U}\qquad$ (4)

Por último, al substituir (4) en (1), se obtiene la I.G. buscada en forma implícita:

$$\boxed{\ln|U+1|+2\sqrt{U}-2\arctan\sqrt{U}=2\sqrt{s}+c.}$$

Ejemplo 33

Muestre que la ecuación diferencial ordinaria: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4y^2-x^4}{4xy}$ no es separable pero se convierte en separable con el cambio de la variable dependiente de *y* a *v* de acuerdo a la transformación y = v·x. Use esto mismo para encontrar la solución de la ecuación original.

Solución:

La ecuación: $\frac{dy}{dx}=\frac{4y^2-x^4}{4xy}$ no es posible escribirla de la forma: $f(x)\cdot dx-g(y)\cdot dy = 0$, por lo que no resulta separable. De hecho, esta ecuación diferencial, que no es homogénea ni diferencial exacta (cuestiones que veremos en epígrafes posteriores) pero puede ser tratada empleando similares substituciones. En efecto, sea ahora: $y=v\cdot x \Leftrightarrow v=\frac{y}{x}, \Rightarrow dy=x\cdot dv+v\cdot dx$.

Substituyendo los valores anteriores en la ecuación original se obtiene una EDO de variables separables; veámoslo:

$$\frac{x\cdot dv+v\cdot dx}{dx}=\frac{4(v\cdot x)^2-x^4}{4x(v\cdot x)} \Leftrightarrow 4x^2\cdot v(x\cdot dv+v\cdot dx)=(4v^2\cdot x^2-x^4)dx,$$

$$\Rightarrow \quad 4x^3vdv+4x^2v^2dx=\left(4v^2x^2-x^4\right)dx \Leftrightarrow 4x^3vdv=\left(4v^2x^2-x^4\right)dx-4x^2v^2dx,$$

$$\Rightarrow \quad 4x^3v\cdot dv = (4v^2x^2 - x^4 - 4x^2v^2)dx \Leftrightarrow 4x^3v\cdot dv = -x^4dx \Leftrightarrow 4v\cdot dv = -x\cdot dx,$$

$$\Rightarrow \int 4vdv=-\int xdx+c_1 \Leftrightarrow 2v^2=-\frac{1}{2}x^2+c_1 \Leftrightarrow 4v^2=-x^2+2c_1 \Leftrightarrow 4v^2+x^2=c,$$

$$\Rightarrow \quad 4\left(\frac{y}{x}\right)^2+x^2=c \qquad \text{(teniendo en cuenta que: } v = y/x\text{)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4y^2}{x^2}+x^2=c \Leftrightarrow 4y^2+x^4=cx^2;\ 4y^2=x^2(c-x^2);\ \boxed{y=\pm\frac{x}{2}\sqrt{c-x^2}}$$

Ejemplo 34

Resolver la EDO: $y' + 2xy = 0$.

Solución:

$$y'+2xy=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}+2xy=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-2xy,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy=-2xdx \qquad \text{(separando variables)},$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{1}{y}dy=\int-2xdx \qquad \text{(aplicando la integral)},$$

$\Rightarrow$ $\ln|y| = -x^2 + C_1$ (integrando en ambos miembros. La constante de integración es arbitraria)

$\Rightarrow$ $y=e^{-x^2+c_1} \Leftrightarrow y=e^{c_1}\cdot e^{-x^2}$; y se obtiene la I.G.: $\boxed{y=C\cdot e^{-x^2}}$, habiendo hecho: $e^{c_1}=C$.

Ejemplo 35

Resolver la EDO: $y' + 2xy^2 = 0$.

Solución:

$$y'+2xy^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -2xy^{2,}$$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{y^2}dy = 2x{\cdot}dx$, (separando variables),

$\Rightarrow$ $\int \frac{1}{y^2}dy = \int -2x{\cdot}dx$ (aplicando la integral mediante una cuadratura),

$\Rightarrow$ $-\frac{1}{y} = -x^2 - C$ (integrando en ambos miembros. La constante de integración es arbitraria), $\Rightarrow \frac{1}{y} = x^2 + C$; y la I.G. buscada es: $\boxed{y = \frac{1}{x^2 + C}}$

Ejemplo 36

Resolver la EDO: $y' = y \cdot \text{sen}\, x$.

Solución:

$$y' = y \cdot \text{sen}\, x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y{\cdot}\text{sen}\, x, \Rightarrow \frac{1}{y}dy = \text{sen}\, x \cdot dx$$ (separando variables),

$\Rightarrow$ $\int \frac{1}{y}dy = \int \text{sen}\, x \cdot dx$ (aplicando la integral mediante una cuadratura),

$\Rightarrow$ $\ln|y| = -\cos x + c_1 \Leftrightarrow y = e^{-\cos x + c_1} = e^{-\cos x}{\cdot}e^{c_1}$ (integrando en ambos miembros. La constante de integración es arbitraria), por lo que:

$$\boxed{y = c \cdot e^{-\cos x}},$$

habiendo hecho: $e^{c_1} = c$.

Ejemplo 37

Resolver la EDO: $(1 + x)y' = 4y$.

Solución:

$$(1+x)y' = 4y \Leftrightarrow (1+x)\frac{dy}{dx} = 4y,$$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{4y}dy = \frac{1}{1+x}dx$ (separando variables),

$\Rightarrow \qquad \int \frac{1}{4y} dy = \int \frac{1}{1+x} dx$ (aplicando la integral mediante una cuadratura),

$\Rightarrow$ 4ln y = ln(1 + x) + C_1 (integrando en ambos miembros. La constante de integración es arbitraria),

$\Rightarrow \ln y^4 = \ln(1+x) + C_1 \Leftrightarrow y^4 = e^{\ln(1+x)+C_1} \Leftrightarrow y^4 = e^{C_1} \cdot e^{\ln(1+x)}$; haciendo: $e^{C_1} = C_2$, se tendrá que: $y^4 = C_2(1 + x)$; con la I.G.: $\boxed{y = C \times \sqrt[4]{1+x}}$, siendo: $C = (C_2)^{1/4}$

Ejemplo 38

Resolver la EDO: $2\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$.

Solución:

$$2\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}, \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$, (separando variables),

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$ (aplicando la integral mediante una cuadratura),

$\Rightarrow \text{sen}^{-1} y = \text{arc sen}\, y = \sqrt{x} + C$ (integrando en ambos miembros. La constante de integración es arbitraria), y se obtiene, en definitiva, la I.G. buscada, esto es:

$$\boxed{y = \text{sen}\left(\sqrt{x} + C\right)}.$$

Ejemplo 39

Resolver la EDO: $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{xy}$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 3\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}, \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} dy = 3\sqrt{x} dx$$ (separando variables),

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int 3\sqrt{x} dx$$ (aplicando la integral mediante una cuadratura),

$\Rightarrow 2\sqrt{y} = 2x^{3/2} + C'$ (integrando en ambos miembros. La constante de integración es arbitraria), $y^{1/2} = x^{3/2} + C$;

$$\boxed{y = (x^{3/2} + C)^2 = x^3 + 2c \cdot x^{3/2} + C^2 = x^3 + C_1 \cdot x^{3/2} + C_2}$$

Ejemplo 40

Resolver la EDO: $\frac{dy}{dx} = (64xy)^{1/3}$.

Solución:

$\frac{dy}{dx} = (64xy)^{1/3} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 4x^{1/3}y^{1/3}$ $,\Rightarrow$ $y^{-1/3}dy = 4x^{1/3}dx$ (separando variables),

$\Rightarrow \quad \int y^{-1/3}dy = \int 4x^{1/3}dx$ (aplicando la integral mediante una cuadratura),

$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}y^{2/3} = 4\cdot\frac{3}{4}x^{4/3} + c_1$ (integrando en ambos miembros);

$y^{2/3} - 2x^{4/3} = c$: explicita $\Leftrightarrow$ $\boxed{y = (2x^{4/3} + c)^{3/2}}$ $\rightarrow$ I.G.

Ejemplo 41

Resolver la EDO: $\frac{dy}{dx} = ye^x$; con : $y(0) = 2e$.

Solución:

$\frac{dy}{dx} = ye^x$, $\Rightarrow$ $y^{-1}dy = e^x dx$ (separando variables),

$\Rightarrow \quad \int y^{-1}dy = \int e^x dx$ (aplicando la integral mediante una cuadratura),

$\Rightarrow$ $\ln y = e^x + c_1$ (integrando en ambos miembros);

$y = \exp(e^x + c_1) \Leftrightarrow y = \exp(e^x)\cdot\exp(c_1) \Leftrightarrow y = c\cdot\exp(e^x)$ (1)

$y(0) = 2e$ (2) . Substituyendo (2) en (1), se obtiene que:

$2e = c\cdot\exp(e^0) \Leftrightarrow 2e = c\cdot\exp(1) \Leftrightarrow 2e = c\cdot e \Leftrightarrow c = 2$ (3)

De tal modo que: $\boxed{y = 2\cdot\exp(e^x)}$ {(3) en (1)}.

Ejemplo 42

Resolver la EDO: $\frac{dy}{dx} = 3x^2(y^2 + 1)$; con; $y(0) = 1$.

Solución:

$\frac{dy}{dx} = 3x^2(y^2 + 1)$, $\Rightarrow \frac{dy}{(y^2 + 1)} = 3x^2 dx$ (separando variables),

$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{(y^2 + 1)} = \int 3x^2 dx$ (aplicando la integral mediante una cuadratura),

$\Rightarrow$ $\tan^{-1}y = x^3 + c$ (integrando en ambos miembros mediante una cuadratura);

$y = \tan(x^3 + c)$ (1), $y(0) = 1$ (2). Substituyendo (2) en (1), se obtiene que:

$1 = \tan(0^3 + c) \Leftrightarrow \tan c = 1 \Leftrightarrow c = \pi/4$ (3). De tal modo que:

$\boxed{y = \tan(x^3 + \pi/4)}$ {(3) en (1)}

Ejemplo 43

Resolver la EDO: $2y\dfrac{dy}{dx} = x(x^2 - 16)^{-1/2};\ \text{con}: y(5) = 2$.

Solución:

$2y\dfrac{dy}{dx} = x(x^2 - 16)^{-1/2}$, $\Rightarrow$ $2y\cdot dy = x(x^2 - 16)^{-1/2}dx$ (separando variables),

$\Rightarrow$ $\int 2ydy = \int x(x^2 - 16)^{-1/2}dx$ (aplicando la integral mediante una cuadratura),

$\Rightarrow$ $y^2 = (x^2 - 16)^{1/2} + c$ (integrando en ambos miembros);

$y = \pm\sqrt{\sqrt{x^2 - 16} + c}$ (1)

$y(5) = 2$ (2). Substituyendo (2) en (1), se obtiene que:

$2 = \pm\sqrt{\sqrt{5^2 - 16} + c} \Leftrightarrow 2 = \pm\sqrt{3 + c} \Leftrightarrow 4 = 3 + c \Leftrightarrow c = 1$ (3)

De tal modo que se tiene la I.P.:

$\boxed{y = \pm\sqrt{\sqrt{x^2 - 16} + 1}}$ {(3) en (1)}.

Ejemplo 44

Resolver la EDO: $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3y - y; \text{con}: y(1) = -3$.

Solución:

$\dfrac{dy}{dx} = 4x^3y - y \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = y(4x^3 - 1)$, $\Rightarrow$ $y^{-1}dy = (4x^3 - 1)dx$ (separando variables),

$\Rightarrow$ $\int y^{-1}dy = \int (4x^3 - 1)dx$ (aplicando la integral mediante una cuadratura),

$\Rightarrow$ $\ln y = x^4 - x + c_1$ (integrando en ambos miembros);

$y = \exp(x^4 - x + c_1) \Leftrightarrow y = e^{c_1}\cdot\exp(x^4 - x) \Leftrightarrow y = c\cdot\exp(x^4 - x)$ (1)

Sucede que: $y(1) = -3$ (2) . Substituyendo (2) en (1), se obtiene que:

$-3 = c\cdot\exp(1^4 - 1) \Leftrightarrow -3 = c\cdot\exp(0) \Leftrightarrow c = -3$ (3)

De tal modo que: $\boxed{y = -3\exp(x^4 - x)}$ {(3) en (1)}

Ejemplo 45

Resolver la EDO: $(e^{-y} + 1)\cdot\text{sen } x\cdot dx = (1 + \cos x)\cdot dy$, con: $y(0) = 0$.

Solución:

La condición inicial dada es: $y(0) = 0$ (1), y separando las variables:

$$(e^{-y}+1)\text{sen } x\cdot dx = (1+\cos x)dy \Leftrightarrow \frac{1}{e^{-y}+1}dy = \frac{\text{sen } x}{1+\cos x}dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{e^{-y}+1}dy = \int \frac{\text{sen } x}{1+\cos x}dx,$$

$$\int \frac{e^y}{e^y+1}dy = -\int \frac{-\text{sen } x\cdot dx}{1+\cos x} \Leftrightarrow \ln(e^y+1) = \ln c - \ln(1+\cos x) \Leftrightarrow \ln(e^y+1) = \ln\left[\frac{c}{1+\cos x}\right],$$

$$\Rightarrow \quad e^y+1 = \frac{c}{1+\cos x} \Leftrightarrow e^y = \frac{c}{1+\cos x} - 1 \qquad (2)$$

Substituyendo la condición inicial (1) en la solución general (2), se obtiene que: $e^0 = \dfrac{c}{1+\cos 0} - 1 \Leftrightarrow 1 = \dfrac{c}{1+1} - 1 \Leftrightarrow 2 = \dfrac{c}{2} \Leftrightarrow c = 4 \qquad (3)$

Substituyendo (3) en (2), se obtiene la solución particular buscada:

$$e^y = \frac{4}{1+\cos x} - 1\ ; \qquad \boxed{y = \ln\left(\frac{4}{1+\cos x} - 1\right)}.$$

Ejemplo 46

Resolver la EDO: $(1 + x^4)dy + x(1 + 4y^2)dx = 0$, con: $y(1) = 0$.

Solución:

La condición inicial dada es: $y(1) = 0$ (1), y separando las variables:

$(1+x^4)dy + x(1+4y^2)dx = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(1+4y^2)}dy = -\dfrac{x}{1+x^4}dx$, que resolveremos, como siempre, mediante una cuadratura, así:

$$\int \frac{1}{1+(2y)^2}dy = -\int \frac{x}{1+x^4}dx;\ \frac{1}{2}\tan^{-1} 2y = \frac{1}{2}\tan^{-1} x^2 + \frac{1}{2}\tan^{-1} c \Leftrightarrow \tan^{-1} 2y = \tan^{-1} x^2 + \tan^{-1} c$$

$$2y = \tan(\tan^{1} x^2 + \tan^{-1} c) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\left[\frac{\tan(\tan^{-1} x^2) + \tan(\tan^{-1} c)}{1 - \tan(\tan^{-1} x^2)\times\tan(\tan^{-1} c)}\right] \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2+c}{1-x^2\times c}\right];$$

$y = \dfrac{x^2+c}{2(1-cx^2)}$ (2) . Substituyendo la condición inicial (1) en la solución general

(2), se obtiene: $0 = \frac{1+c}{2(1-c)} \Leftrightarrow c = -1$ (3). Substituyendo (3) en (2), se obtiene, en definitiva, la solución particular buscada siguiente:

$$\boxed{y = \frac{x^2 - 1}{2(x^2+1)}}$$

Ejemplo 47

Resolver la EDO: $y \cdot dy = 4x(y^2 + 1)^{1/2}dx$, con: $y(0) = 1$.

Solución:

La condición inicial dada es: $y(0) = 1$ (1), y separando variables:

$y \cdot dy = 4x(y^2 + 1)^{1/2}dx \Leftrightarrow (y^2 + 1)^{-1/2} y \cdot dy = 4x \cdot dx \quad \Rightarrow$ Integrando:

$$\frac{1}{2}\int (y^2+1)^{-1/2} 2y \cdot dy = \int 4x \cdot dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 2(y^2+1)^{1/2} = 2x^2 + c \Leftrightarrow (y^2+1)^{1/2} = 2x^2 + c,$$

$y^2 + 1 = (2x^2 + c)^2 \Leftrightarrow y^2 = (2x^2 + c)^2 - 1$ (2)

Substituyendo la condición inicial (1) en la solución general (2), se obtiene que: $1 = (c)^2 - 1 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2}$ (3)

Substituyendo, por último, (3) en (2), se obtiene la solución particular:

$$y^2 = \left(2x^2 \pm \sqrt{2}\right)^2 - 1 \ ; \quad \boxed{y = \pm\sqrt{(2x^2 \pm \sqrt{2})^2 - 1}}$$

Ejemplo 48

Resolver la EDO: $\frac{dy}{dt} + t \cdot y = y$, con $y(1) = 3$.

Solución:

La condición inicial dada es: $y(1) = 3$ (1), y separando variables:

$$\frac{dy}{dt} + ty = y \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = y + ty \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = y(1+t) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = (1+t) \cdot dt, \text{ e integrando:}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (1+t) \cdot dt \Leftrightarrow \ln y = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}c \Leftrightarrow 2\ln y = 2t + t^2 + c \Leftrightarrow \ln y^2 = 2t + t^2 + c \ ;$$

$y^2 = e^{2t+t^2+c} \Leftrightarrow y^2 = c_1 \cdot e^{2t+t^2}$ (2)

Substituyendo la condición inicial (1) en la solución general (2), se obtiene que: $9 = c_1 \cdot e^{2+1} \Leftrightarrow c_1 = 9 \cdot e^{-3}$ (3)

Substituyendo (3) en (2), se obtiene la solución particular:

$y^2 = 9e^{-3}e^{2t+t^2} \Leftrightarrow y^2 = 9e^{t^2+2t-3}$, de la que se deduce la I.P. buscada:

$$\boxed{y = \pm 3\sqrt{e^{t^2+2t-3}}}$$

Ejemplo 49

Integrar la ecuación diferencial: $y(3x^2 + 2x + 1)dx = dy$.

Solución:

Se trata de una ecuación diferencial de variables separables, ya que se puede escribir en la forma: $f(x)\cdot dx = g(y)\cdot dy$.

La integral general se obtiene mediante una única cuadratura, a saber:

$\int f(x)\cdot dx = \int g(y)\cdot dy$. En el presente problema, se puede escribir:

$(3x^2 + 2x + 1)dx = \frac{dy}{y}$, e integrando mediante una cuadratura, se tendrá que:

$\int (3x^2 + 2x + 1)dx = \int \frac{dy}{y}$, de donde: $x^3 + x^2 + x + C = \ln y$, o bien:

$y = e^{x^3+x^2+x+C} = \boxed{c\cdot e^{x^3+x^2+x}}$, que es la integral general buscada, habiendo hecho:

$c = e^C$.

2. ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Son de la forma: $y' = dy/dx = f(y/x)$.

Escrita la ecuación diferencial de primer orden en la forma:

$$M(x, y)\cdot dx + N(x, y)\cdot dy = 0$$

se dice que dicha ecuación es “homogénea” si las funciones M(x, y) y N(x, y) son homogéneas y del mismo grado *n* en *x* e *y*, esto es si:

$$M(tx, ty) = t^n \cdot M(x, y) \quad \text{y} \quad N(tx, ty) = t^n \cdot N(x, y)$$

Efectuando el cambio de variable: $y = t\cdot x$ ($t = y/x$), de donde:

$$\frac{dy}{dx} = t + \frac{dt}{dx}\cdot x$$

la ecuación anterior se convierte en: $M(x, tx) + N(x, tx)(t + \frac{dt}{dx}\cdot x) = 0$,

y simplificando por $x^n = x' = x$; $M(1, t) + N(1, t)(t + x\frac{dt}{dx}) = 0$, o bien:

$$M(1,t) + tN(1,t) = -N(1,t)x\,\frac{dt}{dx}$$, de donde:

$$\boxed{\frac{dx}{x} = \frac{-N(1,t)dt}{M(1,t) + tN(1,t)}}$$

, que es una ecuación de variables separables, cuya integración resulta conocida mediante una cuadratura.

De manera alternativa, la solución buscada se puede obtener volviendo a escribir la ecuación diferencial como:

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$, y luego substituyendo: $x = y\cdot u$, con la derivada correspondiente: $\frac{dx}{dy} = u + \frac{du}{dy}\cdot y$, en la ecuación anterior. Después de simplificar, la ecuación diferencial resultante será una con variables separables (esta vez, *u* e *y*). Comúnmente, resulta indistinto qué método de resolución se use. Sin embargo, algunas veces una de las substituciones resulta definitivamente superior a la otra; en tales casos, la mejor substitución a efectuar, por lo general, es evidente a partir de la forma de la propia ecuación diferencial problema.

Por otra parte, hay ciertas ecuaciones que son reducibles a homogéneas, y que presentan la configuración:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Para transformarlas en homogéneas trasladamos el origen al punto de intersección de las rectas de las siguientes ecuaciones que resolvemos como sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$$

y si la solución es el par (x_0, y_0) realizamos el siguiente cambio de variables:

$$\left.\begin{array}{l} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{array}\right\}$$

donde *u* es la nueva variable independiente o explicativa y *v* la nueva variable dependiente o funcional.

A continuación, tendremos ocasión de comprobar todo ello mediante la resolución detallada de diversos ejemplos.

A saber:

Ejemplo 1

Resolver la ecuación: $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$.

Solución:

Esta ecuación es homogénea y de grado 1 como puede comprobarse, ya que puede ser escrita de la forma: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1+2(y/x)}{2-(y/x)} = f(\frac{y}{x})$, o también así: $(x + 2y)\cdot dx – (2x – y)\cdot dy = 0$.

Por tanto, haciendo el cambio de variable: $y = tx, \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$, resulta la expresión:

$$(x+2tx)-(2x-tx)(t+x\frac{dt}{dx}) = 0,$$

de donde se obtiene sucesivamente:

$$(1+2t)-(2-t)t-(2-t)x\frac{dt}{dx} = 0$$

$$1+t^2 = (2-t)x\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2-t}{1+t^2}dt$$

e integrando en ambos miembros de esta igualdad mediante una cuadratura, se obtiene:

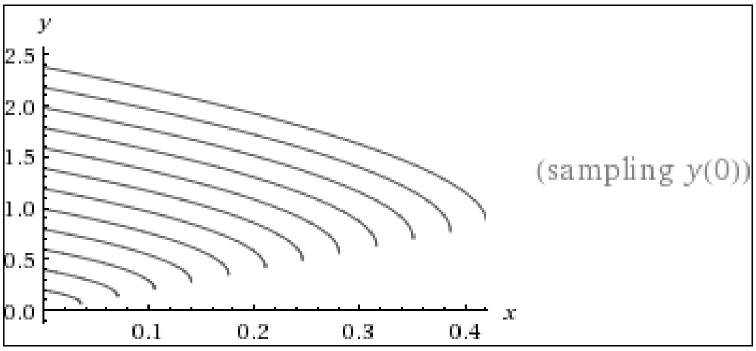
$$\ln x + \ln C = 2 \text{ arc tg } t - 1/2 \ln(1 + t^2)$$

o sea, en forma implícita:

$$\boxed{\ln Cx = 2 \text{ arc tg } \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}$$

después de substituir $t = y/x$.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 2

Resolver la ecuación reducible a homogénea: $y' = \dfrac{x + 2y + 4}{2x - y + 3}$.

Solución:

Esta ecuación también se puede escribir en la forma:

$$(x + 2y + 4)\cdot dx - (2x - y + 3)\cdot dy = 0$$

Las ecuaciones de este tipo se reducen a la forma anterior homogénea efectuando una traslación de los ejes coordenados, así:

$$x = X + a \; ; \quad y = Y + b, \text{ de donde:}$$

$$dx = dX \quad y \quad dy = dY \text{ , luego:}$$

$$(X + 2Y + a + 2b + 4)\cdot dX - (2X - Y + 2a - b + 3)\cdot dY = 0 \; ;$$

Haciendo:

$$\left.\begin{array}{l} a + 2b + 4 = 0 \\ 2a - b + 3 = 0 \end{array}\right\}$$

de donde a = -2, b = -1, resultando la ecuación: $(X + 2Y)\cdot dX - (2X - Y)\cdot dY = 0$, ya integrada en el ejemplo anterior y cuya solución es, como hemos visto:

$$\ln CX = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X} - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{Y^2}{X^2}\right);$$

$$\boxed{\ln C(x + 2) = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y + 1}{x + 2} - \frac{1}{2} \ln\left[1 + \frac{(y + 1)^2}{(x + 2)^2}\right]} \Rightarrow \text{I.G.}$$

habiendo bastado con substituir X por (x + 2) e Y por (y + 1) para encontrar la integral general de la ecuación propuesta.

Ejemplo 3

Obtener la solución general de la ecuación diferencial: $y' = \dfrac{x^3 + y^3}{3xy^2}$.

Solución:

Es homogénea, puesto que:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{3xy^2} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3}{\frac{3y^2}{x^2}} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3}{3\left(\frac{y}{x}\right)^2} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

También puede expresarse de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{3xy^2}; \quad \text{o sea}: \quad (x^3 + y^3)\cdot dx - 3xy^2\cdot dy = 0\ ;$$

$$\left.\begin{aligned} M(tx, ty) &= x^3t^3 + y^3t^3 = t^3\,(x^3 + y^3) \\ N(tx, ty) &= -3tx\cdot t^2\cdot y^2 = t^3\,(-3xy^2) \end{aligned}\right\}$$

Ambas, pues, son funciones homogéneas de grado **3**.

$$\left.\begin{aligned} M(1, t) &= 1 + t^3 \\ N(1, t) &= -3t^2 \end{aligned}\right\} \text{ Hagamos el cambio: } t = y/x, \text{ con lo que:}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-N(1,t)\cdot dt}{M(1,t) + t\cdot N(1,t)} = \frac{3t^2\cdot dt}{1 + t^3 - 3t^3} = \frac{3t^2}{1 - 2t^3}dt\ ;$$

Haciendo una cuadratura, resulta que:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln Cx = \int \frac{3t^2}{1 - 2t^3}dt = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - 2t^3\right); \text{ de donde:}$$

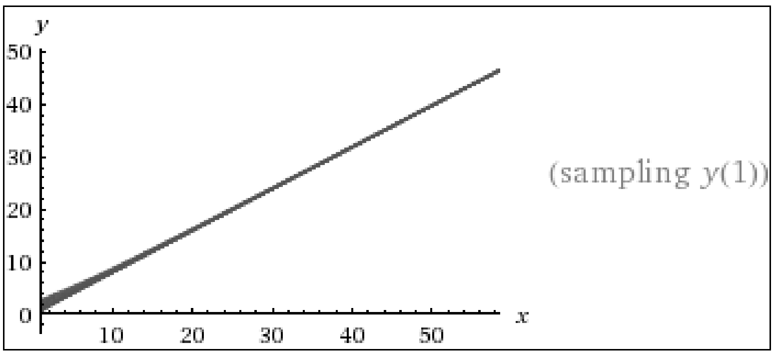
$$\ln Cx = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2y^3}{x^3}\right) = \ln\left(1 - \frac{2y^3}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}}, \text{ de lo que se deduce que:}$$

$$Cx = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2y^3}{x^3}}}; \quad 1 - \frac{2y^3}{x^3} = \frac{1}{K\cdot x^2} \text{ (siendo } K = C^2\text{),}$$

y simplificando y despejando la función se obtiene la integral general:

$$\boxed{y = \sqrt[3]{\frac{x^3}{2} - \frac{x}{C'}}} \Rightarrow \text{I.G., con } C' = 2K.$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 4

Solve the ordinary differential equation: $(x^2 - y^2)\cdot dx - 2xy\cdot dy = 0$.

Solution:

Is an homogeneous equation, as:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \frac{1-(\frac{y}{x})^2}{2\frac{y}{x}} = f(\frac{y}{x}) \text{. Also:}$$

$$\left.\begin{aligned} M(tx, ty) &= t^2x^2 - t^2y^2 = t^2(x^2 - y^2) \\ N(tx, ty) &= 2tx\cdot ty = t^2\cdot 2xy \end{aligned}\right\}$$

The given equation is homogeneous of degree two. The transformation:

$y = t\cdot x$, $dy = t\cdot dx + x\cdot dt$, yields: $2x\cdot tx(t\cdot dx + xdt) = (x^2 - t^2x^2)\cdot dx$, or:

$$\frac{dx}{x} = \frac{-N(1,t)\cdot dt}{M(1,t) + t\cdot N(1,t)} = \frac{2t}{1-3t^2}dt \text{ ; integrating this equation, then:}$$

$$-1/3 \ln |1 - 3t^2| = \ln|x| + \ln C'; \quad \ln|1 - 3t^2| + 3\ln|x| + \ln C = 0$$

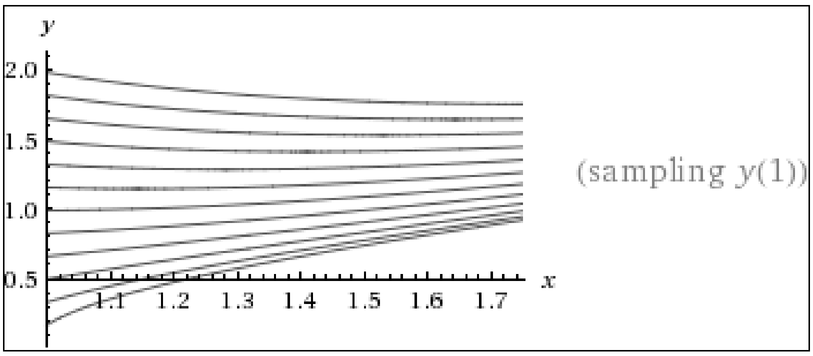
$$\text{Or:} \quad C|x^3(1 - 3t^2)| = 1.$$

Now, $\pm C\cdot x^3(1 - 3t^2) = 1$ and, using the change: $t = y/x$,

$$C(x^3 - 3xy^2) = 1 = Cx^3 - 3Cxy^2 \text{ ;}$$

$$3Cxy^2 = Cx^3 - 1 \text{ ; } \quad \boxed{y = \pm\sqrt{\frac{Cx^3 - 1}{3Cx}} = \pm\sqrt{\frac{x^3 + K}{3x}} \Rightarrow \text{G.I.}}$$

, with $K = -(1/C)$. The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 5

Resuelva la EDO: $y' = \dfrac{y+x}{x}$.

Solución:

Se tendrá que: $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + 1 = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Esta ecuación diferencial no es separable, pero es homogénea, como acabamos de comprobar. Substituyendo convenientemente en la ecuación antedicha (t = y/x), obtenemos:

$$y' = \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx} = \frac{xt+x}{x},$$

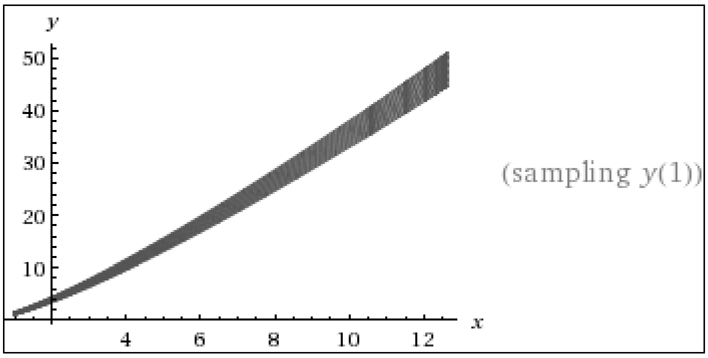
que se puede simplificar algebraicamente a:

$$x\frac{dt}{dx} = 1, \text{ o bien : } \frac{1}{x}dx - dt = 0 .$$

Esta última ecuación sí es de variables separables, y su solución es: $\int \frac{1}{x}dx - \int dt = c$, la cual, al ser evaluada, da: $t = \ln|x| - c$, o bien: $t = \ln|k\cdot x|$, donde hemos colocado $c = -\ln|k|$, y observamos que: $\ln|x| + \ln k = \ln|k\cdot x|$. Finalmente, substituyendo t = y/x hacia atrás, obtenemos la solución general a la ecuación diferencial dada como:

$$\boxed{y = x\cdot\ln|k\cdot x|}.$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 6

Resuelva la EDO: $y' = \dfrac{2y^4 + x^4}{xy^3}$.

Solución:

Se tendrá que: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^4 + 1}{\left(\frac{y}{x}\right)^3} = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Esta ecuación diferencial no es separable. En cambio, presenta la forma y' = f(x, y), con:

$$f(x,y) = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}\text{, donde:}$$

$$f(tx,ty) = \frac{2(ty)^4 + (tx)^4}{(tx)(ty)^3} = \frac{t^4(2y^4 + x^4)}{t^4(xy^3)} = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3} = f(x,y)$$

de modo que es homogénea. Substituyendo convenientemente en la ecuación diferencial dada, obtenemos:

$$t + x\frac{dt}{dx} = \frac{2(xt)^4 + x^4}{x(xt)^3}$$

la cual se puede simplificar mediante las oportunas operaciones algebraicas para obtener:

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{t^4 + 1}{t^3},\ \text{o bien : }\ \frac{1}{x}dx - \frac{t^3}{t^4 + 1}dt = 0\,.$$

Esta última ecuación es de variables separables, y su solución es:

$$\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{t^3}{t^4 + 1}dt = c\ ,$$

Integrando, obtenemos inmediatamente: $\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(t^4 + 1) = c$, o bien:

$$t^4 + 1 = (k\cdot x)^4,$$

donde hemos colocado $c = -\ln|k|$ y luego usado las identidades:

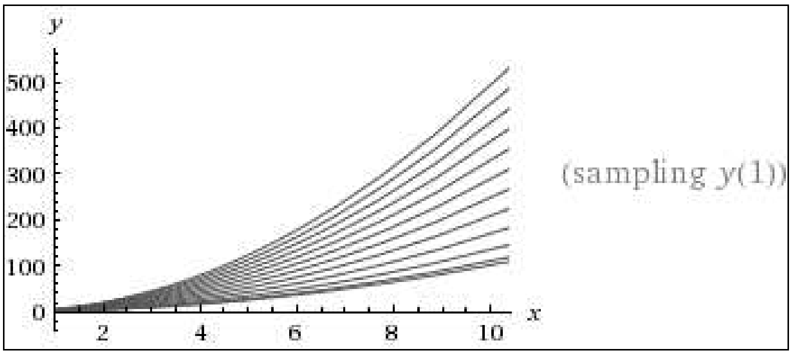
$$\ln|x| + \ln|k| = \ln|k\cdot x| \quad \text{y} \quad 4\cdot\ln|k\cdot x| = \ln(k\cdot x)^4$$

Finalmente, substituyendo t = y/x, obtenemos la I.G. buscada:

$y^4 = C_1x^8 - x^4$; $y = \sqrt[4]{C_1\cdot x^8 - x^4} = x\cdot\sqrt[4]{C_1\cdot x^4 - 1}$, siendo $C_1 = k^4$. De hecho las cuatro soluciones generales posibles son las siguientes:

$$\boxed{y = \pm\, x\cdot\sqrt[4]{C_1\cdot x^4 - 1}\ \ \text{e}\ \ y = \pm\, ix\cdot\sqrt[4]{C_1\cdot x^4 - 1}}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 7

Resuelva la EDO: $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

Solución:

Se tendrá que: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2yx}{x^2 - y^2} = \frac{2 \cdot \frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Esta ecuación diferencial no es separable. En cambio, presenta la forma y' = f(x, y), con:

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \text{, donde:}$$

$$f(tx, ty) = \frac{2(tx)\cdot(ty)}{(tx)^2 - (ty)^2} = \frac{t^2(2xy)}{t^2(x^2 - y^2)} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = f(x, y)$$

de modo que es homogénea. Substituyendo convenientemente en la ecuación diferencial tal como se dio originalmente, obtenemos:

$$y' = \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx} = \frac{2x(x\cdot t)}{x^2 - (x\cdot t)^2}$$

la cual se puede simplificar algebraicamente así:

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{t(t^2+1)}{t^2 - 1}, \text{ o bien : } \frac{1}{x}dx - \frac{t^2 - 1}{t(t^2+1)}dt = 0 .$$

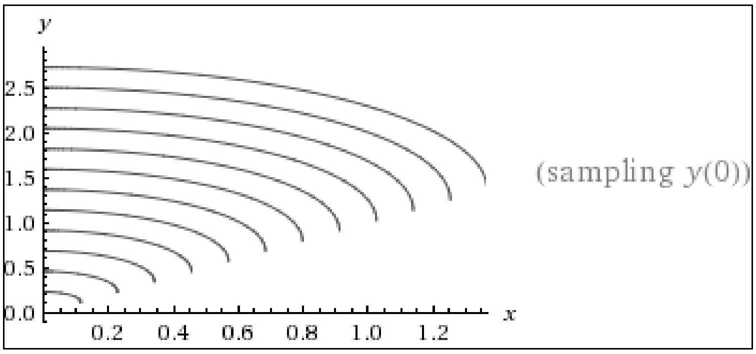
Utilizando fracciones parciales, podemos expandirla de la siguiente forma:

$$\frac{1}{x}dx + \left(-\frac{1}{t} + \frac{2t}{t^2+1}\right)dt = 0 .$$

La solución para esta ecuación de variables separables se encuentra integrando ambos lados de la expresión anterior mediante una cuadratura. Al hacer esto, obtenemos: $\ln|x| - \ln|t| + \ln(t^2 + 1) = c$, que se puede simplificar así: $x(t^2 + 1) = k\cdot t$ (siendo $c = \ln|k|$); substituyendo $t = y/x$ en la expresión anterior, encontramos que la solución buscada de la ecuación diferencial dada es: $x^2 + y^2 = k\cdot y$, o bien resuelta explícitamente para *y* con la fórmula cuadrática, obtendremos la I.G.:

$$\boxed{y = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4x^2}}{2}}.$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 8

Resuelva la EDO: $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$, con $y(1) = -2$.

Solución:

Se tendrá que: $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{y/x} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Esta ecuación diferencial es, pues, homogénea. Substituyendo convenientemente en ella ($t = y/x$), obtenemos:

$y' = \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx} = \frac{x^2 + (x\cdot t)^2}{x(x\cdot t)}$, que se puede simplificar algebraicamente así: $x\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}$, o bien : $\frac{1}{x}dx - t\cdot dt = 0$.

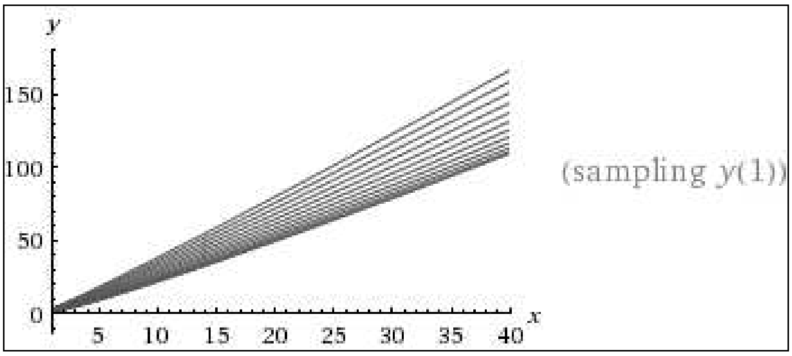
La solución para esta ecuación diferencial separable es:

$\ln|x| - t^2/2 = c$, o de manera equivalente: $t^2 = \ln x^2 + k$ (siendo $k = -2c$).

Substituyendo, en fin, $t = y/x$ en la ecuación anterior, encontramos que la solución o integral general buscada de la ecuación diferencial dada es:

$$y^2 = x^2 \ln \cdot x^2 + k \cdot x^2; \quad \boxed{y = \pm (x^2 \ln \cdot x^2 + k \cdot x^2)^{1/2}}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Para y(1) = -2, aplicando la condición inicial, obtenemos $(-2)^2 = (1)^2 \ln(1)^2 + k(1)^2$, o bien k = 4. (Recuérdese que: ln 1 = 0). De esta forma, la solución al problema de valor inicial planteado es la siguiente:

$$y^2 = x^2 \ln \cdot x^2 + 4x^2 \text{ , o bien: } \boxed{y = -\sqrt{x^2 \ln x^2 + 4x^2} = -x\sqrt{\ln x^2 + 4}}$$

Se toma la raíz cuadrada negativa, para ser consistente con la condición inicial dada.

Ejemplo 9

Resuelva la EDO: $y' = \dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}}$.

Solución:

Veamos que:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot \frac{y}{x} \cdot e^{(x/y)^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot e^{(x/y)^2} + 2 \cdot e^{(x/y)^2}} = \frac{2 \cdot \frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 \left[e^{-(x/y)^2} + 1\right] + 2} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

La ecuación diferencial no es de variables separables, pero es homogénea, como acabamos de demostrar. Observando el término (x/y) en el exponente, intentamos como siempre la substitución t = x/y. Volviendo a escribir la ecuación diferencial como:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}}{2 \cdot x \cdot y \cdot e^{(x/y)^2}},$$

tenemos que usar las substituciones pertinentes, y simplificando:

$$y\frac{dt}{dy} = \frac{1+e^{t^2}}{2t\cdot e^{t^2}} \quad \text{o bien :} \quad \frac{1}{y}dy - \frac{2t\cdot e^{t^2}}{1+e^{t^2}}dt = 0 .$$

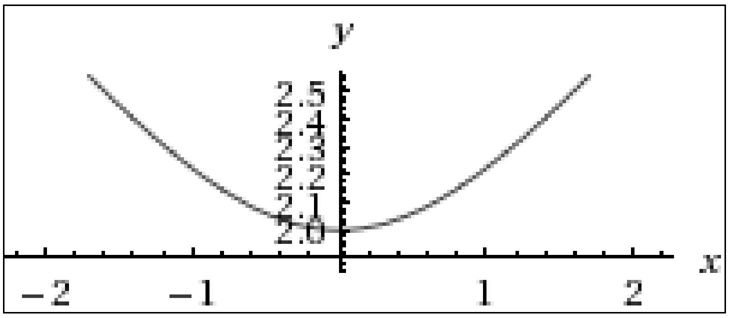
Esta ecuación ya es de variables separables, y su solución inmediata, por integración mediante una cuadratura, es la siguiente:

$\ln|y| - \ln(1+e^{t^2}) = c$, que se puede volver a escribir como:

$$y = k(1+e^{t^2}) \text{ (haciendo: } c = \ln|k|)$$

Substituyendo t = x/y en la expresión anterior, obtenemos la solución explícita de la ecuación diferencial dada como: $\boxed{y = k[1+e^{(x/y)^2}]}$

Una solución particular cualquiera, como para k = 1, ofrece:



Ejemplo 10

Solve the ordinary differential equation: $2x\cdot y\cdot dy = (x^2 - y^2)\cdot dx$.

Solution:

The equation is homogeneous of degree two. Also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \frac{1-(\frac{y}{x})^2}{2(\frac{y}{x})} = f(\frac{y}{x}) .$$

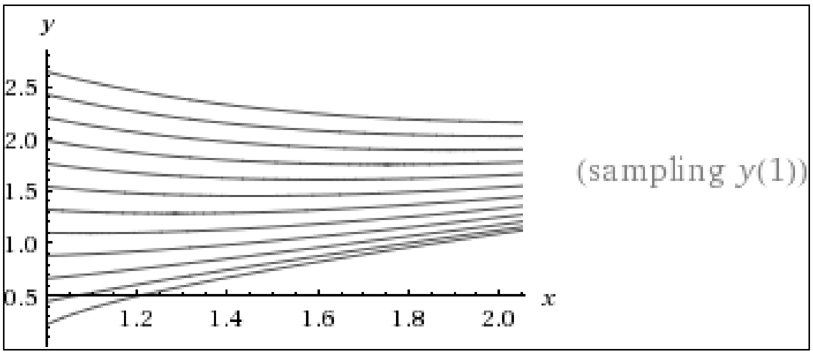
The transformation : $y = t\cdot x$, $dy = t\cdot dx + x\cdot dt$, yields: $2x\cdot tx(t\cdot dx + x\cdot dt) = (x^2 - t^2x^2)\cdot dx$, or : $\frac{2t\cdot dt}{1-3t^2} = \frac{dx}{x}$.

Then: $-\frac{1}{3}\ln|1 - 3t^2| = \ln|x| + \ln\cdot c$; $\ln|1 - 3t^2| + 3\ln|x| + \ln\cdot c' = 0$, or $c'|x^3(1 - 3t^2)| = 1$.

Now: $\pm c'x^3(1-3t^2) = cx^3(1 - 3t^2) = 1$, and using the change: t = y/x,

$c(x^3 - 3xy^2) = 1 = cx^3 - 3c\cdot xy^2$; $3c\cdot xy^2 = cx^3 - 1$; $\boxed{y = \pm\sqrt{\dfrac{c\cdot x^3 - 1}{3c\cdot x}}} \to$ G.I.

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 11

Solve the ordinary differential equation:

$$x\cdot\sin\frac{y}{x}(y\cdot dx + x\cdot dy) + y\cdot\cos\frac{y}{x}(x\cdot dy - y\cdot dx) = 0\,.$$

Solution:

The equation is homogeneous of degree two. The transformation: $y = t\cdot x$, $dy = t\cdot dx + x\cdot dt$, yields:

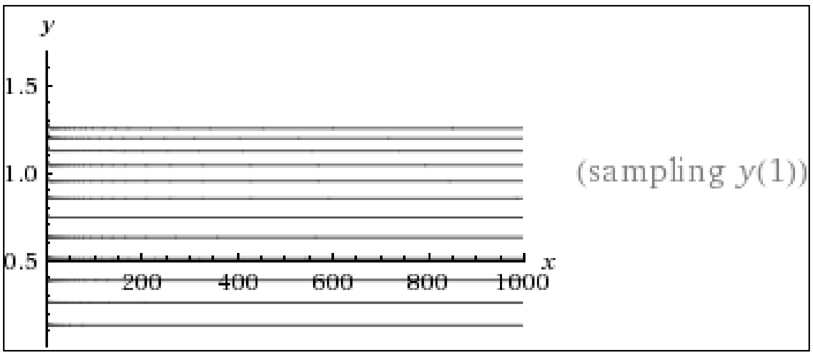
$$x\cdot\sin t(tx\cdot dx + x^2\cdot dt + tx\cdot dx) + tx\cdot\cos t\,(x^2dt + tx\cdot dx - tx\cdot dx) = 0\,;$$

$$\sin t(2t\cdot dx + x\cdot dt) + xt\cdot\cos t\cdot dt = 0\,; \quad \frac{\sin t + t\cdot\cos t}{t\cdot\sin t}dt + 2\frac{dx}{x} = 0\,.$$

Then: $\ln|t\cdot\sin t| + 2\ln|x| = \ln C'$, $x^2\cdot t\cdot\sin t = C$, and de general integral is

$$\boxed{xy\cdot\sin\frac{y}{x} = C}.$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 12

Solve the ordinary differential equation: $(x^2 - 2y^2)\cdot dy + 2xy\cdot dx = 0$.

Solution:

The equation is homogeneous of degree two. Also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - 2y^2} = \frac{2(\frac{y}{x})}{1 - 2(\frac{y}{x})^2} = f(\frac{y}{x})$$

, and the standard transformation yields (t = y/x):

$$(1 - 2t^2)(t\cdot dx + x\cdot dt) + 2t\cdot dx = 0 \;;$$

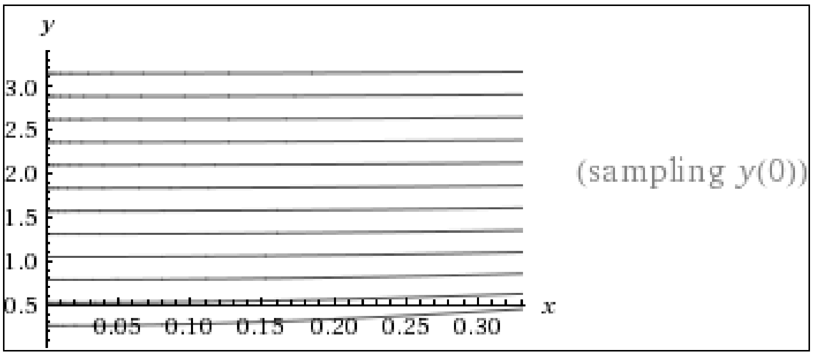
$$\frac{1 - 2t^2}{t(3 - 2t^2)}dt + \frac{dx}{x} = 0\;;\quad \frac{dt}{3t} - \frac{4t\cdot dt}{3(3 - 2t^2)} + \frac{dx}{x} = 0\;;$$

$$1/3 \ln|t| + 1/3\cdot\ln|3 - 2t^2| + \ln|x| = \ln c\;;$$
$$\ln|t| + \ln|3 - 2t^2| + 3\cdot\ln|x| = \ln C'.$$

Then: $tx^3(3 - 2t^2) = C'$, and the implicit general solution is:

$$\boxed{y(3x^2 - 2y^2) = C'}.$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 13

Resolver la EDO: $y' = \frac{x^2 - y^2}{xy}$.

Solución:

Si nos fijamos un poco en la forma de la ecuación, lo más lógico es que sea homogénea. Como en ejercicios anteriores, llamamos: $M(x, y) = x^2 - y^2$ y $N(x, y) = xy$. Resulta fácil comprobar que son funciones homogéneas de grado dos. Además, sacando como factor común a x^2 resulta que:

$y' = \dfrac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Ahora hacemos el cambio de variable: $t = \dfrac{y}{x}$, entonces,

y = t·x; derivando, y' = t + xt', y substituyendo en la ecuación: $t + xt' = \dfrac{1-t^2}{t}$;

$x \cdot t' = \dfrac{1-t^2}{t} - t$. Como se aprecia, se trata de una ecuación de variables separadas que resolvemos, como siempre, integrando en ambos miembros mediante una cuadratura, así:

$$\int \frac{t}{1-2t^2}dt = \int \frac{1}{x}dx \text{, de lo que resulta, } -\frac{1}{4}\ln\left|1-2t^2\right| = \ln|x| + k \text{ .}$$

Si hacemos: k = ln C, tendremos que: $(1 – 2t^2)^{-1/4}$ = Cx.

Deshaciendo, finalmente, el cambio de variable: $t = \dfrac{y}{x}$, se obtiene que:

$\left(1-2\dfrac{y^2}{x^2}\right)^{-1/4} = C \cdot x$, que es la solución general implícita de la ecuación.

Podríamos seguir operando hasta reducir la ecuación a la expresión siguiente: $x^2 - 2y^2 = \dfrac{1}{x^2C^4}$, y entonces, la integral general expresada en forma explícita será la siguiente:

$$\boxed{y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{k \cdot x^2}}}$$

, habiendo hecho: $k = 2C^4$.

Ejemplo 14

Resolver la EDO: (3x – 2y + 1)dx – (3x + 2y – 1)dy = 0.

Solución:

Como siempre que nos enfrentamos a la resolución de una ecuación diferencial, intentaremos identificarla con algún tipo que sepamos resolver. Volvemos a probar si se trata de una ecuación de tipo homogéneo, procediendo como en los ejercicios anteriores.

Llamamos: $\left.\begin{array}{l} M(x,y) = 3x - 2y + 1 \\ N(x,y) = -(3x + 2y - 1) \end{array}\right\}$, y vemos que no son ecuaciones homogéneas. Dividiendo la ecuación por dx y despejando, queda: $y' = -\dfrac{3x-2y+1}{3x+2y-1}$. Luego es de la forma: $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, siendo:

$a_1 = 3$, $b_1 = -2$, $c_1 = 1$ y $a_2 = 3$, $b_2 = 2$, $c_2 = -1$, y *f* la función que asigna a cada número su opuesto: f: $t \to -t$.

Entonces, aunque nuestra ecuación no sea homogénea, puede reducirse a una de ellas mediante un cambio de variable, que consiste en trasladar el origen de coordenadas al punto de intersección de las rectas:

$$3x - 2y + 1 = 0;\ \ 3x + 2y - 1 = 0.$$

Primero hallaremos el mencionado punto de intersección, resolviendo el sistema:

$\left.\begin{array}{l} 3x-2y+1=0 \\ 3x+2y-1=0 \end{array}\right\}$. Las soluciones son x = 0, $y=\frac{1}{2}$. El cambio de variable nos queda: $\left.\begin{array}{l} t = x-0 \\ v = y-\frac{1}{2} \end{array}\right\}$, donde t es la nueva variable independiente y v la nueva variable dependiente. También, de la definición de las variables se obtiene: $\left.\begin{array}{l} dt = dx \\ dv = dy \end{array}\right\}$, de modo que: $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dt}$, o lo que es lo mismo, y' = v'.

Substituimos t y v en las ecuaciones de las rectas; para ello, sacamos factor común:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2\left(y-\frac{1}{2}\right)=0 \\ 3x+2\left(y-\frac{1}{2}\right)=0 \end{array}\right\}\text{, obteniéndose } \left.\begin{array}{l} 3t-2v=0 \\ 3t+2v=0 \end{array}\right\}.$$

Substituyendo ahora en la ecuación diferencial se tiene que:

$$v' = -\frac{3t-2v}{3t+2v} = -\frac{3-2\left(\frac{v}{t}\right)}{3+2\left(\frac{v}{t}\right)} = f\left(\frac{v}{t}\right),$$

con lo que hemos conseguido una ecuación homogénea, que ya sabemos resolver. Para ello hemos de efectuar un nuevo cambio de variable, definiendo una nueva variable, w, también dependiente de t. A saber:

$$w=\frac{v}{t},\ v = t\cdot w,\ \text{ y derivando, } v' = w + t\cdot w'.$$

Substituyendo nuevamente en la ecuación resulta: $w+tw'=\frac{3-2w}{3+2w'}$,

de donde: $tw'=\frac{3-w-2w^2}{3+2w}$, y así hemos llegado a una ecuación de variables separadas. Resolviéndola, como habitualmente venimos haciendo, se obtiene:

$\int \frac{3+2w}{3-w-2w^2}dw = \int \frac{dt}{t}$, de donde, $\ln\frac{|w+3|^3}{|w+2|} = \ln|t| + k$.

Si k = ln C, queda: $\ln\frac{|w+3|^3}{|w+2|} = \ln|t| + \ln C$, por lo tanto, $\frac{|w+3|^3}{|w+2|} = C$.

Deshaciendo ahora el cambio $w = \frac{v}{t}$, queda: $\frac{v+3t}{t^2(v+2t)} = C$, y como

$\left.\begin{array}{l} t = x \\ v = y - \frac{1}{2} \end{array}\right\}$, finalmente resultará que: $\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)+3x}{x^2\left[\left(y-\frac{1}{2}\right)+2x\right]} = C$, que es la solución general de la ecuación planteada expresada en forma implícita. En forma explícita, la I.G. buscada vendrá dada por la expresión:

$$\boxed{y = \frac{2Cx^3 - 3x}{1 - Cx^2} + \frac{1}{2}}$$

Ejemplo 15

Resolver la EDO: $x\cdot y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x+y}$.

Solución:

Dividiendo por x, escribimos: $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + xy}$. La ecuación es homogénea con: $M(x, y) = x^2 + x\cdot y + y^2$ y $N(x, y) = x^2 + x\cdot y$, que son funciones homogéneas de grado dos.

Si dividimos por x^2 numerador y denominador, obtenemos que:

$y' = \frac{1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Ahora, para resolver la ecuación, hacemos el cambio de variable $t = \frac{y}{x}$, siendo t una nueva variable, también dependiente de x. Luego, $y = t\cdot x$, de donde: $y' = t + x\cdot t'$. Substituyendo en la ecuación:

$t + x\cdot t' = \frac{1 + t + t^2}{1+t}$, y nos queda una ecuación de variables separadas, que resolveremos, como siempre, integrando miembro a miembro, es decir,

$x\frac{dt}{dx} = \frac{1}{1+t}$; $\int (1+t)\cdot dt = \int \frac{1}{x}dx$, de donde: $t + \frac{t^2}{2} = \ln|x| + k$. Si k = ln C, queda:

$e^{t+\frac{t^2}{2}} = C\cdot x$. Finalmente, deshaciendo el cambio $t = \frac{y}{x}$, se obtiene:

$e^{\frac{y}{x}+\frac{y^2}{2x^2}} = C\cdot x$, que es la solución general de la ecuación pedida expresada en forma implícita.

Podemos también escribir la solución de esta otra forma para hallar la expresión de la integral general en forma explícita, a saber:

$2xy + y^2 = 2x^2 \cdot \ln C \cdot |x|$. Aplicando la fórmula cuadrática se tiene que:

$y^2 + 2xy – 2x^2 \cdot \ln Cx = 0$; con lo que:

$$\boxed{y = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 8x^2\cdot \ln Cx}}{2} = \frac{-2x \pm 2x\sqrt{1+2\cdot \ln Cx}}{2} = x\left(\pm\sqrt{1+2\cdot \ln Cx} - 1\right).}$$

Ejemplo 16

Resolver la EDO: $(x^2 – 2y^2)dx + x\cdot y\cdot dy = 0$.

Solución:

$$(x^2 – 2y^2)dx + x\cdot y\cdot dy = 0 \quad (1)$$

, la (1) es una ED de la forma: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ con: $M(x, y) = x^2 – 2y^2$,

$\Rightarrow$ $M(tx, ty) = (tx)^2 – 2(ty)^2 = t^2x^2 – 2t^2y^2 = t^2(x^2 – 2y^2) = t^2M(x, y)$ (2)

$N(x, y) = x\cdot y$, $\Rightarrow N(tx,ty) = (tx)\cdot(ty) = t^2x\cdot y = t^2N(x,y)$ (3)

De (2) y (3), se concluye que M(x,y) y N(x,y) son funciones homogéneas de segundo grado; de tal manera que la (1) es una ED homogénea. En efecto:

$$(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - x^2}{xy} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2y^2 - x^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}},$$

$\Rightarrow$ $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2(y/x)^2 - 1}{y/x} = f(y/x)$ (4)

Sea ahora: $z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = z\cdot x, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$ (5)

Reemplazando (5) en (4), se obtiene que:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{2z^2 - 1}{z} \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{2z^2 - 1}{z} - z \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{2z^2 - 1 - z^2}{z} \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - 1}{z},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{zdz}{z^2 - 1} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int\frac{zdz}{z^2 - 1} = \int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\frac{2zdz}{z^2 - 1} = \int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(z^2 - 1) = \ln x + \ln c_1,$$

$\Rightarrow \ln(z^2 - 1) = 2\ln x + 2\ln c_1 \Leftrightarrow \ln(z^2 - 1) = \ln x^2 + \ln c_1^2 \Leftrightarrow \ln(z^2 - 1) = \ln c_1^2 x^2, \Rightarrow$
$z^2 - 1 = c_1^2 x^2 \Leftrightarrow z^2 = cx^2 + 1$ (habiendo hecho: $c = c_1^2$) (6)

Al substituir $z = \frac{y}{x}$ en (6), se obtiene, en fin:

$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = cx^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{x^2} = cx^2 + 1 \Leftrightarrow y^2 = cx^4 + x^2$; y se tiene la I.G.:

$$\boxed{y = \pm\sqrt{cx^4 + x^2} = \pm x\sqrt{cx^2 + 1}}$$

Ejemplo 17

Resolver la EDO: $x \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = y \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x} + x$.

Solución:

$$x \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = y \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x} + x \Leftrightarrow -\left(y \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x} + x\right)dx + x \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x}dy = 0 \quad (1)$$

La (1) es una EDO de la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ con:

$M(x,y) = -\left(y \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x} + x\right)$, entonces:

$$\Rightarrow \quad M(tx,ty) = -\left(t \cdot y \cdot \operatorname{sen}\frac{ty}{tx} + tx\right) = -t\left(y \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x} + x\right) = t \cdot M(x,y) \quad (2)$$

$$N(x,y) = x \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x}, \Rightarrow N(tx,ty) = t \cdot x \cdot \operatorname{sen}\frac{ty}{tx} = t \cdot x \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x} = t \cdot N(x,y) \quad (3)$$

De (2) y (3), se concluye que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas de primer grado; de tal manera que la (1) es una EDO homogénea. Resolvámosla:

$$x \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = y \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x} + x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x} + x}{x \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x}} \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}\operatorname{sen}\frac{y}{x} + 1}{\operatorname{sen}\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4)$$

Sea ahora: $z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = zx, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$ (5)

Reemplazando (5) en (4), se obtiene que:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{z \operatorname{sen} z + 1}{\operatorname{sen} z} \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{z \operatorname{sen} z + 1}{\operatorname{sen} z} - z \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{z \operatorname{sen} z + 1 - z \operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z} \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} z \cdot dz = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \operatorname{sen} z \cdot dz = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow -\cos z = \ln x + \ln c \Leftrightarrow -\cos z = \ln c \cdot x,$$

$\Rightarrow$ 0 = ln c·x + cos z (6). Al substituir $z = \frac{y}{x}$ en (6), se obtiene que:

ln(cx) + cos(y/x) = 0; y se tiene la I.G. buscada:

$$\boxed{y = x\cdot \text{arc cos } (-\ln cx) = x\cdot \text{arc cos } (\text{coln } cx)}$$

Ejemplo 18

Resolver la EDO: x·y’ = 2x + 3y.

Solución:

$$xy' = 2x + 3y \Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} - 2x - 3y = 0 \Leftrightarrow x\cdot dy - (2x + 3y)dx = 0,$$

$\Rightarrow$ (2x + 3y)dx – x·dy = 0 (1)

La (1) es una EDO de la forma: M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, con:

M(x,y) = 2x + 3y, y entonces:

$\Rightarrow$ M(tx,ty) = 2(tx) + 3(ty) = t(2x) + t(3y) = t(2x + 3y) = t·M(x,y) (2)

N(x,y) = -x, $\Rightarrow$ N(tx,ty) = -tx = t(-x) = t·N(x,y) (3)

De (2) y (3), se concluye que M(x,y) y N(x,y) son funciones homogéneas de primer grado; de tal manera que la (1) es una EDO homogénea. Resolvámosla:

$$x\frac{dy}{dx} - 2x - 3y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2 + 3\frac{y}{x} \qquad (4)$$

Sea: $z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = zx, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$ (5)

Reemplazando (5) en (4), se obtiene que:

$$z + x\frac{dz}{dx} = 2 + 3z \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = 2 + 2z \Leftrightarrow \frac{dz}{z+1} = \frac{2x}{dx} \Leftrightarrow \int \frac{dz}{z+1} = \int \frac{2dx}{x},$$

$\Rightarrow$ ln(z + 1) = 2ln x + ln c $\Leftrightarrow$ ln(z + 1) = ln cx^2 $\Leftrightarrow$ z + 1 = cx^2 (6)

Al substituir $z = \frac{y}{x}$ en (6), se obtiene la I.G. buscada:

$$\boxed{\frac{y}{x} + 1 = c\cdot x^2 \Leftrightarrow \frac{y+x}{x} = c\cdot x^2 \Leftrightarrow y = c\cdot x^3 - x}$$

Ejemplo 19

Resolver la EDO: $(x^3 + y^3)dx – xy^2dy = 0$.

Solución:

$$(x^3 + y^3)dx – xy^2dy = 0 \qquad (1)$$

La (1) es una EDO de la forma M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 con:

$$M(x,y) = x^3 + y^3 \Rightarrow M(tx,ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3x^3 + t^3y^3 = t^3(x^3 + y^3) = t^3M(x,y) \qquad (2)$$

Del mismo modo: $N(tx,ty) = -(tx)\cdot(ty)^2 = t^3(-xy^2) = t^3N(x,y)$ (3)

De (2) y (3), se concluye que M(x,y) y N(x,y) son funciones homogéneas de tercer orden; de tal manera que la (1) es una EDO homogénea. Resolvámosla:

$$(x^3+y^3)-xy^2\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^3}{xy^2} \Leftrightarrow y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}=f(\frac{y}{x}) \qquad (4)$$

Sea ahora: $z=\frac{y}{x} \Leftrightarrow y=zx, \ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$ (5)

Reemplazando (5) en (4), se obtiene que:

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{1+z^3}{z^2} \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{1+z^3}{z^2}-z \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{1+z^3-z^3}{z^2} \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{1}{z^2},$$

$$\Rightarrow \qquad z^2dz=\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int z^2dz=\int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{3}z^3=\ln cx \qquad (6)$$

Al substituir $z=\frac{y}{x}$ en (6), se obtiene, por fin:

$\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3=\ln cx \Leftrightarrow y^3=3x^3\ln cx \Leftrightarrow y^3=x^3\ln cx^3$; y la I.G. buscada será:

$$\boxed{y=x\times\sqrt[3]{\ln cx^3}}$$

Ejemplo 20

Resolver la EDO: $\frac{dy}{dx}=1+\frac{y}{x}$.

Solución:

$y' = \frac{dy}{dx}=1+\frac{y}{x}$ = f(y/x), por lo que es una EDO homogénea (1)

Sea: $t = \frac{y}{x}, \Rightarrow y = x \cdot t, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dv}{dx}$ (2)

Substituyendo (2) en (1), se obtiene una ecuación de variables separables, a saber:

$$t + x\frac{dt}{dx} = 1 + t \Leftrightarrow x\frac{dt}{dx} = 1 \Leftrightarrow dt = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int dt - \int \frac{dx}{x} = c \Leftrightarrow t - \ln|x| = c \ \ (3),$$

$\Rightarrow$ y se tiene la I.G.: $\boxed{\frac{y}{x} - \ln|x| = c \Leftrightarrow y = x\ln|x| + c \cdot x}$ (con el cambio: t = y/x).

De hecho, este mismo ejercicio ya ha sido resuelto anteriormente con otro formato.

Ejemplo 21

Resolver la EDO: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$; con: y(1) = 1.

Solución:

y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ = f(y/x). Se trata de una ecuación diferencial homogénea (1)

Sea el cambio: $t = \frac{y}{x}, \Rightarrow y = x \cdot t, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$ (2)

Substituyendo (2) en (1), se obtiene una ecuación de variables separables, a saber:

$$t + x\frac{dt}{dx} = t + t^2 \Leftrightarrow x\frac{dt}{dx} = t^2 \Leftrightarrow t^{-2} \cdot dt = \frac{x}{dx} \Leftrightarrow \int t^{-2} \cdot dt = \int \frac{x}{dx} \Leftrightarrow -t^{-1} = \ln|x| + c_1,$$

$\Rightarrow -\frac{x}{y} = \ln|x| + c \Leftrightarrow -x = y \cdot \ln|x| + c_1 y \Leftrightarrow x = c \cdot y - y \cdot \ln|x|$; (t = y/x, c = -$c_1$) (3)

Las condiciones iniciales del problema son: x = 1, y = 1 (4)

Al substituir (4) en (3), se halla el valor de la constante arbitraria c, así:

1 = c – ln1 $\Leftrightarrow$ c = 1 (5), con lo que el final queda:

x = y – y · ln x = y(1-ln x); y la I.P. buscada es:

$$\boxed{y = \frac{x}{1 - \ln x}}$$

Ejemplo 22

Resolver la EDO: $x\cdot y' = 2x + 3y$.

Solución:

$xy' = 2x + 3y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2 + 3(\frac{y}{x}) =$ f(y/x), que es una ecuación diferencial homogénea (1). Sea: $t = \frac{y}{x}, \Rightarrow y = x\cdot t, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$ (2) . Substituyendo (2) en (1), se obtiene una ecuación de variables separables:

$$t + x\frac{dt}{dx} = 2 + 3t \Leftrightarrow x\frac{dt}{dx} = 2 + 2t \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{1dt}{(1+t)} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t} = \int\frac{dx}{x} + c_1 \quad (3),$$

$\Rightarrow \quad \ln|1+t| = 2\ln|x| + \ln c \Leftrightarrow \ln|1+t| = \ln x^2 + \ln c \Leftrightarrow \ln|1+t| = \ln cx^2 \Leftrightarrow 1+t = c\cdot x^2$,

$\Rightarrow \quad t = c\cdot x^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = c\cdot x^2 - 1 \Leftrightarrow \boxed{\text{I.G.: } y = c\cdot x^3 - x}$

Ejemplo 23

Resolver la EDO: $(x^2 - y^2)dx - 2x\cdot y\cdot dy = 0$.

Solución:

$(x^2 - y^2) - 2xy\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}} =$ f(y/x), por lo que se trata de una ecuación homogénea (1). Sea: $t = \frac{y}{x}, \Rightarrow y = x\cdot t, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$ (2), y substituyendo (2) en (1), se obtiene una ecuación de variables separables, a saber: $t + x\frac{dt}{dx} = \frac{1-t^2}{2t} \Leftrightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{1-t^2}{2t} - t \Leftrightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{1-3t^2}{2t} \Leftrightarrow \frac{2t\cdot dt}{1-3t^2} = \frac{dx}{x}$,

$$\Rightarrow \int\frac{2t\cdot dt}{1-3t^2} = \int\frac{dx}{x} + \ln c_1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\int\frac{-6t\cdot dt}{1-3t^2} = \int\frac{dx}{x} + \ln c_1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\ln\left|1-3t^2\right| = \ln|x| + \ln c_1,$$

$\Rightarrow \ln|1-3t^2| = -3\cdot\ln|x| - 3\cdot\ln c_1 \Leftrightarrow \ln|1-3t^2| = -3\cdot\ln|x| + \ln c \Leftrightarrow \ln|1-3t^2| = \ln|x^3| + \ln c$

$\Rightarrow$ y de aquí se deduce la siguiente integral general:

$$\boxed{\ln\left|1-3t^2\right| = \ln\left|\frac{c}{x^3}\right| \Leftrightarrow 1 - 3t^2 = \frac{c}{x^3} \Leftrightarrow 1 - 3\frac{y^2}{x^2} = \frac{c}{x^3} \Leftrightarrow x^3 - 3x\cdot y^2 = c \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{x^3 - c}{3x}}}$$

Ejemplo 24

Resolver la EDO: $(x - y)\cdot dx + x\cdot dy = 0$.

Solución:

$$(x-y)dx + xdy = 0 \Leftrightarrow (x-y) + x\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} = y - x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x} \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1 \quad (1)$$

La (1) es, pues, una EDO homogénea $\boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)}$. Para resolverla se hace la siguiente substitución:

Sea: $t = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = t\cdot x, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$; de tal modo que:

$$t + x\frac{dt}{dx} = t - 1 \Leftrightarrow x\frac{dt}{dx} = -1 \Leftrightarrow dt = -\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow t = -\int \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow t = -\ln x + C \Leftrightarrow \ln x + \frac{y}{x} = C \Leftrightarrow$$

$x\cdot \ln x + y = C\cdot x$; y la integral general pedida será: $\boxed{y = x(C - \ln x)}$

Ejemplo 25

Resolver la EDO: $(y^2 + y\cdot x)dx - x^2dy = 0$.

Solución:

$$(y^2 + y\cdot x)dx - x^2dy = 0 \Leftrightarrow (y^2 + y\cdot x) - x^2\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow y^2 + y\cdot x = x^2\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

La expresión dada es, pues, una EDO homogénea $\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)}$. Para resolverla se hace la siguiente substitución:

sea $t = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = t\cdot x, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$; de tal modo que:

$$t + x\frac{dy}{dx} = t^2 + t \Leftrightarrow x\frac{dt}{dx} = t^2 \Leftrightarrow t^{-2}dt = x^{-1}dx \Leftrightarrow \int t^{-2}dt = \int x^{-1}dx \Leftrightarrow -t^{-1} = \ln x + c\,;$$

$$\Rightarrow\ -t^{-1} - \ln x = c \Leftrightarrow t^{-1} + \ln x = C \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \ln x = C \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \ln x = C \Leftrightarrow x + y\cdot \ln x = C\cdot y\,,$$

de donde la integral general buscada será: $\boxed{y = \frac{x}{C - \ln x}}$.

Ejemplo 26

Resolver la EDO: $\frac{dy}{dx}=\frac{x+3y}{3x+y}$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+3y}{3x+y}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x+3y}{x}}{\frac{3x+y}{x}}\Leftrightarrow y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1+3\frac{y}{x}}{3+\frac{y}{x}}\quad(1)$$

La (1) es, pues, una EDO homogénea $\boxed{\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)}$. Para resolverla se hace la siguiente substitución:

sea: $t=\frac{y}{x}\Leftrightarrow y=t\cdot x,\Rightarrow\frac{dy}{dx}=t+x\frac{dt}{dx}$; de tal modo que:

$$t+x\frac{dt}{dx}=\frac{1+3t}{3+t}\Leftrightarrow x\frac{dt}{dx}=\frac{1+3t}{3+t}-t\Leftrightarrow x\frac{dt}{dx}=\frac{1+3t-3t-t^2}{3+t}\Leftrightarrow x\frac{dt}{dx}=\frac{1-t^2}{3+t}$$

$$\Leftrightarrow\qquad\frac{3+t}{1-t^2}dt=x^{-1}dx\Rightarrow$$

$$\int\frac{3+t}{1-t^2}dt=\int x^{-1}dx\Leftrightarrow\ln\frac{|t+1|}{(t-1)^2}=\ln|x|+\ln C\Leftrightarrow\ln\frac{|t+1|}{(t-1)^2}=\ln|Cx|\Leftrightarrow\frac{|t+1|}{(t-1)^2}=C|x|$$

$$\Rightarrow\qquad\frac{\left|\frac{y}{x}+1\right|}{\left(\frac{y}{x}-1\right)^2}=C|x|\Leftrightarrow\frac{\left|\frac{x+y}{x}\right|}{\left(\frac{y-x}{x}\right)^2}=C|x|\Leftrightarrow\frac{|x+y|}{\frac{(y-x)^2}{|x|}}=C|x|\Leftrightarrow\frac{|x||x+y|}{(y-x)^2}=C|x|.$$

La integral general buscada será: $\boxed{\frac{|x+y|}{(y-x)^2}=C}$ expresada en forma implícita. Para expresarla en forma explícita, emplearemos la fórmula cuadrática teniendo en cuenta que se obtiene la ecuación:

$Cy^2-(2xC+1)y+Cx^2-x=0$, de donde surge la doble solución:

$$y=\frac{1+2xC\pm\sqrt{8Cx+1}}{2C}=\boxed{\frac{1+k\cdot x\pm\sqrt{4k\cdot x+1}}{k}}$$

, en que se ha hecho: $k = 2C$.

Obsérvese que en la resolución anterior se ha tenido en cuenta que: $\int\frac{3+t}{1-t^2}dt=\int\frac{3+t}{(1-t)(1+t)}dt$. (1). Expresamos el integrando en (1) como una suma de fracciones parciales: $\frac{3+t}{(1-t)(1+t)}\equiv\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}$ (◊) $\Leftrightarrow 3+t\equiv A(1+t)+B(1-t)$,

$\Rightarrow$ $3 + t \equiv A + At + B - Bt \Leftrightarrow 3 + t \equiv (A + B) + (A - B)t$ (2)

Como (2) es una identidad, los coeficientes de los términos correspondientes deben ser iguales en ambos miembros; de tal modo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\left.\begin{array}{ll} A + B = 3 & (3) \\ \underline{A - B = 1} & (4) \end{array}\right\}$$

$2A = 4 \Leftrightarrow A = 2$ (5), $\Rightarrow 2 + B = 3 \Leftrightarrow B = 1$ (6)

Substituyendo (5) y (6) en (◊) y luego en (1), se obtiene que:

$$\int \frac{3+t}{1-t^2}dt = \int \left(\frac{2}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt = \int \frac{1}{t+1}dt - \int \frac{2}{t-1}dt,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{3+t}{1-t^2}dt = \ln|t+1| - 2\ln|t-1| + \ln C \Leftrightarrow \int \frac{3+t}{1-t^2}dt = \ln\frac{C|t+1|}{(t-1)^2}, \text{ c.s.q.d.}$$

Ejemplo 27

Resolver la EDO: $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución:

$$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}};$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}} \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad (1)$$

La (1) es, pues, una EDO homogénea $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)}$. Para resolverla se hace la siguiente substitución:

Sea: $t = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y = t\cdot x, \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = t + x\dfrac{dt}{dx}$; de tal modo que:

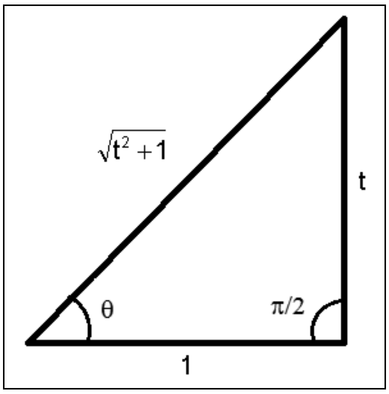
$$t + x\frac{dt}{dx} = t + \sqrt{1+t^2} \Leftrightarrow x\frac{dt}{dx} = \sqrt{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = x^{-1}dx \Leftrightarrow \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int x^{-1}dx,$$

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln x + C$ (2). La integral del miembro izquierdo de (2), que es la integral de una función irracional, se obtiene así: $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ (3). Sea ahora:

$t = \tan\theta$, $\Rightarrow dt = \sec^2\theta\cdot d\theta$ (4). Substituyendo (4) en (3), se obtiene que:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int \frac{\sec^2\theta \cdot d\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta \cdot d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec\theta} = \int \sec\theta \cdot d\theta = \int \frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{\sec\theta+\tan\theta} d\theta,$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int \frac{(\sec^2\theta + \sec\theta\cdot\tan\theta)d\theta}{\sec\theta+\tan\theta} = \ln|\sec\theta+\tan\theta| \qquad (5)$$



Como t = tan θ y a partir de la definición de la tangente se construye la figura anterior. Además, de dicha figura se deduce que: $\sec\theta = \sqrt{t^2+1}$. Substituyendo estos valores en la expresión (5) se tiene que:

$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left|\sqrt{t^2+1}+t\right|$ (6). Por lo que: $\ln\left|\sqrt{t^2+1}+t\right| = \ln C|x|$ $\{(6)$ en $(2)\}$,

$$\sqrt{t^2+1}+t = C\cdot x \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}+\frac{y}{x} = C\cdot x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}+\frac{y}{x} = Cx \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y^2+x^2}{x^2}}+\frac{y}{x} = C\cdot x,$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{y^2+x^2}}{x}+\frac{y}{x} = C\cdot x$$ $\Leftrightarrow$ por lo que la integral general buscada será:

$$\boxed{\sqrt{x^2+y^2}+y = C\cdot x^2}.$$

Ejemplo 28

Resolver la EDO: $xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - x^3,\ \text{con}: y(1) = 2$.

Solución:

$$xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - x^3 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^3-x^3}{xy^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \left(\frac{x}{y}\right)^2 \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^{-2} \qquad (1)$$

Se exige: y(1) = 2 (2). La (1) es, pues, una EDO homogénea, así:

$\boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)}$. Para resolverla se hace la siguiente substitución:

Sea: $t = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = t\cdot x,\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$; de tal modo que:

$$t + x\frac{dt}{dx} = t - t^{-2} \Leftrightarrow x\frac{dt}{dx} = -t^{-2} \Leftrightarrow -t^2 dt = x^{-1}dx \Leftrightarrow -\int t^2 dt = \int x^{-1}dx\,,$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{1}{3}t^3 = \ln|x| + c \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \ln|x| + c \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\frac{y^3}{x^3} = \ln|x| + c\,,$$

$$y^3 = -3x^3\ln|x| - 3c\cdot x^3 \Leftrightarrow y^3 + 3x^3\ln|x| = -3c\cdot x^3\,;$$

$$y^3 + 3x^3\ln|x| = C\cdot x^3 \text{ (con } C = -3c) \quad (3)$$

Substituyendo los valores iniciales x = 1 e y = 2 en (3), se obtiene que:

$2^3 + 3x^3\ln 1 = C(1)^3 \Leftrightarrow C = 8$. De tal manera que la solución del problema con valores iniciales dado por (1) y (2) es: $y^3 + 3x^3\ln|x| = 8\cdot x^3$, por lo que la integral particular buscada será:

$$\boxed{y = x\sqrt[3]{8 - 3\ln x}}$$

Ejemplo 29

Resolver la EDO: $(x + y\cdot e^{y/x})dx - x\cdot e^{y/x}dy = 0$, con: y(1) = 0.

Solución:

$$(x + y\cdot e^{y/x})dx - x\cdot e^{y/x}dy = 0 \Leftrightarrow (x + y\cdot e^{y/x}) - x\cdot e^{y/x}\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x}e^{y/x} - e^{y/x}\frac{dy}{dx} = 0\,,$$

$$\Rightarrow \qquad e^{-y/x} + \frac{y}{x} - \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-y/x} + \frac{y}{x} \quad \text{(1), exigiéndose que: } y(1) = 0 \quad (2)$$

La (1) es, pues, una EDO homogénea $\boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)}$. Para resolverla se hace la siguiente substitución:

Sea: $t = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = t\cdot x,\ \Rightarrow\ x\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$; de tal modo que:

$$t + x\frac{dt}{dx} = e^{-t} + t \Leftrightarrow x\frac{dt}{dx} = e^{-t} \Leftrightarrow e^t\cdot dt = x^{-1}\cdot dx \Leftrightarrow \int e^t\cdot dt = \int x^{-1}\cdot dx \Leftrightarrow e^t = \ln|x| + C$$

Y se tendrá la I.G. expresada en forma implícita: $e^{y/x} = \ln|x| + C$ (3)

Substituyendo los valores correspondientes de x e y, dados por (2), en (3), se obtiene que: $e^{0/1} = \ln 1 + C \Leftrightarrow C = 1$ (4); y en forma implícita se tendrá que: $e^{y/x} = \ln|x| + 1$. {(4) en (3)}

La integral particular pedida será, en fin: $\boxed{y = x\cdot\ln(\ln|x| + 1)}$

Ejemplo 30

Resolver la EDO: $y\cdot dx + x(\ln x - \ln y - 1)dy = 0$, con: $y(1) = e$.

Solución:

$$y\cdot dx + x(\ln x - \ln y - 1)dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{x}{y}\left(\ln\frac{x}{y} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow 1/y' = \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}\left(1 - \ln\frac{x}{y}\right) \quad (1)$$

Pero se exige que: $y(1) = e$ (2)

La (1) es, pues, una EDO homogénea $\boxed{\frac{dx}{dy} = f\left(\frac{x}{y}\right)}$. Para resolverla se hace, como siempre, la siguiente substitución.

Sea: $t = \frac{x}{y} \Leftrightarrow x = t\cdot y, \Rightarrow \frac{dx}{dy} = t + y\frac{dt}{dy}$; de tal modo que:

$$t + y\frac{dt}{dy} = t(1 - \ln t) \Leftrightarrow t + y\frac{dt}{dy} = t - t\cdot\ln t \Leftrightarrow y\frac{dt}{dy} = -t\cdot\ln t \Leftrightarrow -\frac{dt}{t\cdot\ln t} = y^{-1}\cdot dy,$$

$$\Rightarrow \quad -\int\frac{1}{\ln t}\frac{dt}{t} = \int y^{-1}\cdot dy \Leftrightarrow -\ln(\ln t) = \ln y - \ln C \Leftrightarrow \ln(\ln t) + \ln y = \ln C,$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\ln\frac{x}{y}\right) + \ln y = \ln C \Leftrightarrow \ln\left(\ln\frac{x}{y}\times y\right) = \ln C \Leftrightarrow y\cdot\ln\frac{x}{y} = C \quad (3),$$

$\Rightarrow \quad e\cdot\ln\frac{1}{e} = C$ {(2) en (3)} $\Leftrightarrow$ $e\cdot\ln e^{-1} = C \Leftrightarrow C = -e$; lo que ofrece la integral particular siguiente: $\boxed{y\cdot\ln\frac{x}{y} = -e}$ {(3) en (3)}

Ejemplo 31

Integrar la ecuación diferencial ordinaria: $xy' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$.

Solución:

Como hemos visto en la teoría, se denomina ecuación diferencial *homogénea* a toda ecuación diferencial que se puede escribir en la forma:

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, siendo f(x, y) una función homogénea de grado cero.

Pues bien, la ecuación diferencial dada se puede escribir en la forma:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+xy} = \frac{1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (I)$$

y como el segundo miembro es una función homogénea de grado cero, en efecto, se trata de una ecuación diferencial homogénea.

Para la integración de este tipo de ecuaciones se hace $y = t\cdot x$, de donde: $dy = t\cdot dx + x\cdot dt$. Substituyendo en (I), se obtiene:

$$\frac{t\cdot dx + x\cdot dt}{dx} = \frac{x^2+tx^2+t^2x^2}{x^2+tx^2}, \text{ o bien:}$$

$t + x\frac{dt}{dx} = \frac{1+t+t^2}{1+t}$; $\quad x\frac{dt}{dx} = \frac{1+t+t^2}{1+t} - \frac{t(1+t)}{1+t} = \frac{1}{1+t}$; que también se puede escribir, separando adecuadamente las variables del problema: $(1+t)dt = \frac{dx}{x}$, que es una ecuación diferencial de variables separables. Integrando mediante una cuadratura, se obtiene:

$\frac{t^2}{2} + t + C = \ln x$, o bien: $x = e^{\frac{1}{2}t^2+t+C}$, y como: $t = \frac{y}{x}$, la integral general buscada es: $x = e^{\frac{1}{2}(y/x)^2+y/x+C} = \boxed{k\cdot e^{\frac{1}{2}(y/x)^2+y/x}}$, con: $k = e^C$.

Ejemplo 32

Resolver la EDO: $x\cdot y' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

Solución:

Lo primero que hemos de hacer es despejar y' y escribimos la ecuación planteada de la forma:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x},$$

donde $M(x,y) = y + \sqrt{y^2-x^2}$, N(x, y) = -x, son ambas funciones homogéneas de grado 1, luego es una ecuación homogénea, que resolvemos mediante el cambio de variable: $t = \frac{y}{x}$, siendo t una nueva variable dependiente de x. Es decir: $y = t\cdot x$, de donde: $y' = t + x\cdot t'$. Operando en la ecuación nos queda: $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, y substituyendo el cambio: $t + t' = t + \sqrt{t^2-1}$; y se llega a: $x\frac{dt}{dx} = \sqrt{t^2-1}$, donde se pueden separar las variables así: $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$, e integrar a continuación mediante una cuadratura.

Otra manera alternativa de resolverla dimana de la aplicación directa de la fórmula expuesta en la introducción teórica, por la que:

$\frac{dx}{x} = \frac{-N(1,t)\cdot dt}{M(1,t)+t\cdot N(1,t)} = \frac{dt}{t+\sqrt{t^2-1}-t} = \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$, alcanzándose las mismas conclusiones. La segunda integral lo es de una función irracional reducible a trigonométrica mediante el cambio de variable: t = 1/sen z. Esto es:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \left[t = (1/\operatorname{sen} z)\,; \sqrt{t^2-1} = \cos z/\operatorname{sen} z\,; dt = -\frac{\cos z}{\operatorname{sen}^2 z}dz \right] = -\int \frac{dz}{\operatorname{sen} z} =$$

$$= [\operatorname{tg}(z/2) = u] = -\int \frac{\frac{2\cdot du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}} = -\ln u + C = -\ln(\operatorname{tg}\frac{z}{2}) + C = -\ln(\frac{\operatorname{sen} z}{1+\cos z}) + C =$$

$$= -\ln(\frac{1/t}{1+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}) + C = -\ln(\frac{1}{t+\sqrt{t^2-1}}) + C = \ln(t+\sqrt{t^2-1}) + C.$$

Así pues, realizando las operaciones pertinentes, llegaríamos a que:
ln x + k = ln (t + $\sqrt{t^2-1}$), y haciendo: k = ln C', se tendrá que:

ln C'·x = ln (t + $\sqrt{t^2-1}$), de donde: C'·x = t + $\sqrt{t^2-1}$, y deshaciendo el cambio de variable: t= y/x, resultará, en definitiva, la I.G. buscada expresada en forma implícita:

$$\boxed{y + \sqrt{y^2 - x^2} = C'\cdot x^2}$$

Ejemplo 33

Resolver la EDO: (x – 2y – 1)dx + (3x – 6x + 2)dy = 0.

Solución:

Dividiendo por dx y despejando *y* nos queda: $y' = -\frac{x-2y-1}{3x-6y+2}$.

Las funciones M(x, y) = x – 2y – 1, N(x, y) = 3x – 6y + 2 no son homogéneas. Además esta EDO no es exacta, puesto que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2 \neq 3 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Como podemos observar, la ecuación es de la forma: $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

y puede reducirse a una homogénea mediante un cambio de variable (como ya vimos en otros ejercicios). Sin embargo, en este caso, las rectas x – 2y – 1 = 0 y 3x – 6y + 2 = 0 son paralelas, puesto que se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = 3a_1 \\ b_2 = 3b_1 \end{array}\right\}$$

luego no podemos trasladar el origen al punto de intersección de las dos rectas ya que no existe el susodicho punto. Cuando nos encontremos con este problema, definiremos una nueva variable u, de la siguiente forma:

$$3x - 6y = u, \text{ de donde: } 3 - 6y' = u',$$

puesto que ya supondremos que u será dependiente de x. Por tanto: $y' = \frac{3-u'}{6}$ y substituyendo en las rectas, se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{u}{3} - 1 = 0 \\ u + 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Llevándolo a la ecuación diferencial, resultará que:

$$\frac{3-u'}{6} = -\frac{\frac{u}{3}-1}{u+2}, \text{ que se reduce a: } u' = \frac{5u}{u+2},$$

que es una ecuación de variables separadas, cuya solución es la siguiente:

$$\int \frac{u+2}{5u} du = \int dx, \text{ luego: } \frac{u}{5} + \frac{2}{5}\ln u = x + C.$$

Deshaciendo el cambio u = 3x – 6y resultará:

$$\frac{1}{5}[3x - 6y + 2\ln(3x - 6y)] = x + C, \text{ o bien, si: } 2k = 5C,$$

$$2 \ln(3x - 6y) - 6y = 2x + 2k,$$

Entonces: $\boxed{\ln(3x - 6y) - 3y - x = k}$, que es la solución general de la ecuación planteada expresada en forma implícita.

Ejemplo 34

Resolver la EDO: $y^3dy + 3y^2x \cdot dx = -2x^3dx$.

Solución:

Agrupando dx, podemos escribirla como:

$(3y^2x + 2x^3)dx + y^3dy = 0$, y dividiendo por dx, nos queda: $y' = -\frac{3y^2x + 2x^3}{y^3}$.

Nos damos cuenta de que es una ecuación homogénea con:

$$M(x, y) = 3y^2x + 2x^3, \quad N(x, y) = y^3,$$

que son ambas funciones homogéneas de grado 3, por lo que dividiendo ahora por x^3 resulta que:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2}{\left(\frac{y}{x}\right)^3} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

El cambio adecuado de variable para una ecuación homogénea es, como sabemos:

$t = \dfrac{y}{x}$, luego: $y' = t + x\cdot t'$. Substituyendo en la ecuación resultará que:

$$t + x\cdot t' = -\frac{3t^2 + 2}{t^3}, \text{ de donde: } x\cdot t' = -\frac{3t^2 + 2 + t^4}{t^3},$$

que es una ecuación de variables separadas, que podemos resolver como siempre mediante una cuadratura, así:

$$-\int \frac{t^3}{t^4 + 3t^2 + 2}dt = \int \frac{1}{x}dx, \text{ sabiendo que: } t^4 + 3t^2 + 2 = (t^2 + 1)(t^2 + 2).$$

Integrando en ambos miembros se obtiene que:

$$\frac{1}{2}\ln\left|t^2 + 1\right| - \ln\left|t^2 + 2\right| = \ln C\cdot x \text{ (teniendo en cuenta que } \ln C = k\text{). Luego:}$$

$$\ln\frac{(t^2 + 1)^{1/2}}{t^2 + 2} = \ln C\cdot x, \text{ entonces: } \frac{(t^2 + 1)^{1/2}}{t^2 + 2} = C\cdot x .$$

Deshaciendo el cambio, resultará que:

$$\frac{(y^2 + x^2)^{1/2}}{y^2 + 2x^2} = C, \text{ o bien: } \frac{y^2 + x^2}{(y^2 + 2x^2)^2} = C',$$

donde $C' = C^2$, que es la solución general implícita de la ecuación homogénea.

Si se desea obtener la forma explícita de *y* debe operarse del siguiente modo:

$$\frac{y^2 + x^2}{y^4 + 4x^4 + 4x^2y^2} = C'; \quad y^2 + x^2 = C'\cdot y^4 + 4C'x^4 + 4C'x^2y^2 ;$$

$$C'y^4 + (4C'x^2 - 1)y^2 + (4C'x^4 - x^2) = 0 ;$$

, que se trata de una ecuación bicuadrada, por lo que haciendo el cambio $y^2 = z$, ofrece:

$$C'\cdot z^2 + (4C'x^2 - 1)z + (4C'x^4 - x^2) = 0; \text{ de donde:}$$

$$z = \frac{1-4C'x^2 \pm \sqrt{(4C'x^2-1)^2 - 4C'(4C'x^4 - x^2)}}{2C'} =$$
$$= \frac{1-4C'x^2 \pm \sqrt{16C'^2x^4 + 1 - 8C'x^2 - 16C'^2x^4 + 4C'x^2}}{2C'} =$$
$$= \frac{1-4C'x^2 \pm \sqrt{-4C'x^2}}{2C'} = \frac{1-4C'x^2 \pm i2Cx}{2C'} =$$
$$= \begin{pmatrix} \text{puesto que} \\ C' = C^2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{1-4C'x^2 + i2Cx}{2C'} \\ \dfrac{1-4C'x^2 - i2Cx}{2C'} \end{cases};$$

y como $y = \pm\sqrt{z}$, se tendrá que:

$$\boxed{y(x) = \pm\sqrt{\frac{1-4C'\cdot x^2 \pm i2C\cdot x}{2C'}}}$$

o sea, que habrá 4 posibles soluciones que también pueden expresarse así:

$$\boxed{y(x) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{e^{2C_1}(e^{2C_1} - 4x^2)} + e^{2C_1} - 4x^2}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{k(k-4x^2)} + k - 4x^2}{2}}}$$

y también:

$$\boxed{y(x) = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{e^{2C_1}(e^{2C_1} - 4x^2)} + e^{2C_1} - 4x^2}{2}} = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{k(k-4x^2)} + k - 4x^2}{2}}},$$

habiendo hecho la substitución: $k = e^{2C_1}$.

Ejemplo 35

Resolver la EDO: $(4x^2 - x\cdot y + y^2)dx + (x^2 - x\cdot y + 4y^2)dy = 0$.

Solución:

Veamos, en primer lugar, de qué tipo de ecuación se trata; es fácil darse cuenta de que no es de ninguno de los tipos anteriores, variables separadas, lineales o de Bernouilli. Observamos también las funciones que acompañan a los dos diferenciales: ambas son homogéneas de grado dos en x e y, puesto que cumplen con la condición: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$. En efecto, si llamamos:

$$\left.\begin{aligned} M(x, y) &= 4x^2 - xy + y^2 \\ N(x, y) &= x^2 - xy + 4y^2 \end{aligned}\right\} \text{ vemos que:}$$

$$\left.\begin{array}{l} M(\lambda x,\lambda y)=4\lambda^2x^2-\lambda^2xy+\lambda^2y^2=\lambda^2(4x^2-xy+y^2) \\ N(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2x^2-\lambda^2xy+4\lambda^2y^2=\lambda^2(x^2-xy+4y^2) \end{array}\right\},$$

luego es una ecuación homogénea y vamos a ver cómo se resuelve.

Si dividimos por dx y despejamos, escribiremos:

$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x^2-xy+y^2}{x^2-xy+4y^2}$, como $\frac{dy}{dx}=y'$, entonces, $y'=\frac{4x^2-xy+y^2}{x^2-xy+4y^2}$.

Una vez que tenemos la ecuación configurada de esta forma, sacamos factor común la potencia más alta de x (en este caso, x^2) en el miembro de la derecha, así:

$y'=-\frac{4-\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-\frac{y}{x}+4\left(\frac{y}{x}\right)^2}=f\left(\frac{y}{x}\right)$. Ya podemos resolver la ecuación homogénea mediante un cambio de variable. Cambiamos la variable dependiente *y*, por una nueva variable t, que también depende de *x*, esto es,

$t=\frac{y}{x}$, despejamos y = t·x, y ahora derivamos respecto de x, quedando: y' = t + x·t'. Substituimos lo anterior en la ecuación que resulta de sacar como factor común x^2, de tal forma que: $t+x\cdot t'=\frac{-4+t-t^2}{1-t+4t^2}$, de donde: $x\cdot u'=\frac{-4+t-t^2}{1-t+4t^2}-t$. Sabemos que: $t'=\frac{dt}{dx}$, por tanto, $\frac{1-t+4t^2}{-4-4t^3}dt=\frac{1}{x}dx$.

Luego hemos llegado al fin a una ecuación con variables separadas que ya sabemos resolver, como hacemos a continuación:

$\int\frac{1-t+4t^2}{-4-4t^3}dt=\int\frac{1}{x}dx$, resultando: $4\ln|t-1|-\frac{7}{t-1}-2(t-1)^2=\ln|x|+k$.

Si decimos que k = ln C, entonces resultará que:

$4\ln|t-1|-\frac{7}{t-1}-2(t-1)^2=\ln C\cdot|x|$. Deshaciendo, en fin, el cambio de variable realizado al principio, resultará que:

$$\boxed{4\ln\left(\frac{y}{x}-1\right)-\frac{7x}{y-x}-2\left(\frac{y}{x}-1\right)^2=\ln C\cdot x,}$$

es la solución general buscada, en forma implícita, de la ecuación inicialmente planteada.

3. ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER ORDEN

Una ecuación de primer orden y lineal, esto es, de primer grado en la función y en sus derivadas, solo puede tener términos en y, en y' además de aquellos independientes de y. Adoptará, por tanto, la forma general:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + X \cdot y + X_1 = 0}$$

donde X y X_1 representan funciones de la única variable independiente x.

Si $X_1 = 0$, la ecuación recibe el nombre de "homogénea"; empezaremos por la integración en este caso particular.

Sea, por tanto, la ecuación lineal de primer orden y homogénea:

$$\frac{dy}{dx} + X \cdot y = 0$$

Su integración resulta inmediata, puesto que se trata de una ecuación de variables separables, así:

$$\frac{dy}{y} = -X \cdot dx$$. Integrando: $\ln y - \ln C = -\int X \cdot dx$; $\ln(y/C) = -\int X \cdot dx$

de donde: $\boxed{y = -C \cdot e^{-\int X \cdot dx}}$ $\Rightarrow$ I. G.

Para la integración de la ecuación completa, seguiremos un procedimiento muy utilizado en la resolución de las ecuaciones diferenciales, denominado "variación de constantes". Consiste el método en substituir la constante C, hallada anteriormente, por una función desconocida que designaremos por C(x), de forma tal que:

$$y = -C(x) \cdot e^{-\int X \cdot dx} \quad [I]$$

verifique a la ecuación completa, esto es, a la ecuación:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 = 0} \quad [II]$$

Derivando en [I], se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dC}{dx} e^{-\int X \cdot dx} + C \cdot X e^{-\int X \cdot dx}$$

Substituyendo en [II] los valores de y e y', se tendrá que:

$$-\frac{dC}{dx}e^{-\int X\cdot dx} + C{\cdot}X{\cdot}e^{-\int X\cdot dx} - X{\cdot}Ce^{-\int X\cdot dx} + X_1 = 0$$

o sea: $\frac{dC}{dx}e^{-\int X\cdot dx} = X_1$, de donde: $dC = X_1 \cdot e^{\int X\cdot dx} \cdot dx$.

Seguidamente, una cuadratura proporciona: $C + K = \int X_1 \cdot e^{\int X\cdot dx} \cdot dx$, donde por K se representa la nueva constante. Substituyendo en [I] C por su valor, se obtiene, en definitiva, la fórmula [III]:

$$\boxed{y = e^{-\int X\cdot dx}\,[\,K - \int X_1 \cdot e^{\int X\cdot dx} \cdot dx\,]} \Rightarrow \text{I. G.}$$

que es la integral general de la ecuación diferencial lineal de primer orden.

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos ilustrativos:

Ejemplo 1

Resolver la ecuación diferencial genérica: $y' + y\cdot f(x) + g(x) = 0$.

Solución:

Para integrar esta ecuación, conocida con la denominación de “ecuación lineal de primer orden”, se empieza por resolver la ecuación homogénea: $y' + y\cdot f(x) = 0$, cuya integral general, obtenida en la teoría anterior, es:

$y_1 = K{\cdot}e^{-\int f(x)\cdot dx}$. A continuación, se supone que la constante K es una función K(x), que se determina con la condición de que:

$y_1 = K(x){\cdot}e^{-\int f(x)\cdot dx}$, verifique la ecuación propuesta. Como:

$y_1' = K'(x){\cdot}e^{-\int f(x)\cdot dx} - K(x)\cdot e^{-\int f(x)\cdot dx}\cdot f(x)$, substituyendo en la ecuación inicial se obtiene que:

$$K'(x){\cdot}e^{-\int f(x)\cdot dx} - K(x)\cdot e^{-\int f(x)\cdot dx}\cdot f(x) + K(x)\cdot e^{-\int f(x)\cdot dx}\cdot f(x) + g(x) = 0\,,$$

o bien: $K'(x){\cdot}e^{-\int f(x)\cdot dx} + g(x) = 0$, de donde: $K'(x) = -g(x)\cdot e^{\int f(x)\cdot dx}$, e integrando mediante una cuadratura, se obtiene que: $K(x) = C - \int g(x){\cdot}e^{\int f(x)\cdot dx}{\cdot}dx$, donde C es la nueva constante de integración.

Por lo tanto, la integral general de la ecuación propuesta, coincidente con la expresión [III] anterior, es la siguiente:

$$\boxed{y = \left[C - \int g(x){\cdot}e^{\int f(x)\cdot dx}{\cdot}dx\right]\cdot e^{-\int f(x)\cdot dx}}$$

, que constituye la formulación teórica válida para la resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias, como ya hemos tenido ocasión de resaltar en la introducción teórica, en que se ha hecho: g(x) = X_1(x) y f(x) = X(x).

Ejemplo 2

Integrar la ecuación diferencial ordinaria: $y' + \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$.

Solución:

Se trata de una ecuación diferencial lineal de primer orden (véase el ejercicio anterior). Su integración se puede lograr directamente aplicando la fórmula hallada y expuesta en la introducción teórica así como en el ejercicio anterior, o sea:

$$y = \left[C - \int g(x) \cdot e^{\int f(x) \cdot dx} \cdot dx\right] \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx},$$

pero preferimos aplicar el método expuesto de variación de constantes para su mejor compresión. Empezaremos, pues, por integrar la ecuación homogénea: $y' + \frac{y}{x} = 0$, que es una ecuación de variables separables que se puede escribir: $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$, y, después de integrar resulta que: $\ln y = -\ln x + \ln C = \ln\frac{C}{x}$, de donde se obtiene: $y = \frac{C}{x}$.

Substituyendo la constante C por la función C(x), se obtiene y = C(x)/x, función que vamos a obligar que satisfaga la ecuación diferencial propuesta. Derivando y substituyendo se obtiene que:

$\frac{x \cdot C'(x) - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0$, de donde: $x \cdot C'(x) = 1$; $C'(x) = \frac{1}{x}$, y, de aquí: C(x) = ln x + ln K = ln K·x, donde K es la nueva constante arbitraria. La integral general será, pues:

$$\boxed{y = \frac{\ln K \cdot x}{x}}.$$

Ejemplo 3

Resolver: a) por aplicación del método de variación de constantes, y b) por aplicación directa de la fórmula correspondiente, la ecuación diferencial ordinaria: $y' + 2xy - 2xe^{-x^2} = 0$.

Solución:

a) La ecuación homogénea correspondiente será: y' + 2xy = 0 (X_1 = 0), que se puede escribir así: $\frac{dy}{y} = -2x \cdot dx$, e integrando resultará que:

$$\ln y - \ln C = -x^2 , \quad \text{de donde:} \quad y = C \cdot e^{-x^2}$$

Suponiendo ahora que en vez de la constante C se escribe la función C(x), aunque por comodidad de escritura no lo haremos, derivando se obtiene: $y' = C' e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2}$. Substituyendo en la ecuación inicial se tendrá que:

$$C' e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2} + 2xCe^{-x^2} - 2xe^{-x^2} = 0$$

o sea: $\frac{dC}{dx} = 2x$; $\quad C = K + x^2$, y la solución general buscada será:

$$\boxed{y = (K + x^2)e^{-x^2}} \Rightarrow \text{I.G.}$$

b) Obviamente, se llega al mismo resultado por aplicación directa de la fórmula anterior [III] explicada en la introducción teórica. En efecto:

$$y' + 2xy - 2x \cdot e^{-x^2} = 0$$

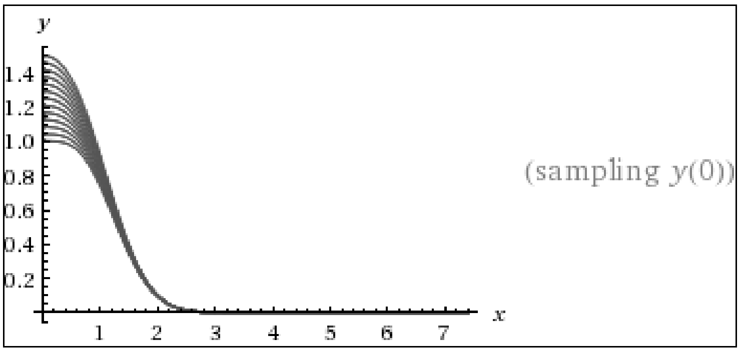
$$\left. \begin{array}{l} X = 2x \\ X_1 = -2x \cdot e^{-x^2} \end{array} \right\}$$

$$\int X \cdot dx = 2\int x \cdot dx = x^2;$$

$$\int X_1 \cdot e^{\int x \cdot dx} \cdot dx = -2\int x e^{-x^2} \cdot e^{x^2} \cdot dx = -2\int x \cdot dx = -x^2.$$

, y se obtiene la solución general: $\boxed{y = e^{-x^2}\left[K + x^2\right]}$, c.s.q.d.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 4

Sea ahora, integrar la ecuación diferencial: $y' + 2y - x^2 - 2x = 0$.

Solución:

Apliquemos directamente la fórmula [III], esto es:

$$y = e^{-\int X\cdot dx}\left[K - \int X_1 e^{\int X\cdot dx} dx\right]$$, donde: $X = 2$ y $X_1 = -(x^2 + 2x)$.

Para ello calculemos las integrales: $\int X\cdot dx = 2\int dx = 2x$; y también:

$$\int X_1\cdot e^{\int X\cdot dx}\cdot dx = -\int(x^2 + 2x)\cdot e^{2x}\cdot dx = -\int x^2 e^{2x} dx - \int 2x\cdot e^{2x} dx \qquad (1)$$

Pero aplicando la integración por partes, se tiene que:

$$\int x^2 e^{2x} dx = ½ \int x^2\cdot 2\cdot e^{2x} dx = ½ (x^2\cdot e^{2x}) - ½ \int e^{2x}\cdot 2x\cdot dx = ½ x^2\cdot e^{2x} - \int e^{2x}\cdot x\cdot dx \;;$$

Substituyendo en (1), se tendrá que:

$$-½ x^2\cdot e^{2x} + \int e^{2x}\cdot x\cdot dx - \int 2x\cdot e^{2x}\cdot dx = -½ x^2\cdot e^{2x} - \int x\cdot e^{2x}\cdot dx \qquad (2);$$

Pero, a su vez:

$$\int x\cdot e^{2x} dx = ½ \int x\cdot 2\cdot e^{2x} dx = ½\cdot x\cdot e^{2x} - ½ \int e^{2x}\cdot dx = ½ x\cdot e^{2x} - ¼ e^{2x} \;;$$

Substituyendo en (2), se tiene:

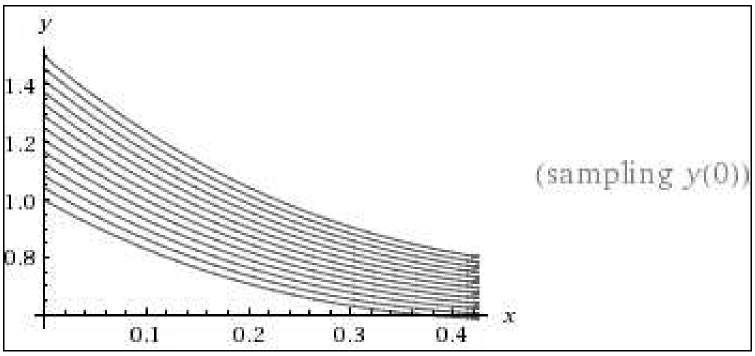
$$-½\cdot x^2\cdot e^{2x} - ½ x\cdot e^{2x} + ¼ e^{2x} =$$

$$= -\frac{2x^2\cdot e^{2x}}{4} - \frac{2x\cdot e^{2x}}{4} + \frac{e^{2x}}{4} = -\frac{e^{2x}}{4}(2x^2 + 2x - 1)$$

Así pues, la integral o solución general buscada de la ecuación planteada será:

$$\boxed{y = e^{-2x}\left[K + \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 + 2x - 1)\right] = Ke^{-2x} + \frac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1)} \Rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 5

Resolver el mismo problema anterior por aplicación del método de variación de constantes.

Solución:

Empleando dicho método, se tiene que: $y' + 2y - x^2 - 2x = 0,$ (1)

$y' + 2y = 0$; $dy/dx = -2y$; $dy/y = -2\cdot dx$; $\ln y - \ln C = -2x$; o sea:

$$y = C\cdot e^{-2x}\ ;\quad y' = C'\cdot e^{-2x} - 2\cdot C\cdot e^{-2x}\ ;$$

Substituyendo en (1), se tiene que:

$$C'\cdot e^{-2x} - 2\cdot C\cdot e^{-2x} + 2\cdot C\cdot e^{-2x} - x^2 - 2x = 0\ ;$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{x^2 + 2x}{e^{-2x}}\ ;\quad C = \int (x^2 + 2x)e^{2x}dx = \int x^2 e^{2x}dx + \int 2x\cdot e^{2x}dx\ ;$$

Ahora bien, integrando por partes:

$$\int x^2\cdot e^{2x}\cdot dx = \frac{1}{2}\int x^2\cdot 2\cdot e^{2x}\cdot dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 \\ v = e^{2x} \\ du = 2x\cdot dx \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot 2x\cdot dx\ ;\ \text{de donde}\ :$$

$$C = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot 2x\cdot dx + \int e^{2x}\cdot 2x\cdot dx = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot 2x\cdot dx\ ;$$

Nuevamente, volviendo a integrar por partes:

$$\int e^{2x}\cdot 2x\cdot dx = \left\{\begin{matrix} u = x \\ v = e^{2x} \\ du = dx \end{matrix}\right\} = x\cdot e^{2x} - \int e^{2x}\cdot dx = x\cdot e^{2x} - \frac{e^{2x}}{2}\ ,\ \text{con lo que:}$$

$$C = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x} + \frac{1}{2}x\cdot e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + K = \frac{2}{4}x^2\cdot e^{2x} + \frac{2}{4}x\cdot e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} + K =$$

$$= \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 + 2x - 1) + K\ ;$$

y la solución general buscada por este método será:

$$\boxed{y = C\cdot e^{-2x} = e^{-2x}\left[K + \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 + 2x - 1)\right] = K\cdot e^{-2x} + \frac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1)}$$

, que resulta plenamente coincidente con la solución anteriormente hallada por aplicación directa de la fórmula [III] de la teoría, c.s.q.d.

Ejemplo 6

Solve the ordinary differential equation: $\frac{dy}{dx} - xy = x$.

Solution:

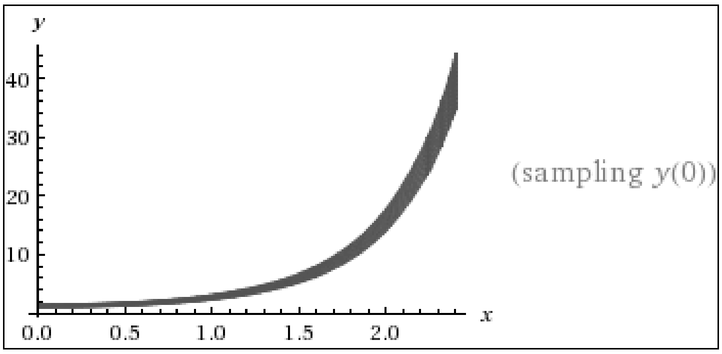
Is a first order linear equation. Here $P(x) = -x$, $\int P(x) \cdot dx = -\frac{1}{2}x^2$, and

$\xi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Then $e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dy - x \cdot y \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$; $y \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C$, and

$$\boxed{y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} - 1}.$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 7

Resolver el siguiente problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y' + 3y = \text{sen } 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea, será:

$$\lambda + 3 = 0 \ ; \quad \lambda = -3 \ ; \quad \text{con lo que:} \quad y^* = c \cdot e^{-3x}.$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$$\begin{cases} y_p = h \cdot \cos 2x + k \cdot \text{sen } 2x \\ y'_p = -2h \cdot \text{sen } 2x + 2k \cdot \cos 2x \end{cases}$$

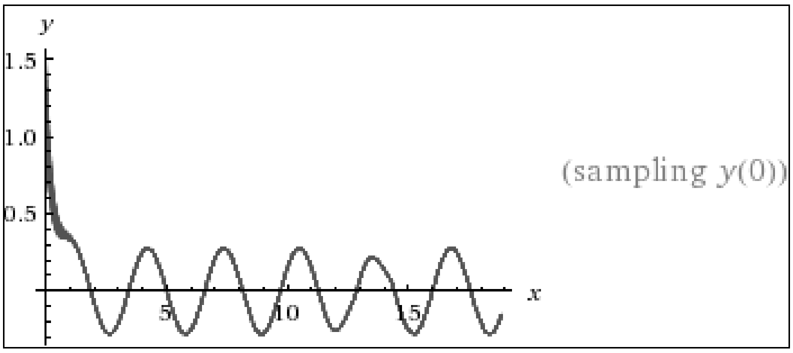
y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene:

$$-2h \cdot \text{sen } 2x + 2k \cdot \cos 2x + 3h \cdot \cos 2x + 3k \cdot \text{sen } 2x = \text{sen } 2x \ ;$$

$$-2h + 3k = 1 \ ; \quad \text{de donde: } h = -2/13 \ ; \quad k = 3/13 \ ; \quad 3h + 2k = 0 \ ;$$

$$y(x) = y^* + y_p = c\cdot e^{3x} - 2/13\cdot \cos 2x + 3/13\cdot \text{sen } 2x \ ;$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Como: $y(0) = c - 2/13 = 0$; $c = 2/13$; con lo que:

$$\boxed{y(x) = \frac{2}{13}\cdot e^{-3x} - \frac{2}{13}\cdot \cos 2x + \frac{3}{13}\cdot \text{sen } 2x}$$

Este problema lo hemos resuelto siguiendo los procedimientos establecidos para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de grado superior que veremos en el siguiente capítulo. Sin embargo, de hecho se trata de una ecuación lineal de primer orden, con: $X = 3$; $X_1 = -\text{ sen } 2x$; y:

$$\int X\cdot dx = 3x \ ; \quad \int X_1\cdot e^{\int X\cdot dx}\cdot dx = -\int \text{sen } 2x\cdot e^{3x}\cdot dx \ ,$$

de solución más laboriosa. Veámosla seguidamente, integrando por partes la siguiente función:

$$\int \overbrace{\cos 2x}^{u}\cdot\overbrace{e^{3x}\cdot dx}^{dv} = \boxed{\begin{array}{c} u = \cos 2x \\ v = \dfrac{e^{3x}}{3} \\ du = -2\cdot \text{sen } 2x \end{array}} = \frac{\cos 2x\cdot e^{3x}}{3} + \frac{2}{3}\int e^{3x}\cdot \text{sen } 2x\cdot dx$$

y alternativamente, integrando también por partes:

$$\int \cos 2x\cdot e^{3x}\cdot dx = \boxed{\begin{array}{c} u = e^{3x} \\ v = \dfrac{\text{sen } 2x}{2} \\ du = e^{3x} \end{array}} = \frac{\text{sen } 2x\cdot e^{3x}}{2} - \frac{3}{2}\int \text{sen } 2x\cdot e^{3x}\cdot dx$$

Llamando a la integral problema: $I = \int \text{sen } 2x\cdot e^{3x}\cdot dx$, se tiene que:

$$\frac{\cos 2x\cdot e^{3x}}{3}+\frac{2I}{3}=\frac{\text{sen}\,2x\cdot e^{3x}}{2}-\frac{3I}{2}\,;\quad 2\cdot\cos 2x\cdot e^{3x} + 4I = 3\cdot\text{sen}\,2x\cdot e^{3x} - 9I\,;$$

$$13I = 3\cdot\text{sen}\,2x\cdot e^{3x} - 2\cdot\cos 2x\cdot e^{3x} = e^{3x}(3\cdot\text{sen}\,2x - 2\cdot\cos 2x)$$

$$I=\frac{e^{3x}(3\cdot\text{sen}\,2x-2\cdot\cos 2x)}{13}\,;\quad \text{con lo que:}$$

$$y(x)=e^{-3x}\left[c+\frac{e^{3x}(3\cdot\text{sen}\,2x-2\cdot\cos 2x)}{13}\right]=c\cdot e^{-3x}+\frac{3\cdot\text{sen}\,2x-2\cdot\cos 2x}{13}\,,$$

que ofrece el mismo resultado ya obtenido por el método anterior, como no podría ser de otra manera, al cual habría que aplicar las condiciones iniciales dadas para hallar la integral particular correspondiente.

Ejemplo 8

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' - 5y = e^{5x} \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea, será:

$$\lambda - 5 = 0\,;\quad \lambda = 5\,;\quad \text{con lo que:}\quad y^* = c\cdot e^{5x}.$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea, teniendo en cuenta que 5 es raíz de la homogénea, con lo que:

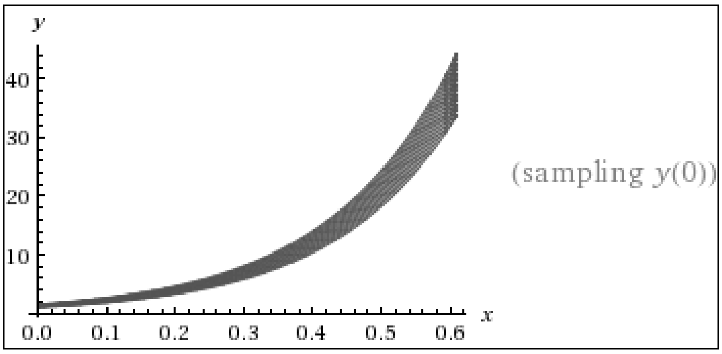
$$\begin{cases} y_p = A\cdot x\cdot e^{5x} \\ y'_p = A\cdot e^{5x} + 5Ax\cdot e^{5x} \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

$$A\cdot e^{5x} + 5A\cdot x\cdot e^{5x} - 5A\cdot x\cdot e^{5x} = e^{5x}\,;\quad A = 1\,;\quad \text{con lo que la I.G. será:}$$

$$y(x) = y^* + y_p = c\cdot e^{5x} + x\cdot e^{5x} = e^{5x}(c + x).$$

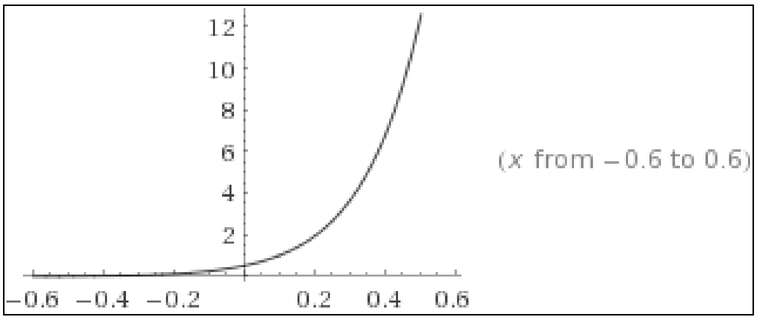
La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:

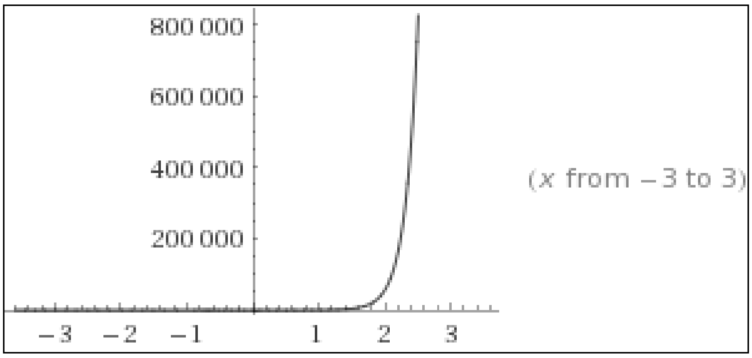


Como: $y(0) = c = ½$; luego la solución particular buscada será:

$$\boxed{y(x) = e^{5x}(½ + x)}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Considerando ahora, que se trata de una ecuación lineal de primer orden, podríamos haberla resuelto por el método de variación de constantes o bien por aplicación directa de la fórmula "ad hoc". En este último caso, se tendría que: $X = -5$; $X_1 = -e^{5x}$; y:

$$\int X\cdot dx = -5x \,;\quad \int X_1\cdot e^{\int X\cdot dx}\cdot dx = -\int e^{5x}\cdot e^{-5x}\cdot dx = -x \text{, y la I.G. será:}$$

$$y(x) = e^{5x}(c + x) \text{ , c.s.q.d.}$$

Ejemplo 9

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' - 5y = \cos 3x \\ y(0) = ½ \end{cases}$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea, será:

$$\lambda - 5 = 0 \ ; \quad \lambda = 5 \ ; \quad \text{con lo que:} \quad y^* = c \cdot e^{5x}.$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$$\begin{cases} y_p = h \cdot \cos 3x + k \cdot \text{sen } 3x \\ y'_p = -3h \cdot \text{sen } 3x + 3k \cdot \cos 3x \end{cases}$$

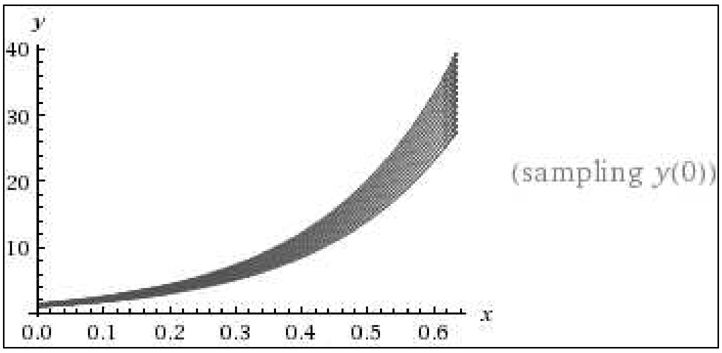
y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

$$-3h \cdot \text{sen } 3x + 3k \cdot \cos 3x - 5h \cdot \cos 3x - 5k \cdot \text{sen } 3x = \cos 3x \ ;$$

$$\left.\begin{array}{l} 3k - 5h = 1 \\ -5k - 3h = 0 \end{array}\right\} \quad \text{de donde: } k = 3/34 \ ; \ h = -5/34 \ ; \text{ y la I.G. será:}$$

$$y(x) = y^* + y_p = c \cdot e^{5x} - (5/34) \cdot \cos 3x + (3/34) \cdot \text{sen } 3x.$$

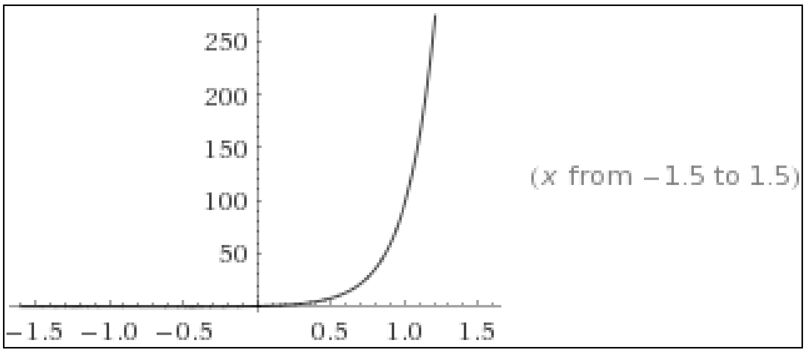
La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:

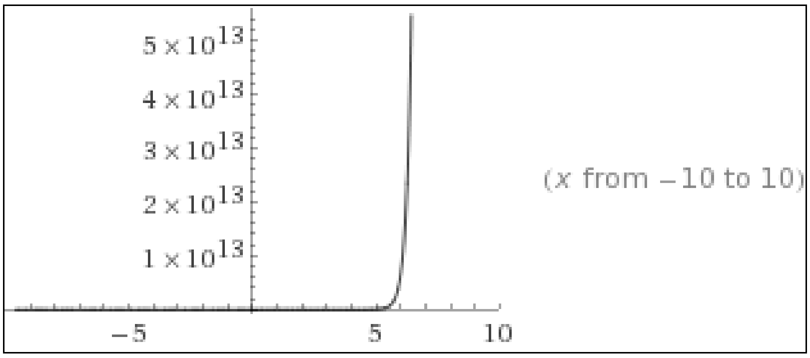


Como: $y(0) = c - 5/34 = ½$; o sea: $c = 11/17$; con lo que la I.P. será:

$$\boxed{y(x) = \frac{11}{17} \cdot e^{5x} - \frac{5}{34} \cdot \cos 3x + \frac{3}{34} \cdot \text{sen } 3x}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





De hecho, se trata de una ecuación diferencial lineal de primer orden, con: $X = -5$; $X_1 = -\cos 3x$; y entonces:

$$\int X \cdot dx = -5x \; ; \quad \int X_1 \cdot e^{\int X \cdot dx} \cdot dx = -\int \cos 3x \cdot e^{-5x} \cdot dx \, ,$$

de solución más laboriosa y que resolveríamos integrando por partes:

$$I = \int \operatorname{sen} 3x \cdot e^{-5x} \cdot dx \, ,$$

tal como se ha efectuado en el problema anterior, alcanzando, obviamente, el mismo resultado que acabamos de obtener en este mismo problema.

Ejemplo 10

Resolver la EDO: $xy' + y = x^3$.

Solución:

Es fácil darse cuenta de que esta ecuación no es de variables separadas, ni tampoco resulta reducible a una de esta forma. El siguiente tipo que conocemos es la denominada “ecuación lineal de primer orden”. Para saber si una ecuación es lineal de primer orden, debemos dejar sola la y’, es decir, debemos dividir toda la ecuación por su coeficiente; en nuestro caso nos queda lo siguiente:

$y' + \frac{y}{x} = x^2$. La ecuación que queda será lineal si aparece una función exclusivamente de x multiplicando a la y, y otra, de las mismas características, como término independiente (es decir, sin *y* y sin *y'*). Nuestra ecuación es entonces lineal, porque la y está multiplicada por la función $\frac{1}{x}$, que es exclusivamente de x, y el término independiente es x^2, que también es una función solo de x. Para resolver una ecuación de este tipo, hallamos primero la solución general de la ecuación homogénea asociada; ésta es:

xy' + y = 0. De nuevo buscamos de qué tipo de ecuación se trata y, para ello, substituimos y' por $\frac{dy}{dx}$ y, despejando, vemos que es de variables separadas, con lo que: $x\frac{dy}{dx}+y=0$; $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$.

Integrando miembro a miembro: $\int\frac{dy}{y}=\int-\frac{dx}{x}$, resulta: ln |y| = - ln |x| + k.

Si decimos que k = lnC, podemos escribir: $\ln|y|=\ln\frac{C}{|x|}$, y de ahí $y^*=\frac{C}{x}$, que es la solución general de la ecuación homogénea.

Buscamos ahora una solución particular de la ecuación completa o no homogénea. Para ello podemos utilizar dos métodos, pero comenzaremos aplicando el más general de ellos, llamado de “variación de constantes”, que ya se ha explicado en la teoría. Consiste en buscar una solución particular de la completa que sea de la misma forma que la solución general de la homogénea (que habremos hallado previamente).

En primer lugar, consideraremos la constante C como si se tratara de una función de x, y luego derivaremos respecto de x. Si $y_p=\frac{C(x)}{x}$, entonces $y'_p(x) = C'(x)x^{-1} - C(x)x^{-2}$. Substituimos en la ecuación (en la del enunciado o en la que queda después de dejar sola la y', indistintamente):

$x\left[\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}\right]+\frac{C(x)}{x}=x^3$, y simplificando, $C'(x) = x^3$; integrando en ambos miembros respecto de x resultará que: $C(x)=\int x^3dx$; $C(x)=\frac{x^4}{4}$.

Luego, $y_p(x)=\frac{x^3}{4}$ es una solución particular de la ecuación completa.

La solución general de la ecuación completa es igual a la suma de la solución de la homogénea y la particular de la completa encontradas. Este principio también resultará de aplicación en la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior que veremos en el capítulo siguiente de este mismo libro.

Por ello, escribiremos al final: $\boxed{y = y^* + y_p = \frac{C}{x} + \frac{x^3}{4}}$, que es, en definitiva, la solución general buscada de la ecuación completa.

Ejemplo 11

Resolver la EDO: y' + 2y = 2x.

Solución:

También es una ecuación lineal de primer orden con f(x) = 2 multiplicando a la y, y g(x) = 2x como término independiente.

La ecuación homogénea asociada es: y' + 2y = 0, o sea, $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$.

Se trata de una ecuación de variables separadas: $\frac{dy}{y} = -2x$, por lo que integrando mediante una cuadratura: $\int \frac{dy}{y} = \int -2x \cdot dx$, obtenemos: ln $|y|$ = - 2x + k. Si C = e^k. Escribimos y* = $C \cdot e^{-2x}$, que es la solución general de la ecuación homogénea. Hallemos ahora la solución particular de la completa volviendo a usar el método de variación de constantes. Considerando la constante C como función de x, y luego derivándola, se tendrá que:

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^{-2x} \text{, de donde: } y'_p(x) = C'(x) \cdot e^{-2x} - 2C(x) \cdot e^{-2x}.$$

Substituimos en la ecuación y simplificamos: $C'(x) = 2x \cdot e^{2x}$. Integrando: $C(x) = \int 2x \cdot e^{2x} \cdot dx$, de donde tenemos que: $C(x) = e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, por lo tanto, $y_p(x) = x - \frac{1}{2}$ es una solución particular de la completa.

Entonces la solución general de la completa será la suma de las dos obtenidas, o sea:

$$\boxed{y = y^* + y_p = C \cdot e^{-2x} + x - \frac{1}{2}}.$$

Ejemplo 12

Resolver la EDO: y' + 2y = sen x.

Solución:

De nuevo observamos que estamos ante una ecuación lineal de primer orden. Como la ecuación homogénea asociada coincide con la del ejercicio anterior, pasamos a buscar directamente una solución particular de la completa. Utilizaremos esta vez otro método que consiste en tantear funciones particulares hasta encontrar alguna que satisfaga la ecuación diferencial: $y^*(x) = C\cdot e^{-2x}$.

Observando el término independiente de nuestra ecuación, parece lógico ensayar la función: $y_p = \alpha\cdot \text{sen } x + \beta\cdot \cos x$, que derivando respecto de x nos queda así $y'_p = \alpha\cdot \cos x - \beta\cdot \text{sen } x$. Se substituye en la ecuación y luego igualamos coeficientes (en este caso, los coeficientes sen x y cos x) es decir:

$$\alpha\cdot \cos x - \beta\cdot \text{sen } x + 2\alpha\cdot \text{sen } x + 2\beta\cdot \cos x = \text{sen } x.$$

$\left.\begin{array}{l}\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha - \beta = 1\end{array}\right\}$, resultando que: $\alpha = \frac{2}{5}$ y $\beta = -\frac{1}{5}$. Entonces: $y_p = \frac{2}{5}\text{sen } x - \frac{1}{5}\cos x$, es una solución particular de la ecuación completa. La solución general de la ecuación completa será, por tanto:

$$\boxed{y = y^* + y_p = C\cdot e^{-2x} + \frac{1}{5}(2\text{sen } x - \cos x)}.$$

Ejemplo 13

Resolver la EDO: $dy + x\cdot y\cdot dx = x^3 dx$.

Solución:

Lo primero que haremos será dividir la ecuación por dx, con lo que tenemos: $y' + xy = x^3$ que es una ecuación lineal de primer orden con $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$.

Resolvemos, en primer lugar, la ecuación homogénea asociada, que es: $y' + x\cdot y = 0$, o bien: $\frac{dy}{dx} + x\cdot y = 0$.

Se trata de una ecuación de variables separadas, que resolvemos integrando en ambos miembros mediante una cuadratura, así:

$\int \frac{dy}{y} = \int -x dx$, de donde $\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + k$, o bien, $y^* = C\cdot e^{-x^2/2}$, siendo $C = e^k$, que es la solución de la ecuación homogénea. Buscamos ahora una solución particular de la completa, usando el método de variación de constantes. Si:

$y_p(x) = C(x)e^{-x^2/2}$, derivando, $y'_p(x) = C'(x)e^{-x^2/2} - C(x)x\cdot e^{-x^2/2}$, y substituyendo se obtiene que: $C'(x) = e^{x^2/2}dx$, de donde: $C(x) = e^{x^2/2}(x^2 - 2)$, esto es, $y_p(x) = x^2 - 2$. La solución general de la ecuación completa será, pues:

$$\boxed{y = y^* + y_p = C\cdot e^{-x^2/2} + x^2 - 2}.$$

Ejemplo 14

Resolver la EDO: $y' = \dfrac{1}{x \cdot \text{sen}\, y + 2\text{sen}\, 2y}$.

Solución:

Esta ecuación no es de variables separadas ni reducida a una de ellas; tampoco es lineal de primer orden. Para resolverla, nos valdremos de un procedimiento que nos ayudará a transformarla en una ecuación lineal de primer orden. En efecto, substituimos y' por $\dfrac{dy}{dx}$ y escribimos:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \cdot \text{sen}\, y + 2\text{sen}\, 2y}$. Ahora le damos la vuelta a la ecuación, teniendo entonces $\dfrac{dx}{dy}$; consideraremos, en consecuencia, a *y* como la variable independiente y a *x* como la variable dependiente o funcional, o sea:

$$\frac{dx}{dy} = x \cdot \text{sen}\, y + 2\text{sen}\, 2y\ .$$

En definitiva, lo que ocurre es que se cambia la dependencia de las variables; podremos entonces substituir $\dfrac{dx}{dy}$ por x' y resolver:

x' – x·sen y = 2sen 2y. Tenemos entonces una ecuación lineal de primer orden, pero ahora nos encontraremos con una función exclusivamente de *y* como coeficiente de *x*, y con otra función exclusivamente de *y* como término independiente, esto es:

$\left.\begin{array}{l} f(y) = -\text{sen}\, y \\ g(y) = 2\text{sen}\, 2y \end{array}\right\}$. La ecuación homogénea asociada es x' – x·sen y = 0 y su solución general se resuelve mediante una cuadratura, a saber:

$\int \dfrac{dx}{x} = \int \text{sen}\, y \cdot dy$, $\ln |x| = -\cos y + k$, y nos queda $x^* = C \cdot e^{-\cos y}$, siendo $C = e^k$.

Buscamos ahora una solución particular de la completa. Usaremos, para ello, el ya conocido método de variación de constantes. Sea: $x_p(y) = C(y) \cdot e^{-\cos y}$ (se observa que ahora la constante pasará a ser una función que depende de y). Derivando respecto de y, se obtiene la expresión:

$x'_p(y) = C'(y)e^{-\cos y} + C(y)\text{sen}\, y \cdot e^{-\cos y}$, y substituyendo en la ecuación,

$C'(y) = 2\text{sen}\, 2y \cdot e^{\cos y}$. Integrando: $C(y) = \int 2\text{sen}\, 2y \cdot e^{\cos y} dy$,

de donde resulta que: $C(y) = -2e^{\cos y}(\cos y - 1)$.

Una solución particular de la completa es: $x_p = -2(\cos y - 1)$, y, por fin, la solución general buscada en forma implícita será:

$$\boxed{x = x^* + x_p = C \cdot e^{-\cos y} - 2(\cos y - 1)}.$$

Una vez hallada la solución general volvemos a considerar a la *x* como variable independiente y a la *y* como variable dependiente o función.

4. ECUACIÓN DE BERNOUILLI

Entre las numerosas ecuaciones diferenciales que mediante un adecuado cambio de variable se pueden reducir a lineales de primer orden, se encuentra la conocida como ecuación de Bernouilli[1], que se presenta al resolver diversos problemas de la ciencia y de la técnica. Su forma general es:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + X \cdot y + X_1 \cdot y^n = 0} \quad (\forall n \in \Re \neq 0),$$

donde X y X_1 representan funciones de la única variable independiente x.

Obsérvese que la ecuación de Bernouilli es de primer orden y de primer grado, pero sin embargo, no es lineal. Para su resolución basta dividir por y^n, efectuando a continuación el cambio,

$$\frac{1}{y^{n-1}} = t\,; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{-(n-1) \cdot y^{n-2} \cdot \frac{dy}{dx}}{y^{2n-2}}\,; \text{ de donde:}$$

$$-\frac{(n-1)}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{dt}{dx} = \frac{1-n}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx}}$$

quedando la ecuación convertida en una lineal de primer orden cuya integral general viene dada, como hemos visto, por la expresión:

$$\boxed{y^{1-n} = (1-n) \cdot e^{-\int (1-n) \cdot X \cdot dx} \left[C - \int e^{\int (1-n) \cdot X \cdot dx} X_1 \cdot dx \right]}$$

, o bien por:

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt[n-1]{(1-n) \cdot e^{-\int (1-n) \cdot X \cdot dx} \left[C - \int e^{\int (1-n) \cdot X \cdot dx} X_1 \cdot dx \right]}}}$$

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos que ilustran ampliamente lo expuesto al respecto de este tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias:

[1] **Daniel Bernouilli (**8 February 1700 – 17 March 1782) was a Swiss mathematician and physicist and was one of the many prominent mathematicians in the Bernouilli family. He is particularly remembered for his applications of mathematics to mechanics, especially fluid mechanics, and for his pioneering work in probability and statistics. Bernouilli's work is still studied at length by many schools of science throughout the world.

Ejemplo 1

Sea resolver la EDO: $\frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$.

Solución:

En este caso, X = 2x, X_1 = x, n = 4. Dividiendo por y^4, se obtiene que: $\frac{1}{y^4}\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{y^3} + x = 0$. Haciendo el cambio de variable: $\frac{1}{y^3} = t$, de donde resulta que : $-\frac{3}{y^4}\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$, se obtiene :

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{y^4 dx} = \frac{1}{y^4}(-2xy - xy^4) = \frac{-2x}{y^3} - x = -2tx - x\text{ ; de donde :}$$

$$-\frac{1}{3}\frac{dt}{dx} + 2tx + x = 0\text{, o bien: }\frac{dt}{dx} - 6xt - 3x = 0$$

que es lineal, e integrada proporciona, después de substituir *t* por su valor, la solución general:

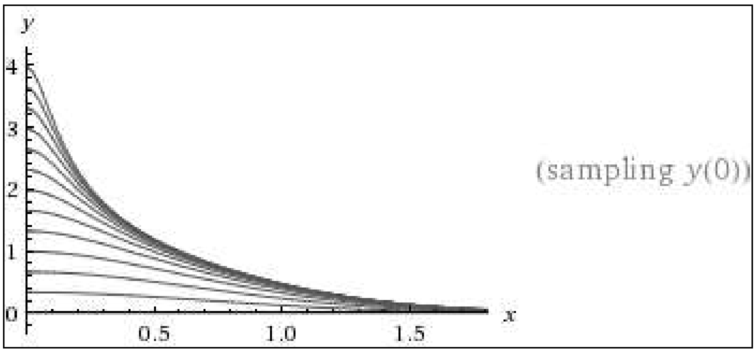
$$\frac{dt}{dx} - 6xt - 3x = 0;\text{ con : }\left.\begin{matrix} X = -6x \\ X_1 = -3x \end{matrix}\right\}$$

$$\int X\cdot dx = -6\int x\cdot dx = -3x^2\text{ ; }\int X_1\cdot e^{\int X\cdot dx}dx = \int -3x\cdot e^{-3x^2}\cdot dx = \frac{e^{-3x^2}}{2}\text{ ;}$$

$$t = e^{3x^2}\left(K - \frac{e^{-3x^2}}{2}\right) = K\cdot e^{3x^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{y^3}\text{ ; de dónde se deduce que :}$$

$$\boxed{y = \sqrt[3]{\frac{1}{K\cdot e^{3x^2} - \frac{1}{2}}}} \Rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 2

Resuelva: $y' + xy = xy^2$.

Solución:

Esta ecuación no es lineal. Sin embargo, es una ecuación diferencial de Bernouilli, con p(x) = X = x, X_1 = -x y n = 2. Hacemos la substitución sugerida específicamente en la introducción teórica, o sea, $z = y^{1-2} = y^{-1}$, de lo que sigue:

$$y = \frac{1}{z} \quad \text{e} \quad y' = -\frac{z'}{z^2}$$

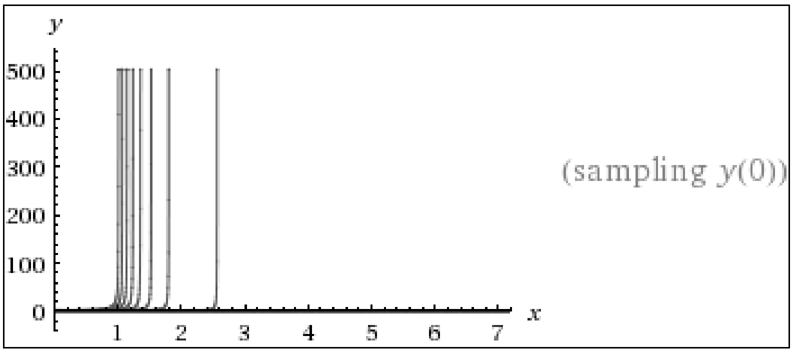
Substituyendo estas ecuaciones en la ecuación diferencial dada, obtenemos:

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{x}{z} = \frac{x}{z^2}, \text{ o bien : } \quad z' - x \cdot z = -x$$

Esta última ecuación ya es lineal. Su solución general viene dada por la expresión: $z = c \cdot e^{x^2/2} + 1$. Entonces, la solución de la ecuación diferencial original es la siguiente:

$$\boxed{y = \frac{1}{z} = \frac{1}{c \cdot e^{x^2/2} + 1}}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 3

Resuelva la EDO: $y' - \frac{3}{4}y = x^4 y^{1/3}$.

Solución:

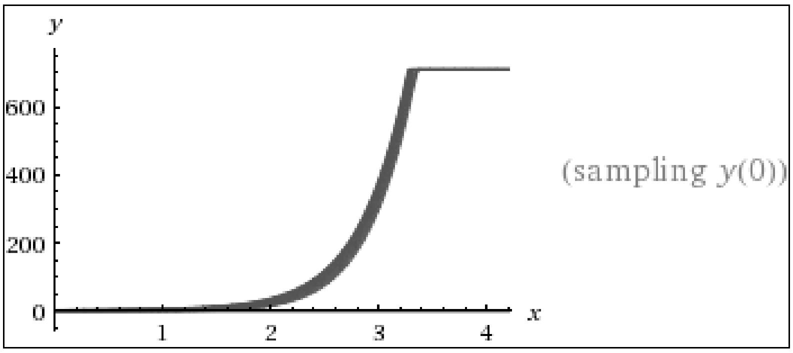
Esta es una ecuación diferencial de Bernouilli con p(x) = X = -3/4, q(x) = x^4 y n = 1/3. Si hacemos la substitución: $z = y^{1-(1/3)} = y^{2/3}$, resultará que: $y = z^{3/2}$ e $y' = \frac{3}{2} z^{1/2} z'$. Substituyendo estos valores en la ecuación diferencial dada, obtenemos:

$$\frac{3}{2}z^{1/2}z' - \frac{3}{x}z^{3/2} = x^4 z^{1/2}, \quad \text{o bien : } \quad z' - \frac{2}{x}z = \frac{2}{3}x^4$$

Esta última ecuación es lineal. Su solución viene dada por: $z = cx^2 + \frac{2}{9}x^5$. Dado que $z = y^{2/3}$, la solución del problema original está implícitamente dada por: $y^{2/3} = cx^2 + \frac{2}{9}x^5$, o bien explícitamente por:

$$\boxed{y = \pm(cx^2 + \frac{2}{9}x^5)^{3/2}}.$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 4

Solve the ordinary differential equation: $\frac{dy}{dx} + y = xy^2$.

Solution:

The equation is the Bernouilli's form: $\frac{dy}{dx} + P{\cdot}y = Q{\cdot}y^n$, with n = 2.

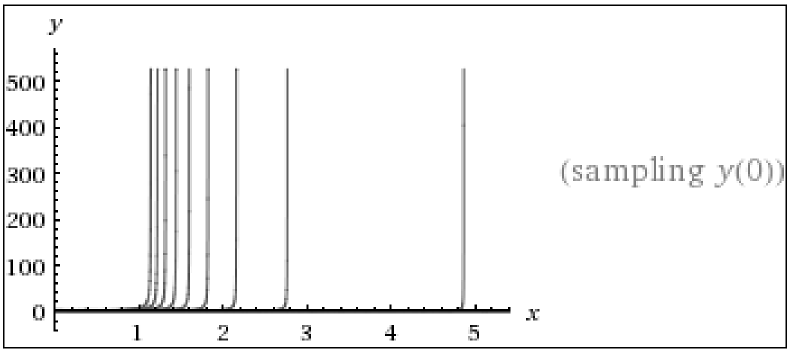
Use the substitution: $y^{1-n} = y^{-1} = z$, $y^{-2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}$. (For convenience, write the equation in the form $y^{-2}\frac{dy}{dx} + y^{-1} = x$).

Then $-\frac{dz}{dx} + z = x$, or $\frac{dz}{dx} - z = -x$.

The integrating factor is: $\xi(x) = e^{\int P{\cdot}dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}$. Then $e^{-x}dz - z{\cdot}e^{-x}{\cdot}dx = -x{\cdot}e^{-x}dx$, and $z{\cdot}e^{-x} = x{\cdot}e^{-x} + e^{-x} + C$.

Finally, since $z = y^{-1}$, $\frac{1}{y} = x + 1 + Ce^x$; $\boxed{y = \frac{1}{x + 1 + C{\cdot}e^x}}$ is the G.I.

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 5

Solve the ordinary differential equation: $\frac{dy}{dx} + y \cdot \tan x = y^3 \cdot \sec x$.

Solution:

Write the equation in the form: $y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2}\tan x = \sec x$. This equation is the Bernouilli's form. Use the substitution $y^{-2} = z$, $y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}$ to obtain the expression: $\frac{dz}{dx} - 2z \cdot \tan x = -2\sec x$. The integrating factor is $\xi(x) = e^{-2\int \tan x \cdot dx} = \cos^2 x$. Then:

$\cos^2 x \cdot dz - 2z \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot dx = -2 \cdot \cos x \cdot dx$; $z \cdot \cos^2 x = -2 \cdot \sin x + C$, and:

$\frac{\cos^2 x}{y^2} = -2\sin x + C$; thus $\boxed{y = \pm\frac{\cos x}{\sqrt{C - 2 \cdot \sin x}}}$ is the G.I.

Ejemplo 6

Resolver la EDO: $x \cdot dy + y \cdot dx = x^3 y^6 dx$.

Solución:

Para conocer de qué tipo de ecuación se trata, la dividimos por dx y escribimos: $x \cdot y' + y = x^3 y^6$. Ahora podemos observar que no es una ecuación en variables separadas. Para ver si es una ecuación lineal de primer orden dejamos sola la y', o sea, $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^6$. Como el término independiente no es una función exclusivamente de x, no es tampoco una ecuación lineal. El siguiente tipo que conocemos es la *ecuación de Bernouilli*, en la que el término independiente es una función exclusivamente de x, multiplicada por una cierta potencia de y. En este caso concreto, se tiene que:

$$p(x) = \frac{1}{x}, \qquad q(x) = x^2 \qquad y \qquad n = 6$$

Para resolverla, se realiza un cambio de variable, que la transforma en una ecuación lineal de primer orden. Como n = 6, definimos una nueva variable dependiente: $u=\frac{1}{y^5}$; derivando respecto de x: u' = - 5y^{-6} · y', y despejando, $y'=-\frac{u'}{5}y^6$, que substituyendo en la ecuación queda así: $-\frac{u'}{5}y^6+\frac{4}{x}=x^2y^6$.

Si ahora la dividimos por $-\frac{y^6}{5}$ nos queda: $u'-\frac{5}{x}u=-5x^2$, y hemos llegado a la ecuación lineal de primer orden que queríamos.

Hallamos primero, como siempre, la solución general de la ecuación homogénea asociada. Así, $u'-\frac{5}{x}u=0$, que es una ecuación de variables separadas que se resuelve integrando en la ecuación mediante una cuadratura, como ya hemos visto anteriormente, es decir,

$\int\frac{du}{u}=\int\frac{5}{x}dx$, de donde: ln $|u|$ = 5ln $|x|$ +lnC, o bien, u* = C· $|x|^5$.

Ahora calculemos una solución particular de la completa; aplicando el método de variación de constantes se tiene que: u_p = C(x)·x^5, entonces,

$$u'_p = C'(x)\cdot x^5 + 5x^4C(x).$$

Substituyendo en la ecuación, resulta: C'(x) = -5x^{-3}, de donde: $C(x)=\frac{5}{2}x^{-2}$, luego: $u_p=\frac{5}{2}x^3$, que es la solución particular de la completa. Por tanto, la solución general será:

$$u=u^*+u_p=Cx^5+\frac{5}{2}x^3.$$

Para terminar, deshacemos el cambio $u=\frac{1}{y^5}$; $\frac{1}{y^5}=Cx^5+\frac{5}{2}x^3$, esto es,

$$\boxed{y=\left(\frac{2}{C'x^5+5x^3}\right)^{1/5}}\text{, con } C' = 2C,$$

que es la solución general buscada de la ecuación de Bernouilli planteada.

Ejemplo 7

Resolver la EDO: x·y' + y = - y^2x.

Solución:

Esta ecuación no es de variables separadas ni tampoco lineal de primer orden. Dividimos la ecuación por *x* para despejar y', así: $y' + \frac{y}{x} = -y^2$. Se trata, pues, de una ecuación de Bernouilli, con: $p(x) = \frac{1}{x}$, q(x) = - 1 y n = 2.

La resolvemos, como siempre, mediante el cambio de variable: $u = \frac{1}{y}$, que, derivando respecto de x, ofrece: u' = - y^{-2} · y', y despejando la y' resultará: y' = - u'·y^2, que substituimos en la ecuación: $-u'y^2 + \frac{y}{x} = -y^2$. Ahora dividimos por – y^2, y resulta: $u' - \frac{u}{x} = 1$, que es una ecuación lineal de primer orden con ecuación homogénea asociada, a saber: $u' - \frac{u}{x} = 0$. La solución de la homogénea es: $\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$, o sea: ln u = ln x + ln C; o sea: u* = C·x.

Hallamos ahora una solución particular de la ecuación completa por el método de variación de constantes, esto es:

u_p = C(x)·x ; u'_p = C'(x)·x + C(x) ; substituyendo: C'(x)x + C(x) – C(x) = 1, luego: $C'(x) = \frac{1}{x}$, de donde, C(x) = $\ln|x|$. Entonces u_p = $x\cdot\ln|x|$ es una solución particular de la ecuación completa.

La solución general de la completa será: u = u* + u_p = C·x + $x\cdot\ln|x|$.

Finalmente, deshaciendo el cambio $u = \frac{1}{y}$ resulta que: $\boxed{y = \frac{1}{Cx + x\ln|x|}}$.

Ejemplo 8

Resolver la EDO: $y' = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$.

Solución:

Si probamos con el tipo de ecuaciones homogéneas, vemos que esta ecuación no es de este tipo. Es fácil darse cuenta de que tampoco es de variables separadas ni lineal de primer orden. Si la escribimos de la forma: $y' - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2y}$, observamos que es una ecuación de Bernouilli, con $p(x) = -\frac{1}{2x}$, $q(x) = \frac{x^2}{2}$ y n = - 1, que ya sabemos resolverla mediante un cambio de variable, que la transforma en una ecuación lineal de primer orden. Definimos una nueva variable dependiente como: $t = \frac{1}{y^{-2}} = y^2$. Derivando respecto de x resultará que:

$t' = 2y\cdot y'$, o sea, $y' = \frac{t'}{2y}$. Substituyendo en la ecuación, $\frac{t'}{2y} - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2y}$; multiplicando por *2y* y teniendo en cuenta que $t = y^2$, nos queda: $t' - \frac{t}{x} = x^2$, que es una ecuación lineal de primer orden (ya tenemos como término independiente una función exclusivamente de x).

La solución de la ecuación homogénea asociada es:

$t' - \frac{t}{x} = 0$, que es: $\int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x}$, de donde: $\ln|t| = \ln|x| + k$. Si $k = \ln C$, escribimos: $t^* = C \cdot x$. Calculamos ahora una solución particular de la completa, por el método de variación de constantes, es decir, $t_p = C(x) \cdot x$, $t'_p = x\cdot C'(x) + C(x)$ y substituyendo resultará que: $C'(x) \cdot x$; $C(x) = \frac{x^2}{2}$. Luego: $t_p = \frac{x^3}{2}$. La solución general de la completa será, por tanto, $t = t^* + t_p = C\cdot x + \frac{x^3}{2}$.

Deshaciendo, por último, el cambio de variable resulta la I.G.:

$$y^2 = C\cdot x + \frac{x^3}{2}, \qquad \boxed{y = \pm\sqrt{C\cdot x + \frac{x^3}{2}}}$$

, que es la solución general de la ecuación de Bernouilli propuesta.

Ejemplo 9

Resolver la EDO: $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4$; con : $y(1) = \frac{1}{2}$.

Solución:

$$x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - 2x^{-1}y = 3x^{-2}y^4 \qquad (1)$$

$y(1) = \frac{1}{2}$ es la condición dada. La (1) es una ecuación de Bernouilli del tipo: $\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^n}$, con $P(x) = -2x^{-1}$, $Q(x) = 3x^{-2}$; $n = 4$;

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea:} \quad t = y^{1-4} \Leftrightarrow t = y^{-3}, \\ \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}\frac{dt}{dx}y^4 = -\frac{1}{3}\frac{dt}{dx}(t^{-1/3})^4 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}\frac{dt}{dx}t^{4/3} \\ \text{y entonces:} \quad y = t^{-1/3} \end{array}\right\} \quad (2)$$

Substituyendo los valores correspondientes de (2) en (1), se obtiene:

$$-\frac{1}{3}\frac{dt}{dx}t^{-4/3}-2x^{-1}t^{-1}t^{-1/3}=3x^{-2}t^{-4/3}\Leftrightarrow\frac{dt}{dx}+6x^{-1}t=-9x^{-2}$$

{multiplicado cada término por -3$t^{4/3}$} (3)

La ecuación (3) presenta ahora la forma de una EDO lineal: $\frac{dt}{dx}+P(x)\cdot t=f(x)$, con P(x) = 6$x^{-1}$. Para integrar la expresión (3) usamos el factor de integración: $\mu(x)=\exp\int(6x^{-1})dx=\exp(6\ln x)=\exp(\ln x^6)=x^6$;

$$x^6\frac{dt}{dx}+6x^5t=-9x^4\Leftrightarrow(x^6t)'=-9x^4\Leftrightarrow x^6t=-9\int x^4dx\Leftrightarrow x^6t=-\frac{9}{5}x^5+C,$$

$\Rightarrow$ y se tiene la I.G. implícita: $x^6y^{-3}=-\frac{9}{5}x^5+C$ (recuérdese que t = y^{-3}) (4)

Substituyendo los valores correspondientes de (2) en (4), se obtiene:

$$1^6\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=-\frac{9}{5}(1)^5+C\Leftrightarrow 8=-\frac{9}{5}+C\Leftrightarrow C=\frac{49}{5}\qquad(5),$$

$\Rightarrow\qquad x^6y^{-3}=-\frac{9}{5}x^5+\frac{49}{5}\qquad$ {(5) en (4)},

$\Rightarrow$ $x^6y^{-3}=-\frac{9}{5}x^5+\frac{49}{5}\Leftrightarrow y^{-3}=-\frac{9}{5}x^{-1}+\frac{49}{5}x^{-6}$ (multiplicando cada término por x^{-6}), o sea: $\frac{1}{y^3}=-\frac{9}{5x}+\frac{49}{5x^6}=\frac{49-9x^5}{5x^6}$, y la integral particular buscada será:

$$\boxed{y=\sqrt[3]{\frac{5x^6}{49-9x^5}}}$$

Ejemplo 10

Integrar la ecuación diferencial ordinaria: $y'-2xy+y^2x^3=0$, mediante el cambio de función: $u=-1/y$.

Solución:

En realidad, se trata de una EDO de Bernouilli. Dividiendo por y^2, la ecuación diferencial se puede escribir de la siguiente forma:

$\frac{y'}{y^2}-\frac{2x}{y}+x^3=0$, y como $u'=y'/y^2$, se obtiene que: $u'+2xu+x^3=0$, es una ecuación diferencial lineal de primer orden, cuya solución se obtiene usando la fórmula deducida anteriormente, esto es:

$u = \left[C - \int g(x) \cdot e^{\int f(x) \cdot dx} \cdot dx \right] e^{-\int f(x) \cdot dx}$, que en el presente ejercicio se convierte en:

$$u = \left[C - \int x^3 \cdot e^{\int 2x \cdot dx} \cdot dx \right] e^{-\int 2x \cdot dx}.$$

Como $\int 2x \cdot dx = x^2$, hay que calcular $\int x^3 e^{x^2} \cdot dx$; haciendo x^2 = t, $x \cdot dx$ = dt/2, resulta que: $\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int t \cdot e^t dt = \frac{1}{2} \left[t \cdot e^t - \int e^t dt \right] = \frac{e^t}{2}(t-1) = \frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1)$.

Por tanto: $u = \left[C - \frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1) \right] e^{-x^2} = \frac{C}{e^{x^2}} - \frac{x^2 - 1}{2}$

y como y = -1/u, la integral general pedida es:

$$\boxed{y = -\frac{1}{\frac{C}{e^{x^2}} - \frac{x^2 - 1}{2}} = \frac{2 \cdot e^{x^2}}{e^{x^2}(x^2 - 1) - C'}}$$, con C’ = 2C.

5. ECUACIÓN DE RICCATI

El conocimiento de una integral o solución particular de una ecuación diferencial, simplifica, en general, el proceso resolutivo de la ecuación mediante el cambio $y = y_p + u$, donde por y_p representamos una solución particular de la ecuación dada y por *u* una nueva función. En otras ocasiones, el conocimiento de una solución particular se debe aprovechar mediante la substitución: $y = y_p \cdot u$.

Como ejemplo de aplicación, presentamos la denominada ecuación de Riccati[2] que adopta la forma:

$$\frac{dy}{dx} + Xy^2 + X_1 y + X_2 = 0$$

donde X, X_1 y X_2 representan funciones de la única variable independiente x. Si falta X resulta una ecuación lineal, y si se anula X_2 resulta una ecuación del tipo Bernouilli anteriormente estudiada. Esta ecuación no puede ser integrada, en general, por cuadraturas, pero basta el conocimiento de una solución particular para, mediante el cambio de variable indicado, reducirla a un tipo ya conocido y, por tanto, que ya sea integrable por cuadraturas.

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos:

[2] The *Riccati equation* is one of the most interesting *nonlinear differential equations of first order*. The Riccati equation is used in different areas of mathematics (for example, in algebraic geometry and the theory of conformal mapping), and physics. It also appears in many applied problems.

Ejemplo 1

Sea resolver la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + y^2 - xy - (x+2) = 0$, sabiendo que admite como solución particular: $y_p = x + 1$.

Solución:

En este caso, $X = 1$, $X_1 = -x$, $X_2 = -x -2$. Pues bien, se realiza la substitución: $y = u + x + 1$, de donde: $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 1$, que proporciona:

$\frac{du}{dx} + 1 + u^2 + x^2 + 1 + 2x\cdot u + 2u + 2x - x^2 - x\cdot u - 2x - 2 = 0$, y simplificando:

$\frac{du}{dx} + u^2 + u(2 + x) = 0$, que es una ecuación del tipo Bernouilli, que se resolvería mediante el cambio de variable: $1/u = z$, cuestión ésta que proponemos como ejercicio recapitulatorio a nuestros amables lectores.

Ejemplo 2

Algunas ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden se pueden reducir a otras de primer orden mediante una ecuación del tipo Ricatti. Sea, por ejemplo, resolver la ecuación diferencial de segundo orden:

$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$, sabiendo que admite la solución particular: $y_p = e^x$.

Solución:

Efectuando, ahora, el cambio: $y = e^x\cdot u$, de donde:

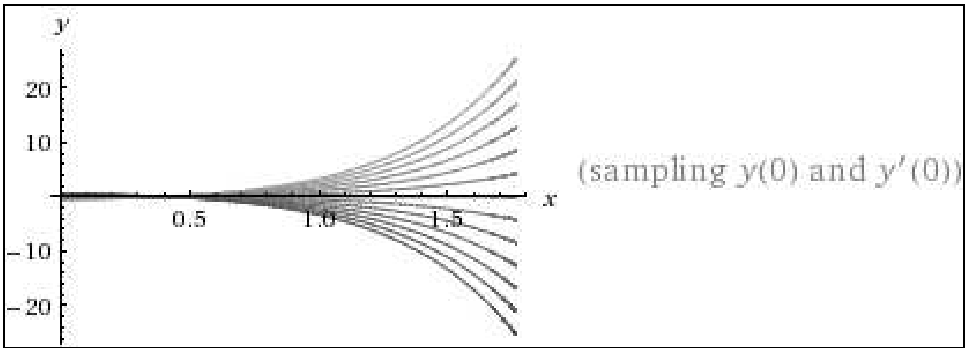
$$\frac{dy}{dx} = e^x\frac{du}{dx} + e^x u \; ; \; \frac{d^2y}{dx^2} = e^x\frac{d^2u}{dx^2} + 2e^x\frac{du}{dx} + e^x u$$

y substituyendo en la ecuación inicial resultará que: $e^x\frac{d^2u}{dx^2} - e^x\frac{du}{dx} = 0$, que simplificada y haciendo: $\frac{du}{dx} = p, \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, queda en la forma:

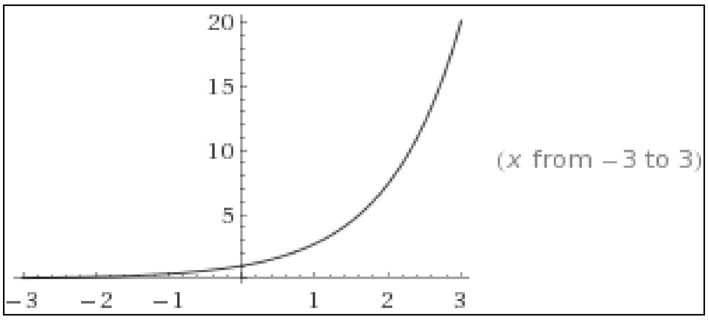
$$\frac{dp}{dx} - p = 0 \text{ , de donde: } p = \frac{du}{dx} = c_1e^x .$$

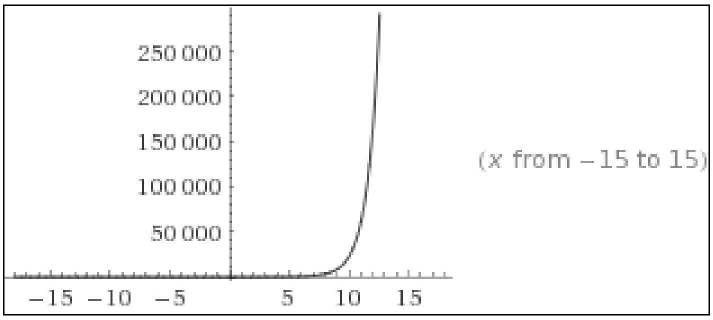
Luego, por mediación de una nueva cuadratura, se obtiene: $u = c_1e^x + c_2$, y como $y = y_p\cdot u$, se tiene: $\boxed{y = e^x(c_1e^x + c_2) = c_1e^{2x} + c_2e^x}$, que es la integral general de la ecuación propuesta que más adelante, en el siguiente capítulo de nuestro libro, será resuelta de forma directa y totalmente general.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



En este caso, la solución particular expresada: $y_p = e^x$, se presentaría para los siguientes valores de las constantes: $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$. La representación gráfica de esta solución particular, que es evidentemente una función exponencial, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Con el presente ejemplo, en fin, solo se ha pretendido insistir en las simplificaciones resolutivas que puede introducir el conocimiento de una ecuación particular.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación de segundo orden siguiente: $y'' + x \cdot y' - x^2 y = 0$, por reducción a otra EDO de primer orden.

Solución:

Por ser homogénea de primer grado en y, y' e y'', dividiendo por y, resultará que:

$$\frac{y''}{y} + x\frac{y'}{y} - x^2 = 0 .$$

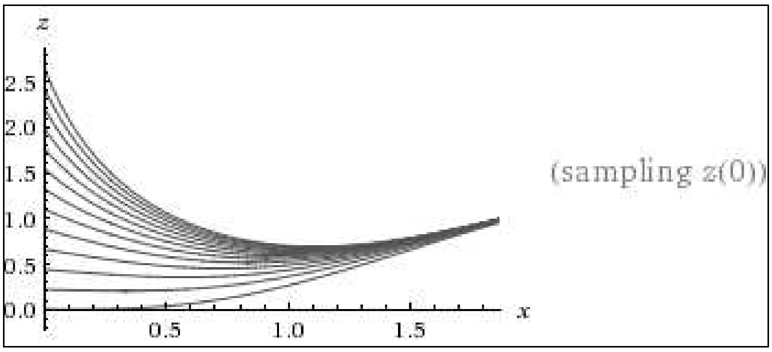
Haciendo $z = \frac{y'}{y}$, de donde:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y \cdot y'' - y'^2}{y^2} = \frac{y \cdot y''}{y^2} - \frac{y'^2}{y^2} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 \text{, se obtiene que:}$$

$$\frac{y''}{y} = \frac{dz}{dx} + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \frac{dz}{dx} + z^2 \text{. Substituyendo: } \frac{dz}{dx} + z^2 + x \cdot z - x^2 = 0,$$

que es una ecuación del tipo Ricatti, que ya ha sido estudiada anteriormente, con X = 1, X_1 = x, y X_2 = $-x^2$.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



6. ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Dada una ecuación diferencial de primer orden, escrita en la forma: du(x,y) = 0, o sea:

$$M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0 \qquad [I]$$

y M(x,y) y N(x,y) son funciones continuas y poseen primeras derivadas parciales continuas sobre algún rectángulo del plano OXY, se llama diferencial exacta, si su primer miembro es la diferencial total de una cierta función u(x, y), esto es, si existe una tal función que cumpla:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \ ; \ M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}; \ \ N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Derivando las igualdades anteriores respecto a “y” y a “x” tendremos que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

y recordando el teorema de Schwarz de la igualdad de las derivadas parciales cruzadas, resultará que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

que expresa la condición *necesaria y suficiente* para que [I] sea una ecuación diferencial exacta. Supuesto que [I] sea una ecuación diferencial exacta, su integración se consigue teniendo en cuenta que:

$$u(x, y) = \int M(x, y)\cdot dx + \varphi(y) = \int N(x, y)\cdot dy + \varphi(x) \qquad [II]$$

puesto que la integral indefinida $\int M(x,y)\cdot dx$, contendrá todos los términos de u(x,y) dependientes de x; luego solo faltarán los términos no dependientes de x que figuran en $\varphi(y)$, que puede considerarse la “constante” de integración que depende únicamente de *y*. Alternativamente, lo mismo puede afirmarse de $\varphi(x)$.

Para determinar aquella función, derivaremos [II] con respecto a y, con lo que:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \varphi'(y)$$

de donde se deduce que: $\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$, lo que permite calcular $\varphi(y)$ y por tanto también u(x, y). La integral general adoptará, en definitiva, la forma:

$$\boxed{u(x, y) = C} \Rightarrow \text{I.G.}$$

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Integrar la ecuación diferencial: $\left(2x + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$.

Solución:

Como se verifica que: $\frac{\partial}{\partial y}\left(2x + \frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)$,

la ecuación es diferencial exacta y, por tanto, existe la función u(x, y) que se determina como sigue:

$$u(x,y) = \int\left(2x + \frac{1}{y}\right)dx + \varphi(y) = x^2 + \frac{x}{y} + \varphi(y)$$

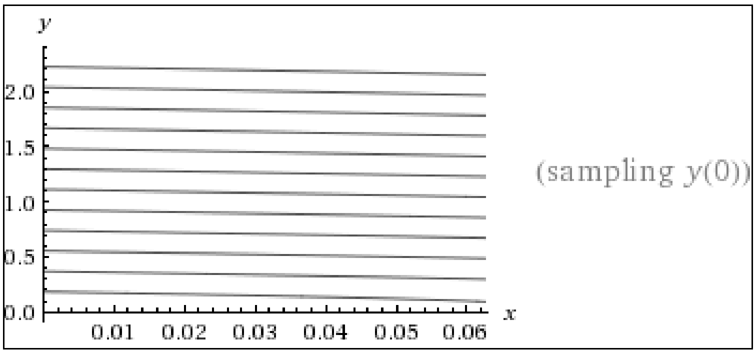
$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = N(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} = -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y)$$

de donde: $\varphi'(y) = \frac{1}{y} = \frac{d\varphi(y)}{dy}$; $\qquad \varphi(y) = \ln y$, y por tanto se tiene que:

$u(x,y) = x^2 + \frac{x}{y} + \ln y$, y la integral general será:

$$\boxed{x^2 + \frac{x}{y} + \ln y = C} \Rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 2

Integrar la ecuación diferencial: $2x(ye^{x^2} - 1)dx + e^{x^2}dy = 0$.

Solución:

Como sea que: $\frac{\partial}{\partial y}\left[2x(ye^{x^2} - 1)\right] = 2x \cdot e^{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}e^{x^2}$, resulta que esta ecuación es diferencial exacta. Entonces:

$$u(x,y) = \int e^{x^2}dy + \varphi(x) = y \cdot e^{x^2} + \varphi(x);$$

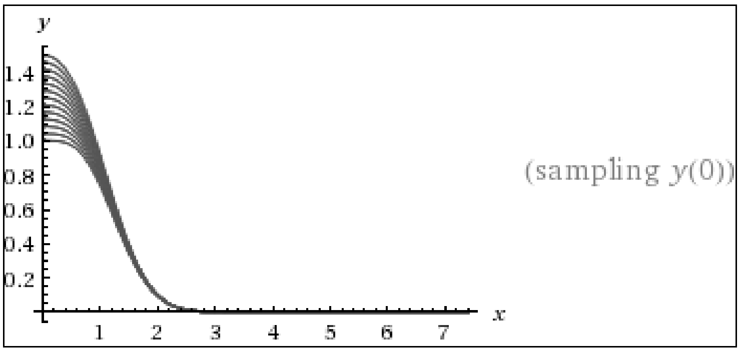
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x \cdot y \cdot e^{x^2} + \varphi'(x) = 2x \cdot y \cdot e^{x^2} - 2x.$$

De donde se deduce que: $\varphi'(x) = -2x$; $\varphi(x) = -x^2$. Luego: $u(x, y) = y \cdot e^{x^2} - x^2$, y la integral general buscada será:

$$\boxed{y \cdot e^{x^2} - x^2 = C; \quad y = \frac{C + x^2}{e^{x^2}}}$$

Obsérvese que en el presente ejemplo, se ha invertido el orden, integrándose $N(x, y) \cdot dy$ y obteniendo $\varphi(x)$.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 3

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $2xy \cdot dx + (1 + x^2)dy = 0$, con: $y(2) = -5$.

Solución:

En esta ecuación, se tiene que: $M(x, y) = 2xy$ y $N(x, y) = 1 + x^2$. Puesto que: $\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x} = 2x$, luego se trata de una EDO exacta. Ahora determinemos una función $u(x, y)$ tal que satisfaga las condiciones deseadas. Substituyendo $M(x, y) = 2xy$ obtenemos: $\frac{\delta u}{\delta x} = 2xy$. Integrando en ambos lados de la ecuación anterior con respecto a x, hallamos:

$$\int \frac{\delta u}{\delta x} = \int 2xy \cdot dx \text{ , o bien: } u(x, y) = x^2y + h(y) \qquad \text{(I)}$$

Obsérvese que cuando integramos con respecto a x, la constante (con respecto a x) de integración puede depender de y. Ahora determinamos h(y). Derivando (I) con respecto a y, obtenemos: $\frac{\delta u}{\delta y} = x^2 + h'(y)$. Substituyendo ahora esta ecuación junto con $N(x, y) = 1 + x^2$, tenemos que:

$$x^2 + h'(y) = 1 + x^2 \text{ , o bien: } h'(y) = 1.$$

Integrando esta última ecuación con respecto a y, obtenemos que: $h(y) = y + c_1$ (c_1 = constante). Substituyendo esta expresión en (I) se tiene que:

$$u(x, y) = x^2y + y + c_1$$

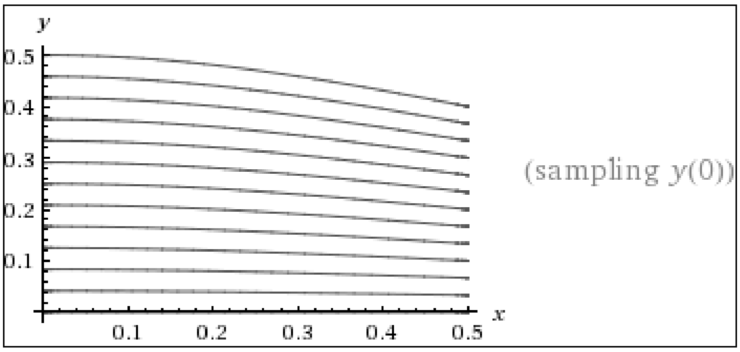
La solución general de la ecuación diferencial planteada, que está dada implícitamente como $u(x, y) = c$, es la siguiente:

$$x^2y + y = c_2 \quad \text{(habiendo hecho: } c_2 = c - c_1\text{)}$$

Resolviendo para *y* explícitamente, obtenemos la solución así:

$\boxed{y = c_2/(x^2 + 1)}$.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:

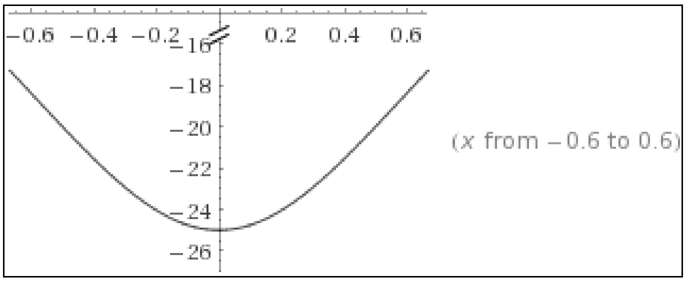


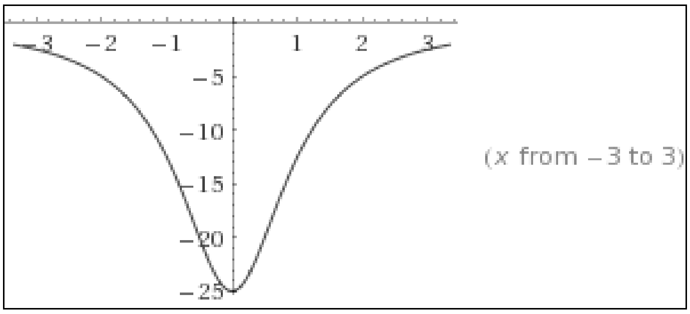
Pero como se ha dado también la condición:

$$y(2) = \frac{c_2}{5} = -5\,; \quad c_2 = -25\,;$$ y se tendrá que la solución particular es:

$$\boxed{y = -\frac{25}{x^2 + 1}}$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 4

Resolver la ecuación diferencial: (x·sen y)dx + (x·cos y – 2y)dy = 0.

Solución:

En esta ecuación, se tiene que: $M(x,y) = x + \text{sen } y$, y $N(x,y) = x\cdot\cos y - 2y$. De este modo: $\dfrac{\delta M(x,y)}{\delta y} = \dfrac{\delta N(x,y)}{\delta x} = \cos y$, luego se trata de una EDO exacta.

Ahora buscamos una función u(x,y) que satisfaga las condiciones deseadas. Substituyendo M(x,y), obtenemos: $\dfrac{\delta u}{\delta x} = x + \text{sen} y$. Integrando ambos lados de la ecuación anterior con respecto a x, encontramos que:

$$\int \frac{\delta u}{\delta x} dx = \int (x + \text{sen} y) dx \text{ , o bien: } u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\cdot\text{sen} y + h(y) \quad \text{(I)}$$

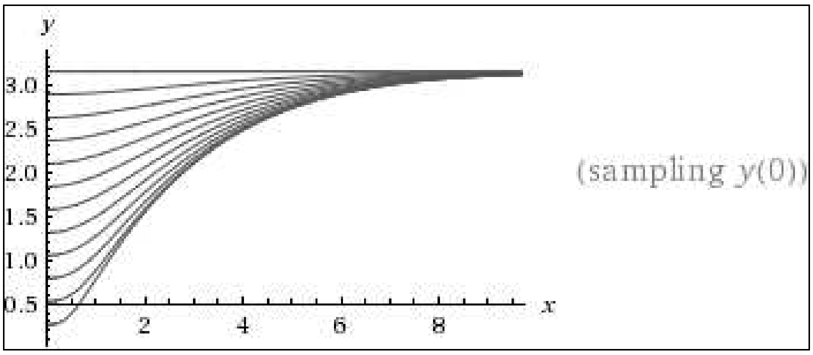
Para hallar h(y), derivamos (I) con respecto a y, obteniendo seguidamente: $\dfrac{\delta u}{\delta y} = x\cdot\cos y + h'(y)$, y luego substituimos este resultado junto con $N(x, y) = x\cdot\cos y - 2y$. Así, hallamos: $x\cdot\cos y + h'(y) = x\cdot\cos y - 2y$, o bien $h'(y) = -2y$, de lo cual se sigue que $h(y) = -y^2 + c_1$. Substituyendo esta h(y) en (I), obtenemos:

$$u(x, y) = ½\, x^2 + x\cdot\text{sen } y - y^2 + c_1$$

La solución o integral general de la ecuación diferencial problema está dada implícitamente por:

$$\boxed{½\, x^2 + x\cdot\text{sen } y - y^2 = c_2} \quad \text{(habiendo hecho: } c_2 = c - c_1\text{)}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 5

Resolver la EDO: $y' = \dfrac{2 + y\cdot e^{xy}}{2y - x\cdot e^{xy}}$.

Solución:

Volviendo a escribir esta ecuación en forma diferencial, obtenemos:

$$(2 + y\cdot e^{xy})dx + (x\cdot e^{xy} - 2y)dy = 0$$

Aquí: $M(x,y) = 2 + y\cdot e^{xy}$ y $N(x,y) = x\cdot e^{xy} - 2y$, y pues: $\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x} = e^{xy} + xye^{xy}$, la EDO propuesta es exacta. Substituyendo ahora M(x, y), encontramos que: $\frac{\delta u}{\delta x} = 2 + y\cdot e^{xy}$; integrando luego con respecto a x, obtenemos:

$$\int \frac{\delta u}{\delta x}dx = \int \left[2 + ye^{xy}\right]dx \text{ , o bien: } u(x,y) = 2x + e^{xy} + h(y) \quad \text{(I)}$$

Para hallar h(y), primero derivamos (I) con respecto a y, obteniendo $\frac{\delta u}{\delta y} = x\cdot e^{xy} + h'(y)$; luego substituimos este resultado junto con N(x,y) para obtener: $x\cdot e^{xy} + h'(y) = x\cdot e^{xy} - 2y$, o bien: $h'(y) = -2y$.

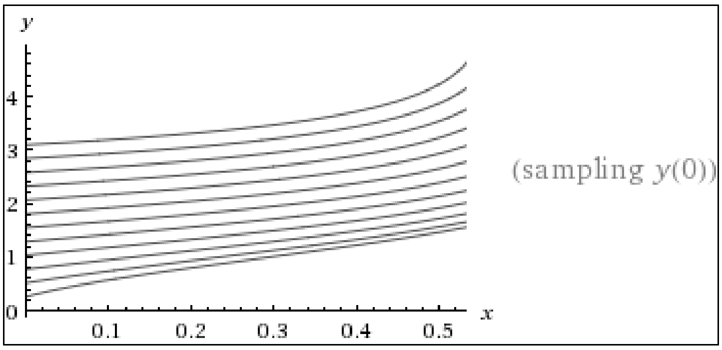
Luego sigue que $h(y) = -y^2 + c_1$. Substituyendo esta h(y) en (I), obtenemos:

$$u(x, y) = 2x + e^{xy} - y^2 + c_1$$

La solución a la ecuación diferencial planteada está dada implícitamente por la expresión:

$$\boxed{2x + e^{xy} - y^2 = c_2} \quad \text{(habiendo hecho } c_2 = c - c_1)$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 6

Resolver la siguiente ecuación diferencial: $y^2\cdot dt + (2y\cdot t + 1)dy = 0$, con $y(1) = -2$.

Solución:

Ésta es una ecuación para la función desconocida y(t). En términos de las variables *t* e *y*, tenemos que: $M(t,y) = y^2$, y $N(t,y) = 2y\cdot t + 1$, y:

$\frac{\delta M(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}(y^2) = 2y = \frac{\delta}{\delta t}(2yt+1) = \frac{\delta N(x,y)}{\delta t}$, de modo que la EDO es exacta. El procedimiento de solución generalmente empleado en estos casos, con *t* reemplazando a *x*, es aplicable. Aquí: $\frac{\delta u}{\delta t} = y^2$. Integrando ambos lados de la ecuación con respecto a *t* mediante una cuadratura, obtenemos:

$$\int \frac{\delta u}{\delta t} dt = \int y^2 \cdot dt \text{ , o bien: } u(x, y) = y^2 t + h(y) \quad (I)$$

Derivando (I) con respecto a *y*, obtenemos: $\frac{\delta u}{\delta y} = 2yt + \frac{dh}{dy}$.

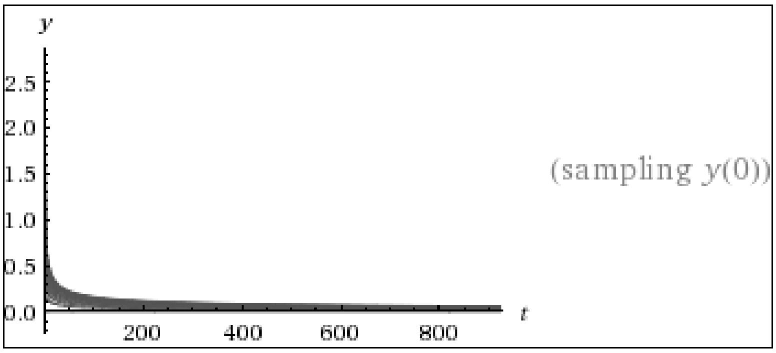
Por eso, $2yt + \frac{dh}{dy} = 2yt + 1$, donde al lado derecho de esta última ecuación es el coeficiente de dy en la ecuación diferencial original. Se sigue que: $\frac{\delta h}{\delta y} = 1$; $h(y) = y + c_1$, y (I) se convierte en $u(t,y) = y^2t + y + c_1$. La solución a la ecuación diferencial, pues, está dada implícitamente por:

$$y^2t + y = c_2 \quad (\text{habiendo hecho } c_2 = c - c_1)$$

Podemos resolver explícitamente para y mediante la fórmula cuadrática, por lo tanto la I.G. buscada será:

$$\boxed{y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c_2t}}{2t}}.$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:

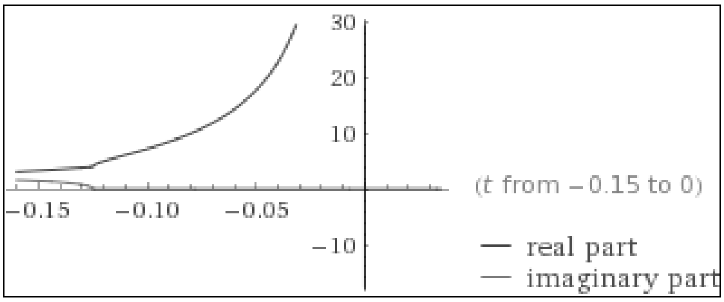


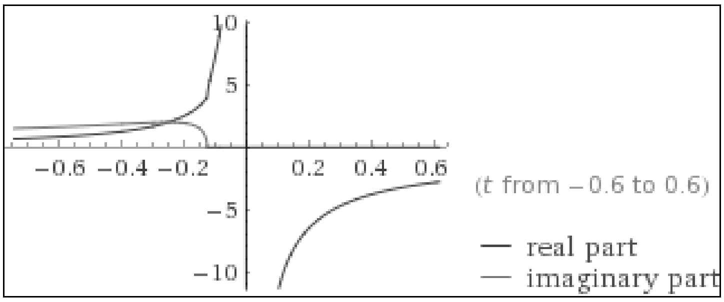
Se considera ahora el valor negativo como válido para ser consistente con la condición inicial dada, con lo que se exige que:

$y(1) = \frac{-1-\sqrt{1+4c_2}}{2} = -2$; de donde se deduce que $c_2 = 2$, con lo que la solución particular buscada será la siguiente:

$$\boxed{y = \frac{-1-\sqrt{1+8t}}{2t}}.$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 7

Resolver la ecuación diferencial ordinaria:

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0, \text{ con } x(2) = 3.$$

Ésta es una ecuación para la función desconocida x(t). En términos de las variables *t* y *x*, encontramos que:

$$\frac{\delta}{\delta x}(2x^2t - 2x^3) = 4x\cdot t - 6x^2 = \frac{\delta}{\delta t}(4x^3 - 6x^2t + 2x\cdot t^2),$$

de tal modo que la EDO propuesta es exacta.

El procedimiento de solución generalmente empleado en estos casos, con *t* y *x* reemplazando a *x* e *y*, respectivamente, resulta aplicable. Buscamos una función u(t,x) que tenga la propiedad de que *du* sea el lado derecho de la ecuación diferencial dada. Aquí: $\frac{\delta u}{\delta t} = 2x^2t - 2x^3$. Integrando ambos lados con respecto a *t*, tenemos que:

$$\int \frac{\delta u}{\delta t}dt = \int (2x^2t - 2x^3)\cdot dt \text{ , o bien: } u(x,t) = x^2t - 2x^3t + h(x) \quad (I)$$

Derivando (I) con respecto a *x*, obtenemos: $\frac{\delta u}{\delta x} = 2xt^2 - 6x^2t + \frac{dh}{dx}$.

De aquí, $2x \cdot t^2 - 6x^2 \cdot t + \frac{dh}{dx} = 4x^3 - 6x^2 \cdot t + 2x \cdot t^2$, donde al lado derecho de esta última ecuación es el coeficiente de dx en la ecuación diferencial original. Se sigue que: $\frac{dh}{dx} = 4x^3$;

Ahora: $h(x) = x^4 + c_1$, y la expresión (I) se convierte en:

$$u(t, x) = x^2t^2 - 2x^3t + x^4 + c_1 = (x^2 - x\cdot t)^2 + c_1.$$

La solución para la ecuación diferencial está dada implícitamente como:

$$(x^2 - x\cdot t)^2 = c_2 \quad \text{(habiendo hecho: } c_2 = c - c_1\text{)}$$

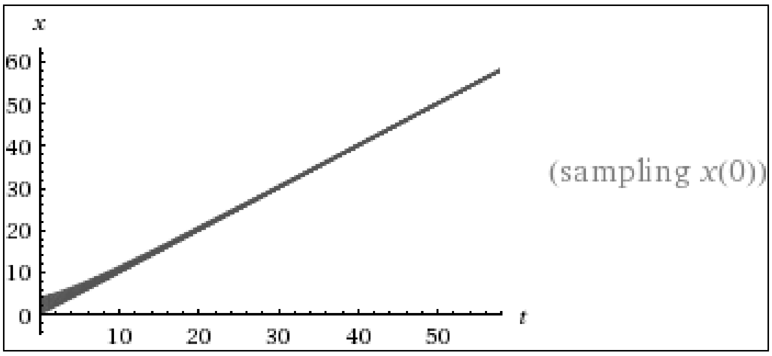
o bien, tomando las raíces cuadradas de ambos lados de esta última ecuación, así:

$$x^2 - x\cdot t = c_3 ; \quad \text{siendo: } c_3 = \pm\sqrt{c_2} .$$

Podemos resolver explícitamente para x con la fórmula cuadrática, de donde se obtiene la I.G. buscada, a saber:

$\boxed{x(t) = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4c_3}}{2}}$, siendo las otras dos soluciones posibles: $x(t) = 0$ y $x(t) = t$.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:

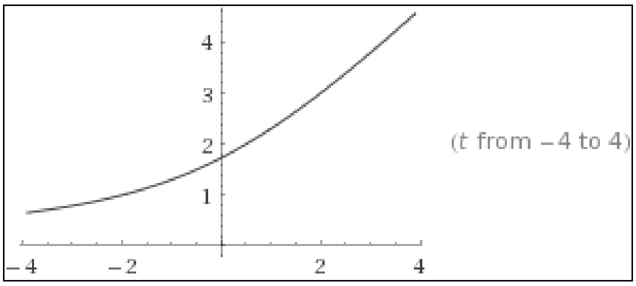


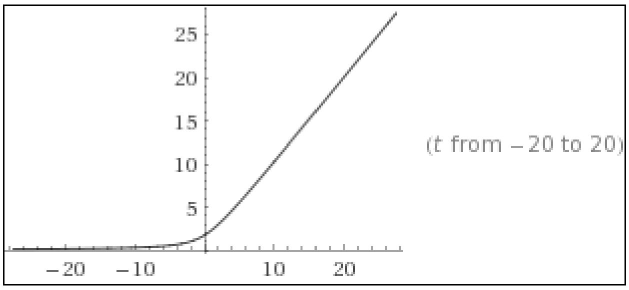
Se considera ahora el valor positivo para ser consistente con la condición inicial dada, con lo que se exige que:

$x(2) = \frac{2 + \sqrt{4 + 4c_3}}{2} = 3$; de donde se deduce que $c_3 = 3$, y la solución particular buscada vendrá dada por:

$$\boxed{x(t) = \frac{t + \sqrt{t^2 + 12}}{2}}$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 8

Solve the ordinary differential equation: $(x^2 + y)dx + (y^3 + x)dy = 0$.

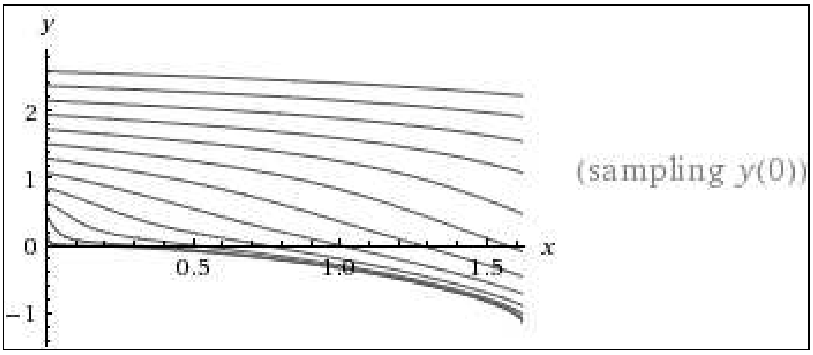
Solution:

Is an exact differential equation since: $M = x^2 + y$; $N = y^3 + x$;

$\frac{\delta M}{\delta y} = 1 = \frac{\delta N}{\delta x}$. Integrate $x^2dx + (y \cdot dx + x \cdot dy) + y^3dy = 0$, term by term, to obtain in an implicit form:

$$\boxed{\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^4}{4} = C}.$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 9

Solve the differential equation: $(x + e^{-x}\cdot\sin y)dx – (y + e^{-x}\cdot\cos y)dy = 0$.

Solution:

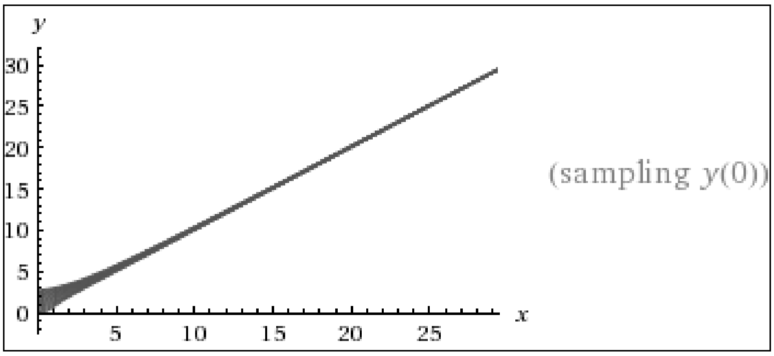
Is an exact differential equation since:

$$M = x + e^{-x}\cdot\sin y;\ N = - y - e^{-x}\cdot\cos y;\ \frac{\delta M}{\delta y} = e^{-x}\cdot\cos y = \frac{\delta N}{\delta x}$$

Integrate $x\cdot dx – y\cdot dy – (e^{-x}\cdot\cos y\cdot dy – e^{-x}\cdot\sin y\cdot dx) = 0$, term by term, to obtain:

$$\boxed{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - e^{-x}\sin y = C}.$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 10

Resolver la EDO: $(2x – 1)dx + (3y + 7)dy = 0$.

Solución:

$(2x – 1)dx + (3y + 7)dy = 0$ (1). En este caso se tiene que:

$$M((x,y) = 2x – 1 \text{ y } N((x,y) = 3y + 7$$

Con: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2x-1)}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(3y+7)}{\partial x} = 0$, esto es: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (2)

De la expresión (2) se concluye que la ecuación (1) es exacta. Por lo que existe una función f(x,y) para la que: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y + 7$ (3)

Integrando la primera ecuación en (3) respecto a x (manteniendo a *y* constante), se obtiene:

$f(x,y) = x^2 – x + g(y)$ (4), $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = g'(y)$ (5)

Igualamos a (5) con N(x,y) = 3y + 7; g’(y) = 3y + 7, de donde:

$g(y) = \frac{3}{2}y^2 + 7y$ (6), $\Rightarrow$ $f(x,y) = x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y$ $\{$(6) en (4)$\}$

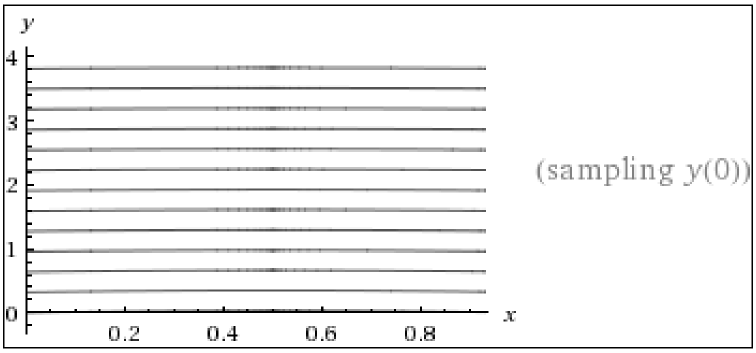
Por lo tanto, la solución general implícita de la EDO planteada (1) es:

$\boxed{x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = c}$, o bien en forma explícita se tienen las dos soluciones:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{3}\left(-\sqrt{c_1 - 6x^2 + 6x + 49} - 7\right)}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{c_1 - 6x^2 + 6x + 49} - 7\right)}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 11

Resolver la EDO: (5x + 4y)dx + (4x – 8y^3)dy = 0.

Solución:

(5x + 4y)dx + (4x-8y^3)dy = 0. En este caso se tiene que:

M(x,y) = 5x + 4y y N(x,y) = 4x – 8y^3, con:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(5x+4y)}{\partial y} = 4, \quad \text{y:} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(4x-8y^3)}{\partial x} = 4,$$

esto es: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (2) . De (2) se concluye que la ecuación (1) es exacta. Por lo que existe una función f(x,y) para la que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x + 4y \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 8y^3 \qquad (3)$$

Integrando la primera ecuación en (3) respecto a x (manteniendo a y constante), se obtiene: $f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + g(y)$ (4),

$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g'(y)$ (5). Igualamos a (5) con N(x,y) = 4x -8y^3, con lo que:

$\Rightarrow$ g(y) = 4x·y – 2y^4 (6) $\Rightarrow$ $f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 4x{\cdot}y - 2y^4$ {(6) en (4)}

Por tanto, la solución general implícita de la EDO planteada (1) es:

$$\boxed{\frac{5}{2}x^2 + 4x{\cdot}y - 2y^4 = c}.$$

Ejemplo 12

Resolver la EDO: (sen y – y·sen x)dx + (cos x + x·cos y – y)dy = 0.

Solución:

(sen y – y·sen x)dx + (cos x + x·cos y – y)dy = 0 (1)

En este caso se tiene que:

M(x,y) = sen y – y·sen x , y N(x,y) = cos x + x·cos y – y.

Con: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(\text{sen}\, y - y{\cdot}\text{sen}\, x)}{\partial y} = \cos y - \text{sen}\, x$, y

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(\cos x + x{\cdot}\cos y - y)}{\partial x} = -\text{sen}\, x + \cos y$$

esto es: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (2). De (2) se concluye que la ecuación (1) es exacta. Por lo que existe una función f(x,y) para la que se cumple que:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{sen}\, y - y{\cdot}\text{sen}\, x$, y también: $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos x + x{\cdot}\cos y - y$ (3)

Integrando la primera ecuación en (3) respecto a x (manteniendo a *y* constante), se obtiene la expresión:

f(x,y) = x·sen y + y·cos x + g(y) (4) $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x{\cdot}\cos y + \cos x + g'(y)$ (5)

Igualamos a (5) con N(x,y) = cos x + x·cos y – y, con lo que:

x·cos y + cos x + g’(y) = cos x + x·cos y – y $\Leftrightarrow$ g’(y) = -y, de donde:

$\Rightarrow \quad g(y) = \frac{1}{2}y^2 \;\; (6) \Rightarrow \quad f(x,y) = x{\cdot}\text{sen}\,y + y{\cdot}\cos x - \frac{1}{2}y^2 \quad \{(6) \text{ en } (4)\}$

Por lo tanto, la solución general implícita de la EDO planteada (1) es:

$$\boxed{x{\cdot}\text{sen}\,y + y{\cdot}\cos x - \frac{1}{2}y^2 = c}.$$

Ejemplo 13

Resolver la EDO: $(2y^2x - 3)dx + (2yx^2 + 4)dy = 0$

Solución:

$(2y^2x - 3)dx + (2yx^2 + 4)dy = 0 \qquad (1)$

En este caso se tiene que: $M(x,y) = 2y^2x - 3$ y $N(x,y) = 2yx^2 + 4$

con: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(2y^2x - 3)}{\partial y} = 4xy$ y $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(2yx^2 + 4)}{\partial x} = 4xy$,

esto es: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (2) . De (2) se concluye que la ecuación (1) es exacta; por lo que existe una cierta función f(x,y) para la que: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2x - 3$, y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 + 4$ (3). Integrando la primera ecuación en (3) respecto a *x* (manteniendo a *y* como constante) se obtiene que:

$$f(x,y) = y^2x^2 - 3x + g(y) \quad (4), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 + g'(y) \quad (5).$$

Igualamos a (5) con $N(x,y) = 2yx^2 + 4$, con lo que:

$2yx^2 + g'(y) = 2yx^2 + 4 \Leftrightarrow g'(y) = 4, \Rightarrow \quad g(y) = 4y \qquad (6),$

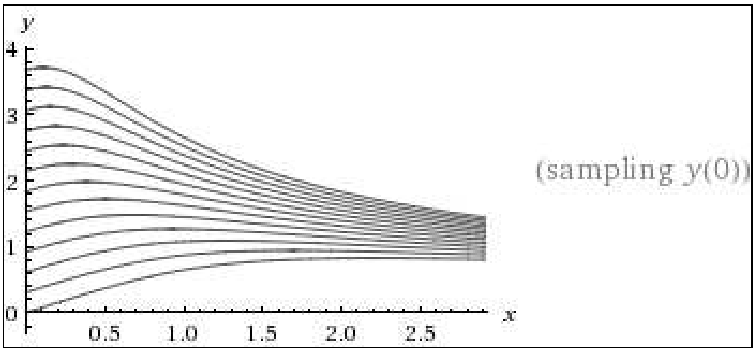
$\Rightarrow \quad f(x,y) = y^2x^2 - 3x + 4y \qquad \{(6) \text{ en } (4)\}$

Por lo tanto, la solución general implícita de la EDO planteada (1) es:

$\boxed{x^2y^2 - 3x + 4y = c}$, o bien en forma explícita se tienen las dos soluciones:

$$\boxed{y(x) = \frac{\sqrt{c_1 x^2 + 6x^3 + 8}}{\sqrt{2}\,x^2} - \frac{2}{x^2}} \qquad \boxed{y(x) = -\frac{\sqrt{c_1 x^2 + 6x^3 + 8}}{\sqrt{2}\,x^2} - \frac{2}{x^2}}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 14

Resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se indica: $(x + y)^2dx + (2xy + x^2 – 1)dy = 0$, con $y(1) = 1$.

Solución:

La ecuación anterior es de la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$; con:

$M(x,y) = (x + y)^2$ y $N(x,y) = 2xy + x^2 – 1$

por lo que investigaremos si: $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$ (1) . De aquí se concluye que la ecuación es exacta; por lo que existe una función f(x,y) para la que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2 - 1 \qquad (2)$$

Integrando la primera ecuación en (2) respecto a *x* (manteniendo a *y* constante), se obtiene que:

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 + g(y) \qquad (3) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy + g'(y) \qquad (4)$$

Igualamos a (4) con: $N(x,y) = 2xy + x^2 – 1$, o sea:

$x^2 + 2xy + g'(y) = 2xy + x^2 – 1 \Leftrightarrow g'(y) = -1, \Rightarrow g(y) = -y$ (5),

$$\Rightarrow \qquad f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y \qquad \{(5) \text{ en } (3)\}$$

Por lo tanto, la solución general de la EDO planteada es:
$\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = c$ (6). Ahora, substituyendo (1) en (6), se obtiene:

$$\frac{1}{3}(1)^3 + (1)^2(1) + (1)(1)^2 - 1 = c \Leftrightarrow \frac{1}{3} + 1 + 1 - 1 = c \Leftrightarrow c = \frac{4}{3} \qquad (7)$$

Por último, al substituir (7) en (6) se encuentra la solución particular implícita que contiene al par ordenado (1,1), a saber:

$$\boxed{\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3y = 4}.$$

Ejemplo 15

Resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se indica: $(e^x + y)dx + (2 + x + y\cdot e^y)dy = 0$; con: $y(0) = 1$.

Solución:

$(e^x + y)dx + (2 + x + y\cdot e^y)dy = 0$ (1), con $y(0) = 1$

La ecuación (1) es de la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$; con :

$M(x.y) = e^x + y$, y: $N(x,y) = 2 + x + y\cdot e^y$

por lo que: $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$; esto es $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. (2)

De (2) se concluye que la ecuación (1) es exacta; por lo que existe una función f(x,y) para la que: $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x + y$, y: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2 + x + y\cdot e^y$. (3)

Integrando la primera ecuación en (3) respecto a *x* (manteniendo a *y* constante), se obtiene que: $f(x,y) = e^x + x\cdot y + g(y)$ (4), $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y} =)x + g'(y)$. (5)

Igualamos a (5) con $N(x,y) = 2 + x + y\cdot e^y$, y entonces:

$x + g'(y) = 2 + x + y\cdot e^y \Leftrightarrow g'(y) = 2 + y\cdot e^y$, $\Rightarrow$ $g(y) = 2y + y\cdot e^y - e^y$ (6),

$\Rightarrow$ $f(x,y) = e^x + x\cdot y + 2y + y\cdot e^y - e^y$ {(6) en (4)}

Por lo tanto, la solución general de la EDO planteada (1) es:

$e^x + x\cdot y + 2y + y\cdot e^y - e^y = c$ (7). Ahora substituyendo (2) en (7), se obtiene que:

$e^0 + (0)(1) + 2(1) + 1e^1 - e^1 = c \Leftrightarrow c = 2$ (8)

Por último, al substituir (8) en (7) se encuentra la solución particular que contiene al par ordenado (0,1), a saber:

$$\boxed{e^x + x\cdot y + 2y + y\cdot e^y - e^y = 2}.$$

Ejemplo 16

Resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se indica: $(4y + 2x – 5)dx + (6y + 4x – 1)dy = 0$; con: $y(-1) = 2$.

Solución:

$(4y + 2x – 5)dx + (6y + 4x – 1)dy = 0$, (1) , con: $y(-1) = 2$ (2)

La ecuación (1) es de la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$; con:

$M(x,y) = 4y + 2x – 5$ y $N(x,y) = 6y + 4x – 1$, por lo que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4 \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4 \ ; \text{ esto es } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

De (2) se concluye que la ecuación (1) es exacta; por lo que existe una función $f(x,y)$ para la que: $\frac{\partial f}{\partial x} = 4y + 2x - 5$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 6y + 4x - 1$. (3)

Integrando la primera ecuación en (3) respecto a *x* (manteniendo a *y* constante), se obtiene que: $f(x,y) = 4xy + x^2 – 5x + g(y)$ (4),

$\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + g'(y)$ (5). Igualamos a (5) con $N(x,y) = 6y + 4x -1$,

$4x + g'(y) = 6y + 4x – 1$, de donde se deduce que: $g'(y) = 6y – 1$,

$\Rightarrow$ $g(y) = 3y^2 – y$ (6), $\Rightarrow f(x,y) = 4xy + x^2 – 5x + 3y^2 – y$ $\{$(6) en (4)$\}$

Por lo tanto, la solución general de la EDO (1) es:

$$4xy + x^2 – 5x + 3y^2 – y = c \ (7)$$

Ahora, substituyendo (2) en (7), se obtiene que:

$$4(-1)(2) + (-1)^2 – 5(-1) + 3(2)^2 – 2 = c \Leftrightarrow c = 8 \quad (8)$$

Por último, al substituir (8) en (7) se encuentra la solución particular que contiene el par ordenado (-1,2), a saber:

$$\boxed{4xy + x^2 – 5x + 3y^2 – y = 8}.$$

Ejemplo 17

Comprobar si: $(3x – 8xy + 3y^2)dx + (- 4x^2 + 6xy)dy$ es diferencial exacta de una función $f(x, y)$, y calcular esta última.

Solución:

En este caso, $M(x,y) = 3x^2 - 8xy + 3y^2$ y $N(x,y) = -4x^2 + 6xy$; calculemos:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -8x + 6y\,; \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -8x + 6y$$

Como ambos resultados son iguales, se trata, en efecto, de una diferencial exacta.

Para determinar la función f(x, y), se calcula:

$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = \int (3x^2 - 8xy + 3y^2)dx + \varphi(y)$, de donde, integrando:

$$f(x,y) = x^3 - 4x^2y + 3xy^2 + \varphi(y) \qquad \text{[III]}$$

Derivando con respecto a *y* e igualando a N(x,y) se obtiene que:

$-4x^2 + 6xy + \varphi'(y) = -4x^2 + 6xy$, de donde se deduce que $\varphi'(y) = 0$ y, por tanto, $\varphi(y) = c$ (constante); substituyendo ahora este valor en la expresión [III] se obtiene que:

$$\boxed{f(x,y) = x^3 - 4x^2y + 3xy^2 + c}$$

Ejemplo 18

Resolver la EDO: (sen y + y·sen x)dx + (x·cos y – cos x)dy = 0.

Solución:

Se trata de una ecuación diferencial exacta, ya que, calculadas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\operatorname{sen} y + y\cdot\operatorname{sen} x) = \cos y + \operatorname{sen} x \\ \dfrac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x\cdot\cos y - \cos x) = \cos y + \operatorname{sen} x \end{cases}$$

se obtienen resultados iguales. Para su integración procederemos como se ha indicado anteriormente, esto es: $\int (\operatorname{sen} y + y\cdot\operatorname{sen} x)dx = x\cdot\operatorname{sen} y - y\cdot\cos x + \varphi(y)$.

Derivando con respecto a *y* e igualando a N(x,y), se tendrá:
$x\cos y - \cos x + \varphi'(y) = x\cos y - \cos x$, de donde: $\varphi'(y) = 0$; $\varphi(y) = -K$.

La integral general será, por tanto, expresada en forma implícita:
x·sen y – y·cos x – K = 0, o bien:

$$\boxed{x\cdot\operatorname{sen} y - y\cdot\cos x = K}$$

Ejemplo 19

Resolver la ecuación diferencial:
$(2xy^2 + e^y + y\cdot e^x + 1)\cdot dx = (2x^2y + x\cdot e^y + e^x + 1)\cdot dy$, y determinar la integral particular incidente con el punto (1,0).

Solución:

Se trata de una ecuación diferencial exacta, puesto que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}(2xy^2 + e^y + ye^x + 1) = 4xy + e^y + e^x \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(2x^2y + xe^y + e^x + 1) = 4xy + e^y + e^x \end{cases}$$

son iguales. Para su integración se procede como se ha indicado en el ejercicio anterior, esto es: $\int (2xy^2 + e^y + ye^x + 1)\cdot dx = x^2y^2 + xe^y + ye^x + x + \phi(y)$;
$2x^2y + x\cdot e^y + e^x + \varphi'(y) = 2x^2y + x\cdot e^y + e^x + 1$; de donde: $\varphi'(y) = 1$; $\varphi(y) = y - K$.

Luego la integral general será:

$x^2y^2 + x\cdot e^y + y\cdot e^x + x + y - K = 0$, o bien: $x^2y^2 + x\cdot e^y + y\cdot e^x + x + y = K$.

Para obtener la solución particular incidente con (1,0), hagamos:
$x = 1$, $y = 0$; $1\cdot e^0 + 1 = K$; y entonces: $K = 2$.

Por lo tanto, la I.P. buscada será: $\boxed{x^2y^2 + x\cdot e^y + y\cdot e^x + x + y = 2}$.

Ejemplo 20

Resuélvase la ecuación diferencial ordinaria siguiente:
$(x^2 + y^2)dx + 2x\cdot y\cdot dy = 0$.

Solución:

La forma de la función hace pensar que nos encontramos ante una ecuación de tipo homogéneo; sin embargo, veamos que se trata de una ecuación diferencial exacta.

Al igual que sucedía en las ecuaciones homogéneas, tenemos que:

$$M(x,y) = x^2 + y^2, \quad N(x,y) = 2xy.$$

La ecuación será exacta, si coinciden las derivadas cruzadas, esto es:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

En nuestro caso, efectivamente, es: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y,$ y $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y,$

luego cumple la condición necesaria y suficiente para que sea una ecuación diferencial exacta. La solución general de una ecuación de este clase será una función del tipo: u(x, y) = C. Dicha función viene dada por:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\cdot dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)\cdot dy = C\,,$$

siendo (x_0, y_0) constantes. Substituyendo: $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} (x^2 + y^2)dx + \int_{y_0}^{y} 2x_0 y\cdot dy = C$

y si resolvemos las integrales resultará que:

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x} (x^2 + y^2)dx = \frac{x^3}{3} + y^2 x - \frac{x_0^3}{3} - y^2 x_0, \\ \int_{y_0}^{y} 2x_0 y\cdot dy = x_0 y^2 - x_0 y_0^2, \end{cases}$$

entonces: $\frac{x^3}{3} + y^2 x - \frac{x_0^3}{3} - y_0^2 x_0 = C$.

Separamos las variables de las constantes: $\frac{x^3}{3} + y^2 x = \frac{x_0^3}{3} + x_0 y_0^2 + C$.

Si hacemos: $k = \frac{x_0^3}{3} + x_0 y_0^2 + C$, escribimos: $\boxed{\frac{x^3}{3} + y^2 x = k\,;\quad y = \pm\sqrt{\frac{k' - x^3}{3x}}}$

(habiendo hecho k' = 3k), que es la solución general de la ecuación exacta.

Se observa que también es una ecuación homogénea, pues las funciones M(x, y), N(x, y) son ambas homogéneas de grado 2. Nos encontramos, pues, con una ecuación diferencial que podemos resolver de dos maneras distintas, obteniendo el mismo resultado, es decir, o lo resolvemos tal y como hemos hecho anteriormente, o bien podemos escribirla como:

$$y' = -\frac{x^2 + y^2}{2xy}\,,$$

sacando factor común x^2, resulta que: $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Si hacemos el cambio de variable $t = \frac{y}{x}$, entonces: y' = t + x·t'.

Substituyendo en la ecuación anterior, se tiene que: $t + x\cdot t' = -\frac{1+t^2}{2t}$, de donde: $\frac{-2t}{1+3t^2}dt = \frac{dx}{x}$, que es una ecuación de variables separadas, por tanto, para resolverla seguimos el método de siempre, integrando miembro a miembro mediante una cuadratura, esto es:

$\int \frac{-2t}{1+3t^2}dt = \int \frac{dx}{x}$, de donde: $-\frac{1}{3}\ln(1+3t^2) = \ln|x| + \ln C$, o bien: $(1 + 3t^2)^{-1/3} = C\cdot x$.

Deshaciendo el cambio $t = \frac{y}{x}$, resulta: $(x^2 + 3y^2)^{-1/3} = C\cdot x^{1/3}$, es decir:

$x^2 + 3y^2 = \frac{1}{x\cdot C^3}$, y dividiendo por 3: $\frac{x^3}{3} + xy^2 = \frac{1}{3C^3}$.

Si ahora hacemos: $k = \frac{1}{3C^3}$, resultará que: $\frac{x^3}{3} + xy^2 = k$, que coincide, como no podía ser de otra manera, con la solución anteriormente hallada.

Ejemplo 21

Resuélvase la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$(2x + 3y + 4)dx + (3x + 4y + 5)dy = 0.$$

Solución:

Vemos que sí se trata de una ecuación diferencial exacta, ya que siendo:

$$M(x, y) = 2x + 3y + 4, \quad N(x, y) = (3x + 4y + 5),$$

entonces se verifica la condición: $\frac{\partial M(xy)}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

La solución general será, pues:

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C, \text{ esto es:} \\ \int_{x_0}^{x} (2x+3y+4)dx + \int_{y_0}^{y} (3x+4y+5)dy = C. \end{cases}$$

Integrando la expresión anterior se obtiene:

$$x^2 + 3xy + 4x - x_0^2 - 3x_0y - 4x_0 + 3x_0y + 2y^2 + 5y - 3x_0y_0 - 2y_0^2 - 5y_0 = C.$$

Simplificando y despejando las variables de las constantes, obtenemos la expresión:

$$x^2 + 2y^2 + 3xy + 4x + 5y = x_0^2 + 4x_0 + 3x_0y_0 + 2y_0^2 + 5y_0 + C.$$

Si $k = x_0^2 + 4x_0 + 3x_0y_0 + 2y_0^2 + 5y_0 + C$, escribimos:

$x^2 + 2y^2 + 3xy + 4x + 5y = k$; $2y^2 + (3x + 5)y + (x^2 + 4x – k) = 0$, que podemos resolver por aplicación de la fórmula cuadrática, con lo que:

$$y = \frac{-3x-5\pm\sqrt{(3x+5)^2-8(x^2-4x-k)}}{4} = \frac{-3x-5\pm\sqrt{9x^2+25+30x-8x^2+32x+8k}}{4}$$

Y se tiene la I.G.:

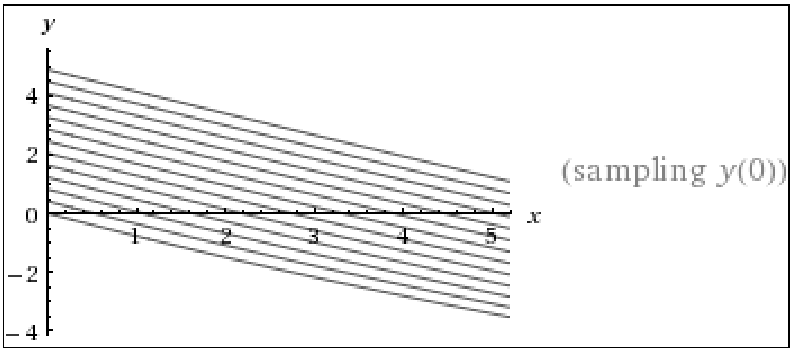
$$\boxed{y = \frac{-3x-5\pm\sqrt{x^2+62x+k'}}{4}}$$

(habiendo hecho: $k' = 25 + 8k$), que es la solución general de la ecuación.

Desde luego, al igual que sucedía con el ejemplo anterior, también podemos resolver esta EDO considerándola como una ecuación homogénea, puesto que se puede expresar así:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+3y+4}{3x+4y+5} = -\frac{2+3(\frac{y}{x})+\frac{4}{x}}{3+4(\frac{y}{x})+\frac{5}{x}} = f(y/x)$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



7. ECUACIÓN DIFERENCIAL NO EXACTA. FACTOR INTEGRANTE

7.1. DEFINICIÓN

En ciertas ocasiones, aunque $M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = 0$ no sea diferencial exacta, multiplicada por una cierta función $\mu(x, y)$ se puede convertir en diferencial exacta; entonces, se dice que $\mu(x, y)$ es un *factor integrante* y la ecuación diferencial exacta:

$$\boxed{\mu(x, y)\cdot M(x, y)\cdot dx + \mu(x, y)\cdot N(x, y)\cdot dy = 0}$$

se integra por el método expuesto anteriormente.

7.2. FORMA DEL FACTOR INTEGRANTE

La determinación de factores integrantes es un problema dificultoso, pues conduce, en general, a una ecuación en derivadas parciales. Sin embargo, su determinación es sumamente sencilla en algunos casos, de los cuales citaremos los siguientes:

a) Cuando existe un multiplicador que depende de la única variable x (o de la única variable y). En este caso, la condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial ordinaria:

$$M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = 0$$

admita un factor integrante $\mu(x)$, que es función solamente de x, es que el cociente:

$$\frac{\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}}{N}=\frac{\mu'}{\mu} = \gamma(x)$$, sea función solo de la variable x.

Entonces, el factor integrante será: $\mu(x)=e^{\int \gamma(x)\cdot dx}$. En el caso de dependencia única de la variable *y*, dicha condición necesaria y suficiente vendrá dada por que el cociente:

$$\frac{\frac{\delta N}{\delta x}-\frac{\delta M}{\delta y}}{M}=\frac{\mu'}{\mu} = \lambda(y)$$, sea función solo de la variable *y*.

Entonces, el factor integrante será: $\mu(y)=e^{\int \lambda(y)\cdot dy}$. En ambos casos se multiplicará por el factor integrante μ y se procederá como antes. Es decir, que después de efectuada la multiplicación deberá cumplirse que:

$$\frac{\delta(\mu\cdot M)}{\delta y}=\frac{\delta(\mu\cdot N)}{\delta x}$$

b) Cuando existe un multiplicador que depende únicamente de z = x + y.
c) Cuando existe un multiplicador que depende de la única variable z = x · y.

La forma de dicho factor de integrabilidad es la siguiente: $\mu = e^{\int f(x)\cdot dx}$.

En la ecuación lineal: dy + M·dx = 0, en que M es de primer grado en y, el factor integrante a utilizar tiene la siguiente forma: $\mu = e^{\int \frac{\delta \rho}{\delta y}dx}$. En las ecuaciones homogéneas, el factor integrante es el de la expresión:

$$\mu = \frac{1}{Mx + Ny}\,.$$

Un método que permite, en algunos casos, descubrir el factor integrante consiste en descomponer la expresión dada en otra de la forma: $G \cdot du + H \cdot d\mu = 0$, siendo G, H, u, μ, funciones de x e y.

La expresión general de todo factor integrante de $G \cdot du = 0$ será $\frac{f(u)}{G}$.

La de $H \cdot d\mu = 0$ será $\frac{F(\mu)}{H}$. Para que puedan aprovecharse ambos factores en la ecuación $G \cdot du + H \cdot d\mu = 0$, hay que admitir que: $\frac{f(u)}{G} = \frac{F(\mu)}{H} = \alpha$.
Se hallará el factor integrante α determinando las funciones más sencillas f(u), F(μ), de tal suerte que verifique la relación anterior, atendiendo a los grados de u, μ. En general, los factores integrantes pueden no resultar de fácil descubrimiento. Si una ecuación diferencial no presenta una de las formas expuestas con anterioridad, entonces es probable que la búsqueda de un factor de integración no se vea coronada por el éxito, para lo cual se recomienda el recurso a otros métodos de solución. En cualquier caso, algunos de los factores integrantes más comunes se muestran en la tabla siguiente:

Grupo de términos	**Factor de integración μ(x, y)**	**Diferencial exacta du(x, y)**
$y \cdot dx - x \cdot dy$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$
$y \cdot dx - x \cdot dy$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$
$y \cdot dx - x \cdot dy$	$-\frac{1}{xy}$	$\frac{xdy - ydx}{xy} = d\left(\ln\frac{y}{x}\right)$
$y \cdot dx - x \cdot dy$	$-\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$
$y \cdot dx + x \cdot dy$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{ydx + xdy}{xy} = d(\ln xy)$
$y \cdot dx + x \cdot dy$	$\frac{1}{(xy)^n},\ (\forall n > 1)$	$\frac{ydx + xdy}{(xy)^n} = d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right]$
$y \cdot dx + x \cdot dy$	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{ydy + xdx}{x^2 + y^2} = d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right]$
$y \cdot dx + x \cdot dy$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n},\ (\forall n > 1)$	$\frac{ydy + xdx}{(x^2 + y^2)^n} = d\left[\frac{-1}{2(n-1)(x^2 + y^2)^{n-1}}\right]$
$ay \cdot dx + bx \cdot dy$ (a, b constantes)	$x^{a-1}y^{b-1}$	$x^{a-1}y^{b-1}(ay \cdot dx + bx \cdot dy) = d(x^a y^b)$

Planteamos, a continuación, algunos ejemplos para la buena comprensión del método anteriormente expuesto. A saber:

Ejemplo 1

Resolver la EDO: (2x + y)dx – (x + 6y)dy = 0.

Solución:

(2x + y)dx – (x + 6y)dy = 0 (1). En este caso se tiene que:

M(x,y) = 2x + y y N(x,y) = -(x + 6y) = - x - 6y

con: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(2x+y)}{\partial}=1$ y $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(-x-6y)}{\partial x}=-1.$

Así: $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ (2). De (2) se concluye, pues, que la ecuación (1) no es exacta, y habrá que resolverla por otros procedimientos que veremos más adelante.

Ejemplo 2

Resolver la EDO: $\left(2y-\frac{1}{x}+\cos 3x\right)\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\cdot\mathrm{sen}\,3x=0$

Solución:

Se tendrá que: $\left(\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\cdot\mathrm{sen}\,3x\right)dx+\left(2y-\frac{1}{x}+\cos 3x\right)dy=0$ (1)

En este caso se tiene también que:

$M(x,y)=\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\cdot\mathrm{sen}\,3x$ y $N(x,y)=2y-\frac{1}{x}+\cos 3x$

, con las siguientes derivadas cruzadas parciales:

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\cdot\mathrm{sen}\,3x\right)}{\partial y}=\frac{1}{x^2}+3\mathrm{sen}\,3x$, y también:

$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial\left(2y-\frac{1}{x}+\cos 3x\right)}{\partial x}=\frac{1}{x^2}-3\mathrm{sen}\,3x$, esto es: $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ (2)

De la expresión anterior (2) se concluye que la ecuación (1) no es exacta, por lo que habrá que resolverla aplicando otros procedimientos que veremos más adelante.

Ejemplo 3

Resolver la EDO: $(x + y)(x - y)dx + x(x - 2y)dy = 0$.

Solución:

$(x + y)(x - y)dx + x(x - 2y)dy = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$ (1)

En este caso se tiene que: $M(x,y) = x^2 - y^2$,   y: $N(x,y) = x^2 - 2xy$.

Con: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = -2y$ y $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial(x^2 - 2xy)}{\partial x} = 2x - 2y$

esto es: $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ (2) . De (2) se concluye que la ecuación (1) no es exacta, por lo que habrá que resolverla aplicando otros procedimientos que veremos más adelante.

Ejemplo 4

Integrar la ecuación diferencial ordinaria: $(x + y^2)\cdot dx - 2xy\cdot dy = 0$.

Solución:

Se trata de una ecuación diferencial no exacta, puesto que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq -2y = \frac{\partial N}{\partial x};$$

sabiendo que admite un multiplicador dependiente de la única variable *x*, puesto que:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y + 2y}{-2xy} = -\frac{2}{x}$$

Sea entonces, el multiplicador $\mu(x)$, la ecuación resultará:

$$\mu(x)\cdot(x + y^2)\cdot dx - 2xy\cdot\mu(x)\cdot dy = 0$$

Como: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \mu(x)\cdot 2y$; $\dfrac{\partial N}{\partial x} = -2y\mu(x) - 2xy\cdot\mu'(x)$

Obligando a que sea una diferencial exacta:

$$\mu(x)\cdot 2y = -2y\mu(x) - 2xy\mu'(x) \;; \quad \mu(x) = -\mu(x) - x\cdot\mu'(x) \;;$$

simplificando: $x \cdot \mu'(x) = -2\mu(x)$, o bien: $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{2}{x}$; e integrando:

$$\ln\mu(x) = -2\ln x = \ln x^{-2}, \text{ o bien: } \mu(x) = \frac{1}{x^2}.$$

La ecuación quedará entonces configurada del siguiente modo:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0\,; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2y}{x^2} = \frac{\partial N}{\partial x}\,;$$

que ya es una ecuación diferencial exacta. Integrada, debe obtenerse:

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \varphi(y) = \ln x - \frac{y^2}{x} + \varphi(y)\,;$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{2y}{x} = -\frac{2y}{x} + \varphi'(y)\,; \quad \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C\,;$$

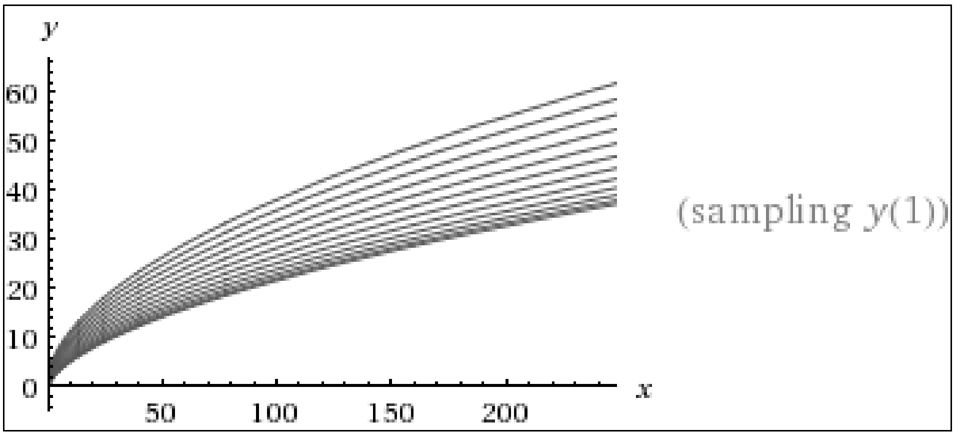
$$u(x,y) = \ln x - \frac{y^2}{x} + C\,; \quad \text{o sea, la I.G. será}: \ \ln x - \frac{y^2}{x} = C\,,$$

o lo que es lo mismo: $x \cdot e^{-\frac{y^2}{x}} = C$, que se puede también expresar así:

$$x \cdot e^{-\frac{y^2}{x}} = C = \frac{x}{e^{y^2/x}}\,; \quad e^{y^2/x} = \frac{x}{C} = K \cdot x\,; \quad \frac{y^2}{x} = \ln K \cdot x\,;$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{x(\ln K + \ln x)} = \pm\sqrt{Cx + \ln x^x}} \Rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 5

Sea integrar la ecuación: $(x^2y^3 + 2y)\cdot dx + (2x - 2x^3y^2)\cdot dy = 0$, sabiendo que admite un factor integrante dependiente de $z = x\cdot y$.
Solución:

Se trata, efectivamente, de una ecuación diferencial no exacta, puesto que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2 - 6x^2y^2$$

sabiendo que admite un factor integrante dependiente de $z = x\cdot y$.

El factor integrante será $\mu(z) = \mu(x, y)$, tal que: $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'\cdot y$; $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'\cdot x$.

Obligando a que sea diferencial exacta, esto es:

$$\mu(z)\cdot(x^2y^3 + 2y)\cdot dx + \mu(z)\cdot(2x - 2x^3y^2)\cdot dy = 0 \ ;$$

se obtiene: $\mu(3x^2y^2 + 2) + \mu'x(x^2y^3 + 2y) = \mu(2 - 6x^2y^2) + \mu'y(2x - 2x^3y^2)$,

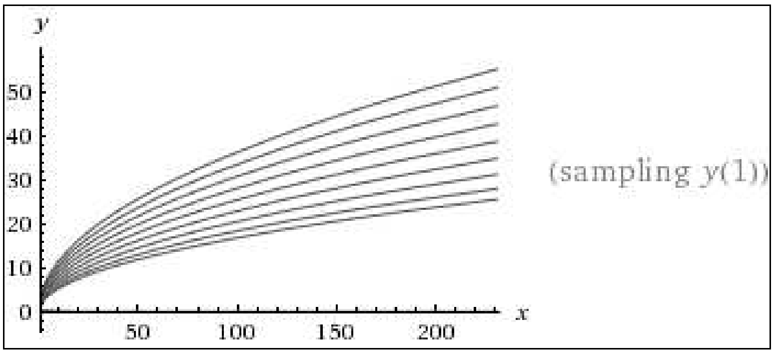
de donde: $9x^2y^2\mu = -\mu'\cdot 3x^3y^3$, o bien, simplificando: $\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{3}{xy}$,

de donde: $\ln\mu = -3\ln(x\cdot y)$; $\mu = \frac{1}{x^3y^3}$. Integrada la ecuación resultante (cuestión ésta que dejamos en manos del amable lector) se debe obtener la doble solución explícita imaginaria:

$$\boxed{y(x) = \frac{i}{x\sqrt{W\left(-\frac{c_1}{x^3}\right)}}} \quad \text{y} \quad \boxed{y(x) = -\frac{i}{x\sqrt{W\left(-\frac{c_1}{x^3}\right)}}}$$

, o también la implícita: $\boxed{x\cdot y^{-2}\cdot e^{-1/x^2+y^2} = C}$ $\Rightarrow$ I.G.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 6

Resuelva la EDO: $(y^2 - y)\cdot dx + x\cdot dy = 0$.

Solución:

Esta ecuación diferencial no es exacta puesto que: $\frac{\delta M}{\delta y} = 2y - 1 \neq \frac{\delta N}{\delta x} = 1$; y ningún factor de integración resulta inmediatamente evidente. Obsérvese, sin embargo, que si los términos se agrupan estratégicamente, la ecuación diferencial antedicha se puede volver a escribir como:

$$-(y\cdot dx - x\cdot dy) + y^2 dx = 0 \qquad (1)$$

El grupo de términos entre paréntesis tiene muchos factores de integración (véase Tabla 1). Tratando cada factor de integración en forma separada, encontramos que el único que hace que toda la ecuación sea exacta es precisamente: $\mu(x, y) = 1/y^2$. Utilizando este factor de integración, podemos reescribir (1) como:

$$-\frac{y\cdot dx - x\cdot dy}{y^2} + 1dx = \frac{x\cdot dy - y\cdot dx}{y^2} + dx = 0$$ (2). Así mismo:

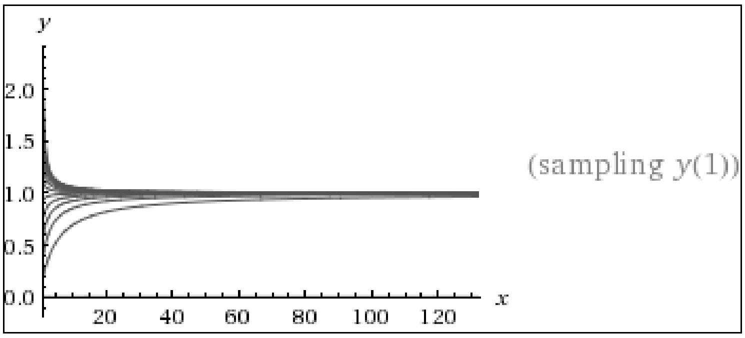
$\frac{x}{y^2}dy - \frac{1}{y}dx + dx = 0$, de donde se deduce la ecuación:

$$M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = (1 - \frac{1}{y})dx + \frac{x}{y^2}dy = 0\,;\ \frac{\delta M}{\delta y} = \frac{1}{y^2} = \frac{\delta N}{\delta x}$$

Así pues, como acabamos de demostrar, dado que (2) ya es una EDO exacta, se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones anteriores. Alternativamente, vemos de la Tabla 1 que (2) se puede volver a escribir como: $-d(x/y) + 1dx = 0$, o bien como: $d((x/y) = 1dx$. Integrando, obtenemos la solución buscada, esto es:

$$\boxed{\frac{x}{y} = x + c\,,\quad \text{o bien}:\quad y = \frac{x}{x + c}}.$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 7

Resuelva la EDO: $(y - xy^2) \cdot dx + (x + x^2y^2) \cdot dy = 0$.

Solución:

Esta ecuación diferencial no es exacta puesto que: $\frac{\delta M}{\delta y} = 1 - 2xy \neq \frac{\delta N}{\delta x} = 1 + 2xy^2$, y ningún factor de integración es inmediatamente evidente. Obsérvese, sin embargo, que la ecuación diferencial se puede reescribir como:

$$(y \cdot dx + x \cdot dy) + (-xy^2 dx + x^2y^2 dy) = 0 \quad (1)$$

El primer grupo de términos tiene muchos factores de integración (véase la Tabla 1). Uno de estos factores, concretamente $\mu(x, y) = 1/(xy)^2$, es un factor de integración para toda la ecuación. Multiplicando (1) por $1/(xy)^2$, encontramos que:

$$\frac{y \cdot dx + x \cdot dy}{(xy)^2} + \frac{-xy^2 dx + x^2y^2 dy}{(xy)^2} = 0$$

o de manera equivalente: $\frac{y \cdot dx + x \cdot dy}{(xy)^2} = \frac{1}{x} dx - dy \quad (2)$

Así mismo:

$$\frac{dx}{x^2y} + \frac{dy}{xy^2} - \frac{dx}{x} + dy = 0$$, de donde se deduce la ecuación:

$$M(x,y) \cdot dx + N(x,y) \cdot dy = \left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{xy^2} + 1\right)dy = 0 \; ; \; \frac{\delta M}{\delta y} = -\frac{1}{x^2y^2} = \frac{\delta N}{\delta x}$$

Así pues, como acabamos de demostrar, dado que (2) es exacta, se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones anteriores.

Alternativamente, de la Tabla 1 vemos que: $\frac{y \cdot dx + x \cdot dy}{(xy)^2} = d\left(\frac{-1}{xy}\right)$, de modo que (2) se puede volver a escribir como: $d\left(\frac{-1}{xy}\right) = \frac{1}{x} dx - dy$.

Integrando ambos lados de esta ecuación mediante una cuadratura, encontramos que:

$$\frac{-1}{xy} = \ln|x| - y + c$$

que es la solución de la EDO planteada en su forma implícita.

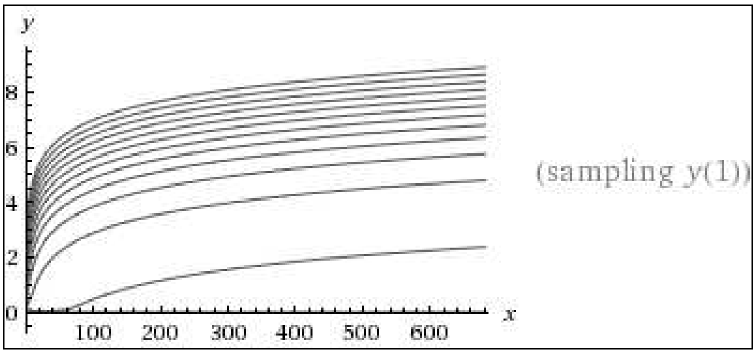
En forma explícita, tendremos que:

$$-\frac{1}{x} = y \cdot \ln x - y^2 + c \cdot y = y(\ln x + c) - y^2 = y \cdot \ln K \cdot x - y^2,$$

haciendo c = ln K. De este modo, la I.G. buscada será, por aplicación de la fórmula cuadrática:

$$y^2 - (\ln Kx) \cdot y - \frac{1}{x} = 0\,; \quad \boxed{y = \frac{\ln Kx \pm \sqrt{(\ln Kx)^2 + \frac{4}{x}}}{2}}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 8

Resuelva la EDO: $y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$.

Solución:

Reescribiendo esta ecuación en forma diferencial, tenemos:

$$(3yx^2) \cdot dx + (-x^3 - 2y^4) \cdot dy = 0\,;$$

la cual no es exacta puesto que: $\frac{\delta M}{\delta y} = 3x^2 \neq \frac{\delta N}{\delta x} = -3x^2$. Además, no hay ningún factor de integración inmediatamente evidente. Podemos, sin embargo, volver a arreglar esta ecuación así:

$$x^2(3y \cdot dx - x \cdot dy) - 2y^4 dy = 0 \quad (1)$$

El grupo entre paréntesis es de la forma $ay \cdot dx + bx \cdot dy$, donde a = 3 y b = -1, que tiene un factor de integración x^2y^{-2}. Dado que la expresión entre paréntesis ya está multiplicada por x^2, probamos un factor de integración de la forma: $\mu(x, y) = y^{-2}$. Multiplicando (1) por y^{-2} tenemos:

$$x^2y^{-2}(3y \cdot dx - x \cdot dy) - 2y^2 dy = 0$$

que se puede simplificar (véase la Tabla 1) a: $d(x^3y^{-1}) = 2y^2dy$. (2)

Así mismo: $\frac{3x^2}{y}dx - \frac{x^3dy}{y^2} - 2y^2dy = 0$, de donde se deduce la ecuación:

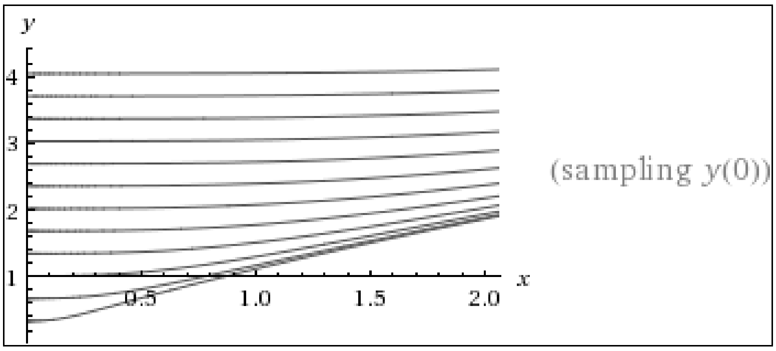
M(x,y)·dx + N(x,y)·dy = $(\frac{3x^2}{y})dx - (\frac{x^3}{y^2} + 2y^2)dy = 0$; $\frac{\delta M}{\delta y} = -\frac{3x^2}{y^2} = \frac{\delta N}{\delta x}$, por lo que ya nos hallamos en presencia de una EDO exacta.

Integrando ambos lados de la expresión anterior (2) mediante una cuadratura, obtenemos:

$$\boxed{x^3y^{-1} = \frac{2}{3}y^3 + c}$$

como la solución de la EDO planteada en forma implícita.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 9

Dada la ecuación diferencial ordinaria:
$(x^2y\cdot\cos x - y)\cdot dx + (x^2\text{sen } x + x + 2x^2y)\cdot dy = 0$. Se pide:

1º Comprobar que no es una ecuación diferencial exacta.
2º Obtener una función μ(x), tal que: M(x,y)·μ(x)·dx + N(x,y)·μ(x)·dy = 0 sea una EDO diferencial exacta.
3º Aprovechando el resultado anterior, integrar la ecuación propuesta.

Solución:

Respectivamente:

1º) Calculemos las derivadas parciales cruzadas $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ y $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}(x^2y\cos x - y) = x^2\cos x - 1 \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2\text{sen } x + x + 2x^2y) = 2x\cdot\text{sen } x + x^2\cos x + 1 + 4xy. \end{cases}$$

Como evidentemente: $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, no se trata de una diferencial exacta.

2º) Sea $\mu(x)$ una función dependiente de la única variable x (factor integrante). Se pretende que $M(x,y)\cdot\mu(x)\cdot dx + N(x,y)\cdot\mu(x)\cdot dy = 0$ sea diferencial exacta. Entonces: $\frac{\partial}{\partial y}\left[M(x,y)\cdot\mu(x)\right] = \frac{\partial M}{\partial y}\cdot\mu(x)$, deberá ser igual a: $\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)\cdot\mu(x)\right] = \frac{\partial N}{\partial x}\cdot\mu(x) + N\cdot\mu'(x)$, esto es: $\frac{\partial M}{\partial y}\mu(x) = \frac{\partial N}{\partial x}\mu(x) + N\cdot\mu'(x)$,

que también se puede escribir así: $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$.

Como el segundo miembro solo depende de x, el primer miembro, para que exista la función $\mu(x)$, deberá ser independiente de y. En efecto:

$$\frac{x^2\cos x - 1 - 2x\cdot\operatorname{sen} x - x^2\cos x - 1 - 4xy}{x^2\operatorname{sen} x + x + 2x^2 y} = \frac{-2x\cdot\operatorname{sen} x - 2 - 4xy}{x^2\operatorname{sen} x + x + 2x^2 y} = -\frac{2}{x}.$$

Luego: $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{2}{x}$; $\ln\mu(x) = -2\ln x = \ln\frac{1}{x^2}$, esto es: $\boxed{\mu(x) = \frac{1}{x^2}}$.

3º) Multiplicando por $\mu(x)$ la ecuación dada resulta una diferencial exacta y, por tanto, integrable fácilmente, procediendo como en los ejercicios anteriores. La ecuación resultante es la siguiente: $\left(y\cdot\cos x - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{x} + 2y\right)dy = 0$.

Integrando M(x,y), se obtiene:

$$\int M(x,y)\cdot dx = \int\left(y\cdot\cos x - \frac{y}{x^2}\right)dx = y\cdot\operatorname{sen} x + \frac{y}{x} + \varphi(y),$$

cuya derivada respecto a y, igualada a N(x,y), proporciona:

$$\operatorname{sen} x + \frac{1}{x} + \varphi'(y) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{x} + 2y, \text{ de donde: } \varphi'(y) = 2y;\ \varphi(y) = y^2 + C.$$

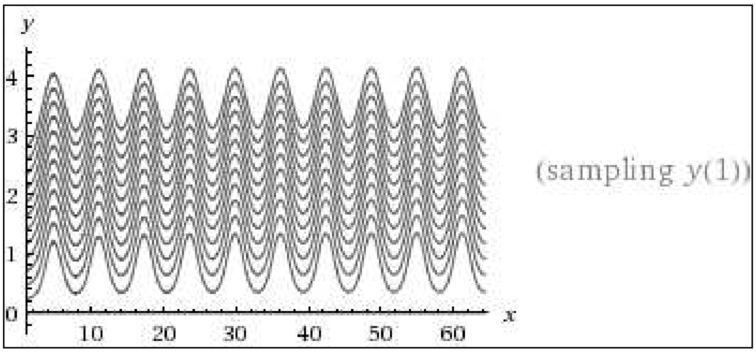
Luego la integral general buscada es: $\boxed{y\cdot\operatorname{sen} x + \frac{y}{x} + y^2 + C = 0}$.

Para hallar el valor explícito de la *y*, se puede aplicar la fórmula cuadrática, o sea:

$y^2 + \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{x}\right)y + C = 0;$ de donde se deducen las dos soluciones posibles siguientes:

$$y = \frac{-\operatorname{sen} x - \frac{1}{x} \pm \sqrt{\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4C}}{2} = \frac{-\operatorname{sen} x - \frac{1}{x} \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{x^2} + \frac{2 \cdot \operatorname{sen} x}{x} - k}}{2},$$

habiendo hecho k = 4C. La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



8. ECUACIÓN DE CLAIRAUT

Se llama así la ecuación diferencial ordinaria que tiene la siguiente forma: $y = y' \cdot x + \varphi(y')$. Se integra por un método de derivación, obteniéndose como haz integral general: $y' = c$, o sea: $y = c \cdot x + \varphi(c)$.

El haz integral de toda ecuación de Clairaut es, pues, un haz de rectas que se obtiene substituyendo y' por la constante *c* del haz. Si este haz tiene una curva envolvente ésta será una *solución singular* de la ecuación, puesto que en cada uno de sus puntos será tangente a una recta involuta y tendrá en él los mismos valores x, y e y' que los de dicha recta, verificando, en su consecuencia, igualmente la primera ecuación del presente enunciado

La integral singular reseñada se halla eliminando *c* entre la general y su derivada respecto a c, que es $x + \varphi'(c) = 0$, o sea, la eliminante del sistema:

$$\begin{cases} y = c \cdot x + \varphi(c) \\ 0 = x + \varphi'(c) \end{cases}$$

La ecuación diferencial de Clairaut, así llamada en honor a su inventor, el físico francés Alexis-Claude Clairaut[3], es una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

[3] Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) nació en París, hijo de Jean-Baptiste, maestro de matemáticas de París y miembro de la Academia de Matemáticas de Berlín. Fue uno de los matemáticos más precoces, superando incluso a Blaise Pascal, y a la edad de diez años ya leía los libros de G.F. de L'Hôpital sobre secciones cónicas y cálculo infinitesimal. Con solo doce años, Clairaut presenta una memoria sobre cuatro curvas de cuarto grado a la Academia, la cual, y tras haberse asegurado que era el autor verdadero, se deshace en grandes elogios. Posteriormente, y con solo dieciocho años, publica la obra *Recherches sur les courbes à double courbure* (Investigaciones sobre las curvas con doble curvatura, 1831) gracias a la cual fue admitido en la Academia de Ciencias, aunque hubo de hacerse una excepción con él, ya que el reglamento exigía una edad mínima de veinte. Otros campos de su interés fueron las ecuaciones

$$y(x) = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

, donde f es una función continuamente diferenciable y constituye un caso particular de la ecuación de Lagrange que veremos a continuación, en que: f(y') ≡ y'. Para resolver esta ecuación, diferenciamos respecto a *x*, quedando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2},$$

por tanto:

$$0 = \left(x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

y así:

$$0 = \frac{d^2y}{dx^2}$$

, o bien:

$$0 = x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

En el primer caso, *c* = *dy*/*dx* para cualquier constante arbitraria *c*. Substituyéndolo en la ecuación de Clairaut, tenemos la familia de ecuaciones dadas por la expresión: y(x) = c·x + f(c), llamadas *soluciones generales* de la ecuación de Clairaut. El otro caso,

$$0 = x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

define solo una solución *y*(*x*), llamada *solución singular*, cuyo gráfico es envolvente de las gráficas de las soluciones generales. La solución singular se representa normalmente usando notación paramétrica, como: [*x*(*p*), *y*(*p*)], donde *p* representa *dy*/*dx*.

El interés que presenta este tipo de ecuación se debe al hecho de que tiene como solución a una familia de rectas, como ya se ha apuntado. Además, la envolvente, es decir, la curva cuyas tangentes están dadas por la familia, también es solución, en este caso una solución singular de la ecuación de Clairaut. Ésta fue una de las primeras ocasiones en la historia en que este tipo de solución (la solución singular) se puso de relieve.

diferenciales, las ecuaciones en derivadas parciales, la teoría de superficies, el cálculo en varias variables y las series trigonométricas. Por lo que respecta a las ecuaciones diferenciales, en 1734, Clairaut se interesó por la ecuación que actualmente lleva su nombre cuya solución general consiste en una familia de líneas rectas.

Veamos, en fin, por lo que se refiere a su interpretación geométrica, que las isoclinas[4] de esta ecuación son rectas como también sucede en la ecuación de Lagrange, pero aquí la pendiente de los elementos de dirección del campo, a lo largo de cada isoclina, es la pendiente de la propia isoclina, es decir, son al mismo tiempo isoclinas y curvas integrales, a diferencia de la ecuación de Lagrange en que este hecho solo ocurre eventualmente en isoclinas excepcionales.

Planteamos, a continuación, algunos ejemplos para la buena comprensión del método anteriormente expuesto. A saber:

Ejemplo 1

Sea resolver la EDO:

$$xy''' + (y''')^2 = y''.$$

Solución:

Para ello, hacemos:

$$y'' = p,$$

por tanto:

$$xp' + (p')^2 = p,$$

obteniendo la ecuación de Clairaut, cuya solución es:

$$p = y'' = Cx + C^2,$$

de la cual podemos obtener *y* integrando sucesivamente dos veces, así:

$$y = \int\int y''\,dxdx = \int\int (Cx+C^2)\,dxdx = \int (\frac{Cx^2}{2}+C^2x+D)\,dx = \frac{Cx^3}{6}+\frac{C^2x^2}{2}+Dx+E,$$

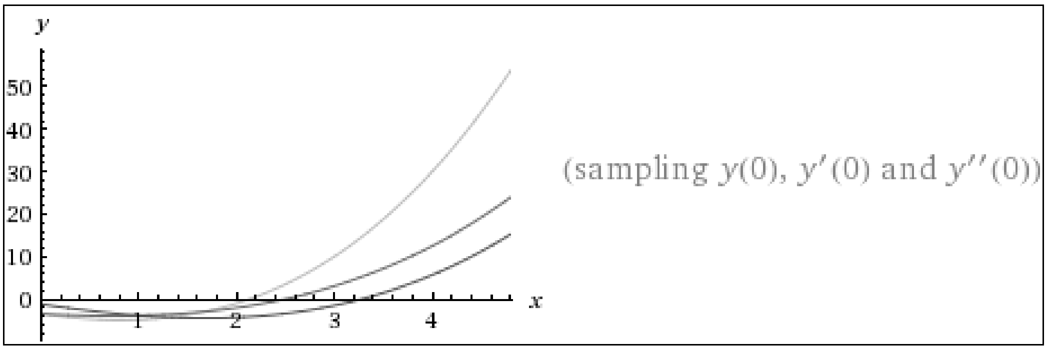
siendo *D* y *E* otras dos constantes cualesquiera.

Así pues, la integral general buscada será:

$$\boxed{y = \frac{Cx^3}{6} + \frac{C^2x^2}{2} + Dx + E.}$$

[4] Crear un campo de direcciones, por lo regular, resulta tedioso y cuesta demasiado tiempo, a menos que para esto programemos un ordenador con *software* adecuado para generar un campo de direcciones. Sin embargo, cuando queremos tener una idea de cómo luce el campo de direcciones correspondiente a alguna ecuación diferencial dada sin usar un ordenador, entonces dibujaremos elementos lineales a lo largo de ciertas curvas llamadas *isoclinas*. Para explicar esto, supongamos que tenemos la ecuación diferencial de primer orden: y’ = f(x,y). Una isoclina resulta ser el conjunto de todos los puntos (x,y) del plano tales que: f(x,y) = k, donde *k* es una constante dada (de modo que las isoclinas son curvas de nivel de f(x,y)). Por lo tanto, todo elemento lineal que se encuentre a lo largo de una isoclina deberá tener una pendiente igual a *k*.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 2

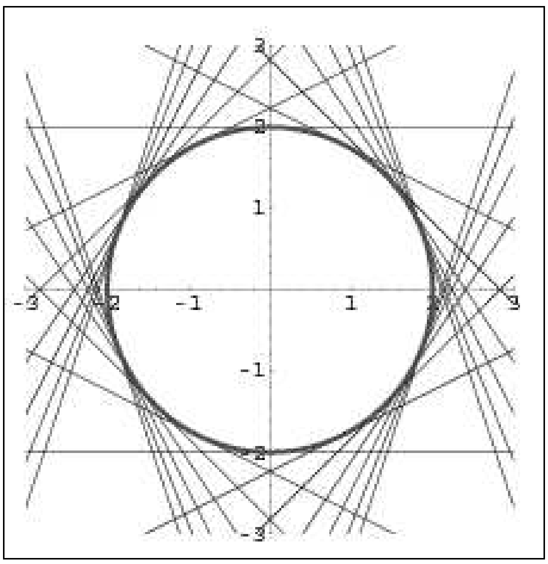
Resuelva la ecuación diferencial ordinaria: $y = x\cdot y' + 2\sqrt{1+t^2}$.

Solución:

La solución general es la familia de rectas: $y = c\cdot x \pm 2\sqrt{1+t^2}$ y como $f(t) = 2\sqrt{1+t^2}$ la solución singular está dada por:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

Obsérvese que éstas son las ecuaciones paramétricas de un círculo de radio 2, de ecuación: $x^2 + y^2 = 4$ y de centro el origen (0,0) de las coordenadas cartesianas rectangulares. En la figura siguiente se muestra la familia de rectas tangentes $y = c\cdot x + 2\sqrt{1+t^2}$ y la envolvente es la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 = 4$. Así:



Ejemplo 3

Hallar las curvas cuyas tangentes interceptan un segmento constantemente igual a *a* entre los ejes coordenados.

Solución:

La ecuación de la recta tangente (X e Y son las coordenadas de la tangente, mientras x e y son las coordenadas del punto de contacto) es la siguiente:

$$Y - y = y'(X - x)$$

, que intercepta en el eje OX el segmento (Y = 0): X = x – y/y', e intercepta en el eje OY (X = 0) el segmento: Y = y –y'·x. Ahora bien, el enunciado del problema exige que: $(x - \frac{y}{y'})^2 + (y - y' \cdot x)^2 = a^2$, o sea: $(y - y' \cdot x)^2 (\frac{1}{y'^2} + 1) = a^2$, de donde:

$(y - y' \cdot x)^2 = \frac{a^2 \cdot y'^2}{1 + y'^2}$, con lo que: $y = y' \cdot x \pm \frac{a \cdot y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$, que es una ecuación de Clairaut con $\varphi(y') = \frac{a \cdot y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$, que ofrece el haz de rectas: $\boxed{y = c \cdot x \pm \frac{a \cdot c}{\sqrt{1 + c^2}}}$.

La envolvente de este haz es, en este caso. la curva astroide[5] de ecuación:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

9. ECUACIÓN DE LAGRANGE

La ecuación diferencial de Lagrange[6] (o también llamada de D'Alambert-Lagrange o de Morge) es de primer orden pero no lineal, al igual que la de Clairaut, y presenta la forma siguiente:

$$y = x \cdot f(y') + \varphi(y') \Rightarrow y = x \cdot f(p) + \varphi(p) \qquad (1\ DL)$$

[5] An **astroid** (sometimes spelled **asteroid**) is a particular mathematical curve: a hypocycloid with four cusps. Astroids are also superellipses: all astroids are scaled versions of the curve specified by the equation: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. Its modern name comes from the Greek word for "star". The curve had a variety of names, including **tetracuspid** (still used), cubocycloid, and paracycle. It is nearly identical in form to the evolute of an ellipse. A circle of radius 1/4 rolls around inside a circle of radius 1 and a point on its circumference traces an astroid. A line segment of length 1 slides with one end on the x-axis and the other on the y-axis, so that it is tangent to the astroid (which is therefore an envelope).

[6] Joseph Louis de Lagrange (Turín, 1736 - París, 1813) fue un matemático francés de origen italiano. La lectura de una obra del astrónomo inglés Edmund Halley despertó en él un interés por las matemáticas y la astronomía. En su obra *Miscellanea taurinensia*, obtuvo, entre otros resultados, una ecuación diferencial general del movimiento y su adaptación para el caso particular del movimiento rectilíneo y la solución a muchos problemas de dinámica mediante el cálculo de variantes. Escribió, así mismo, numerosos artículos sobre cálculo integral y las ecuaciones diferenciales generales del movimiento de tres cuerpos sometidos a fuerzas de atracción mutuas.

, donde f(y') no puede ser igual a y', resolviéndose con la substitución y' = p, obteniéndose una solución general y una solución particular.

En efecto, si derivamos esta expresión respecto de x obtenemos:

$$\frac{dx}{dy'} + \frac{f'(y')}{f(y') - y'} x + \frac{\varphi'(y')}{f(y') - y'} = 0$$, cuya integral general es:

$$x = e^{-\int \frac{f'(y')}{f'(y') - y'} dy'} \left[C - \int e^{\frac{f'(y')}{f(y') - y'} dy'} \frac{\varphi'(y') dy'}{f(y') - y'} \right]$$

O lo que es igual:

$$\frac{dy}{dx} = p = f(p) + x \cdot f'_x(p) \cdot \frac{dy}{dx} + \varphi'_p(p) \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$p - f(p) = \left[x \cdot f'_x(p) + \varphi'_p(p) \right] \cdot \frac{dp}{dx}$$

Tomando ahora *x* como variable dependiente o funcional, podemos poner:

$$[p - f(p)] \frac{dx}{dp} - x \cdot f'_x(p) = \varphi'_p(p)$$

, que es una ecuación lineal en *x* integrable por métodos ya desarrollados en esta misma monografía.

Podemos recordar que en las ecuaciones lineales el factor integrante y la solución general vienen dados por la expresión:

$$\mu(p) = \frac{1}{P_0(p)} \cdot exp \int \frac{P_1(p)}{P_0(p)} \cdot dp \quad ; \quad x(p) = \frac{1}{\mu P_0} \int \mu R(p)\, dp + \frac{C}{\mu P_0}$$

De donde tenemos que:

$$\mu(p) = \frac{1}{p - f(p)} \cdot exp \int \frac{\varphi'_p(p)}{p - f(p)} \cdot dp = \frac{1}{p - f(p)} \cdot \exp \psi(p)$$

Y substituyendo el valor del factor integrante en la otra ecuación, se obtiene:

$$x(p) = \exp[-\psi(p)] \left| \int \frac{\varphi'_p(p)}{p - f(p)} \cdot \exp[\psi(p)]\, dp + C \cdot \exp[-\psi(p)] \right|$$

Obtenemos de ese modo una ecuación de la forma x = x(p, C) que, junto a la ecuación anterior (1 DL), nos permite llegar a una solución de la forma:

$$h(x, y, C) = 0.$$

Su interpretación geométrica explica que las isoclinas del campo de direcciones que define esta EDO son rectas dadas por la propia ecuación, considerando *p* como un parámetro. Toda isoclina excepcional cuya pendiente f(p) coincida con el valor *p* del parámetro correspondiente a dicha isoclina será evidentemente (si existe) una solución de la ecuación planteada, por estar constituida por elementos tangenciales del campo.

Veamos algunos ejemplos representativos de este tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias:

Ejemplo 1

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y = -x + \frac{1-y'}{1+y'}$.

Solución:

Esta EDO da, con y' = p, la expresión:

$$x = (1 + p)^{-2} + C \ ; \quad y = -p^2(1 + p)^{-2} - C \ ;$$

Eliminando p resulta el haz de parábolas congruentes:

$$4(x - C) = (x + y + 1)^2$$

que tienen por eje común la recta y = -x.

En este caso no existe integral excepcional rectilínea. El valor que satisface a $p = f(p) \equiv -1$ anula el denominador de: $\varphi(p) = \frac{1-p}{1+p}$.

De hecho, esta EDO adopta la presente configuración analítica:

$$y(1 + y') = -x(1 + y') + 1 - y' \ ; \quad y + y \cdot y' = -x - x \cdot y' + 1 - y' \ ;$$

$$y \cdot y' + x \cdot y' + y' = -x + 1 - y \ ; \quad y'(y + x + 1) = 1 - x - y \ ; \quad \text{y entonces:}$$

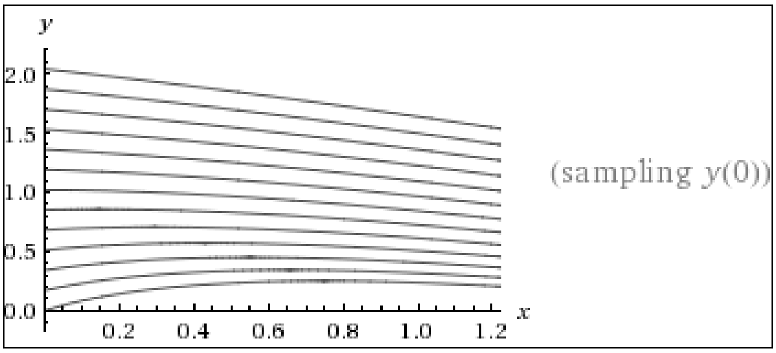
$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1-x-y}{1+x+y} = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \frac{y}{x}}{\frac{1}{x} + 1 + \frac{y}{x}} = f(y/x)$$

y queda reducida a una EDO homogénea. En efecto, se tiene la expresión general: $M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0$, o sea: $(1 - x - y)dx - (1 + x + y)dy = 0$, que se puede resolver, como ya se ha hecho en numerosos ejemplos de este mismo libro. Lo mismo sucede con los dos ejemplos que siguen a continuación.

Aquí, la I.G. obtenida viene dada, en forma explícita, por:

$$y(x) = \pm\sqrt{c + 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right) + (x+1)^2} - x - 1$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 2

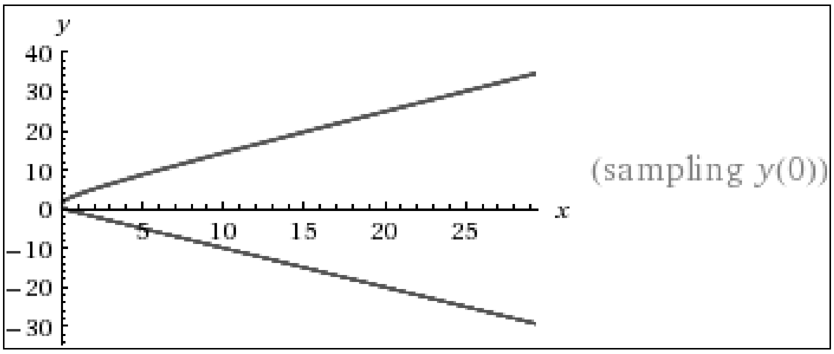
Resolver la ecuación diferencial del haz ortogonal al problema anterior, esto es: $y = -x - \dfrac{1+y'}{1-y'}$.

Solución: Ahora tendremos que:

$$\left.\begin{array}{ll} [1] & -x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+p}{1-p} + \dfrac{1}{1-p} + C \\ [2] & y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+p}{1-p} + \dfrac{1}{1-p} - \dfrac{1+p}{1-p} + C \end{array}\right\} \begin{array}{l} y + x = K{\cdot}e^{y-x} \\ (\text{con}\, K = -e^{2C-1}) \end{array} \quad [3]$$

Para p = -1 la recta y = -x que resulta en [2] satisface evidentemente la ecuación diferencial; y como también resulta de [3] para K = 0 (correspondiente a $C \to \infty$ en [1][2]) parece natural considerarla solución particular (y no singular). Es el eje de las parábolas anteriores y como tal es trayectoria ortogonal de las mismas.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 3

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y = -x + \left(\frac{1+y'}{1-y'}\right)^2$.

Solución:

Se tiene que: $x = \frac{2}{(1-p)^2} + C$; $y = \frac{(1+p)^2 - 2}{(1-p)^2} - C$

Eliminando p resulta el haz de parábolas tangentes a la recta y = -x:

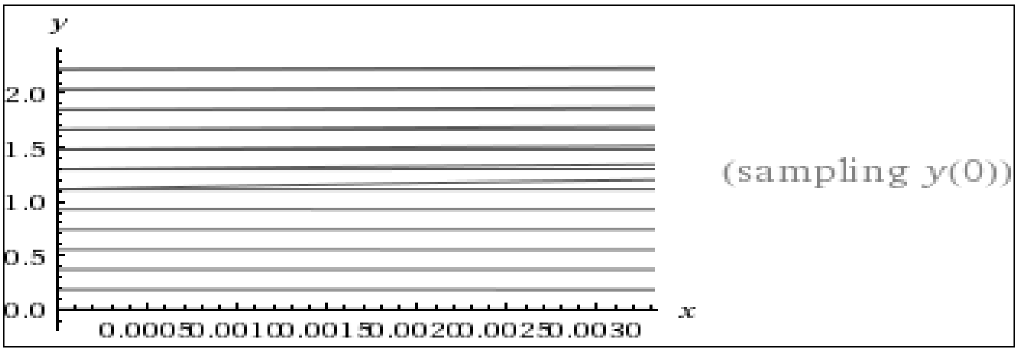
$$(x - y + K)^2 = 4(x + y)$$

La solución rectilínea y = -x correspondiente a p = -1 no pertenece, en este caso, al haz integral, sino que es precisamente su envolvente. Esta es, propiamente, una integral singular.

La I.G. expresada en forma explícita será, pues:

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = \pm 2\sqrt{-c + 2x + 1} - c + x + 2 \\ y(x) = \pm 2\sqrt{c + 2x + 1} + c + x + 2 \end{array}}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



10. RESOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE LAS SERIES DE POTENCIAS

La aplicabilidad de este método a la resolución de las EDO de cualquier orden no resulta en absoluto despreciable, como tendremos ocasión de comprobar seguidamente.

Veamos, a continuación, algunos ejercicios suficientemente representativos de ello, aunque la teoría correspondiente así como otros ejercicios de aplicación de este método se estudiarán en el capítulo siguiente de este mismo libro para las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior al primero.

Ejemplo 1

Resolver la EDO: $y' + y = 0$.

Solución:

Esto es: $\sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$.

Teniendo en cuenta que:

$$k = n-1 \qquad k = n$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) C_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left[(k+1) C_{k+1} + C_k \right] = 0 \Rightarrow C_{k+1} = -\dfrac{C_k}{k+1} \end{cases}$$

Se tiene que:

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow C_1 = -C_0 \\ k = 1 \Rightarrow C_2 = \dfrac{-C_1}{2} = \dfrac{-(-C_0)}{2} = \dfrac{C_0}{2} \\ k = 2 \Rightarrow C_3 = \dfrac{-C_2}{3} = \dfrac{-\left(C_0/2\right)}{3} = \dfrac{-C_0}{6} \\ k = 3 \Rightarrow C_4 = \dfrac{-C_3}{4} = \dfrac{-\left(-C_0/6\right)}{4} = \dfrac{C_0}{24} \\ k = 4 \Rightarrow C_5 = \dfrac{-C_4}{5} = \dfrac{-\left(C_0/24\right)}{5} = \dfrac{-C_0}{120} \end{cases}$$

$$y = C_0 - C_0 x + \frac{C_0}{2} x^2 - \frac{C_0}{6} x^3 + \frac{C_0}{24} x^4 - \frac{C_0}{120} x^5;$$

$$y = C_0 \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} \right].$$

Lo que ofrece la integral general:

$$\boxed{y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = C_0 e^{-x}}$$

El resultado obtenido es obvio si procedemos a efectuar la resolución de este problema directamente, esto es, considerando la ecuación característica o modular:

$\lambda + 1 = 0$; $\lambda = -1$, con lo que se tendrá la integral general siguiente:

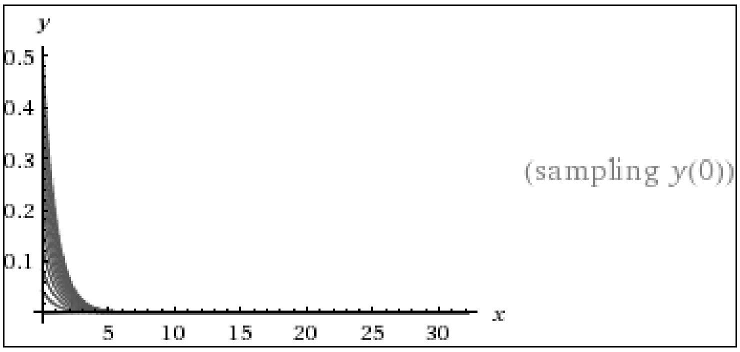
$$\boxed{y(x) = C_0 \cdot e^{-x}}$$

A la misma conclusión llegaríamos integrando directamente si consideramos que se trata de una sencilla ecuación de variables separables, puesto que:

$\frac{dy}{dx} + y = 0; -\frac{dy}{y} = dx$; y mediante una cuadratura se tiene que:

$\ln y = C - x$; $y = e^{C-x} = e^{C} \cdot e^{-x} = C_0 \cdot e^{-x}$, c.s.q.d., habiendo hecho: $C_0 = e^{C}$.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 2

Resolver la EDO: $y' - 2y = 0$.

Solución:

Esto es: $\sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$.

Teniendo en cuenta que:

$$k = n - 1 \qquad\qquad k = n$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) C_{k+1} x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left[(k+1) C_{k+1} - 2C_k \right] = 0 \Rightarrow C_{k+1} = \frac{2C_k}{k+1} \end{cases}$$

Se tiene:

$$\begin{cases} k=0 \Rightarrow C_1 = 2C_0 \\ k=1 \Rightarrow C_2 = \dfrac{2C_1}{2} = 2C_0 \\ k=2 \Rightarrow C_3 = \dfrac{2C_2}{3} = \dfrac{2(2C_0)}{3} = \dfrac{4C_0}{3} \\ k=3 \Rightarrow C_4 = \dfrac{2C_3}{4} = \dfrac{2}{4}\left(\dfrac{4C_0}{3}\right) = \dfrac{8C_0}{12} \\ k=4 \Rightarrow C_5 = \dfrac{2C_4}{5} = \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{8C_0}{12}\right) = \dfrac{16C_0}{60} \end{cases}$$

$$y = C_0 + 2C_0x + 2C_0x^2 + \frac{4C_0}{3}x^3 + \frac{8C_0}{12}x^4 + \frac{16C_0}{60}x^5;$$

$$y = C_0\left[1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{12}x^4 + \frac{16}{60}x^5\right] = C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}.$$

Lo que ofrece la integral general buscada:

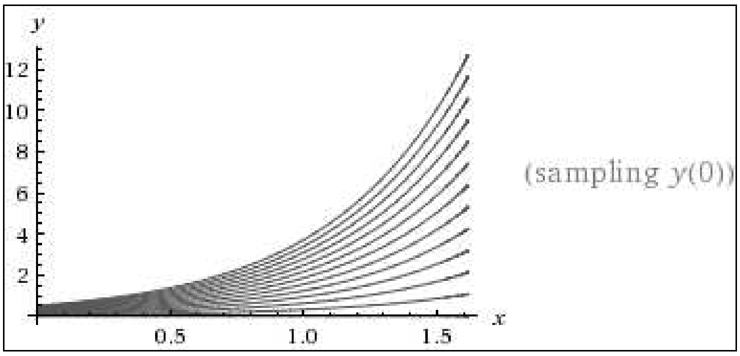
$$\boxed{y = C_0 \cdot e^{2x}}$$

También aquí el resultado obtenido es obvio si procedemos a efectuar la resolución de este problema directamente, esto es, o bien considerando que se trata, como en el caso anterior, de una ecuación de variables separables o bien teniendo en cuenta la ecuación característica o modular:

λ - 2 = 0; λ = 2, con lo que se tendrá la integral general:

$\boxed{y(x) = C_0 \cdot e^{2x}}$, c.s.q.d.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 3

Resolver la EDO: $y' - x^2 y = 0$.

Solución:

Esto es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} = 0$$

$$C_1 + C_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} nC_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} = 0$$

Teniendo en cuenta que:

$$k = n - 3 \qquad\qquad k = n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+3) C_{k+3} x^{k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+2} = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2} \left[(k+3) C_{k+3} - C_k \right] = 0 \Rightarrow C_{k+3} = \frac{C_k}{k+3} \end{array} \right.$$

Se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 0 \Rightarrow C_3 = \dfrac{C_0}{3} \\ k = 1 \Rightarrow C_4 = \cancel{\dfrac{C_1}{4}} = 0 \\ k = 2 \Rightarrow C_5 = \cancel{\dfrac{C_2}{5}} = 0 \\ k = 3 \Rightarrow C_6 = \dfrac{C_3}{6} = \dfrac{C_0}{18} \\ k = 4 \Rightarrow C_7 = \dfrac{C_4}{7} = 0 \\ k = 5 \Rightarrow C_8 = \dfrac{C_5}{8} = 0 \\ k = 6 \Rightarrow C_9 = \dfrac{C_6}{9} = \dfrac{C_0}{162} \end{array} \right.$$

O sea:

$$y = C_0 + \frac{C_0}{3}x^3 + \frac{C_0}{18}x^6 + \frac{C_0}{162}x^9;$$
$$y = C_0\left[1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{18} + \frac{x^9}{162}\right].$$

Lo que ofrece la integral general:

$$\boxed{y = C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^3}{3}\right)^n = C_0 e^{x^3/3}}$$

También aquí el resultado obtenido es obvio si procedemos a efectuar la resolución de este problema directamente, esto es, considerando que se trata de una EDO lineal homogénea de primer orden, puesto que: $X = -x^2$ y $X_1 = 0$. Su integración resulta inmediata, ya que se trata de una ecuación de variables separables, así:

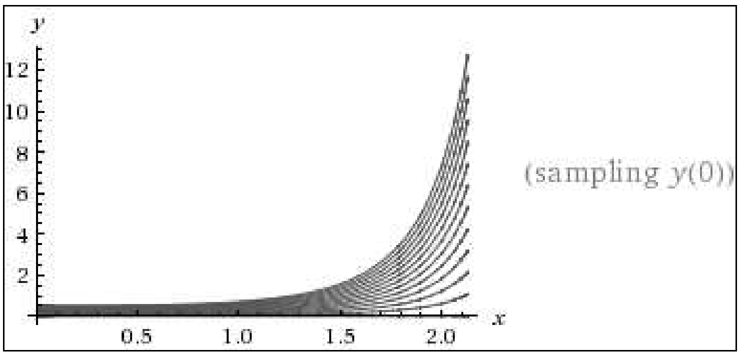
$$\frac{dy}{dx} = x^2\cdot y;\quad \frac{dy}{y} = x^2\cdot dx,$$

de donde la integral general buscada, obtenida mediante una cuadratura, será:

$$\ln y = \frac{x^3}{3} + C;\ y = e^{C+\frac{x^3}{3}} = C_0\cdot e^{\frac{x^3}{3}}$$ (habiendo hecho: $C_0 = e^C$), o también:

$$y(x) = -C\cdot e^{-\int X\cdot dx} = -C\cdot e^{\frac{x^3}{3}} = C_0\cdot e^{\frac{x^3}{3}}$$ (habiendo hecho: $C_0 = -C$), c.s.q.d.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



11. RESOLUCIÓN POR SUBSTITUCIÓN

El cambio de variable: $z = ax + by + c$, transforma una ecuación diferencial ordinaria del tipo: $y' = f(ax + by + c)$ en una ecuación de variables separables de fácil resolución, tal como ya se apuntó en su momento (véase el primer epígrafe del presente capítulo). En efecto, se tiene que:

$y' = f\,(ax + by + c) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$. Sea ahora:

$$z = ax + by + z\ (2), \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right).$$

Substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z) \Leftrightarrow \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = f(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = b{\cdot}f(z) + a\,,\ \frac{dz}{b{\cdot}f(z) + a} = dx\,,$$

que ya es una EDO con variables separables que podemos resolver mediante una cuadratura.

Veamos, al respecto de lo expuesto, los siguientes ejemplos representativos:

Ejemplo 1

Probar que el cambio de variable: z = ax + by + c transforma la EDO siguiente: y’ = f(ax + by + c) en una ecuación de variables separables, y aplicar este método para resolver las tres ecuaciones diferenciales que se indican a continuación:

(a) $y' = (x + y)^2$; (b) $y' = sen^2(x – y + 1)$; (c) $y' = -(a/b)\cdot sen^2(ax + by + c)$.

Solución:

Respectivamente:

(a) Se trata ahora de resolver la EDO: $y' = (x + y)^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = (x + y)^2$

Sea: $z = x + y,\ \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

Substituyendo en las expresiones anteriores, se obtiene que:

$$\frac{dz}{dx} - 1 = z^2 \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 + 1 \Leftrightarrow \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int dx \Leftrightarrow \tan^{-1} z = x + c$$

Substituyendo z = x + y en la ecuación anterior, se obtiene que:

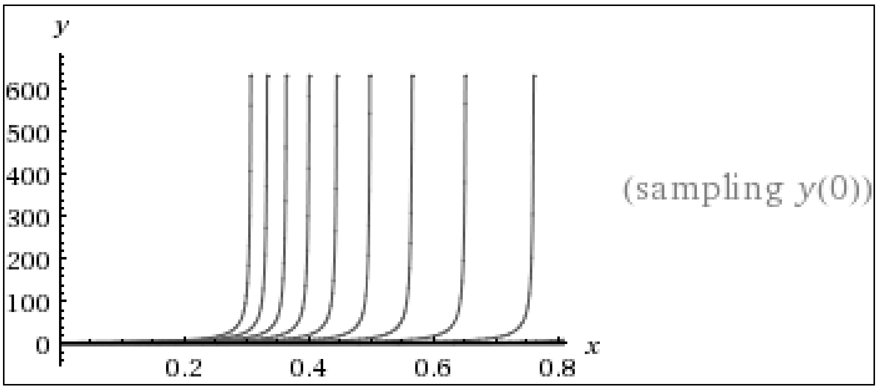
$\tan^{-1}(x + y) = \text{arc tan}\,(x + y) = x + c \Leftrightarrow x + y = \tan(x + c)$, y entonces se tiene la I.G. en forma explícita:

$$\boxed{y(x) = \tan\,(x + c) – x}$$

La correspondiente solución en forma explícita, alternativamente, también vendrá dada por la expresión:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{c_1\, e^{2\,i\,x} - \frac{i}{2}} - x - i}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



(b) Se trata ahora de resolver la EDO:

$$y' = \text{sen}^2(x - y + 1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \text{sen}^2(x - y + 1)$$

$$\text{Sea: } z = x - y + 1, \ \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}; \frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx} + 1$$

Substituyendo en las expresiones anteriores, se obtiene que:

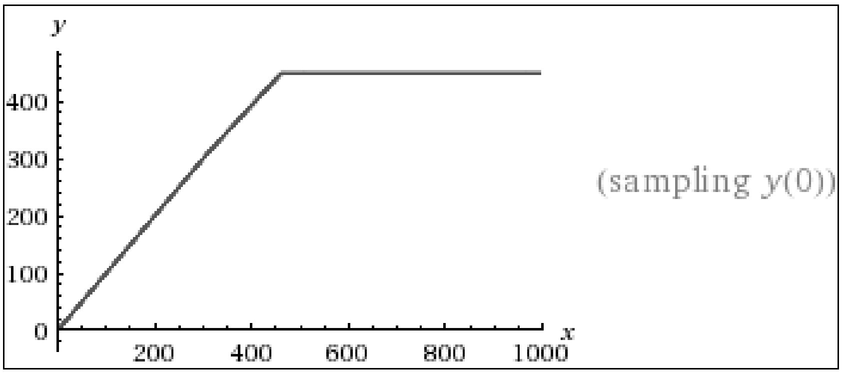
$$-\frac{dz}{dx} + 1 = \text{sen}^2 z \Leftrightarrow -\frac{dz}{dx} = \text{sen}^2 z - 1 \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \text{sen}^2 z \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \cos^2 z \Leftrightarrow \sec^2 z \cdot dz = dx$$

$$\Rightarrow \qquad \int \sec^2 z \cdot dz = \int dx \Leftrightarrow \tan z = x + c$$

Substituyendo: z = x – y + 1 en la expresión anterior, se obtiene, por último la I.G. buscada en forma explícita, puesto que: tg(x – y + 1) = x + c; y, por último:

$$\boxed{y(x) = x + 1 \pm \text{arc tg } (x + c)}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



(c) Se trata ahora, por último, de resolver la EDO: y' = -(a/b)·sen^2(ax + by + c).

Efectuando el cambio de variable: z = ax + by + c, se tendrá que:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + b\left(-\frac{a}{b}\,\text{sen}^2 z\right) = a - a\cdot\text{sen}^2 z = a(1 - \text{sen}^2 z) = a\cdot\cos^2 z,$$

, y se llega a la siguiente EDO de variables separadas: $\frac{dz}{\cos^2 z} = a\cdot dx$.

Integrando ahora ambos miembros de esta igualdad mediante una cuadratura, se obtiene que: tg z = a·x + C, y deshaciendo el cambio anterior:

tg (ax + by + c) = a·x + C; arc tg (a·x + C) = ax + by + c; de donde resulta la I.G. buscada, a saber:

$$\boxed{y = (1/b)\cdot[-a\cdot x - c + \text{arc tg}\,(a\cdot x + C)]}$$

CAPÍTULO 3
ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES ORDINARIAS DE ORDEN n

1. INTRODUCCIÓN

Habitualmente, las leyes que rigen los fenómenos de la naturaleza se pueden formular mediante el empleo de las ecuaciones diferenciales. Así, por ejemplo, las ecuaciones del movimiento de los cuerpos (la segunda ley de Newton) es una ecuación diferencial de segundo orden, como lo es también la ecuación que describe los sistemas oscilantes, la propagación de las ondas, la transmisión del calor, la difusión, las deformaciones en resistencia de materiales, el movimiento de un resorte, el movimiento de las partículas subatómicas, etc. De ahí el gran interés de su estudio.

Extensivamente, veamos que una ecuación diferencial ordinaria de orden *n* es aquella cuya expresión general es:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{n}) = 0$$

o bien, expresada en forma normal,

$$y^{n} = H(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$$

en la que H es una función real definida en un subconjunto $A \subset R^{n+1}$. Se trata de una ecuación diferencial ordinaria, cuyo **orden**, como ya sabemos, viene dado por la derivada de mayor orden, siendo su **grado** el mayor exponente o potencia con que figure elevada dicha derivada.

Una ecuación diferencial de la forma:

$$a_0(x)\cdot y^{n} + a_1(x)\cdot y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\cdot y^{n-i} = b(x)$$

donde $a_0(x)$, $a_1(x)$, …, $a_n(x)$ y $b(x)$ son funciones reales y continuas de la variable independiente real *x* en un determinado intervalo (a, b), es una ecuación diferencial lineal de orden *n*.

Cuando $b(x) \equiv 0$, de la ecuación anterior se dice que es *homogénea o incompleta*; cuando no sucede así, se denomina *no homogénea o completa*, aunque también puede denominársele *inhomogénea o heterogénea*.

Si las funciones $a_i(x)$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$, son constantes, tendremos una “ecuación diferencial lineal de orden *n* con coeficientes constantes”. Por el contrario, si dichas funciones son variables tendremos una "ecuación diferencial lineal de orden *n* con coeficientes variables".

Una función real y_1 de variable real y derivable hasta el orden n en el intervalo (a, b) es solución de la primera ecuación si en ese intervalo se verifica que:

$$a_0(x)\cdot y_1^{n} + a_1(x)\cdot y_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y'_1 + a_n(x)\cdot y_1 = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\cdot y_1^{n-i} \equiv b(x).$$

La integral general de la ecuación incompleta es de la forma:

$$y = c_1\cdot y_1 + c_2\cdot y_2 + \ldots + c_n\cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot y_i$$

siendo las y_i soluciones linealmente independientes de dicha ecuación incompleta y las c_i constantes arbitrarias.

Especial interés en la física, la técnica y la economía revisten las EDO de segundo orden, en que distinguiremos, para su resolución, los siguientes cinco tipos (ver también el epígrafe 2.5 "Otras clases de ecuaciones", de este mismo capítulo):

I) y'' = f(x). *Solución:* $y = \int dx \int f(x)\cdot dx + C\cdot x + C_1$, o bien:

$$y = x\cdot\int f(x)\cdot dx - \int x\cdot f(x)\cdot dx + C\cdot x + C_1$$

II) y'' = f(y). *Solución:* $x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int f(y)\cdot dy}} + C_1$

III) y'' = f(y'). *Solución:* se hace y' = z, e y'' = z', con lo que resulta:

$$x = \int \frac{dz}{f(z)} + C, \text{ e } y = \int \frac{z\cdot dz}{f(z)} + C_1$$

y, a continuación, se obtiene la solución por eliminación de z.

IV) y'' = f(y',x). *Solución:* se hace y' = z, e y'' = z', con lo cual resulta la EDO de primer orden: z' = f(z,x), de cuya integración se obtiene:

$$y = \int z(x)\cdot dx + C$$

V) y'' = f(y',y). *Solución:* se hace y' = z, e $y'' = z' = z\cdot\frac{dz}{dy}$, con lo cual se obtiene la EDO de primer orden siguiente: $z\cdot\frac{dz}{dy}$ = f(z,y), de cuya integración resulta que: $x = \int \frac{dy}{z(y)} + C$.

En ciertas ocasiones, los problemas de EDO se presentan en sentido inverso, esto es, se trata de formar la ecuación diferencial a partir del conocimiento de sus soluciones. Veámoslo mediante los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Form the differential equation of all parabolas with principal axis along the x-axis.

Solution:

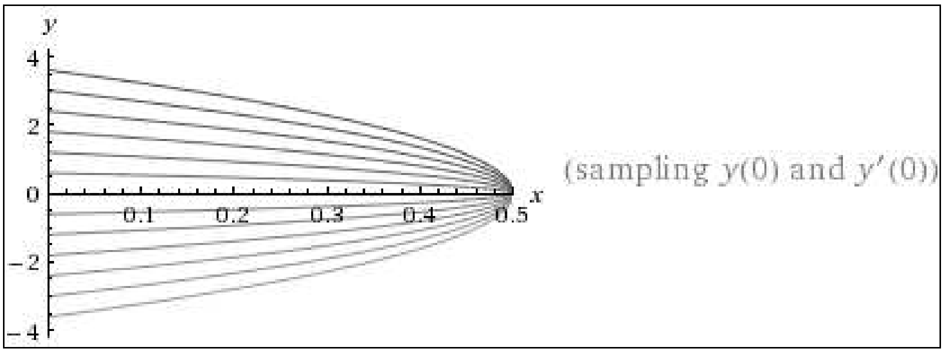
The system of parabolas has the equation: $y^2 = Ax + B$, where A and B are arbitrary constants.

Differentiate twice to obtain: $y = (Ax + B)^{1/2}$;

$$y' = \frac{1}{2}(Ax+B)^{-\frac{1}{2}} \cdot A = \frac{A}{2(Ax+B)^{1/2}};\ A = 2 \cdot y \cdot y'.\ \text{Thus:}$$

$$y'' = \frac{-2A \cdot y'}{4 \cdot y^2} = \frac{-2y' \cdot 2y \cdot y'}{4 \cdot y^2} = \frac{-y'^2}{y};$$

Then, $\boxed{y \cdot y'' + y'^2 = 0}$ is the required equation. The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 2

Eliminar las constantes en la expresión: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{x} + C_3e^{-x}$, deduciendo de ello la expresión de la EDO correspondiente.

Solución:

Derivando tres veces sucesivamente, se obtiene:

$$\begin{cases} y' = 2C_1e^{2x} + C_2e^{x} - C_3e^{-x} \\ y'' = 4C_1e^{2x} + C_2e^{x} + C_3e^{-x} \\ y''' = 8C_1e^{2x} + C_2e^{x} - C_3e^{-x} \end{cases}$$

Las tres ecuaciones obtenidas junto con la dada conforman un sistema de cuatro ecuaciones, donde tomando como incógnitas C_1, C_2 y C_3, se requiere, para su compatibilidad, que:

$$\begin{vmatrix} y & e^{2x} & e^{x} & e^{-x} \\ y' & 2e^{2x} & e^{x} & -e^{-x} \\ y'' & 4e^{2x} & e^{x} & e^{-x} \\ y''' & 8e^{2x} & e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = 0, \text{ que equivale a: } \begin{vmatrix} y & 1 & 1 & 1 \\ y' & 2 & 1 & -1 \\ y'' & 4 & 1 & 1 \\ y''' & 8 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde se deduce: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$, que es la ecuación diferencial resultante de la eliminación. Efectivamente, su resolución implica la ecuación característica: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$; una raíz inmediata de ella es: $\lambda_1 = 1$, con lo que operando para hallar las restantes según la regla de Ruffini se tiene que:

$$\begin{array}{l|rrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1) & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0;\quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -1 \end{array} \right. ;$$

con lo que la integral general buscada será:

$$\boxed{y(x) = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{-x}}, \quad \text{c. s. q. d.}$$

Ejemplo 3

Comprobar que si se conoce una solución particular y_1 de la ecuación diferencial $y'' + y' \cdot f(x) + g(x) \cdot y = 0$, se puede rebajar el orden de dicha ecuación efectuado el cambio $y = y_1 \cdot u$, donde u representa la nueva función.

Solución:

Derivando $y = y_1 \cdot u$, se tiene que:

$y' = y_1' \cdot u + y_1 \cdot u'$; $y'' = y_1'' \cdot u + 2y_1'u' + y_1u''$, y substituyendo en la ecuación dada:

$$y_1'' \cdot u + 2y_1'u' + y_1u'' + (y_1' \cdot u + y_1u') \cdot f(x) + y_1u \cdot g(x) = 0$$

que se puede escribir así: $u''y_1 + u'[2y_1' + y_1f(x)] + u[y_1'' + y_1'f(x) + y_1g(x)] = 0$

y como y_1 es una solución particular de la ecuación dada, se tendrá que:

$y_1'' + y_1' \cdot f(x) + y_1 \cdot g(x) = 0$, y, por tanto, la ecuación resultante es:

$u''y_1 + u'[2y_1' + y_1f(x)] = 0$. El nuevo cambio, $v = u'$, $v' = u''$, reduce la ecuación a una de primer orden, a saber:

$$\boxed{v'y_1 + v[2y_1' + y_1f(x)] = 0}, \text{ como se quería comprobar.}$$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación: $x^2y'' - (6x^3 + 2x^2 + 3x)y' + (6x^3 + 7x^2 + 3x + 3)y = 0$, sabiendo que admite la integral particular: $y_1 = x \cdot e^x$.

Solución:

Hagamos el cambio de función: $y = x \cdot e^x \cdot u$. Derivando dos veces se obtiene que: $y' = e^x u + x \cdot e^x u + x \cdot e^x u'$; $y'' = 2e^x u + 2e^x u' + x \cdot e^x u + 2x \cdot e^x u' + x \cdot e^x u''$.

Substituyendo ahora en la ecuación dada las derivadas obtenidas y dividiendo por el factor común e^x, se obtiene la expresión:

$$x^2(2u + 2u' + x \cdot u + 2x \cdot u' + x \cdot u'') - (6x^3 + 2x^2 + 3x) \cdot (u + x \cdot u + x \cdot u') +$$
$$+ (6x^3 + 7x^2 + 3x + 3)x \cdot u = 0$$

y después de reducir términos semejantes, se obtiene: $x \cdot u'' - (1 + 6x^2)u' = 0$,

o bien: $\frac{u''}{u'} = \frac{1}{x} + 6x$. Integrando: $\ln u' = \ln x + 3x^2 + C$; $u' = e^{\ln x + 3x^2 + C} = K \cdot x \cdot e^{3x^2}$,

donde $K = e^c$. Integrando de nuevo : $u = K\int x \cdot e^{3x^2} \cdot dx = \frac{K}{6} e^{3x^2} + H$. La integral general buscada será, pues:

$$\boxed{y = x \cdot e^x \cdot u = x \cdot e^x \left(\frac{K}{6} e^{3x^2} + H \right)}.$$

Ejemplo 5

Eliminar las constantes a, b y c en la solución general:
$y = x^3 + ax^2 + bx + c$, e integrar, como comprobación, la ecuación resultante.

Solución:

Derivando tres veces, sucesivamente, se obtiene:

$y' = 3x^2 + 2ax + b$; $y'' = 6x + 2a$; $y''' = 6$.

O sea, $\boxed{y''' = 6}$ es la ecuación diferencial resultante de la eliminación. Integrando ahora tres veces sucesivamente, se obtiene que:

$y'' = 6x + K_1$; $y' = 3x^2 + K_1x + K_2$; $y = x^3 + \frac{K_1}{2}x^2 + K_2x + K_3$.

Haciendo $\frac{K_1}{2} = a$, $K_2 = b$, $K_3 = c$, se obtiene nuevamente la función

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$, que comprueba la solución obtenida.

En todo caso, la ecuación característica de la homogénea es: $\lambda^3 = 0$, con la raíz múltiple: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, cuya solución es: $y^* = ax^2 + bx + c$.

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la ecuación completa del tipo (teniendo en cuenta que faltan los términos en y'', y' e y), por lo que contemplaremos un polinomio genérico de tercer grado, así:

$$\begin{cases} y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \\ y'_p = 3Ax^2 + 2Bx + C \\ y''_p = 6Ax + 2B \\ y'''_p = 6A \end{cases}$$

Substituyendo, ahora, en la ecuación inicial, se obtiene: $6A = 6$;

$A = 1$; $B = C = D = 0$; de donde se deduce que: $y_p = x^3$, y la integral general es:

$$\boxed{y(x) = y^* + y_p = ax^2 + bx + c + x^3}, \quad \text{c. s. q. d.}$$

Ejemplo 6

Eliminar la constante *a* en la función: $y = \frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a}$.

Solución:

La función dada se puede escribir también así: $y = 2\frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}$

o bien, puesta en la forma: $y(x^2 - a^2) = 2(x^2 + a^2)$. [I]

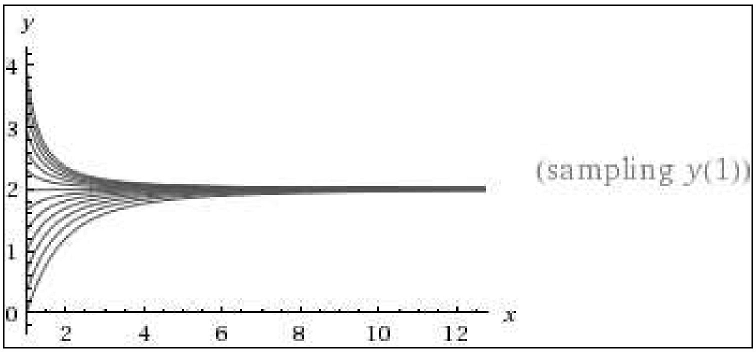
Derivando, se obtiene que: $y'(x^2 - a^2) + 2xy = 4x$. [II]

De las anteriores expresiones [I] y de [II] se obtiene, respectivamente:

$a^2(2 + y) = x^2y - 2x^2 = x^2(y - 2)$; $a^2y' = 2xy + x^2y' - 4x$,

y dividiendo miembro a miembro ofrece: $\frac{2+y}{y'} = \frac{x(y-2)}{2y + xy' - 4}$, que después de simplificar adecuadamente, se puede escribir así: $2xy' + y^2 - 4 = 0$, que resulta ser una EDO no lineal y de primer orden, en este caso.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



2. ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL HOMOGÉNEA DE ORDEN n Y COEFICIENTES CONSTANTES

2.1. GENERALIDADES

Estudiaremos ahora la ecuación diferencial:

$$a_0y^n + a_1y^{n-1} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{n-i} = 0$$

en la que los coeficientes $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^n$.

El conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes y homogénea es un espacio vectorial de dimensión igual al orden de dicha ecuación. Para obtener su solución o integral general basta con hallar una base del referido espacio vectorial; esto es, necesitamos conocer n soluciones cualesquiera de la misma que sean linealmente independientes (sabemos que ello es posible).

En el estudio de las ecuaciones diferenciales de orden superior, que son objeto del presente capítulo, se hace indispensable conocer si un conjunto de funciones son linealmente independientes o dependientes. El concepto del "wronskiano" aparece precisamente para solucionar ese problema. El wronskiano es, pues, un determinante de orden n (número de funciones).

Recordemos que un conjunto de *n* soluciones es linealmente independiente si y solo si su determinante funcional wronskiano[1] es no nulo, es decir, si se cumple que:

---

[1] **Józef Maria Hoene-Wroński** (French: *Josef Hoëné-Wronski*; originally *Josef Hoëné*; 23 August 1776 – 9 August 1853) was a Polish Messianist philosopher who worked in many fields of knowledge, not only as philosopher but also as mathematician, physicist, inventor, lawyer, and economist. He was born Hoene but changed his name in 1815. Though during his lifetime nearly all his work was dismissed as nonsense, some of it has come in later years to be seen in a more favourable light. Although nearly all his grandiose claims were in fact unfounded, his mathematical work contains flashes of deep insight and many important intermediary results. Most significant was his work on series. He had strongly criticized Lagrange's use of infinite series, introducing instead a novel series expansion for a function. His criticisms of Lagrange were for the most part unfounded, but the coefficients in Wroński's new series were found to be important after his death, forming the determinants now known as the Wronskians (the name was given them by Thomas Muir in 1882).

$$W(y_1,y_2,...,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y'_1 & y'_2 & ... & y'_n \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & ... & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \cdot$$

Con ese fin, sea:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \lambda^{n-i} = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

la denominada “ecuación característica o modular” de la ecuación anterior, que puede ofrecer distintos tipos de *n* raíces distintas (λ_1, λ_2, …, λ_n), reales o imaginarias, que estudiaremos a continuación según los diferentes casos que se pueden presentar. Dicha ecuación característica solo está definida para ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes.

En teoría, siempre es posible factorizar la ecuación característica, pero en la práctica ello puede resultar extremadamente difícil, en especial para las ecuaciones diferenciales de orden elevado. En tales casos, se deben usar técnicas numéricas para aproximar las soluciones (como los métodos modificados de Euler, Heun, punto medio, Runge-Kutta, Adams-Bashforth-Moulton, Milne, aproximaciones sucesivas de Picard, etc.) que no son objeto de tratamiento en el presente manual por razones obvias de espacio.

2.2. RAÍCES REALES SIMPLES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

En este caso, la I.G. (Integral General) viene dada por la expresión:

$$\boxed{y = c_1 \times e^{\lambda_1 x} + ... + c_n \times e^{\lambda_n x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot e^{\lambda_i x}} \rightarrow \text{I.G.}$$

Ejemplo 1

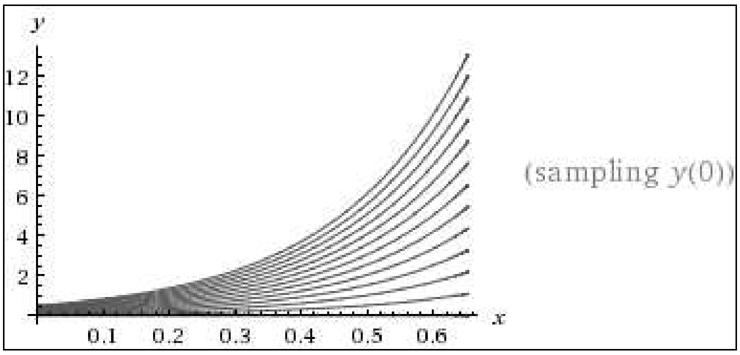
Resuelva la EDO: y’ – 5y = 0.

Solución:

En realidad, se trata de una sencilla EDO de primer orden como las contempladas en el capítulo precedente, de variables separables, pero que también vamos a resolver fácilmente por el procedimiento empleado en el presente capítulo de nuestro libro. La ecuación característica es: $\lambda - 5 = 0$, que tiene una única raíz $\lambda_1 = 5$. La solución general buscada es, entonces:

$$y = c_1 e^{5x}.$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 2

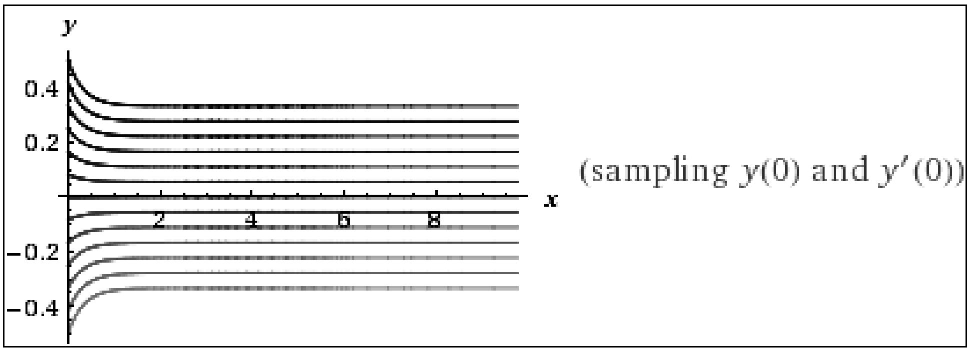
Solve the ordinary differential equation: $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 0$.

Solution:

Here, the characteristic equation is: $\lambda^2 + 3\lambda = 0$, and the two roots are: $\lambda = 0, -3$. The general solution is:

$$\boxed{y = c_1 + c_2 \cdot e^{-3x}} \text{ G.I.}$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 3

Solve the ordinary differential equation: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0$.

Solution:

Since $\frac{d}{dx}(y'^2) = 2y'y''$, multiply the given equation by 2y' to obtain:

$$2y'y'' = 4yy', \quad y'^2 = 4\int yy'dx = 4\int y \cdot dy = 2y^2 + C_1$$

Then $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2y^2 + C_1}$, $\frac{dy}{\sqrt{2y^2 + C_1}} = dx$, $\ln\left|\sqrt{2}y + \sqrt{2y^2 + C_1}\right| = \sqrt{2}x + \ln C'_2$,

and:

$$\boxed{\sqrt{2}y + \sqrt{2y^2 + C_1} = C_2 e^{\sqrt{2}x}} \text{ (implicit form)}$$

Also, the equation is:

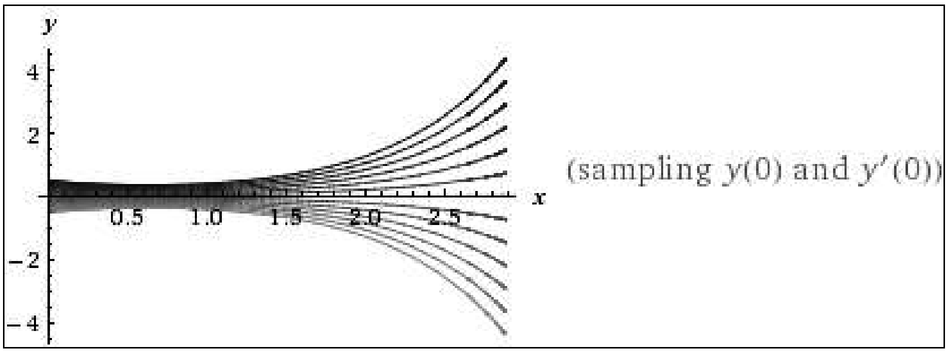
y'' – 2y = 0, and the characteristic equation is:

$\lambda^2 - 2 = 0$; with the roots: $\lambda = \pm\sqrt{2}$;

Thus, the general alternative solution in explicit form is:

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{\sqrt{2}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{2}x} = C_1 \cdot e^{\sqrt{2}x} + \frac{C_2}{e^{\sqrt{2}x}}}$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 4

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$.

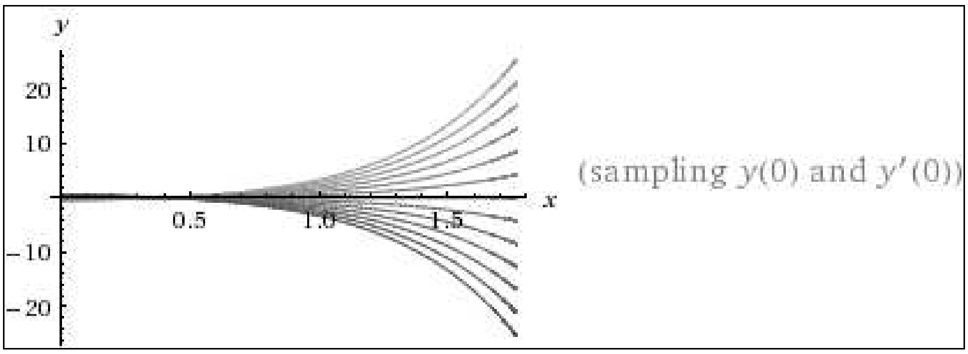
Solución:

La ecuación característica o modular es:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \ ; \quad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

con lo que la integral general será: $\boxed{y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{x}}$.

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 5

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$.

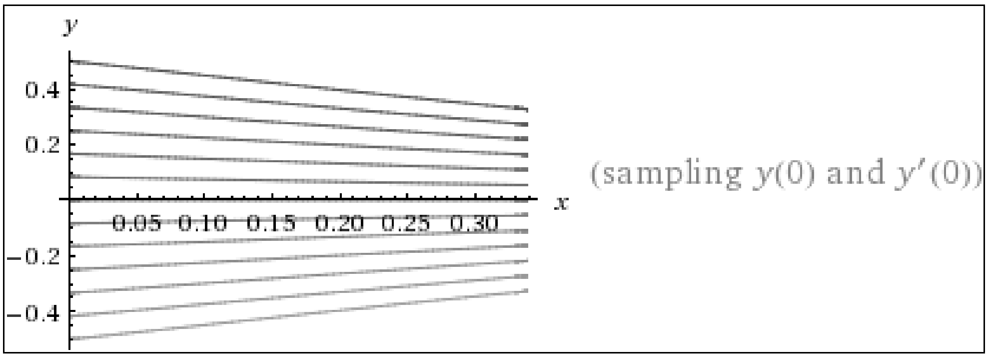
Solución:

La ecuación característica o modular es:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \ ; \quad \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

con lo que la integral general será: $\boxed{y = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x}}$.

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 6

Resolver el siguiente problema de valor inicial, $\forall$ x > 0:

$$\begin{cases} y''' + y'' - 6y' = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \ ; \ y''(0) = 1 \end{cases}$$

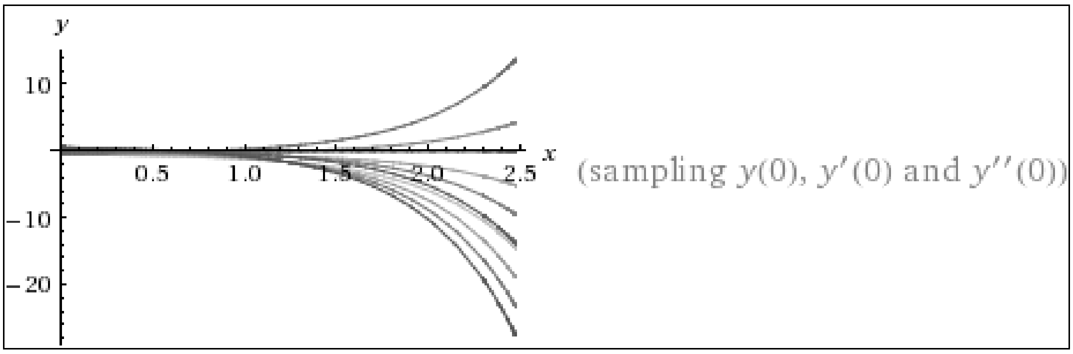
Solución:

La ecuación característica o modular de la homogénea, es:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda = 0 = \lambda(\lambda^2 + \lambda - 6) \ ; \quad \lambda_1 = 0 \ ; \quad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}$$

Y la I.G. será: $y(x) = c_1 + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{-3x}$.

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



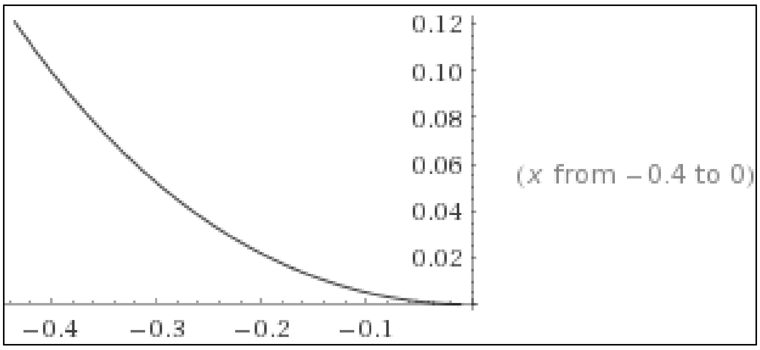
Ahora bien, las condiciones iniciales del problema exigen que:

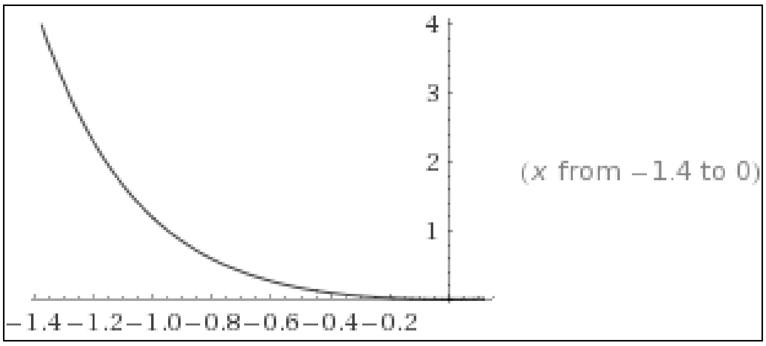
$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 0 \ ; \\ y'(x) = 2c_2 \cdot e^{2x} - 3c_3 \cdot e^{-3x} \ ; \\ y'(0) = 2c_2 - 3c_3 = 0 \ ; \\ y''(x) = 4c_2 \cdot e^{2x} + 9c_3 \cdot e^{-3x} \\ y''(0) = 4c_2 + 9c_3 = 1 \ ; \end{cases}$$

Con ello se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_2 - 3c_3 = 0 \\ 4c_2 + 9c_3 = 1 \end{array}\right\} \quad c_3 = 1/15 \ ; \quad c_2 = 1/10 \ ; \quad c_1 = -1/6 \ ;$$

con lo que la expresión buscada, será: $\boxed{y(x) = -\frac{1}{6} + \frac{e^{2x}}{10} + \frac{e^{-3x}}{15}}$, que constituye la I.P. La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 7

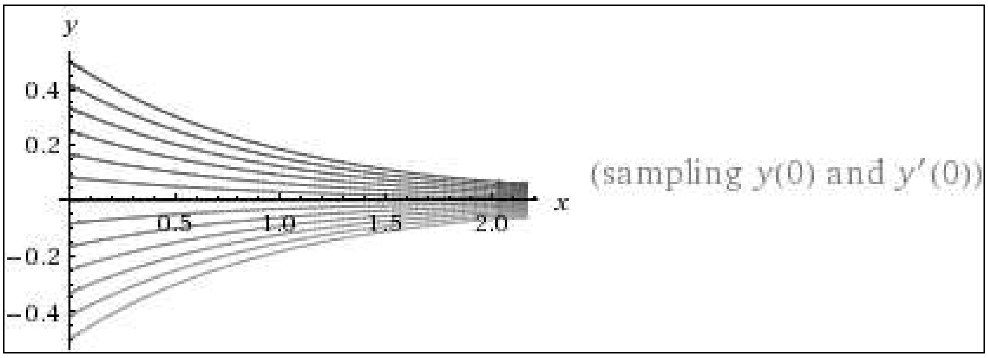
Resuelva la EDO: y’’ – y’ – 2y = 0.

Solución:

La ecuación característica es $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, que se puede factorizar en $(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$. Dado que las raíces $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$ son reales y distintas, la solución está dada por:

$$\boxed{y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}}.$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 8

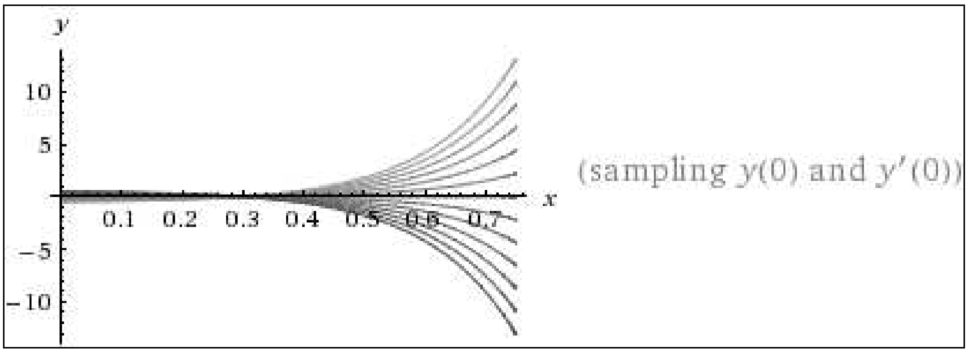
Resuelva la EDO: y’’ – 7y’ = 0.

Solución:

La ecuación característica es $\lambda^2 - 7\lambda = 0$, que se puede factorizar en $(\lambda - 0)(\lambda - 7) = 0$. Como las raíces $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 7$ son reales y distintas, la solución general buscada de la EDO está dada por:

$$\boxed{y(x) = c_1e^{0x} + c_2e^{7x} = c_1 + c_2e^{7x}}.$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 9

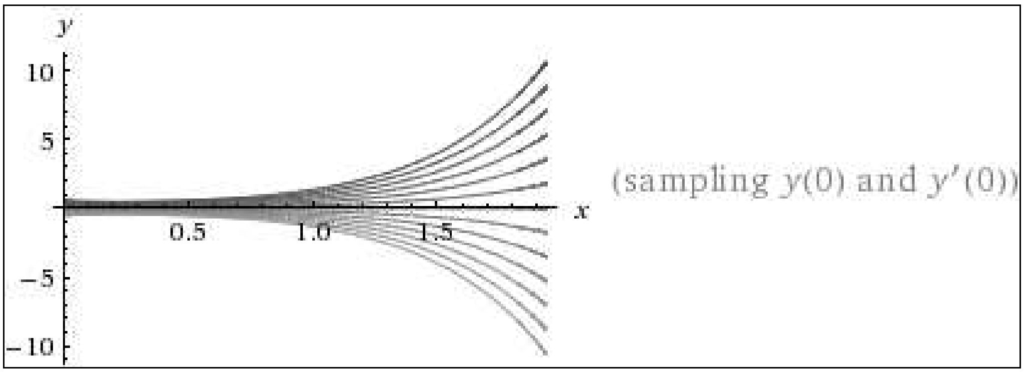
Resuelva la EDO: y'' – 5y = 0.

Solución:

La ecuación característica es $\lambda^2 - 5 = 0$, que se puede factorizar en $(\lambda - \sqrt{5})(\lambda + \sqrt{5}) = 0$. Dado que las raíces: $\lambda_1 = \sqrt{5}$ y $\lambda_2 = -\sqrt{5}$ son reales y distintas, la solución general está dada por:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{\sqrt{5}x} + c_2 e^{-\sqrt{5}x}}.$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 10

Vuelva a escribir el problema anterior en términos de funciones hiperbólicas.

Solución:

Utilizando los resultados del problema anterior con las identidades:

$$e^{\lambda x} = \cosh \lambda x + \operatorname{senh} \lambda x \quad y \quad e^{-\lambda x} = \cosh \lambda x - \operatorname{senh} \lambda x$$

obtenemos la integral general así:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= c_1 e^{\sqrt{5}x} + c_2 e^{-\sqrt{5}x} = c_1(\cosh\sqrt{5}x + \operatorname{senh}\sqrt{5}x) + c_2(\cosh\sqrt{5}x - \operatorname{senh}\sqrt{5}x) = \\ &= (c_1 + c_2)\cosh\sqrt{5}x + (c_1 - c_2)\operatorname{senh}\sqrt{5}x = k_1\cosh\sqrt{5}x + k_2\operatorname{senh}\sqrt{5}x \end{aligned}}$$

donde $k_1 = c_1 + c_2$, y $k_2 = c_1 - c_2$.

Ejemplo 11

Resuelva la EDO: $y''(t) + 10y'(t) + 21y(t) = 0$.

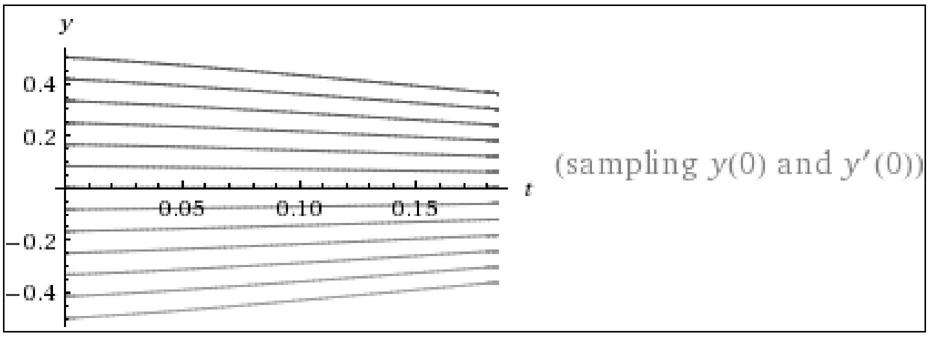
Solución:

Aquí la variable independiente es t. La ecuación característica es: $\lambda^2 + 10\lambda + 21 = 0$, que puede ser factorizada así: $(\lambda + 3)(\lambda + 7) = 0$.

Las raíces $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -7$ son reales y distintas, así que la solución general buscada es:

$$\boxed{y = c_1e^{-3t} + c_2e^{-7t}}.$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 12

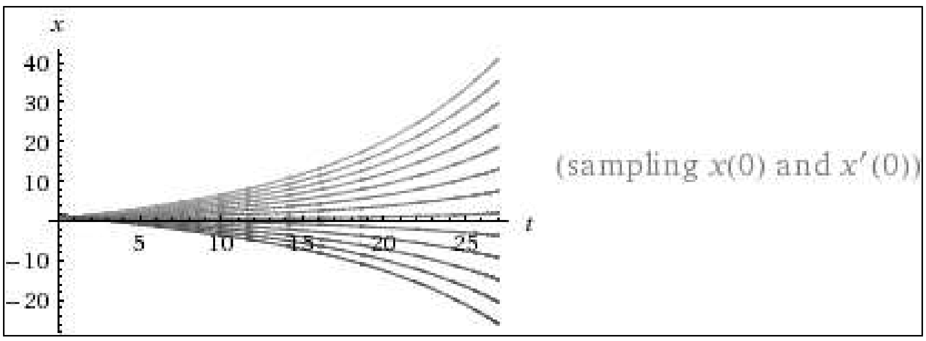
Resuelva la EDO: $x''(t) – 0'01\cdot x(t) = 0$.

Solución:

La ecuación característica es: $\lambda^2 – 0'01 = 0$, que puede ser factorizada así: $(\lambda – 0{,}1)(\lambda + 0{,}1) = 0$. Las raíces correspondientes: $\lambda_1 = 0{,}1$ y $\lambda_2 = -0{,}1$ son reales y distintas, de tal modo que la solución general buscada es:

$$\boxed{x(t) = c_1e^{0'1\cdot t} + c_2e^{-0'1\cdot t}},$$

o de manera equivalente: $x(t) = k_1\cosh 0'1\cdot t + k_2\operatorname{senh} 0'1\cdot t$. La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 13

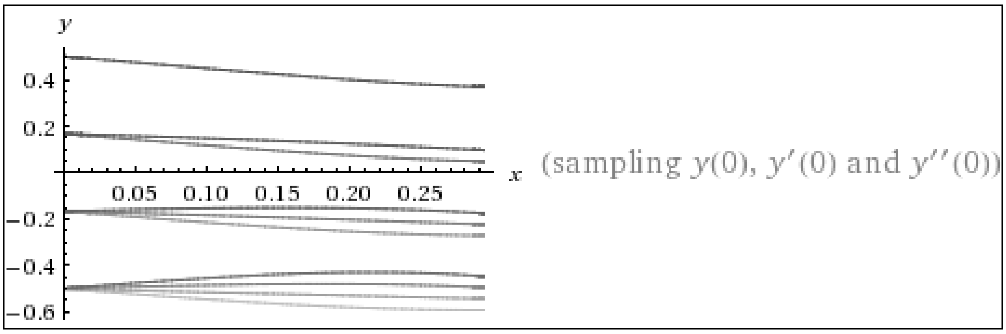
Resuelva la EDO: y''' – 6y'' + 11y' – 6y = 0.

Solución:

La ecuación característica es: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, que se puede factorizar en: $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$. Las raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$; por lo tanto la solución es:

$$\boxed{y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 14

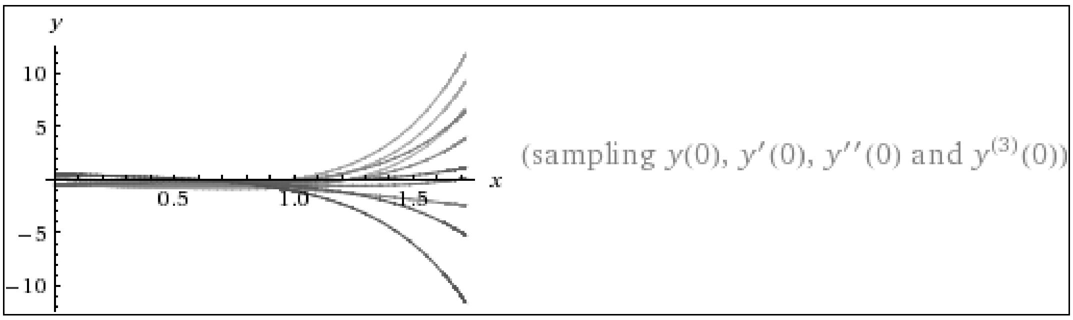
Resuelva la EDO: $y^{(4)} - 9y'' + 20y = 0$.

Solución:

La ecuación característica es: $\lambda^4 - 9\lambda^2 + 20 = 0$, que se puede factorizar en: $(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - \sqrt{5})(\lambda + \sqrt{5}) = 0$. Las raíces son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = \sqrt{5}$ y $\lambda_4 = -\sqrt{5}$; por lo tanto la solución o integral general buscada es:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{\sqrt{5}x} + c_4e^{-\sqrt{5}x} = \\ &= k_1\cosh 2x + k_2\operatorname{senh}2x + k_3\cosh\sqrt{5}x + k_4\operatorname{senh}\sqrt{5}x \end{aligned}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 15

Sea: a) resolver la ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' - 4y' + 3y = 0\ ;$$

y b) hallar la solución particular tal que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Solución:

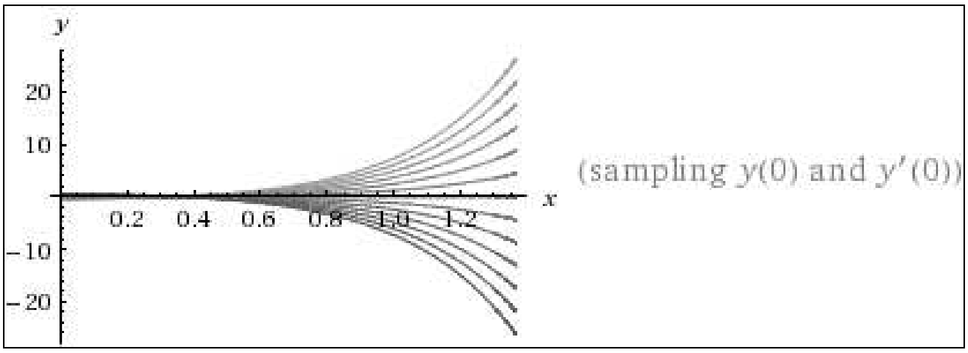
a) La ecuación característica o modular será:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0\ ;$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$, luego la I.G. buscada será:

$$\boxed{y(x) = c_1 \times e^{3x} + c_2 \times e^{x}} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



b) Para hallar la solución particular o también llamado "problema de valor inicial" (PVI), hacemos:

$$y(0) = c_1 + c_2$$

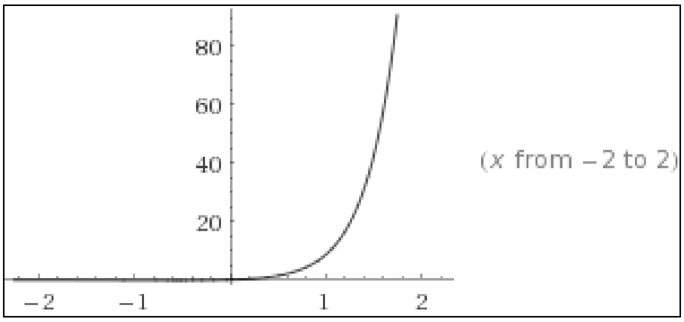
$y'(x) = 3 \times c_1 \times e^{3x} + c_2 \times e^{x}$; $y'(0) = 3c_1 + c_2$; entonces:

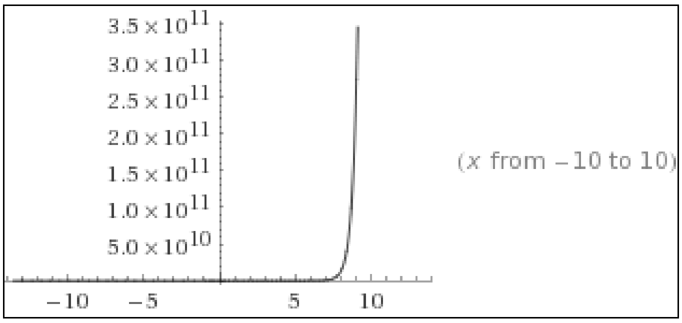
$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 + c_2 = 1 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 2c_1 = 1\ ;\ c_1 = ½ \\ c_2 = -\ ½\ ; \end{array}$$

con lo que la solución o integral particular buscada será:

$$\boxed{y_p = \frac{e^{3x}}{2} - \frac{e^{x}}{2} = \frac{e^{3x} - e^{x}}{2}}$$

La representación gráfica de esta solución particular, que es evidentemente una función exponencial, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 16

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.

Solución:

Como es inmediato observar, se trata de una ecuación diferencial lineal homogénea y de coeficientes constantes. Formando la ecuación característica: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, ecuación que admite las raíces $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 1$. Como las tres raíces son reales y distintas, la integral general buscada es:

$$\boxed{y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3e^x}.$$

2.3. RAÍCES REALES MÚLTIPLES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

En general, si λ_i es raíz múltiple de orden k de la ecuación característica, son integrales particulares las siguientes: $y_p = e^{\lambda_i x}, x\cdot e^{\lambda_i x}, x^2\cdot e^{\lambda_i x}, \ldots, x^{k-1}\cdot e^{\lambda_i x}$. De este modo, la integral general posee la expresión:

$$\boxed{y = e^{\lambda_i x}(c_1 + c_2\cdot x + c_3\cdot x^2 + \ldots + c_k\cdot x^{k-1}) = e^{\lambda_i x}\sum_{i=1}^{k} c_i\cdot x^{i-1}} \rightarrow \text{I.G.}$$

Resulta inmediato comprobar la independencia lineal de las soluciones así obtenidas y, por tanto, la obtención de la integral general buscada.

Ejemplo 1

Sea resolver la ecuación diferencial ordinaria:

$$y^{III} - 5y^{II} + 8y^{I} - 4y = 0$$

Solución:

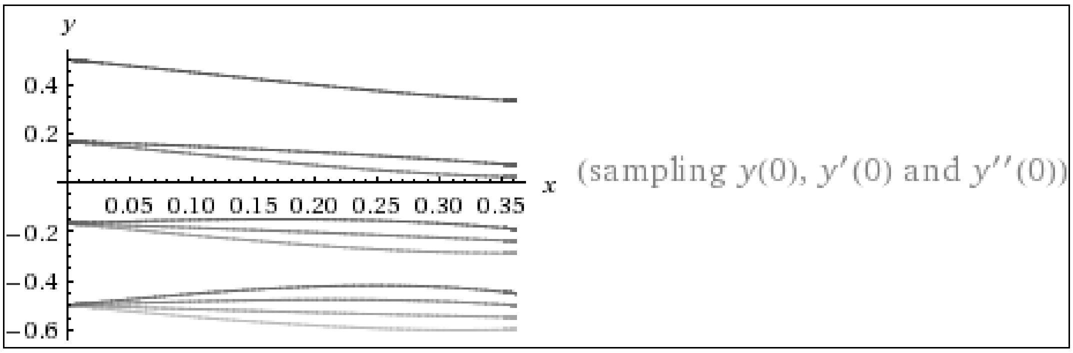
La ecuación característica es: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$, que admite las siguientes raíces reales divisores del término independiente:

$$\lambda_1 = 2 = \lambda_2 \text{ , } \lambda_3 = 1$$

Luego la integral general será:

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{x}} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 2

Sea resolver la ecuación diferencial ordinaria:

$$y^{IV} + 6y^{III} + 5y^{II} - 24y^{I} - 36y = 0$$

Solución:

La ecuación característica o modular es la siguiente:

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 5\lambda^2 - 24\lambda - 36 = 0$$

que admite las siguientes raíces reales divisores del término independiente:

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3 = \lambda_4$$

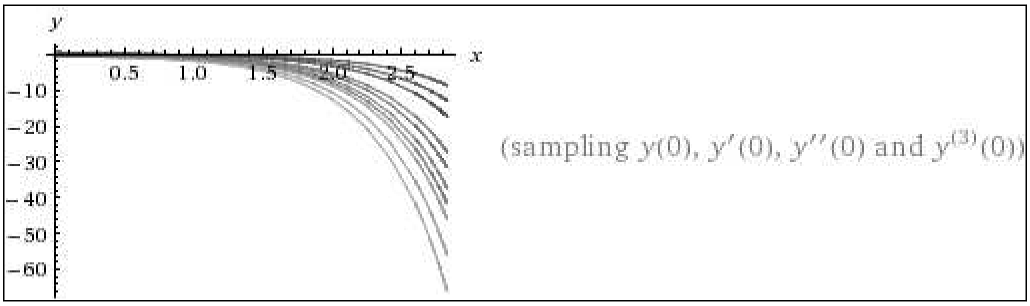
Para las raíces λ_1 y λ_2, como simples, existen las soluciones particulares:

$$y_1 = e^{2x} \text{ ; } y_2 = e^{-2x}$$

Para la raíz doble -3, existe el par de soluciones: $y_3 = e^{-3x}$; $y_4 = x \cdot e^{-3x}$. Luego la integral general buscada será:

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x} + c_3 \cdot e^{-3x} + c_4 \cdot x \cdot e^{-3x}} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 3

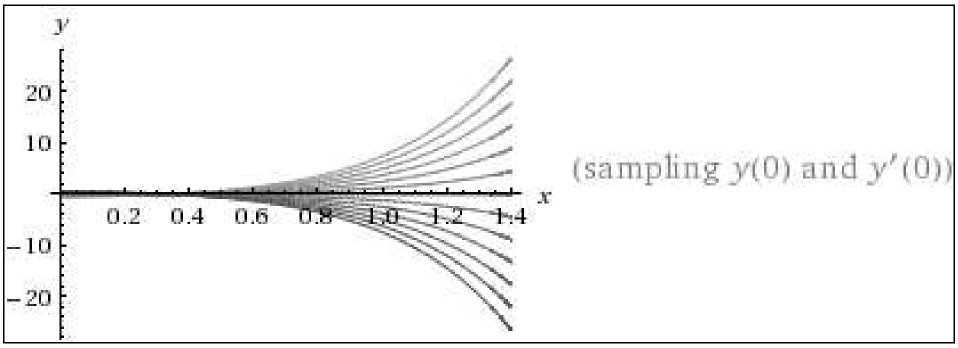
Solve the ordinary differential equation: $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$.

Solution:

Here the characteristic equation is: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ and the two identical roots are: $\lambda = 2, 2$. Thus, the general solution is:

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x}} \quad \text{G.I.}$$

The graphical representation of the sample solution family is :



Ejemplo 4

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$.

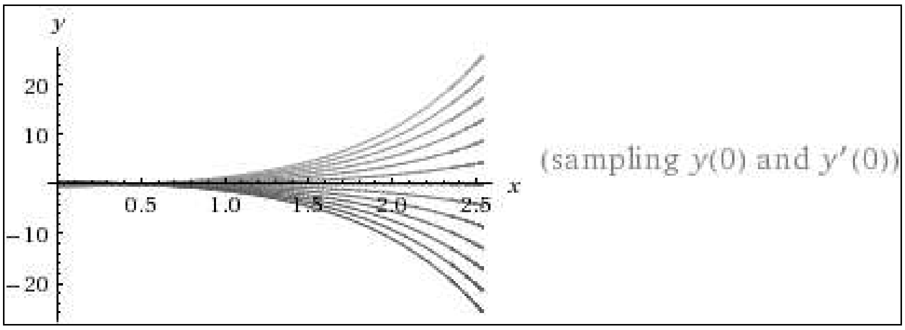
Solución:

La ecuación característica es:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \; ; \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

con lo que la integral general buscada será: $\boxed{y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x}$.

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 5

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: y''' – 6y'' + 12y' – 8y = 0.

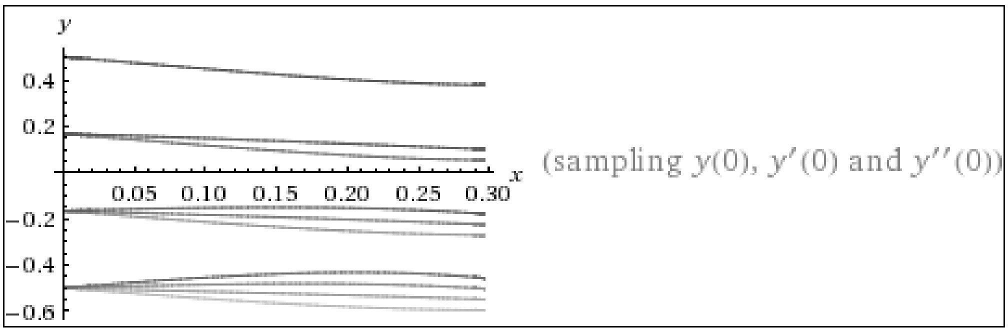
Solución:

La ecuación característica de la homogénea es: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$; con las siguientes raíces;

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ (raíz triple), por lo que la integral general es:

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} + c_3 \cdot x^2 \cdot e^{2x} = e^{2x}(c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2)} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 6

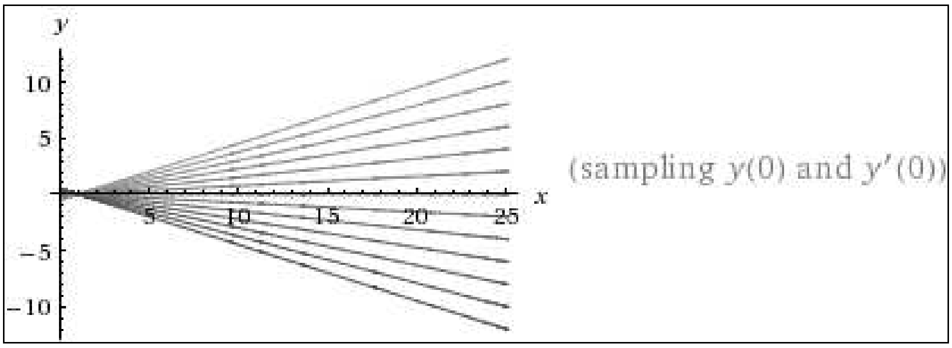
Resuelva la EDO: y'' = 0.

Solución:

La ecuación característica es: $\lambda^2 = 0$, que tiene como raíces: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La solución general buscada está dada por:

$$\boxed{y = c_1e^{0x} + c_2xe^{0x} = c_1 + c_2x}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 7

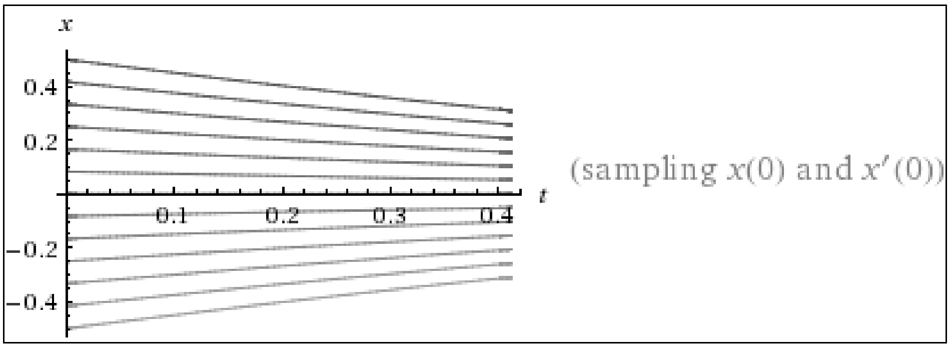
Resuelva la EDO: x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0.

Solución:

La ecuación característica es: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, que se puede factorizar en: $(\lambda + 2)^2 = 0$. Las raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ son reales e iguales, de manera que la solución general es:

$$\boxed{x = c_1e^{-2t} + c_2t\cdot e^{-2t}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 8

Resuelva la EDO: $100\frac{d^2N}{dt^2} - 20\frac{dN}{dt} + N = 0$.

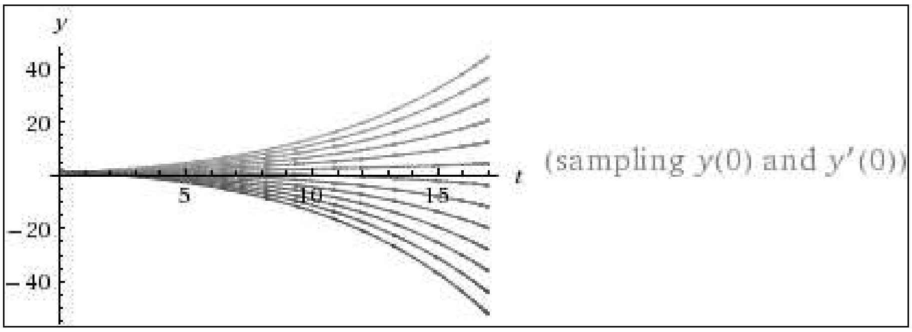
Solución:

Dividiendo ambos lados de la ecuación por 100, para forzar que el coeficiente de la mayor derivada sea la unidad, obtenemos la nueva expresión de la EDO planteada:

$$\frac{d^2N}{dt^2} - 0'2\frac{dN}{dt} + 0'01 \cdot N = 0$$

Su ecuación característica es: $\lambda^2 - 0'2\cdot\lambda + 0'01 = 0$, que se puede factorizar en: $(\lambda - 0'1)^2 = 0$. Las raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = 0'1$ son reales e iguales, de modo que la solución general buscada es: $\boxed{N(t) = c_1 e^{0'1\cdot t} + c_2 t\cdot e^{0'1\cdot t}}$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente (se ha tomado N = y):



Ejemplo 9

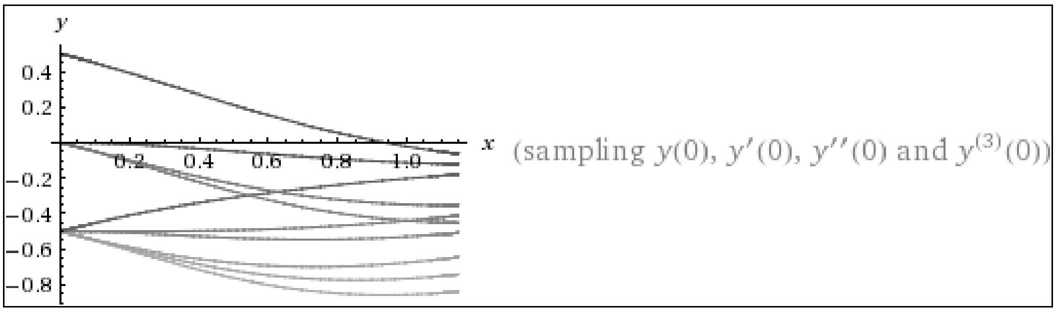
Resuelva la EDO: $y^{(4)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0$.

Solución:

La ecuación característica es: $\lambda^4 + 8\lambda^3 + 24\lambda^2 + 32\lambda + 16 = 0$, que se puede factorizar en: $(\lambda + 2)^4 = 0$. Aquí $\lambda_1 = -2$, es una raíz de grado de multiplicidad 4; de aquí, la solución general buscada es:

$$\boxed{y = c_1 e^{-2x} + c_2 x\cdot e^{-2x} + c_3 x^2 e^{-2x} + c_4 x^3 e^{-2x}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 10

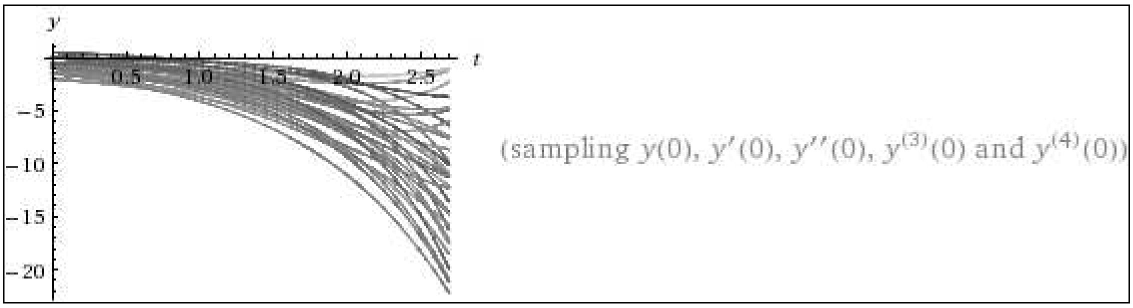
Resuelva la EDO: $\frac{d^5P}{dt^5} - \frac{d^4P}{dt^4} - 2\frac{d^3P}{dt^3} + 2\frac{d^2P}{dt^2} + \frac{dP}{dt} - P = 0$.

Solución:

La ecuación característica se puede factorizar en $(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)^2 = 0$; por lo tanto, $\lambda_1 = 1$ es una raíz de grado de multiplicidad tres y $\lambda_2 = -1$ es una raíz de grado de multiplicidad dos. La solución general buscada es, pues:

$$\boxed{P = c_1 e^t + c_2 t\cdot e^t + c_3 t^2 e^t + c_4 e^{-t} + c_5 t\cdot e^{-t}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente (con y = P):



Ejemplo 11

Resuelva la EDO: $\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} - 5\frac{d^2y}{dx^2} + 36\frac{dy}{dx} - 36y = 0$, sabiendo que una solución es $x\cdot e^{2x}$.

Solución:

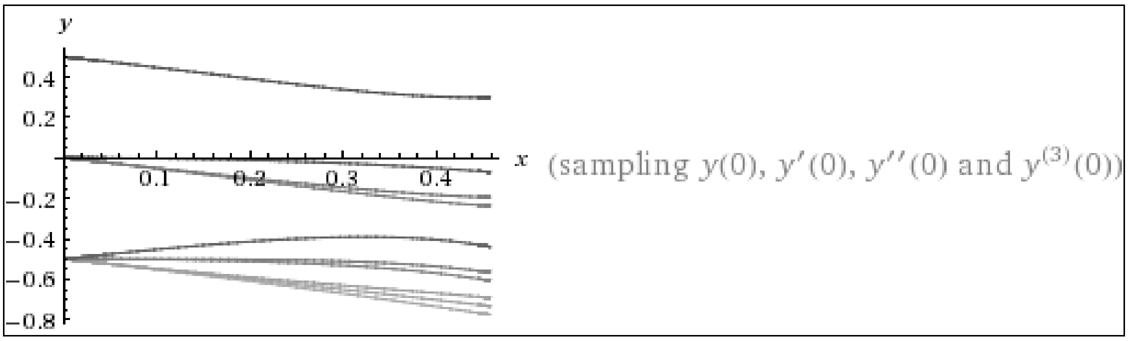
Si $x\cdot e^{2x}$ es una solución, entonces e^{2x} también lo es, lo que implica que $(\lambda - 2)^2$ es un factor de la ecuación característica: $\lambda^4 - 4\lambda^3 - 5\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$. Ahora bien:

$$\frac{\lambda^4 - 4\lambda^3 - 5\lambda^2 + 36\lambda - 36}{(\lambda - 2)^2} = \lambda^2 - 9$$

de tal modo que $\lambda = \pm 3$ son otras dos raíces de la ecuación característica, con sus correspondientes soluciones e^{3x} y e^{-3x}. Habiendo identificado ya cuatro soluciones linealmente independientes para la ecuación diferencial lineal de cuarto orden dada, podemos escribir la solución general de la misma como:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x\cdot e^{2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 12

Integrar la ecuación diferencial ordinaria: $y^{IV} - 6y''' + 13y'' - 12y' + 4y = 0$.

Solución:

La ecuación característica pertinente es: $\lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0$, que proporciona las raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$. A la raíz doble $\lambda = 1$ le corresponde la solución: $e^x(C_1 + C_2x)$ y a la otra raíz doble $\lambda = 2$, le corresponde la solución: $e^{2x}(C_3 + C_4x)$. Con ello, la integral general buscada será:

$$\boxed{y = e^x(C_1 + C_2x) + e^{2x}(C_3 + C_4x)}.$$

Ejemplo 13

Integrar la ecuación diferencial ordinaria: $y^{IV} - y''' - 9y'' - 11y' - 4 = 0$.

Solución:

La ecuación característica correspondiente es: $\lambda^4 - \lambda^3 - 9\lambda^2 - 11\lambda - 4 = 0$, que resuelta proporciona las raíces: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 4$. La integral general pedida será, pues:

$$\boxed{y = e^{-x}(C_1 + C_2x + C_3x^2) + C_4e^{4x}}.$$

Ejemplo 14

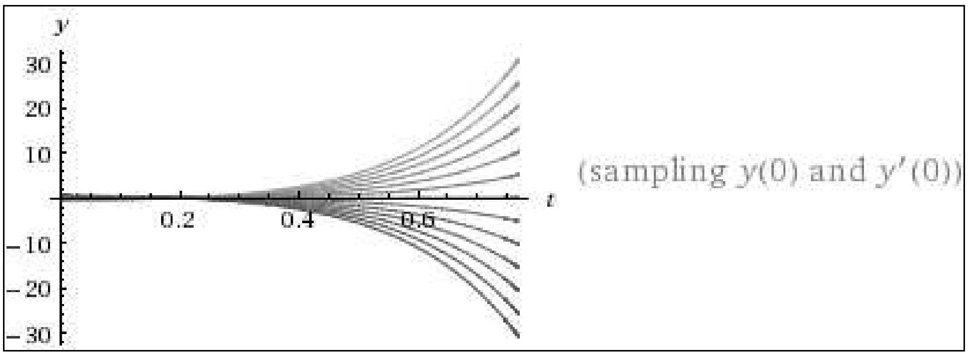
Resuelva la EDO: $y''(t) - 8y'(t) + 16y(t) = 0$.

Solución:

Aquí la variable independiente es t. La ecuación característica es: $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$, que puede ser factorizada así: $(\lambda - 4)^2 = 0$. Las raíces obtenidas $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ son reales e iguales, así que la solución general es:

$$\boxed{y(t) = c_1e^{4t} + c_2\,t\cdot e^{4t}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 15

Sea resolver la E.D.O.: $y^{IV} - y' = 0$, con las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -1 \\ y'''(0) = 0 \end{cases}$$

Solución:

Por aplicación del método clásico, se tendrá que la ecuación característica será:

$$\lambda^4 - \lambda = 0 \;\; ; \quad \lambda(\lambda^3 - 1) = 0 \;\; ; \quad \lambda_1 = 0 \;\; ; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1 \;\; ;$$

, de lo que resulta una raíz real simple y otra múltiple (triple), con lo que la integral general será (y sus derivadas sucesivas):

$$\begin{cases} y(x) = C_1 + C_2 \cdot e^x + C_3 \cdot e^x + C_3 \cdot x \cdot e^x + C_4 \cdot x^2 \cdot e^x; \\ y(0) = C_1 + C_2 = 1; \\ y'(x) = C_2 \cdot e^x + C_3 \cdot e^x + C_3 \cdot x \cdot e^x + 2C_4 \cdot e^x + C_4 \cdot x^2 \cdot e^x; \\ y'(0) = C_2 + C_3 + 2C_4 = 0; \\ y''(x) = C_2 \cdot e^x + C_3 \cdot e^x + C_3 \cdot e^x + C_3 \cdot x \cdot e^x + 2C_4 \cdot e^x + 2C_4 x \cdot e^x + \\ \qquad + C_4 \cdot x^2 \cdot e^x; \\ y''(0) = C_2 + 2C_3 + 2C_4 = -1; \\ y'''(x) = C_2 \cdot e^x + 2C_3 \cdot e^x + C_3 \cdot e^x + C_3 \cdot x \cdot e^x + 4C_4 \cdot e^x + 2C_4 \cdot x \cdot e^x + \\ \qquad + 2C_4 \cdot x \cdot e^x + C_4 \cdot x^2 \cdot e^x; \\ y'''(0) = C_2 + 3C_3 + 4C_4 = 0; \end{cases}$$

y se tendrá el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_2 + C_3 + 2C_4 = 0 \\ C_2 + 2C_3 + 2C_4 = -1 \\ C_2 + 3C_3 + 4C_4 = 0 \end{cases} \quad -C_3 = 1;$$ de donde se deduce el valor de las constantes:

$$\boxed{C_3 = -1} \qquad \boxed{C_4 = 1} \qquad \boxed{C_2 = -1} \qquad \boxed{C_1 = 2}$$

y la solución particular buscada será, una vez substituidos dichos valores en la expresión obtenida de la integral general:

$$\boxed{y(x) = 2 - e^x - x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = 2 + e^x(x^2 - x - 1)} \; .$$

2.4. RAÍCES COMPLEJAS DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

En este caso, la integral general viene dada por la expresión trigonométrica:

$$y = e^{\alpha x}(A\cdot\cos\beta x + B\cdot \text{sen}\,\beta x),$$

en que la raíz de la ecuación característica es: $\lambda_i = \alpha \pm i\beta$, o sea, α y β son, respectivamente, los coeficientes de la parte real e imaginaria del anterior número complejo expresado en forma binomia o binómica.

Finalmente, indicaremos que si existen raíces complejas múltiples, basta combinar los métodos de los casos anteriores para obtener la integral general buscada. De este modo, su expresión general vendrá dada por la expresión:

$$y = e^{\alpha x}[\cos\beta x(c_1 + c_2\cdot x^{n-1} + \ldots + c_n\cdot x) + \text{sen}\,\beta x(c_{n+1} + c_{n+2}\cdot x^{n-1} + \ldots + c_{2n}\cdot x)],$$

siendo **n** el grado de multiplicidad de la raíz en cuestión: $\lambda_i = \alpha \pm \beta i$.

Veamos lo anteriormente expuesto mediante la resolución de algunos ejemplos que juzgamos suficientemente representativos de lo expuesto hasta ahora:

Ejemplo 1

Sea resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y^{IV} + 5y^{II} - 36y = 0$.

Solución:

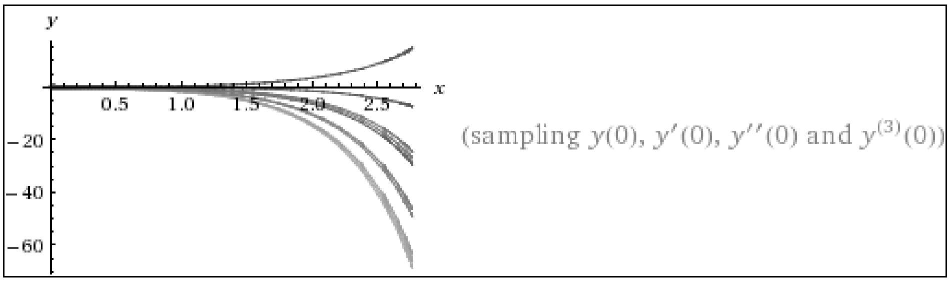
La ecuación característica correspondiente: $\lambda^4 + 5\lambda^2 - 36 = 0$, es, en este caso, una ecuación bicuadrada (de 4º grado) que proporciona las soluciones (haciendo el cambio de variable $\lambda^2 = \mu$): $\mu^2 + 5\mu - 36 = 0$.

$$\mu = \frac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2} = \begin{cases} \mu_1 = 4 \\ \mu_2 = -9 \end{cases}$$

de tal modo que: $\lambda = \begin{cases} \lambda_1 = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ \lambda_2 = \pm\sqrt{-9} = \pm 3\,i \end{cases}$, con lo que se tendrán, en definitiva, las 4 soluciones de la ecuación característica: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3i$, $\lambda_4 = -3i$. A las raíces reales simples λ_1 y λ_2, corresponderán las soluciones particulares: $y_1 = e^{2x}$; $y_2 = e^{-2x}$. Al par de raíces complejas conjugadas $\pm 3i$, que en este caso son imaginarias puras, le corresponde, como hemos visto, la expresión: $A\cdot\cos 3x + B\cdot\text{sen}\,3x$. Luego la integral general buscada será:

$$\boxed{y = c_1\cdot e^{2x} + c_2\cdot e^{-2x} + c_3\cdot\cos 3x + c_4\cdot\text{sen}\,3x} \rightarrow \text{I.G.}$$

donde en vez de las constantes A y B arbitrarias, se ha escrito c_3 y c_4, respectivamente. La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 2

Solve the ordinary differential equation: $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0$.

Solution:

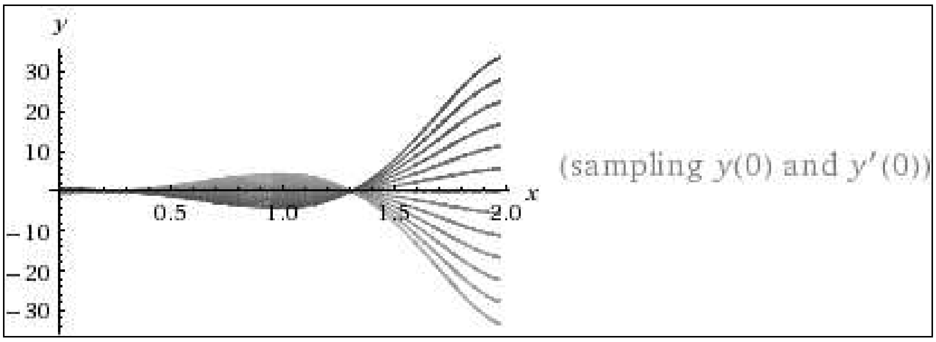
Here, the characteristic equation is: $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$, and the two roots are: $\lambda_1 = 2 + 3i$ and $\lambda_2 = 2 - 3i$. The general solution is:

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{(2+3i)x} + c_2 \cdot e^{(2-3i)x} = e^{2x} \cdot (c_1 \cdot e^{3ix} + c_2 \cdot e^{-3ix})}$$

Since $e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$, then $e^{3ix} = \cos 3x + i \sin 3x$, $e^{-3ix} = \cos 3x - i \sin 3x$, and the solution may be put in the other forms:

$$y = \begin{cases} e^{2x}\{c_1(\cos 3x + i \sin 3x + c_2(\cos 3x - i \sin 3x)\} \\ e^{2x}\{(c_1 + c_2)\cos 3x + i(c_1 - c_2)\sin 3x\} \\ e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x) \end{cases}$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 3

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$.

Solución:

La ecuación característica es:

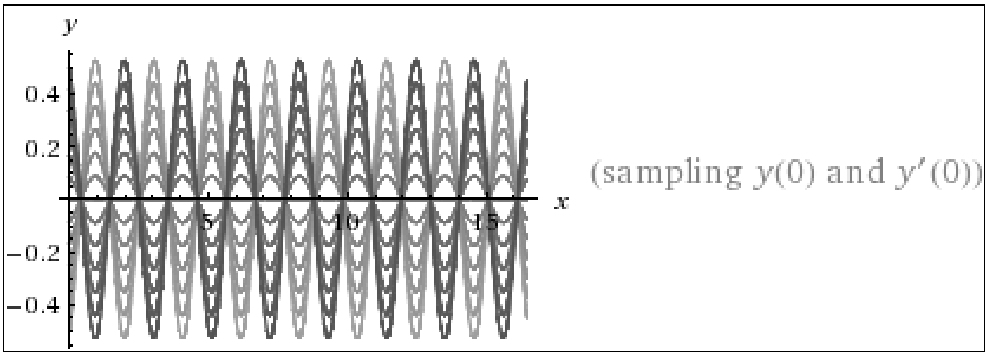
$$\lambda^2 + 9 = 0 \; ; \quad \lambda = \pm\sqrt{-9} = \begin{cases} \lambda_1 = 3i \\ \lambda_2 = -3i \end{cases}$$

$$\lambda = \alpha \pm \beta \; ; \; \text{ con } \alpha = 0 \; ; \quad \beta = 3 \; ;$$

Entonces se tendrá que:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(A\cdot\cos\beta x + B\cdot \mathrm{sen}\ \beta x) = c_1\cdot\cos 3x + c_2\cdot \mathrm{sen}\, 3x} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 4

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$.

Solución:

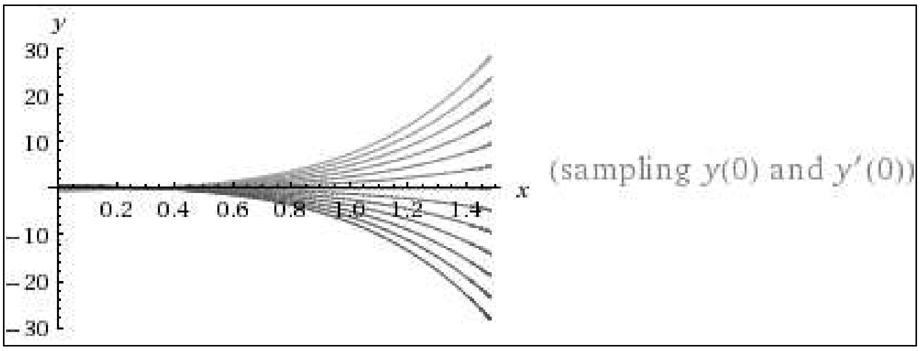
La ecuación característica es:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0\ ; \quad \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 + i \\ \lambda_2 = 2 - i \end{cases}$$

$\lambda = \alpha \pm \beta i$; con los coeficientes respectivos de la parte real e imaginaria siguientes: $\alpha = 2$; $\beta = 1$; entonces, se tendrá que:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(A\cdot\cos\beta x + B\cdot \mathrm{sen}\,\beta x) = e^{2x}(c_1\cdot\cos x + c_2\cdot \mathrm{sen}\ x)} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 5

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y^{V} + 2y^{III} + y^{I} = 0$.

Solución:

La ecuación característica es:

$$\lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = 0 \;;\quad \lambda_1 = 0 \;;\quad \lambda\cdot(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = 0 \;;$$

en el interior del paréntesis hay una ecuación bicuadrada, por lo que procede realizar para su resolución el cambio de variable: $\lambda^2 = \mu$, con lo que:

$$\mu^2 + 2\mu + 1 = 0 \;;\quad \mu = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \begin{cases} \mu_1 = -1 \\ \mu_2 = -1 \end{cases}$$

, y se obtendrán las raíces: $\lambda = \pm\sqrt{\mu} = \pm\sqrt{-1} = \pm i = \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3 = i\,(\text{doble}) \\ \lambda_4 = \lambda_5 = -i\,(\text{doble}) \end{cases}$

con lo que la integral general será:

$$\boxed{y = c_1 + (c_2 + c_3\cdot x)\cdot \cos x + (c_4 + c_5\cdot x)\cdot \text{sen } x},$$

que es, de hecho, una combinación lineal de soluciones.

Ejemplo 6

Resuelva la EDO: y'' + 4y' + 5y = 0.

Solución:

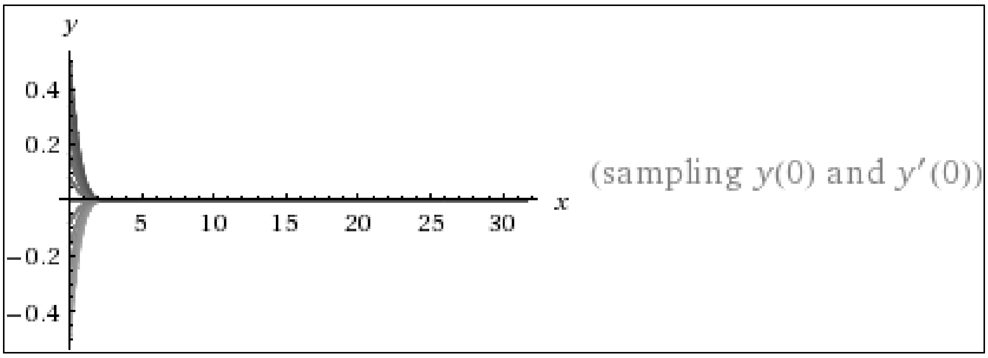
La ecuación característica es: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$. Usando una vez más la fórmula cuadrática encontramos que sus raíces son:

$$\lambda = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(5)}}{2} = -2 \pm i$$

Estas raíces son un par complejo conjugado, de modo que la solución está dada (con los coeficientes $\alpha = -2$ y $\beta = 1$) como:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-2x}\cos x + c_2 e^{-2x}\text{sen } x}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 7

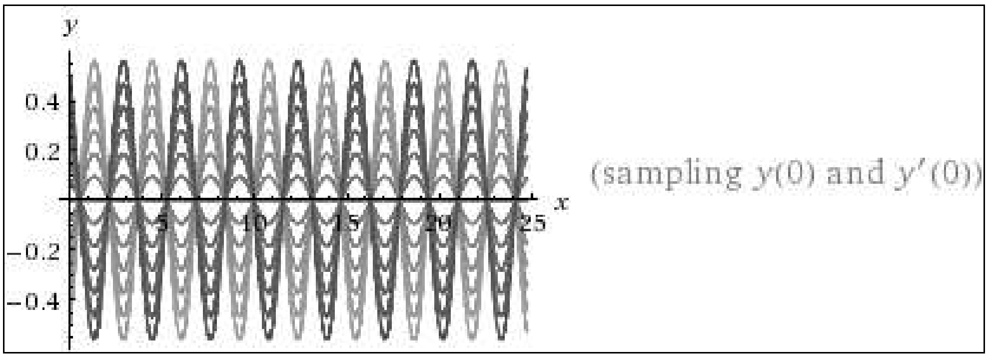
Resuelva la EDO: y’’ + 4y = 0.

Solución:

La ecuación característica es: $\lambda^2 + 4 = 0$, que se puede factorizar en: $(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$. Estas raíces son un par complejo conjugado, de manera que la solución general está dada (con los coeficientes: $\alpha = 0$ y $\beta = 2$) como:

$$\boxed{y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 8

Resuelva la EDO: y’’ – 3y’ + 4y = 0.

Solución:

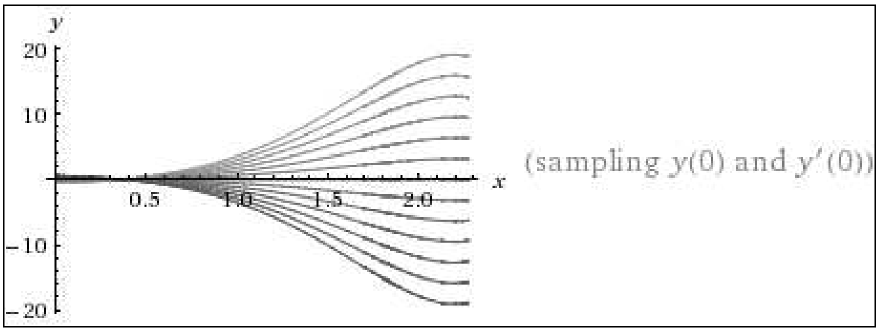
La ecuación característica es: $\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$. Utilizando la fórmula cuadrática encontramos que sus raíces son:

$$\lambda = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(4)}}{2} = \frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Estas raíces son un par complejo conjugado, con $\alpha = 3/2$ y $\beta = \frac{\sqrt{7}}{2}$, de tal modo que la solución general buscada está dada como:

$$\boxed{y = c_1 e^{(3/2)x} \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 e^{(3/2)x} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{7}}{2}x}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 9

Resuelva la EDO: $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Solución:

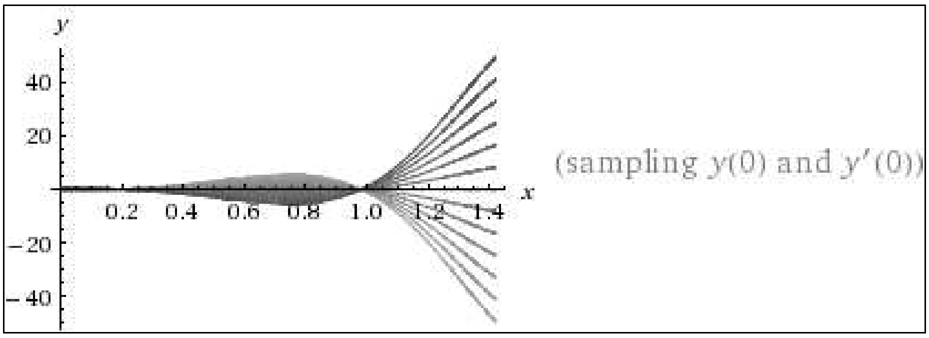
La ecuación característica es: $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$. Usando la fórmula cuadrática encontramos que sus raíces son:

$$\lambda = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(25)}}{2} = 3 \pm 4i$$

Estas raíces son un par conjugado complejo, con $\alpha = 3$ y $\beta = 4$, de tal modo que la solución general buscada es:

$$\boxed{y = c_1 e^{3x} \cos 4x + c_2 e^{3x} \operatorname{sen} 4x}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 10

Resuelva la EDO: $\frac{d^2I}{dt^2} + 20\frac{dI}{dt} + 200 I = 0$.

Solución:

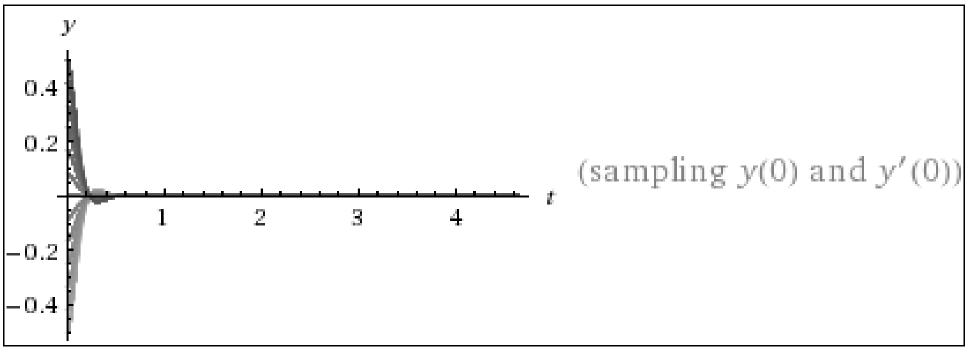
La ecuación característica es: $\lambda^2 + 20\lambda + 200 = 0$. Utilizando la fórmula cuadrática encontramos que sus raíces son:

$$\lambda = \frac{-(20) \pm \sqrt{(20)^2 - 4(200)}}{2} = -10 \pm 10i$$

Estas raíces son un par complejo conjugado, con $\alpha = -10$ y $\beta = 10$, de tal modo que la solución general buscada es:

$$\boxed{I(t) = c_1 e^{-10t}\cos 10t + c_2 e^{-10t}\text{sen } 10t}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente (con y = I):



Ejemplo 11

Resuelva la EDO: y''' – 6y'' + 2y' + 36y = 0.

Solución:

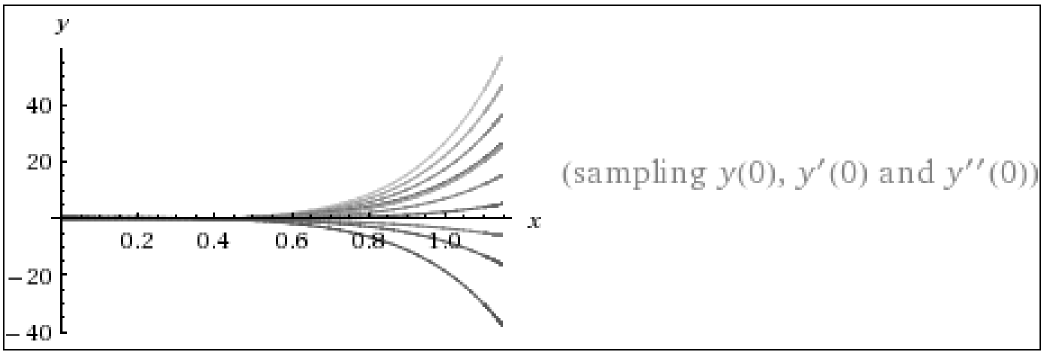
La ecuación característica: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 = 0$, tiene como raíces: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4 + i\sqrt{2}$ y $\lambda_3 = 4 - i\sqrt{2}$. La solución general buscada es, pues:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{(4+i\sqrt{2})x} + c_3 e^{(4-i\sqrt{2})x}$$

que se puede volver a escribir, usando las relaciones de Euler, como:

$$\boxed{y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x}\cos\sqrt{2}x + c_3 e^{4x}\text{sen}\sqrt{2}x}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 12

Resuelva la EDO: $\frac{d^4y}{dt^4} - 4\frac{d^3y}{dt^3} + 7\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 6y = 0$.

Solución:

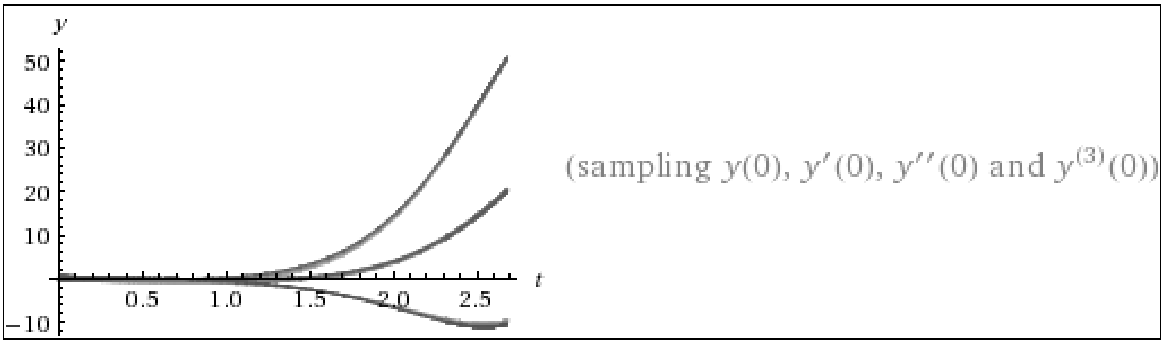
La ecuación característica $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 - 4\lambda + 6 = 0$, tiene raíces: $\lambda_1 = 2 + i\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 2 - i\sqrt{2}$, $\lambda_3 = i$ y $\lambda_4 = -i$. La solución general será, pues:

$$y = d_1 e^{(2+i\sqrt{2})i} + d_2 e^{(2-i\sqrt{2})t} + d_3 e^{it} + d_4 e^{-it}$$

Si, utilizando las relaciones de Euler, combinamos los primeros dos términos y luego lo hacemos similarmente con los dos últimos términos, podemos volver a escribir la expresada solución como:

$$\boxed{y = c_1 e^{2t}\cos\sqrt{2}t + c_2 e^{2t}\mathrm{sen}\sqrt{2}t + c_3\cos t + c_4\mathrm{sen}t}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 13

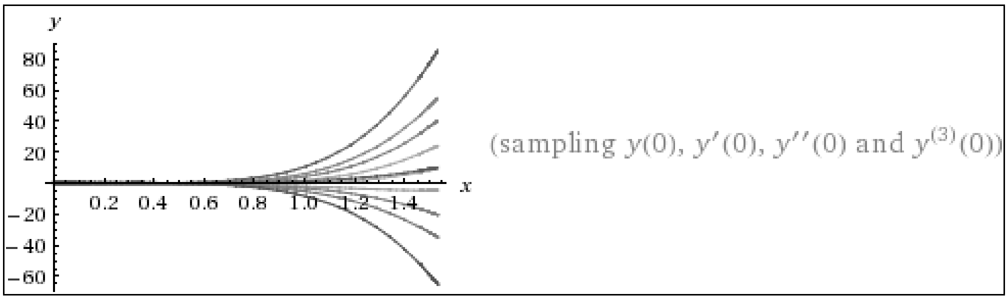
Resuelva la EDO: $\frac{d^4y}{dx^4} - 8\frac{d^3y}{dx^3} + 32\frac{d^2y}{dx^2} - 64\frac{dy}{dx} + 64y = 0$.

Solución:

La ecuación característica tiene como raíces: $2 \pm i2$ y $2 \pm i2$; de aquí que $\lambda_1 = 2 + i2$ y $\lambda_2 = 2 - i2$ son ambas raíces complejas de grado de multiplicidad dos. La solución general buscada es, pues:

$$\begin{aligned} y(x) &= d_1 e^{(2+i2)x} + d_2 x e^{(2+i2)x} + d_3 e^{(2-i2)x} + d_4 x e^{(2-i2)x} = \\ &= e^{2x}(d_1 e^{i2x} + d_3 e^{-i2x}) + x{\cdot}e^{2x}(d_2 e^{i2x} + d_4 e^{-i2x}) = \\ &= e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x) + x{\cdot}e^{2x}(c_2 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x) = \\ &= (c_1 + c_2 x)e^{2x}\cos 2x + (c_3 + c_4 x)e^{2x}\operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 14

Integrar la ecuación diferencial ordinaria: y''' - 7y'' + 19y' - 13 = 0.

Solución:

La ecuación característica correspondiente es: $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 19\lambda - 13 = 0$, cuyas soluciones son: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3 + 2i$, $\lambda_3 = 3 - 2i$. La solución buscada es, pues: $y = C_1 e^{1\cdot x} + e^{3x}(A\cdot\cos 2x + B\cdot\operatorname{sen} 2x) = \boxed{C_1 e^x + e^{3x}(A\cdot\cos 2x + B\cdot\operatorname{sen} 2x)}$, siendo las constantes arbitrarias del problema C_1, A y B.

Ejemplo 15

Hallar la integral general de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constante y homogénea, tal que su ecuación característica admite las raíces: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4 + 3i$, $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 4 - 3i$.

Solución:

La integral general buscada es, con $\alpha = 4$ y $\beta = 3$, necesariamente:

$$\boxed{y(x) = e^{4x}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)\cos 3x + (B_0 + B_1 x + B_2 x^2)\operatorname{sen} 3x},$$

siendo A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 y B_2 las 6 constantes arbitrarias del problema.

2.5. OTRAS CLASES DE ECUACIONES

Pueden ser, fundamentalmente, de los tipos siguientes:

a) Tipo $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$. Contienen solamente dos derivadas consecutivas. Se opera del siguiente modo:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p \text{ , y queda: } F\left(\frac{dp}{dx}, p\right) = 0 \text{ .}$$

Se resuelve esta ecuación y obtendremos una relación del tipo: $\varphi(x, p, C_1) = 0$; si de aquí se puede despejar p, resultará que: $p = \psi(x, C_1) = \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$; luego:

$$y = \int^{(n-1)} dx \int dx \int dx ... \int \varphi(x, C_1) dx + C_2 x^{n-2} + ... + C_n$$

Si la ecuación $F\left(\dfrac{dp}{dx}, p\right) = 0$ se puede poner bajo la forma $\dfrac{dx}{dp} = \varphi(p)$, se tendrá $dx = \varphi(p) \cdot dp$, y como:

$$p = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}; \quad \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int p \cdot dx = \int p \cdot \varphi(p) \cdot dp$$

se hace la cuadratura y se vuelve a integrar, reemplazando siempre en el segundo miembro dx por $\varphi(p) \cdot dp$.

c) Tipo $F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$: Contienen dos derivadas cuyos órdenes se diferencian en dos unidades. Se hace:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p \text{ , luego la ecuación dada se convierte en: } F\left(\frac{d^2p}{dx^2}, p\right) = 0 \text{ .}$$

Si esta ecuación se puede poner bajo la forma: $\dfrac{d^2p}{dx^2} = \varphi(p)$, multiplicaremos ambos miembros por: $2\dfrac{dp}{dx} \cdot dx = 2 \cdot dp$, lo que ofrece la expresión:

$$2\frac{dp}{dx} \cdot \frac{d^2p}{dx^2} \cdot dx = 2 \cdot \varphi(p) \cdot dp \text{ ; o sea: } d\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = 2 \cdot \varphi(p) \cdot dp \text{ ,}$$

e integrando ambos miembros de esta igualdad queda: $\left(\dfrac{dp}{dx}\right)^2 = 2\int \varphi(p) \cdot dp + C$; extrayendo la raíz cuadrada e integrando otra vez, se tiene una ecuación entre x y p, continuando ya como en el caso anterior, puesto que:

$$\frac{dp}{dx} = \pm\sqrt{2\int \varphi(p) \cdot dp + C}; \; p = \pm\sqrt{2} \int \sqrt{\int (\varphi(p) \cdot dp + C)} \cdot dx$$

c) Consideremos, en fin, que existen ciertas ecuaciones diferenciales de orden *n* que admiten rebajamiento en su orden por tal de facilitar su resolución, que relacionamos a continuación en sus casos más típicos, a saber:

1. $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$; se efectúa el cambio: $y' = p \cdot y$

$$y'' = y(p^2 + p')$$
$$y''' = y(p^3 + 3p \cdot p' + p'')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

, y así sucesivamente, obteniéndose como consecuencia un sistema de *n* ecuaciones de 1er. orden.

2. Falta la *x*:

$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$; se efectúa el cambio: $y' = p$

3. Falta la *y*:

$F(x, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$; se efectúa el cambio: $y' = p$

4. Faltan la *x* y la *y*:

$E(y', \ldots, y^{(n)}) = 0$; se efectúa el cambio: $y' = p$

5. $E(y, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$; se efectúa el cambio: $y^{(k)} = p$

Veamos, a continuación, algunos ejercicios relacionados con los casos anteriormente expuestos:

Ejemplo 1

Resolver la EDO: $y'' - y^2 = 0$.

Solución:

Como falta la variable independiente x, haremos $y' = p$, de donde:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p \text{ , luego substituyendo en la EDO: } \frac{dp}{dy} \cdot p - y^2 = 0;$$

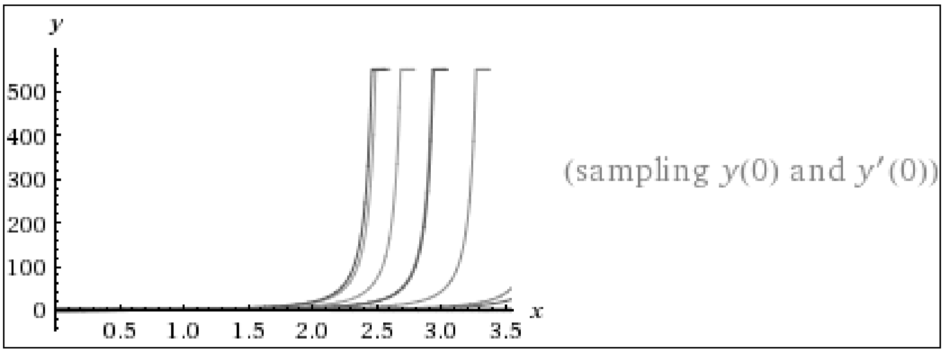
que es una ecuación de variables separables integrable mediante una cuadratura, así:

$$p \cdot dp = y^2 \cdot dy; \quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^3}{3} + C \text{ , o bien:}$$

$$p^2 = \frac{2}{3}y^3 + K; \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}y^3 + K} \text{ , (habiendo hecho } K = 2 \cdot C\text{)}$$

, que resulta de fácil integración por ser de variables separables.

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 2

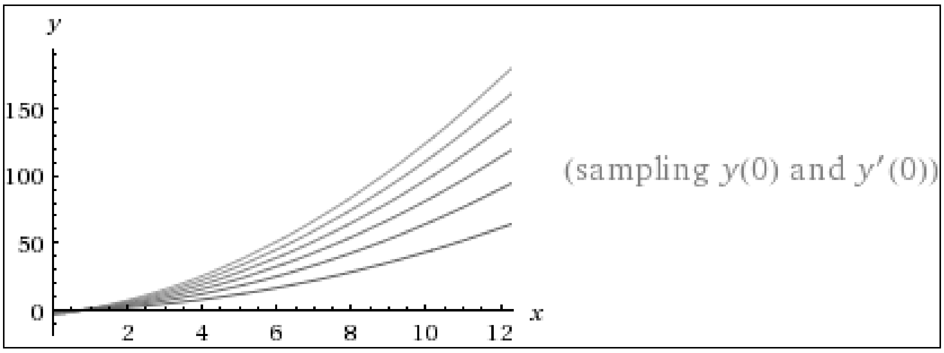
Sea resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y' = y''\cdot x + y''^2$.

Solución:

Mediante el cambio: $y' = p$, puesto que falta la *y*, se transforma dicha ecuación en: $p = p'x + p'^2$, que es una ecuación de Clairaut cuya integral general es: $p = c_1x + c_1^2$; por tanto la integral general de la ecuación dada es:

$$\boxed{y = \int (c_1\cdot x + c_1^{\ 2})dx = \frac{c_1}{2}x^2 + c_1^2x + c_2}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



En cuanto a la integral singular de la transformada $p = -\frac{x^2}{4}$ da origen a un haz de integrales singulares de la ecuación propuesta, a saber:

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}\int x^2\cdot dx = -\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3} + K = -\frac{x^3}{12} + K}$$

denominándose singulares por cuanto son curvas (cúbicas) que no pertenecen a la familia integral (parábolas) y que, sin embargo, verifican la ecuación diferencial dada, como resulta fácil de comprobar por el amable lector.

Ejemplo 3

Hallar las curvas cuyo radio de curvatura resulta igual a la longitud de la normal.

Solución:

Según el lado de la normal en que situemos el centro de curvatura, y aplicando conocidas propiedades geométricas, será:

$$\frac{\left[1+y'^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''} = \pm y\sqrt{1+y'^2} \quad \text{o sea:} \quad 1 + y'^2 = \pm\, y\cdot y''$$

ecuación sin la x. Aplicando las transformaciones anteriores (y' = p), tenemos:

$$1+p^2 = \pm y\frac{dp}{dy}p \text{, es decir: } \frac{p\cdot dp}{1+p^2} = \pm\frac{dy}{y}\text{; e integrando:}$$

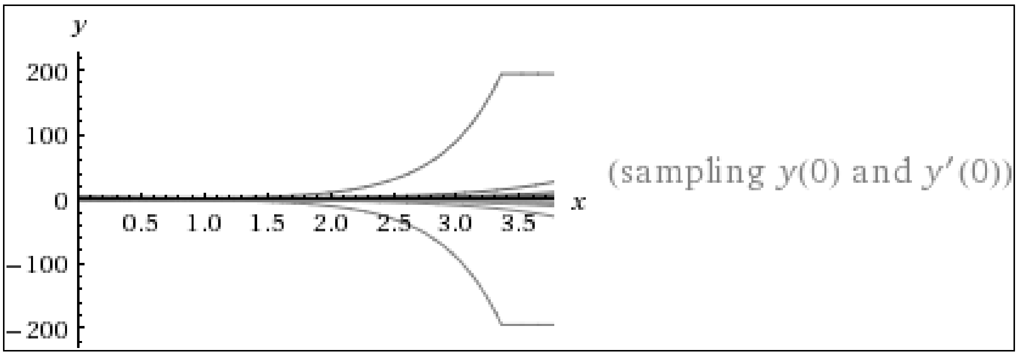
$$½\ln(1 + p^2) = \pm (\ln y + \ln c_1) = \pm \ln c_1\cdot y;\ \sqrt{1+p^2} = \pm c_1\cdot y\,.$$

Así pues, se presenta una doble alternativa:

- Para el signo + resulta: $1+ p^2 = c_1^2y^2$; $\quad y' = \sqrt{c_1^2y^2-1}$;

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c_1^2y^2-1}} = \int dx\,;\quad \frac{1}{c_1}\mathrm{Arg\,Ch}\cdot c_1y = x + c_2\,;\quad y = \frac{1}{c_1}\mathrm{Ch}\cdot c_1(x+c_2)\,;$$

, que es una familia de catenarias de representación gráfica:



- Para el signo – resulta: $1+p^2 = \frac{c_1^2}{y^2}$; $\quad y' = \frac{1}{y}\sqrt{c_1^2-y^2}$

$$\int \frac{y\cdot dy}{\sqrt{c_1^2-y^2}} = \int dx\,;\quad -\sqrt{c_1^2-y^2} = x + c_2\,;\quad (x+c_2)^2+y^2 = c_1^2\,;\text{ de donde se}$$

deduce que: $y^2 = c_1^2 - (x + c_2)^2$; $y = \pm\sqrt{c_1^{\ 2} - c_2^{\ 2} - x^2 - 2c_2x}$, , que es una familia de circunferencias con centro en el eje OX y radio c_1.

Ejemplo 4

Hallar las curvas cuyo radio de curvatura es constante.

Solución:

En este caso, nos vemos conducidos a integrar:

$(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = k\cdot y''; (1+p^2)^{\frac{3}{2}} = k\frac{dp}{dx}$; pues falta la y, y se hace y' = p, obteniéndose el siguiente resultado:

$$\left.\begin{aligned} x &= k\int \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + c_1 = k\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + c_1 \\ y &= k\int \frac{p\cdot dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + c_2 = -\frac{k}{\sqrt{1+p^2}} + c_2 \end{aligned}\right\} \text{de donde}: (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = k^2$$

, que es una familia de circunferencias de centro en el punto de coordenadas (c_1,c_2) y radio k. Al igual que en el problema anterior, podríamos despejar explícitamente la *y*. Aquí hemos construido la ecuación finita a partir de la EDO, demostrando con ello que solo las circunferencias tienen la propiedad de poseer un radio de curvatura constante, como es bien sabido.

Ejemplo 5

Solve the ordinary differential equation: $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = a$.

Solution:

Let $p = \frac{dy}{dx}$ = y'; then $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ = p', and the given equation becomes $x^2\frac{dp}{dx} + xp = a$ or also: $x\cdot dp + p\cdot dx = \frac{a}{x}dx = d(x\cdot p)$.

Then, integrating on obtain: $x\cdot p = a\cdot \ln|x| + C_1$, $x\frac{dy}{dx} = a\cdot \ln|x| + C_1$, $dy = a\cdot \ln|x|\frac{dx}{x} + C_1\frac{dx}{x}$, and the general integral is:

$$\boxed{y = \frac{1}{2}a\cdot \ln^2|x| + C_1\ln|x| + C_2}.$$

Also, is a non-homogeneous equation Euler-Cauchy type, so we do the change of variable:

$$y = e^t;\quad dx = e^t\cdot dt;\quad t = \ln x;$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot e^{-t};\quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Now, substituting in the initial equation is obtained:

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+\frac{dy}{dt}=a\,;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=a\,;\quad \frac{dy}{dt}=at+C_1\,;$$

And also: $y=a\dfrac{t^2}{2}+C_1t+C_2=\dfrac{1}{2}a\cdot\ln^2 x+C_1\cdot\ln x+C_2$.

Ejemplo 6

Solve the ordinary differential equation: xy'' + y' + x = 0.

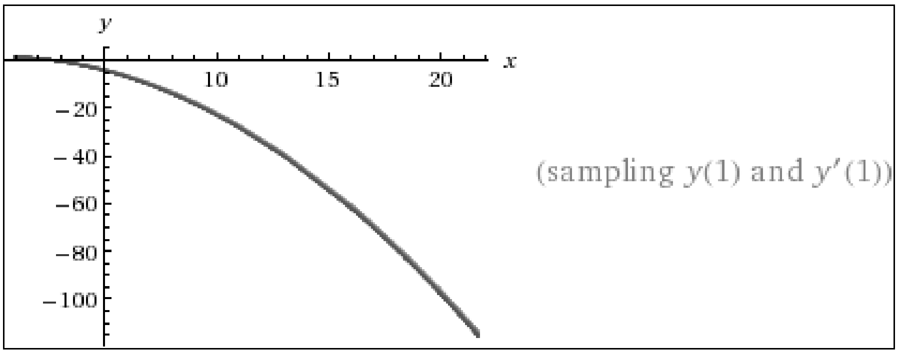
Solution:

Let $p=\dfrac{dy}{dx}$ = y'. Then: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}$ = p' and the given equation becomes $x\dfrac{dp}{dx}+p+x=0$ or $x\cdot dp+p\cdot dx=-x\cdot dx=d(x\cdot p)$.

Then: $x\cdot p=-\dfrac{1}{2}x^2+C_1$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{C_1}{x}$, and the general integral is:

$$\boxed{y=-\frac{1}{4}x^2+C_1\ln x+C_2}.$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Also, is a non-homogeneus equation of Euler-Cauchy type:

$$x^2\cdot y'' + x\cdot y' = -x^2$$

So we do the change of variable: $x = e^t$; $dx = e^t\cdot dt$; $t = \ln x$;

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\,;\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

Now, substituting in the initial equation is obtained:

$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} = -e^{2t}$, which is a linear differential equation with constant coefficients whose characteristic equation of the homogeneous is:

$$\lambda^2 = 0 \; ; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \; ; \text{ the solution of the homogeneous is:}$$

$$y^* = C_1 + C_2 \cdot t = C_1 + C_2 \cdot \ln x.$$

Now releasing a particular solution of the complete equation of the type:

$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^{2t} \\ y'_p = 2A \cdot e^{2t} \\ y''_p = 4A \cdot e^{2t} \end{cases}$$

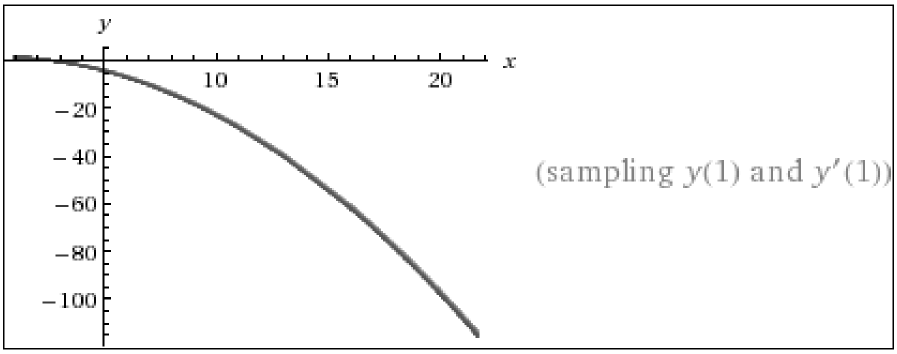
and substituting in the initial equation is obtained:

$$4A \cdot e^{2t} = -e^{2t} \; ; \quad A = -\tfrac{1}{4} \; ; \quad y_p = -\tfrac{1}{4} \cdot e^{2t} = -x^2/4 \; ;$$

Now, the general integral is really:

$$y = y^* + y_p = C_1 + C_2 \cdot \ln x - x^2/4.$$

The graphical representation of the sample solution family is:



3. ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL NO HOMOGÉNEA DE ORDEN n Y COEFICIENTES CONSTANTES

3.1. GENERALIDADES

Estudiaremos aquí la ecuación diferencial del tipo:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{n-i} = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x)$$

donde, como ya indicamos, las a_i, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$, son constantes y $b(x)$ es una función continua en un intervalo (a, b).

Podemos, por tanto, dar la siguiente expresión para la solución o integral general de la ecuación no homogénea o completa:

$$\boxed{y(x) = y^* + y_p = c_1 \cdot y_1 + \ldots + c_n \cdot y_n + y_p = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y_i + y_p} \rightarrow \text{I.G.}$$

que es suma o adición de la solución general de la ecuación homogénea (y*) y de una solución particular de la completa (y_p) cuya investigación se verá exhaustivamente en los epígrafes posteriores. También para hallar la solución particular de la completa se puede utilizar el denominado *método de Cauchy*, en que se supone conocida la integral y = z de la ecuación homogénea o incompleta; entonces, la ecuación dada quedará satisfecha poniendo: $y = \int_0^x z \cdot d\alpha$, para cuya determinación definiremos las m constantes de la integral general y = z, expresando que para x = α, se verifica que: z, z', z''… $z^{(m-\alpha)}$ son iguales a cero y $z^{(m-1)} = f(\alpha)$. Siendo:

$$z = c_1 \cdot e^{\alpha_1 (x-\alpha)} + c_2 \cdot e^{\alpha_2 (x-\alpha)} + \ldots + c_m \cdot e^{\alpha_m (x-\alpha)} = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot e^{\alpha_i (x-\alpha)}$$

e imponiéndole las condiciones antedichas, se obtiene que:

$$c_1 = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_1)}; \quad c_2 = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_2)} \quad ; \ldots; \; c_m = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_m)}$$

siendo φ(a) el primer miembro de la ecuación característica.

La integral particular buscada es, entonces:

$$z = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_1)} e^{\alpha_1 (x-\alpha)} + \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_2)} e^{\alpha_2 (x-\alpha)} + \ldots + \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_m)} e^{\alpha_m (x-\alpha)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_i)} \cdot e^{\alpha_i (x-\alpha)}$$

pero como $y = \int_0^x z \cdot d\alpha$, y para hallar la integral general de la ecuación dada hay que sumarle la solución de la incompleta u homogénea, tendremos, después de efectuada toda reducción:

$$y = e^{\alpha_1 x}\left[c_1 + \frac{1}{\varphi'(a_1)} \int_0^x e^{-a_1 \alpha} \cdot f(\alpha) \cdot dx\right] + e^{\alpha_2 x}\left[c_2 + \frac{1}{\varphi'(a_2)} \int_0^x e^{-a_2 \alpha} \cdot f(\alpha) \cdot dx\right] + \ldots +$$
$$+ e^{\alpha_m x}\left[c_m + \frac{1}{\varphi'(a_m)} \int_0^x e^{-a_m \alpha} \cdot f(\alpha) \cdot dx\right] = \sum_{i=1}^{m} e^{\alpha_i x}\left[c_i + \frac{1}{\varphi'(a_i)} \int_0^x e^{-a_i \alpha} \cdot f(\alpha) \cdot dx\right]$$

que constituye la integral general de la ecuación completa.

Las ecuaciones diferenciales cuya forma es la siguiente:

$$y^{(m)} + \frac{A}{ax+b} y^{(m-1)} + ... + \frac{T}{(ax+b)^{m-1}} y' + \frac{U}{(ax+b)^{m}} y = 0$$

se integran poniendo y = $(ax + b)^{\alpha}$, valor que, substituido en la ecuación dada, conduce a una de grado m en α, siendo α_1, α_2 … α_m las raíces de la ecuación resultante, y la integral general buscada es, entonces:

$$y = c_1(ax+b)^{\alpha_1} + c_2(ax+b)^{\alpha_2} + ... + c_m(ax+b)^{\alpha_m} = \sum_{i=1}^{m} c_i (ax+b)^{\alpha_i}$$

Veamos, en fin, que: $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$, posee como integral general:

$$y(x) = \int\int ...^{(n)}...\int f(x)\cdot dx^n + g(x),$$

en donde g(x) es una función arbitraria entera a lo más de grado (n-1). También esta I.G. puede escribirse bajo la forma empleada frecuentemente:

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(t)\cdot(x-t)^{n-1}\cdot dt + g(x)\,.$$

3.2. MÉTODO DE VARIACIÓN DE CONSTANTES

De hecho, en la generalidad de los casos que se pueden presentar, la integral general de la ecuación completa puede obtenerse siguiendo el método denominado de "variación de constantes", en contraposición al método de "tanteo de funciones" que veremos en los epígrafes siguientes, consistente el primero de ellos en tomar la integral de la incompleta u homogénea y hacer que ésta verifique la ecuación completa al dar a las constantes el carácter de variables. Así pues, se busca una solución particular a partir de la solución general de la homogénea considerando que las constantes son funciones de x.

Supongamos que la ecuación a estudiar es la siguiente:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{n-i} = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x),$$

y que la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i\,.$$

Entonces, si c_1, c_2, …, c_n, son funciones de x, se tiene que:

$$y' = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 + \ldots + c_n y'_n + c'_1 y_1 + \ldots + c'_n y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i y'_i + \sum_{i=1}^{n} c'_i y_i$$

Hagamos: $\sum_{i=1}^{n} c'_i y_i = c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \ldots + c'_n y_n = 0.$

Ahora: $y'' = c_1y''_1 + \ldots + c_ny''_n + c'_1y'_1 + \ldots + c'_ny'_n = \sum_{i=1}^{n} c_i y''_i + \sum_{i=1}^{n} c'_i\, y'_i$.

Otra vez hacemos: $\sum_{i=1}^{n} c'_i\, y'_i = c'_1y'_1 + c'_2y'_2 + \ldots + c'_ny'_n = 0$

, y así sucesivamente, con lo que llegaremos a tener:

$$y^n = c_1y_1^n + c_2y_2^n + \ldots + c'_n\, y_1^{n-1} + \ldots + c'_n\, y_n^{n-1}$$

Al substituir en la ecuación, obtendremos:

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i\, y_i^{n-1} = c'_1\, y_1^{n-1} + c'_2\, y_2^{n-1} + \ldots + c'_n\, y_n^{n-1} = b(x)/a_0$$

Se tiene así un conjunto o sistema de *n* ecuaciones con *n* incógnitas:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c'_i\, y_i = c'_1y_1 + c'_2y_2 + \ldots + c'_ny_n = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} c'_i\, y'_i = c'_1y'_1 + c'_2y'_2 + \ldots + c'_ny'_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} c'_i\, y_i^{n-1} = c'_1\, y_1^{n-1} + c'_2\, y_2^{n-1} + \ldots + c'_n\, y_n^{n-1} = b(x)/a_0 \end{cases}$$

que permite calcular c'_1, c'_2, c'_n. Tras integrar las funciones que obtengamos, se tendrá la solución particular buscada.

3.3. MÉTODO DE TANTEO DE FUNCIONES O DE SELECCIÓN

3.3.1. b(x) es un polinomio en x

En este caso, se ensayará un polinomio del mismo grado de b(x), pero si el primer miembro carece de y, aumentaremos el grado de cada término en una unidad; si careciese de y e y' aumentaríamos el grado de cada término en dos unidades, etc. Veámoslo seguidamente mediante algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y' = x + y$.

Solución:

Aquí se trata de una ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes pero de primer orden, como las resueltas en el capítulo anterior de este libro, que también se puede escribir de la forma: $y' - y = x$; resolviendo la ecuación homogénea, se tiene:

$$\lambda - 1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 1 \;\rightarrow\; y^* = c \cdot e^x$$

Para hallar una solución particular de la no homogénea ensayaremos un polinomio genérico de primer grado, puesto que b(x) = x, así:

$$\begin{cases} y_p = ax + b \\ y'_p = a \,; \end{cases}$$

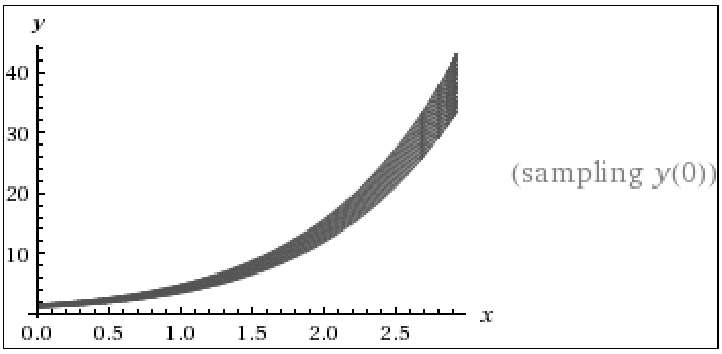
Substituyendo, ahora, en la ecuación inicial, se obtiene:

$$a - ax - b = x \,; \;\; -ax + a - b = x \,;$$

$$-a = 1 \;\rightarrow\; \boxed{a = -1} \,; \;\; a - b = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{b = -1} \text{, o sea:}$$

$$y_p = -x - 1\text{, con lo que: } \boxed{y = y^* + y_p = c e^x - x - 1} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 2

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 4x + 7$.

Solución:

Se empieza por resolver la ecuación homogénea correspondiente. A partir de su correspondiente ecuación característica o modular:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

se obtiene la integral de la ecuación homogénea, puesto que:

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

, con lo que: $y^* = c_1e^{2x} + c_2e^x$. Investiguemos seguidamente una solución particular de la completa; para ello ensayamos el siguiente polinomio genérico (de igual grado que el 2º miembro), esto es:

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c \\ y'_p = 2ax + b \\ y''_p = 2a \end{cases}$$

Substituyendo en la ecuación original, se obtiene:

$$2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 + 4x + 7$$

Identificando, ahora, los coeficientes de los términos de igual grado:

$$\begin{cases} 2a = 2 & \text{(coeficientes de } x^2\text{)} \\ -6a + 2b = 4 & \text{(coeficientes de x)} \\ 2a - 3b + 2c = 7 & \text{(términos independientes)} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene que:

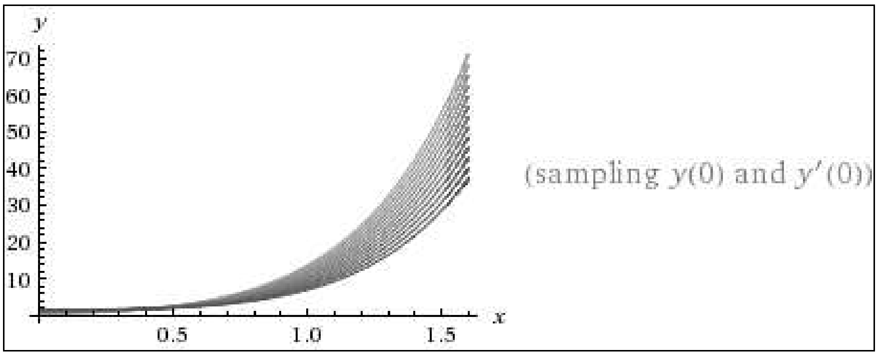
$$a = 1,\ b = 5,\ c = 10$$

luego tendremos que: $y_p = x^2 + 5x + 10$, que es una solución particular de la ecuación completa.

La integral general, como se ha dicho en el apartado anterior, se obtiene como suma de la solución de la homogénea y de una particular de la completa (o no homogénea). Por tanto, se tendrá que:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^x + x^2 + 5x + 10} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 3

Sea resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\overbrace{\dfrac{d^4y}{dx^4}}^{y^{IV}} - 2 \cdot \overbrace{\dfrac{d^3y}{dx^3}}^{y^{III}} = x^2$.

Solución:

La ecuación característica o modular es, en este caso:

$$\lambda^4 - 2 \cdot \lambda^3 = 0 \text{, que proporciona las raíces:}$$

$$\lambda^3 (\lambda - 2) = 0; \text{ con lo que: } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \ ; \ \lambda_4 = 2 \ ;$$

Consecuentemente, a la raíz triple 0 le corresponden las integrales particulares siguientes:

$$y_1 = e^{0x} = 1; \ y_2 = x \cdot e^{0x} = x; \ y_3 = x^2 \cdot e^{0x} = x^2$$

Ahora, para determinar una solución particular de la ecuación completa, empezaríamos por formar un polinomio genérico de segundo grado, $ax^2 + bx + c$, puesto que el segundo miembro b(x) de la ecuación problema es precisamente de 2º grado. Pero como el primer miembro de dicha ecuación carece de y, y' e y'', aumentamos el grado de cada término en tres unidades, luego la solución particular a investigar será del tipo:

$y_p = ax^5 + bx^4 + cx^3$, siendo sus derivadas sucesivas:

$$\begin{cases} y'_p = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 \\ y''_p = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx \\ y'''_p = 60ax^2 + 24bx + 6c \\ y''''_p = 120ax + 24b \end{cases}$$

Luego substituyendo en la ecuación inicial se obtiene que:

$$120ax + 24b - 120ax^2 - 48bx - 12c = x^2$$
$$-120a = 1 \ ; \quad 120a - 48b = 0 \ ; \quad 24b - 12c = 0$$

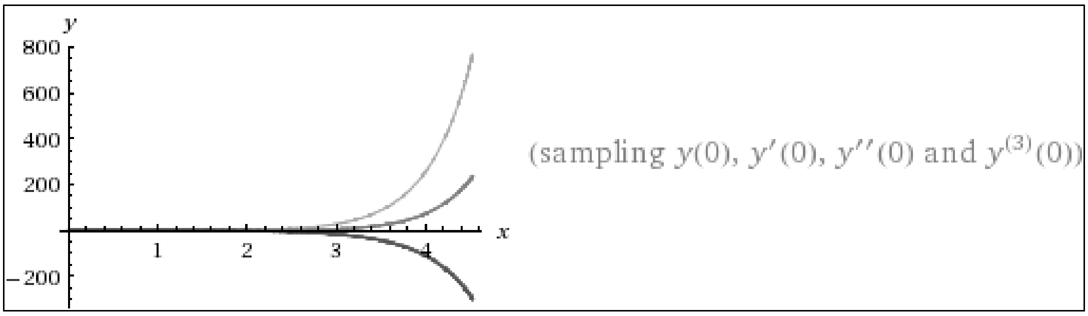
de donde:

$$a = -\frac{1}{120}, \quad b = -\frac{1}{48}, \quad c = -\frac{1}{24}$$

Luego la integral general será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot e^{2x} - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{24}x^3} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 4

Sea resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y^{III} - y' = 2$.

Solución:

La ecuación característica es:

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \ ; \quad \lambda \cdot (\lambda^2 - 1) = 0 \ ;$$

$$\lambda^2 = 1, \text{ con lo que se tiene: } \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -1;$$

La solución de la homogénea, será, entonces:

$$y^* = c_1 + c_2 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-x}$$

Para determinar una solución de la ecuación completa ensayaríamos una solución de la forma y = c (polinomio de grado cero), pero como el primer miembro carece de término en y, aumentaremos en una unidad su grado, esto es, ensayaremos:

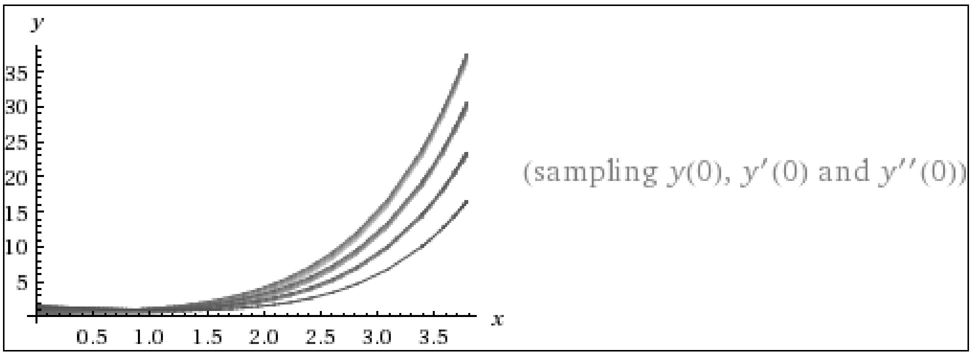
$$y_p = c \cdot x \ ; \quad y'_p = c \ ; \quad y''_p = y'''_p = 0$$

de donde - c = 2, o sea c = -2, esto es: $y_p = -2x$.

La integral general será, pues:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 + c_2 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-x} - 2x} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 5

Solve the ordinary differential equation: $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = x^2$.

Solution:

The complementary (homogeneous) function is: $y^* = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-4x}$ (the roots of the characteristic function are: $\lambda = 1, -4$).

To find a particular integral of the equation, note that the right hand member is $b(x) = x^2$. This suggest that the particular integral will contain a term in x^2 and perhaps other terms obtained by successive differentiation. We shall assume it to be of the form: $y = Ax^2 + Bx + C$, where the constants A, B, C are to be determined.

Substitute: $y_p = Ax^2 + Bx + C$, $y'_p = 2Ax + B$, $y''_p = 2A$, in the differential equation to obtain:

$$2A + 3(2Ax + B) – 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 ,$$

$$-4Ax^2 + (6A – 4B)x + (2A + 3B – 4C) = x^2$$

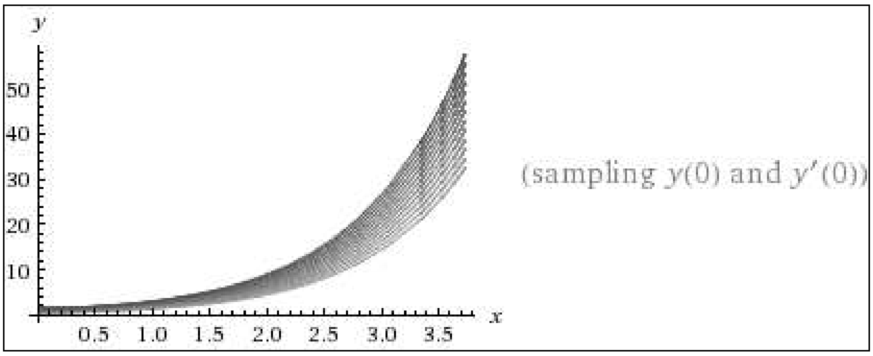
Since this is an identity in x, $-4A = 1$, $6A – 4B = 0$, $2A + 3B – 4C = 0$.

Then: $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{3}{8}$, $C = -\frac{13}{32}$, and $y_p = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$ is a particular integral of the equation.

Thus, the general solution is:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1e^x + c_2e^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}}$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 6

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} = 3x + 2$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \int (3x+2)dx = 3\frac{x^2}{2} + 2x + c_1;\; dy = \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x + c_1\right)dx;\text{ o sea:}$$

$$\boxed{y} = \int\left(\frac{3}{2}x^2 + 2x + c_1\right)dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2 = \boxed{\frac{x^3}{2} + x^2 + c_1x + c_2} \to \text{I.G.}$$

También se podría resolver considerando la solución de la homogénea mediante la ecuación característica: $\lambda^2 = 0$; o sea: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; $y^* = c_1 \cdot x + c_2$; y ensayando la solución particular adecuada y sus derivadas sucesivas, puesto que faltan los términos en y e y' (por lo que aumentaremos en dos unidades el grado del polinomio en cuestión), a saber:

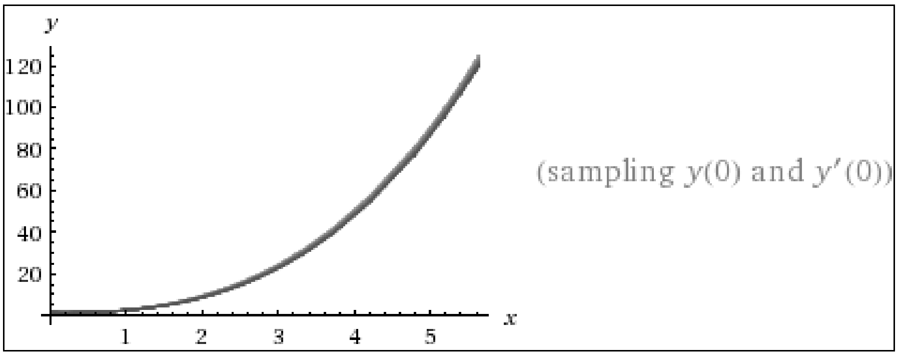
$$\begin{cases} y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y'_p = 3ax^2 + 2bx + c \\ y''_p = 6ax + 2b \end{cases}$$

$$6ax + 2b = 3x + 2 \text{ ; o sea;}$$

a = ½; b = 1; c = d = 0; con lo que la integral general buscada será:

$$\boxed{y} = y^* + y_p = \boxed{c_1 x + c_2 + \frac{x^3}{2} + x^2} \text{ , c.s.q.d.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 7

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2x - x^2$.

Solución:

La ecuación característica o modular de la homogénea, ofrece:

$$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1) = 0 \text{ ; o sea: } \lambda_1 = 0 \text{ ; } \lambda_2 = 1 \text{ ;}$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea subiendo un grado (puesto que el primer miembro de la E.D. carece del término en *y*):

$$\begin{cases} y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \\ y'_p = 3Ax^2 + 2Bx + C \\ y''_p = 6Ax + 2B \end{cases}$$

que substituyendo en la ecuación inicial, ofrece:

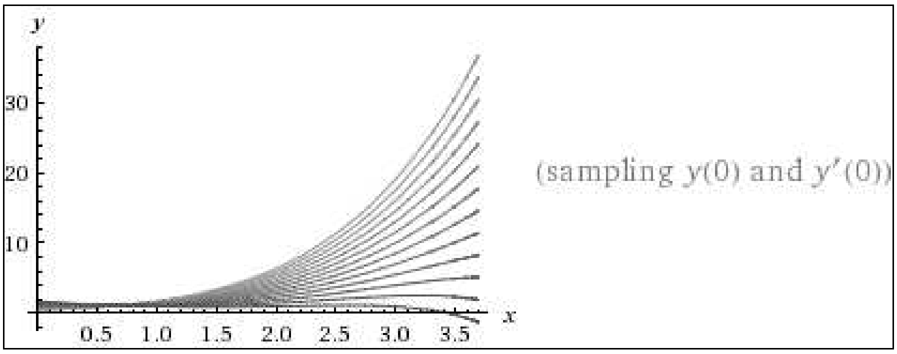
$$6Ax + 2B - 3Ax^2 - 2Bx - C = 2x - x^2; \;\; -3A = -1$$

$$-3Ax^2 + (6A - 2B)x + 2B - C = 2x - x^2; \;\; \boxed{A = 1/3}$$

$6A - 2B = 2 = 2 - 2B \Rightarrow \boxed{B = 0}$; $\boxed{D = 0}$; $\boxed{C = 0}$; y la integral general buscada será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 + c_2 \cdot e^x + \frac{x^3}{3}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 8

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 6x + 23$.

Solución:

La ecuación característica de la homogénea, será:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \; ; \quad \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

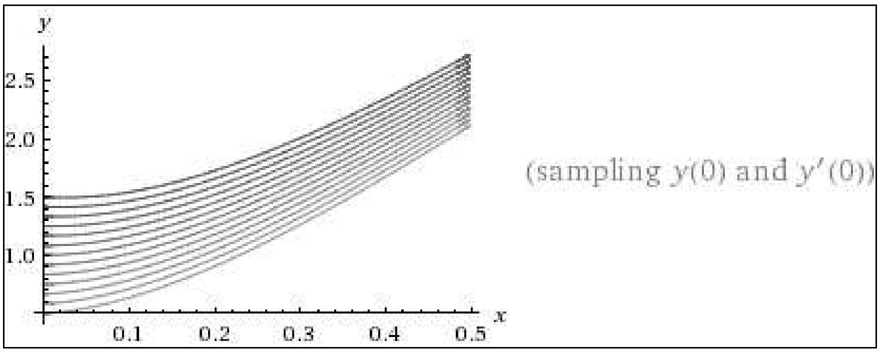
Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea:

$$\begin{cases} y_p = ax + b \\ y'_p = a \\ y''_p = 0 \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene: $4a + 3ax + 3b = 6x + 23$; o sea: $a = 2$; $8 + 3b = 23$; $b = \frac{23-8}{3} = 5$; luego $y_p = 2x + 5$, y la integral general será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-3x} + 2x + 5}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 9

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = x^2 - 5$.

Solución:

La solución de la homogénea ya se ha hallado en otro problema del libro. Pero como el primer miembro carece de término en **y**, en el ensayo de la solución particular del segundo miembro aumentaremos el grado de cada término en una unidad, con lo que probaremos, en definitiva, la solución particular:

$$\begin{cases} y_p = ax^3 + bx^2 + cx \\ y'_p = 3ax^2 + 2bx + c \\ y''_p = 6ax + 2b \end{cases}$$

Substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene:

$$6ax + 2b - 6ax^2 - 4bx - 2c = x^2 - 5;$$

$$-6ax^2 + (6a - 4b)x + 2b - 2c = x^2 - 5; \quad \text{de donde:}$$

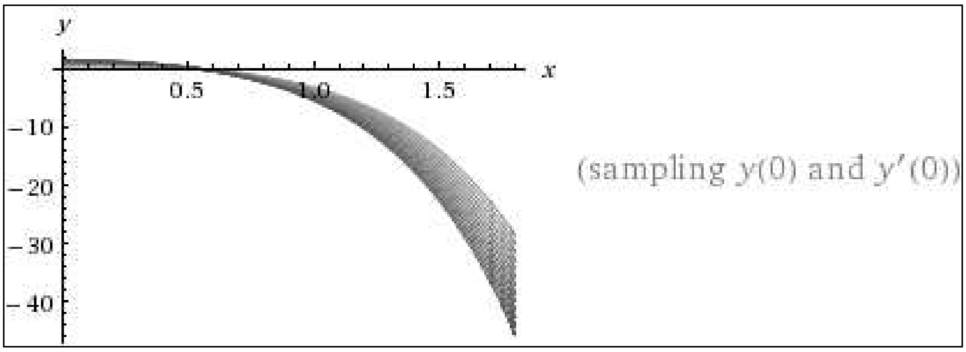
$$\boxed{a = -\frac{1}{6}}; \quad 6a = 4b = 1; \quad \boxed{b = -\frac{1}{4}}$$

$$2c = 2b + 5 = -\frac{1}{2} + \frac{10}{2} = \frac{9}{2}; \quad \boxed{c = \frac{9}{4}}$$

De este modo, la integral general buscada será:

$$y = y^* + y_p = \boxed{c_1 + c_2 \cdot e^{2x} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{9x}{4}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 10

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y'' - 2y' + 5y = 3x^2 - x$.

Solución:

La correspondiente ecuación homogénea, ya resuelta anteriormente, ofrece la solución:

$$y^* = e^x(c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \text{sen } 2x)$$

Ensayando ahora una solución particular de la no homogénea del tipo:

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c \\ y'_p = 2ax + b \\ y''_p = 2a \end{cases}$$

Substituyendo, ahora, en la ecuación inicial, se obtiene:

$$2a - 4ax - 2b + 5ax^2 + 5bx + 5c = 3x^2 - x \;;$$

$$5ax^2 + (5b - 4a)x + 2a - 2b + 5c = 3x^2 - x \;; \text{ de dónde:}$$

$5a = 3$; $\qquad 5b - 4a = -1$

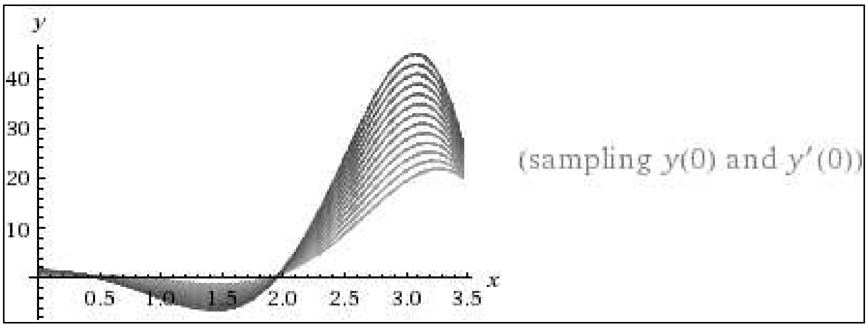
$\boxed{a = \frac{3}{5}}$; $\qquad 5b - 4a = -1 \; = \frac{12}{5} - \frac{5}{5} = \frac{7}{5}$; $\boxed{b = \frac{7}{25}}$;

$$5c = 2b - 2a = \frac{14}{25} - \frac{30}{25} = -\frac{16}{25} \;; \quad \boxed{c = -\frac{16}{125}} \;;$$

y la integral general buscada será:

$$y = y^* + y_p = \boxed{e^x(c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \text{sen } 2x) + \frac{3x^2}{5} + \frac{7x}{25} - \frac{16}{125}} \to \text{I.G.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 11

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y'' + y' = 3x^2 - x$.

Solución:

Como el primer miembro carece de término en y, aumentaremos el grado de la solución particular, con lo que ensayaremos una expresión del tipo:

$$\begin{cases} y_p = ax^3 + bx^2 + cx \\ y'_p = 3ax^2 + bx + c \\ y''_p = 6ax + 2b \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene:

$$6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx + c = 3x^2 - x \ ;$$

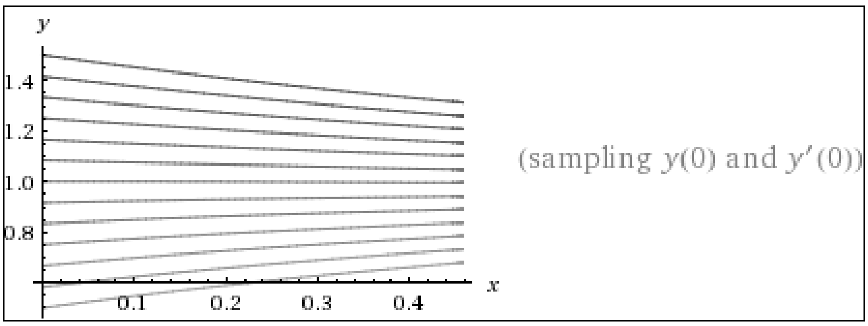
$$3ax^2 + (6a + 2b)x + 2b + c = 3x^2 - x \ ; \text{ de dónde:}$$

$$\boxed{a = 1} \ ; \ 6a + 2b = -1 \ ; \ 2b = -7 \ ; \ \boxed{b = -\frac{7}{2}} \ ; \ \boxed{c} = -2b = \boxed{7} \ ;$$

y puesto que: $y^* = c_1 + c_2 \cdot e^{-x}$, es la integral de la ecuación homogénea, ya que la ecuación característica es : $\lambda^2 + \lambda = \lambda\,(\lambda + 1) = 0$, con las raíces: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$, se tendrá una integral general:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 + c_2 \cdot e^{-x} + x^3 - (7/2)x^2 + 7x} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 12

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: y''' + y'' – 2y' = 5.

Solución:

La solución de la ecuación homogénea podemos verla en otro ejercicio de este mismo capítulo, con el resultado: $y^* = c_1 + c_2 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-2x}$. Como el primer miembro carece de término en y, aumentaremos en una unidad su grado, por lo que ensayaremos una solución particular del tipo:

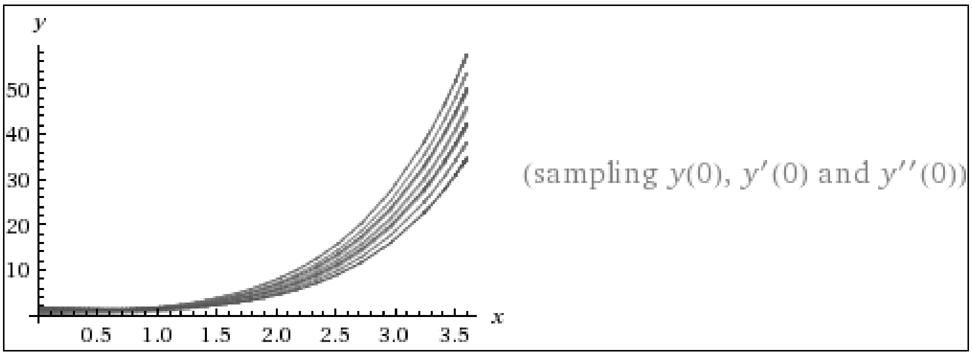
$$\begin{cases} y_p = a \cdot x \\ y'_p = a \\ y''_p = 0 \\ y'''_p = 0 \end{cases}$$

que substituyendo en la ecuación inicial, ofrece:

$-2a = 5$; $\boxed{a = -\frac{5}{2}}$, con lo que la integral general será:

$$y = y^* + y_p = \boxed{c_1 + c_2 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-2x} - \frac{5x}{2}} \to \text{I.G.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 13

Resolver la ecuación diferencial y el problema de valor inicial siguiente:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = b(x)\,,\ / \, b(x) = \begin{cases} 8\pi - 4x; \forall x / 0 < x < 2\pi \\ 0; \forall x \geq 2\pi \end{cases},\ \text{con} \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

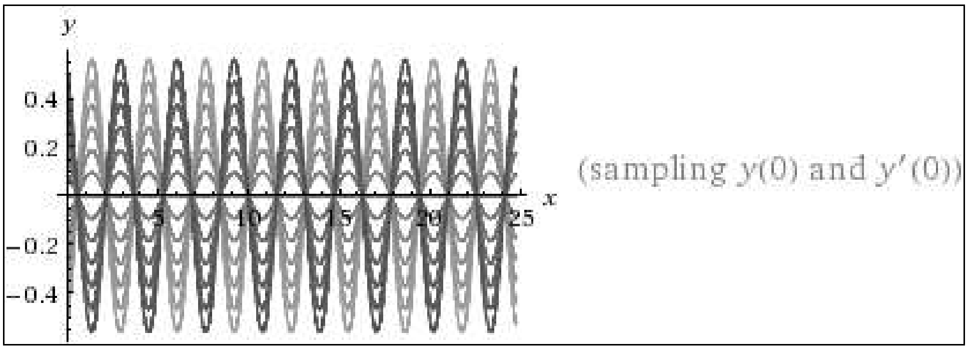
Solución:

a) Se presentan, pues, sendos casos según el valor que adopta la función b(x): vamos a resolver la ecuación homogénea, lo que sucederá:

$$\forall\ x \geq 2\pi\ ;\quad \lambda^2 + 4 = 0\ ;\quad \lambda = \pm\, 2i\ ;\ \text{con}\ \alpha = 0\ \text{y}\ \beta = 2\ ;$$

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}(A\cdot\cos\beta x + B\cdot\text{sen}\ \beta x) = c_1\cdot\cos 2x + c_2\cdot\text{sen}\ 2x}$$

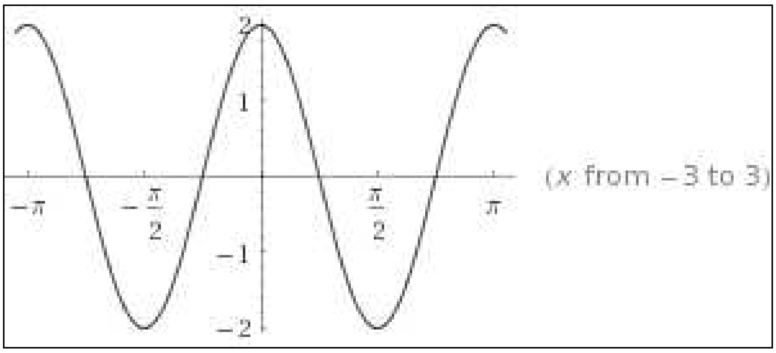
La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:

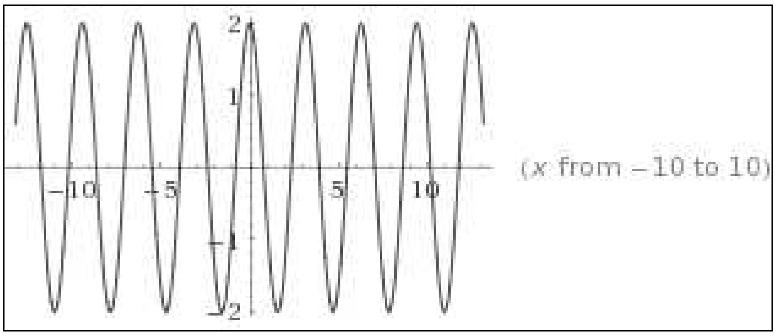


Por otra parte, de las condiciones iniciales dadas se desprende que:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 2 \\ y'(x) = -2c_1\cdot\text{sen}\ 2x + 2c_2\cdot\cos 2x \\ y'(0) = 2c_2 = 0\ ;\quad c_2 = 0\ ; \end{cases}$$

con lo que: $\boxed{y = 2\cdot\cos 2x}$. La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





b) La no homogénea o completa tiene lugar $\forall x$ / $0<x<2\pi$. Como el primer miembro carece de término en y' aumentaremos el grado del polinomio de la solución particular a ensayar en una unidad, esto es:

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c \\ y'_p = 2ax \\ y''_p = 2a \end{cases}$$

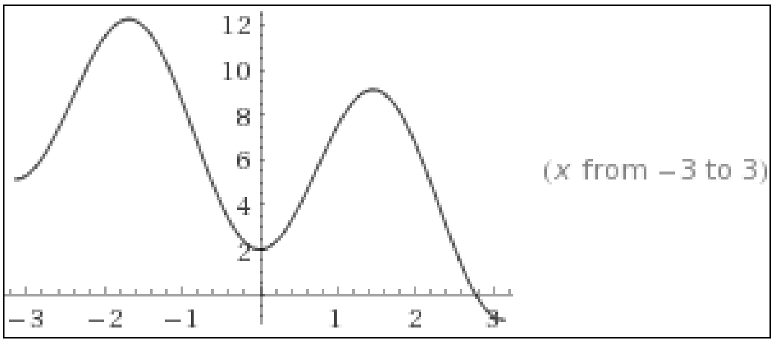
Substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

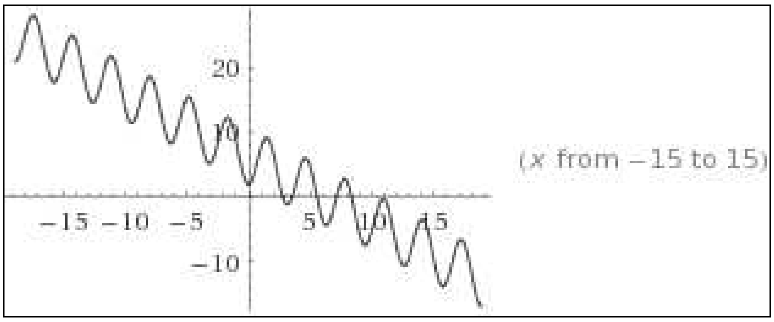
$$2a + 4ax^2 + 4bx + 4c = -4x + 8\pi \;; \quad b = -1 \;; \quad a = 0 \;;$$
$$2a + 4c = 8\pi \;; \quad c = 2\pi \;; \quad \text{y entonces:}$$

$$\begin{cases} y(x) = y^* + y_p = c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \text{sen } 2x - x + 2\pi \\ y(0) = c_1 + 2\pi = 2 \;; \quad c_1 = 2(1 - \pi) \\ y'(x) = -2c_1 \cdot \text{sen } 2x + 2c_2 \cdot \cos 2x - 1 \\ y'(0) = 2c_2 - 1 = 0 \;; \quad c_2 = ½ \text{, con lo que resulta la I.P. buscada:} \end{cases}$$

$$\boxed{y = (2 - 2\pi)\cos 2x + \frac{\text{sen } 2x}{2} - x + 2\pi}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 14

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''' - 4y'' - 5y' = 3\text{, con:} \\ y(0) = y''(0) = 0 \;; \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea, es:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda = 0 = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda - 5) \ ; \quad \lambda_1 = 0 \ ; \quad \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \begin{cases} \lambda_2 = 5 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

$$y^* = c_1 + c_2 \cdot e^{5x} + c_3 \cdot e^{-x} \ ;$$

Ensayaremos una solución particular de la no homogénea, del tipo:

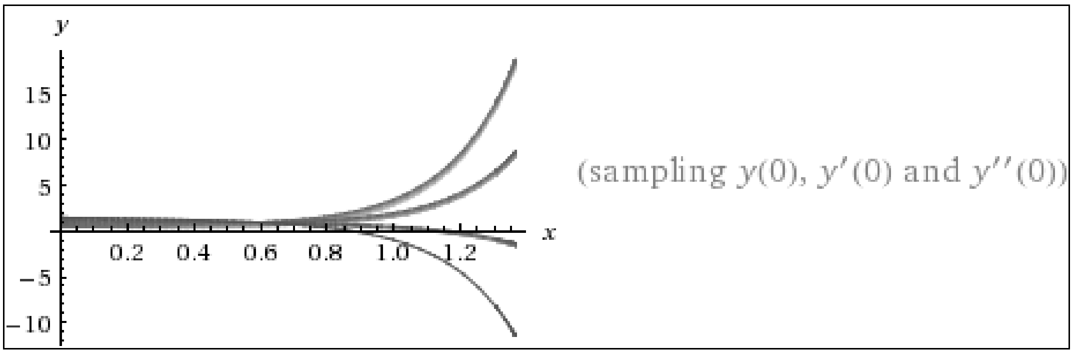
$$\begin{cases} y_p = ax + b \quad \text{(pues no hay término en y)} \\ y'_p = a \\ y''_p = 0 \\ y'''_p = 0 \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

$-5a = 3$; $a = -3/5$; $b = 0$; de donde se deduce la I.G.:

$$y(x) = y^* + y_p = c_1 + c_2 \cdot e^{5x} + c_3 \cdot e^{-x} - \frac{3x}{5} .$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

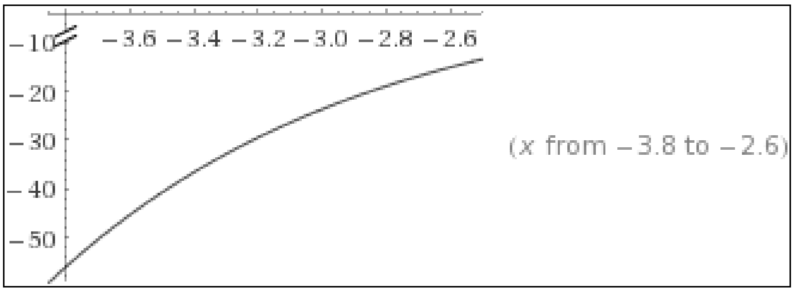
$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 0 \ ; \\ y'(x) = 5c_2 \cdot e^{5x} - c_3 \cdot e^{-x} - 3/5 \ ; \\ y'(0) = 5c_2 - c_3 - 3/5 = 1 \ ; \\ y''(x) = 25c_2 \cdot e^{5x} + c_3 \cdot e^{-x} \\ y''(0) = 25c_2 + c_3 = 0 \ ; \end{cases}$$

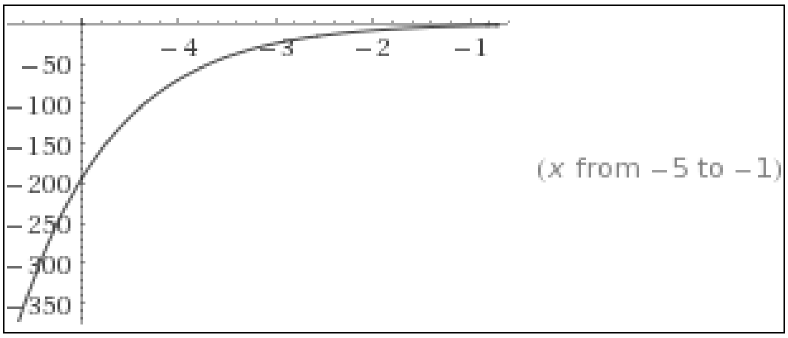
Con ello se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ 5c_2 - c_3 &= 8/5 \\ 25c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad c_3 = -4/3 \ ; \quad c_2 = 4/75 \ ; \quad c_1 = 32/25 \ ;$$

$$\boxed{y(x) = \frac{32}{25} + \frac{4 \cdot e^{5x}}{75} - \frac{4 \cdot e^{-x}}{3} - \frac{3x}{5}}$$

, que constituye la I.P. buscada. La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 15

Resolver la EDO: y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3.

Solución:

Se empieza por resolver la ecuación homogénea correspondiente:

y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0, para lo cual se forma la ecuación característica o modular siguiente:

$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$, que admite las raíces reales: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

La solución de la homogénea es, pues: $y^* = e^x(C_1 + C_2x) + C_3e^{2x}$.

Para investigar una solución particular de la ecuación completa, como el segundo miembro es un polinomio de primer grado y la ecuación característica no admite $\lambda = 0$ como raíz, se ensaya un polinomio genérico precisamente de grado uno, esto es: $y_p = ax + b$; de aquí: $y'_p = a$; $y''_p = y'''_p = 0$.

Substituyendo ahora en la ecuación inicial, se obtiene que:

$0 - 4\cdot 0 + 5a - 2(ax + b) = 2x + 3$. Identificando los coeficientes de los términos de igual grado, resulta que: $- 2a = 2$; $5a - 2b = 3$, de donde $a = - 1$ y $b = - 4$. Luego $y_p = - x - 4$. La solución general será, pues:

$$\boxed{y = y^* + y_p = e^x(C_1 + C_2x) + C_3e^{2x} - x - 4}.$$

Ejemplo 16

Encontrar la integral general de la ecuación diferencial ordinaria:

$$y^{IV} – 5y''' + 6y'' = 6x^2 – 4x + 3.$$

Solución:

La ecuación característica es: $\lambda^4 – 5\lambda^3 + 6\lambda^2 = 0$, que admite las raíces reales: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 3$; $\lambda_4 = 2$.

Luego la integral de la ecuación homogénea es:

$$y^* = e^{0\cdot x}(C_1 + C_2x) + C_3e^{3x} + C_4e^{2x} = C_1 + C_2x + C_3e^{3x} + C_4e^{2x}.$$

Para investigar una solución particular de la ecuación completa, se ensayaría en principio un polinomio genérico de segundo grado: $y_p = ax^2 + bx + c$, pero como la raíz $\lambda = 0$ es doble, hay que multiplicarlo por x^2, o sea, se ensayará uno del tipo: $y_p = ax^4 + bx^3 + cx^2$, de donde:

$$y'_p = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx\,; \qquad y''_p = 12ax^2 + 6bx + 2c\,;$$
$$y'''_p = 24ax + 6b\,; \qquad y_p^{iv} = 24a\,.$$

Substituyendo en la ecuación completa, se tendrá que:

$$24a – 5(24ax + 6b) + 6(12ax^2 + 6bx + 2c) = 6x^2 – 4x + 3.$$

Identificando términos del mismo grado se obtiene que:

$$72a = 6; \qquad - 120a + 36b = - 4; \qquad 24a – 30b + 12c = 3.$$

Resuelto el sistema, ofrece los valores: $a = \frac{1}{12}$, $\quad b = \frac{1}{6}$, $\quad c = \frac{1}{2}$, o sea: $y_p = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$, y la solución general pedida es:

$$\boxed{y = y^* + y_p = C_1 + C_2x + C_3e^{3x} + C_4e^{2x} + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2}.$$

Ejemplo 17

Resolver la EDO: $y^V + y''' = x^2 – 1$.

Solución:

La ecuación característica correspondiente de la homogénea, es:

$$\lambda^5 + \lambda^3 = 0\,; \qquad \lambda^3(\lambda^2 + 1) = 0\,; \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\,; \qquad \lambda^2 + 1 = 0\,;$$

$\lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm\, i$; entonces, la solución de la homogénea es:

$y^* = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot \cos x + C_5 \cdot \text{sen } x.$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la ecuación completa del tipo (teniendo en cuenta que faltan los términos en y″, y′ e y, por lo que subiremos tres unidades en el grado del polinomio genérico):

$$\begin{cases} y_p = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \\ y'_p = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e \\ y''_p = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d \\ y'''_p = 60ax^2 + 24bx + 6c \\ y_p^{IV} = 120ax + 24b \\ y_p^{V} = 120a \end{cases}$$

Substituyendo en la ecuación inicial, se tendrá que:

$120a + 60ax^2 + 24bx + 6c = x^2 - 1;\quad a = \frac{1}{60};\quad b = 0;\ \ 120a + 6c = -1;$

$2 + 6c = -1;\quad c = -\frac{1}{2};\quad d = e = f = 0.$ Entonces: $y_p = \frac{x^5}{60} - \frac{x^3}{2}$; y se tendrá la integral general buscada:

$$\boxed{y(x) = y^* + y_p = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot \cos x + C_5 \cdot \text{sen}\, x + \frac{x^5}{60} - \frac{x^3}{2}}.$$

3.3.2. b(x) es una función exponencial de la forma $k \cdot e^{ax}$

Entonces se ensaya una solución particular de la forma: $y_p = h \cdot e^{ax}$, en donde h se determina identificando coeficientes; pero si **a** es raíz de la ecuación característica, de orden o grado de multiplicidad **m**, la solución que se debe investigar es del tipo siguiente: $y_p = h \cdot x^m \cdot e^{ax}$.

Veámoslo mediante algunos ejemplos representativos:

Ejemplo 1

Sea resolver la EDO: $y'' - 5y' + 6y = 2 \cdot e^{4x}$.

Solución:

La ecuación característica: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ proporciona las raíces: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$; como 4 no es raíz de dicha ecuación se ensaya directamente:

$$y_p = h \cdot e^{4x};\ \ y'_p = 4 \cdot h \cdot e^{4x};\ \ y''_p = 16 \cdot h \cdot e^{4x}$$

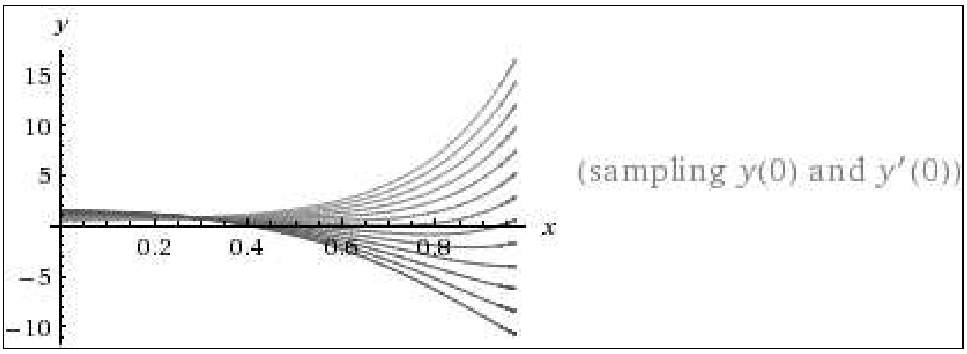
Luego substituyendo en la ecuación diferencial inicial, se tiene que:

$$16he^{4x} - 20he^{4x} + 6he^{4x} = 2e^{4x}$$

de donde se deduce que: $2h \cdot e^{4x} = 2e^{4x}$; $h = 1$, y la solución particular será: $y_p = e^{4x}$. La integral general será, en definitiva:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{2x} + e^{4x}} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 2

Sea ahora resolver: $y^{III} - 4y^{II} + 4y^{I} = 3 \cdot e^{2x}$.

Solución:

La ecuación característica de la homogénea vendrá dada por:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0, \text{ o lo que es lo mismo: } \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \text{ ;}$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \text{ y, obviamente, también } \lambda_3 = 0$$

y como 2, es raíz doble de dicha ecuación característica, ensayaremos:

$$\begin{cases} y_p = hx^2e^{2x} \\ y'_p = 2hxe^{2x} + 2hx^2e^{2x} \\ y''_p = 2he^{2x} + 8hxe^{2x} + 4hx^2e^{2x} \\ y'''_p = 12he^{2x} + 24hxe^{2x} + 8hx^2e^{2x} \end{cases}$$

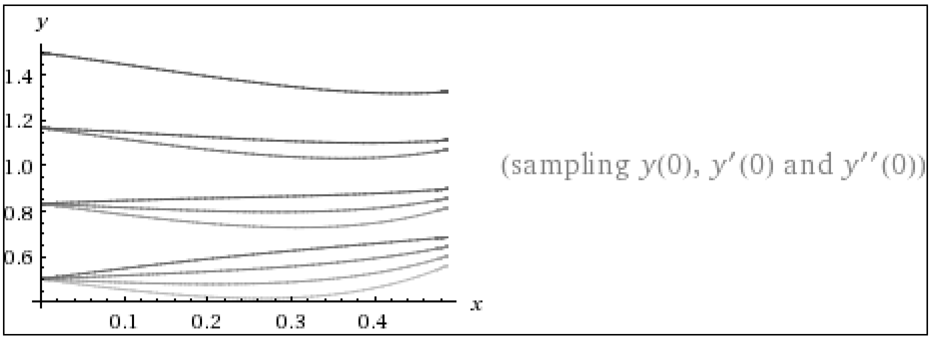
de donde substituyendo en la ecuación diferencial inicial, se tiene que:

$$e^{2x}(12h + 24hx + 8hx^2 - 8h - 32hx - 16hx^2 + 8hx + 8hx^2) = 3e^{2x}$$

o bien: $4h = 3$, de donde: $h = ¾$. Luego la integral general será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} + c_3 + \frac{3}{4} e^{2x} \cdot x^2} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 3

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $e^{2x}\frac{d^2y}{dx^2} = 4(e^{4x}+1)$.

Solución:

Integrando directamente, obtendremos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4 \cdot e^{-2x}(e^{4x}+1) = 4 \cdot e^{2x} + 4 \cdot e^{-2x} = 4(e^{2x}+e^{-2x});$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\int(e^{2x}+e^{-2x})dx = 4\int e^{2x} \cdot dx + 4\int e^{-2x}dx =$$
$$= 2 \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^{-2x} + c_1 = 2(e^{2x}-e^{-2x}) + c_1$$

$$\boxed{y} = \int\left[2(e^{2x}-e^{-2x})+c_1\right]dx = 2\int e^{2x} \cdot dx - 2\int e^{-2x} + c_1x + c_2 =$$
$$= \boxed{e^{2x}+e^{-2x}+c_1x+c_2} \rightarrow \text{I.G.}$$

A la misma conclusión llegaríamos considerando la ecuación característica de la homogénea: $\lambda^2 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; $y^* = c_1x + c_2$; y ensayando la solución particular como combinación lineal se obtiene que:

$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^{ax} + B \cdot e^{bx} \\ y'_p = A \cdot a \cdot e^{ax} + B \cdot b \cdot e^{bx} \\ y''_p = A \cdot a^2 \cdot e^{ax} + B \cdot b^2 \cdot e^{bx} \end{cases}$$

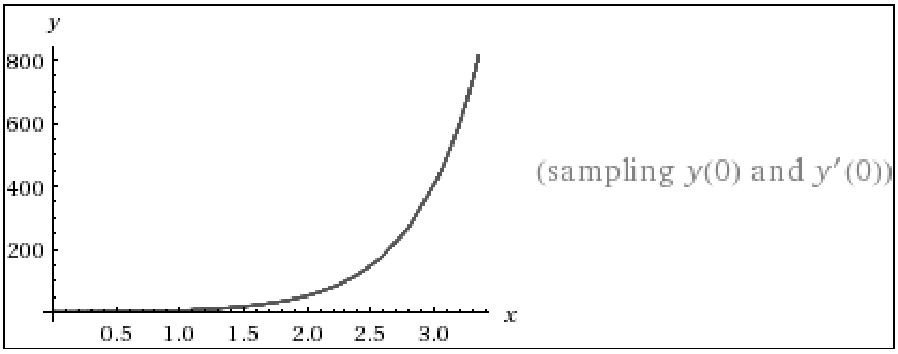
que substituyendo en la ecuación inicial, ofrece:

$A \cdot a^2 \cdot e^{ax} + B \cdot b^2 \cdot e^{bx} = 4 \cdot e^{2x} + 4 \cdot e^{-2x}$; de donde:
$a = 2$; $b = -2$; $A = 1$; $B = 1$; con lo que:

$y_p = e^{2x} + e^{-2x}$; y la integral general buscada será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = e^{2x}+e^{-2x}+c_1x+c_2} \text{, c.s.q.d.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 4

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 2 \cdot e^{-x}$.

Solución:

La ecuación característica de la homogénea es:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \ ; \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 + 2i \\ \lambda_2 = 1 - 2i \end{cases}$$

$$\lambda = \alpha \pm \beta i \ ; \ \text{con: } \alpha = 1 \ ; \quad \beta = 2 \ ;$$

entonces se tendrá la solución de la homogénea:

$$y^* = e^{\alpha x}(A \cdot \cos\ \beta x + B \cdot \text{sen}\ \beta x) = e^{x}(c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \text{sen}\, 2x) \ ;$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^{-x} \\ y'_p = -A \cdot e^{-x} \\ y''_p = A \cdot e^{-x} \end{cases}$$

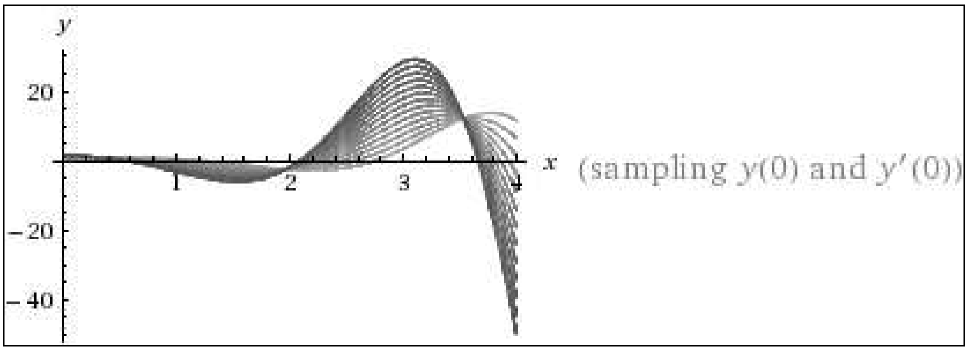
Substituyendo en la ecuación inicial se tendrá que:

$$A \cdot e^{-x} + 2A \cdot e^{-x} + 5A \cdot e^{-x} = 2 \cdot e^{-x} \ ; \text{ de donde:}$$

$8A = 2$; $A = ¼$, con lo que la integral general será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = e^{x}(c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \text{sen}\, 2x) + \frac{e^{-x}}{4}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 5

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{3x}$.

Solución:

La ecuación característica de la homogénea, será:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \ ; \quad \lambda_1 = 2i \ ; \quad \lambda_2 = -2i$$

$$\lambda = \alpha \pm \beta i \ ; \ \text{con los coeficientes: } \alpha = 0 \ ; \quad \beta = 2 \ ;$$

y la solución de la ecuación homogénea será:

$$y^* = e^{\alpha x}(A \cdot \cos\ \beta x + B \cdot \text{sen}\ \beta x) = c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \text{sen}\, 2x \ ;$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea:

$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^{3x} \\ y'_p = 3A \cdot e^{3x} \\ y''_p = 9A \cdot e^{3x} \end{cases}$$

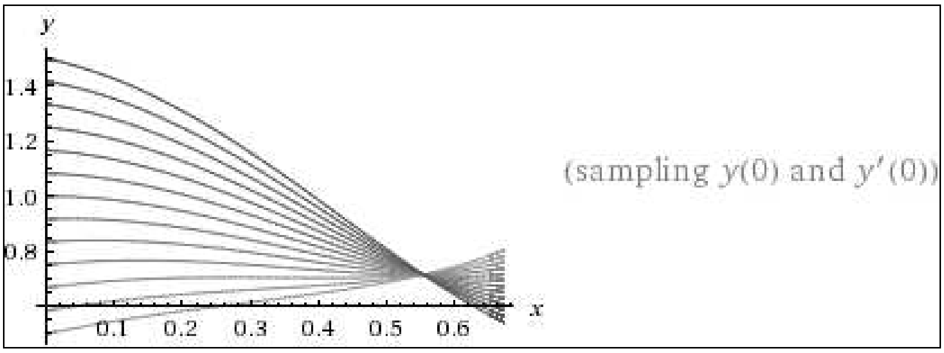
y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$9A \cdot e^{3x} + 4A \cdot e^{3x} = e^{3x} = 13 \cdot A \cdot e^{3x} \ ;$$

$$A = \frac{1}{13} \text{; con lo que: } y_p = \frac{e^{3x}}{13} \text{, y la integral general será:}$$

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \text{sen}\, 2x + \frac{e^{3x}}{13}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será la siguiente:



Ejemplo 6

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y''' + y'' - 2y' = -e^x$.

Solución:

La ecuación característica de la homogénea es:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0 \ ; \quad \lambda_1 = 0 \ ;$$

$$\lambda \cdot (\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \ ; \quad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$$

con lo que la solución de la homogénea, será: $y^* = c_1 + c_2 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-2x}$.

Como $\lambda_2 = 1$ es raíz de la ecuación característica, de grado de multiplicidad 1, la solución particular que se debe investigar es del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A \cdot x \cdot e^x \\ y'_p = A \cdot e^x + A \cdot x \cdot e^x = A \cdot e^x(1+x) \\ y''_p = A \cdot e^x(1+x) + A \cdot e^x = A \cdot e^x(2+x) \\ y'''_p = A \cdot e^x(2+x) + A \cdot e^x = A \cdot e^x(3+x) \end{cases}$$

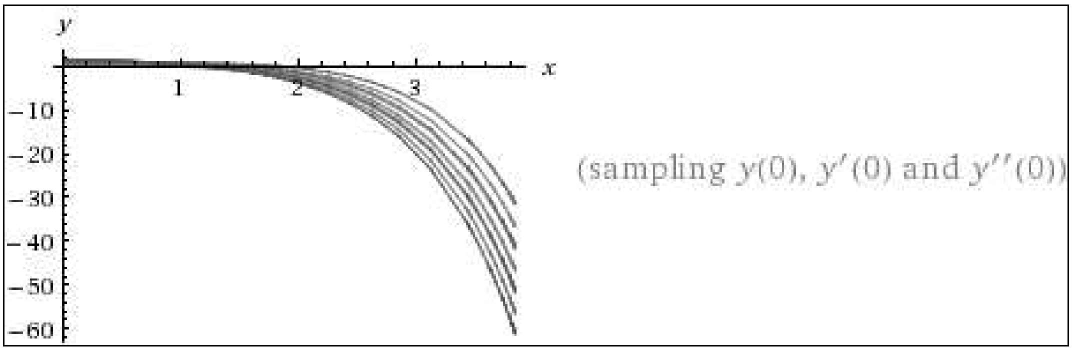
Substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$3 \cdot A \cdot e^x + x \cdot A \cdot e^x + 2 \cdot A \cdot e^x + x \cdot A \cdot e^x - 2 \cdot A \cdot e^x - 2 \cdot A \cdot x \cdot e^x = -e^x \ ;$$

$\boxed{A = -\frac{1}{3}}$, por lo que la integral general buscada será:

$$y = y^* + y_p = \boxed{c_1 + c_2 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{3} x \cdot e^x} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 7

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' - 3y = e^{2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solución:

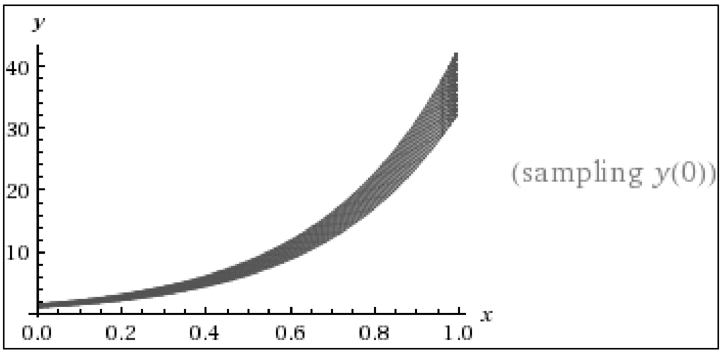
En este caso, se trata de una EDO de primer orden aunque la resolveremos por el mismo procedimiento que el aquí empleado para las EDO de orden superior. La ecuación característica de la homogénea, será: $\lambda - 3 = 0$; $\lambda = 3$; con lo que: $y^* = c \cdot e^{3x}$; ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea o completa, del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^{2x} \\ y'_p = 2A \cdot e^{2x} \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

$$2A \cdot e^{2x} - 3A \cdot e^{2x} = -A \cdot e^{2x} = e^{2x} \text{ ; } A = -1; \;\; y(x) = y^* + y_p = c \cdot e^{3x} - e^{2x} \text{ ;}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Por otra parte, la condición particular exige que: $y(0) = c - 1 = 1$; $c = 2$; luego nos quedará:

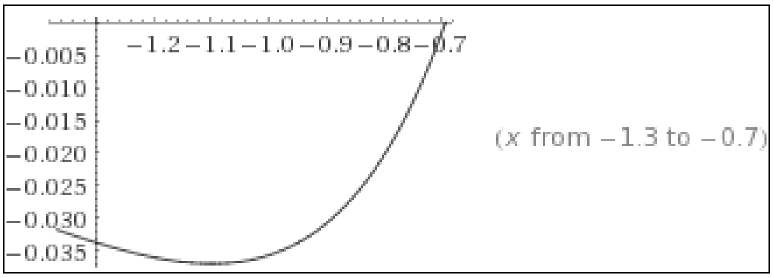
$$\boxed{y(x) = 2 \cdot e^{3x} - e^{2x}}$$

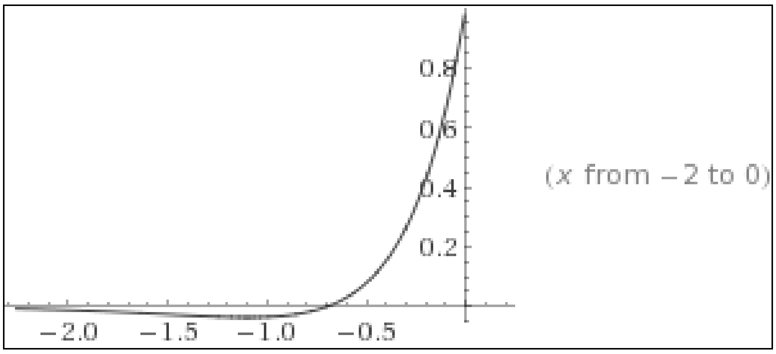
De hecho se podría resolver de otra manera, puesto que se trata de una ecuación lineal de primer orden, con: $X = -3$; $X_1 = -e^{2x}$; y entonces:

$$\int X\cdot dx = -3x\,;\quad \int X_1\cdot e^{\int X\cdot dx}\cdot dx = -\int e^{2x}\cdot e^{-3x}\cdot dx = -\int e^{-x}\cdot dx = e^{-x}\,,$$

y aplicando la fórmula correspondiente: $y(x) = e^{3x}(c - e^{-x}) = c\cdot e^{3x} - e^{2x}$, a la cual habrá que aplicar las condiciones iniciales dadas, obteniéndose para la constante el valor c = 2, c.s.q.d.

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 8

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-x} \\ y(0) = 0\ ;\quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea, será:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0\ ;\quad \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases},\ \text{(raíz doble)}$$

con lo que: $y^* = c_1\cdot e^{-x} + c_2\cdot x\cdot e^{-x}$. Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea o completa, del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A\cdot x^2\cdot e^{-x} \text{ (puesto que -1 es raíz doble de la ecuación característica)} \\ y'_p = 2A\cdot x\cdot e^{-x} - Ax^2\cdot e^{-x} = A\cdot e^{-x}(2x - x^2) \\ y''_p = -A\cdot e^{-x}(2x - x^2) + A\cdot e^{-x}(2 - 2x) = A\cdot e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \end{cases}$$

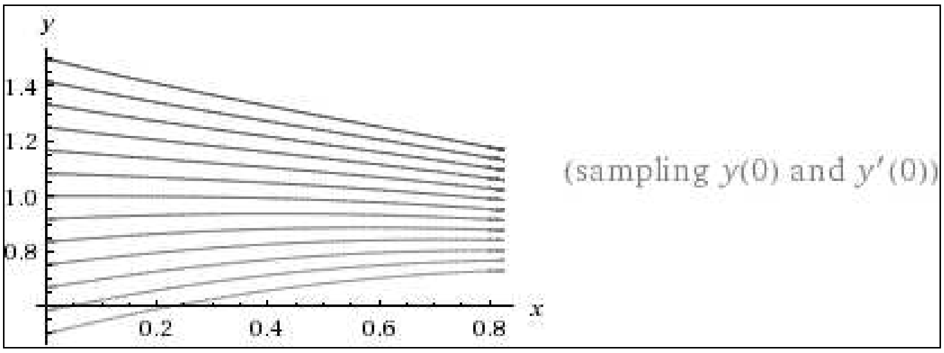
y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

$$A\cdot e^{-x}\cdot x^2 - 4A\cdot e^{-x}\cdot x + 2A\cdot e^{-x} + 2A\cdot e^{-x}\cdot x - A\cdot e^{-x}\cdot x^2 + A\cdot e^{-x}\cdot x^2 = e^{-x}$$

$A\cdot x^2\cdot e^{-x} - 2A\cdot x\cdot e^{-x} + 2A\cdot e^{-x} = e^{-x}$; $2A = 1$; $A = ½$; y la I.G. será:

$$y(x) = y^* + y_p = c_1\cdot e^{-x} + c_2\cdot x\cdot e^{-x} + ½ \cdot x^2\cdot e^{-x}.$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



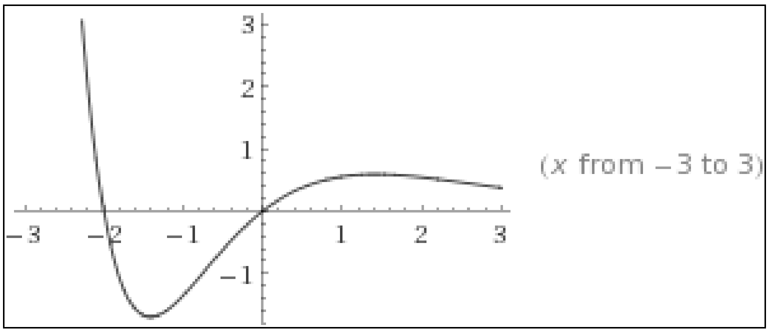
Las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

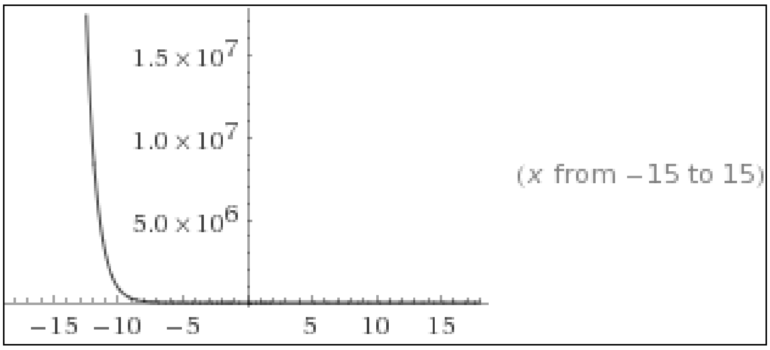
$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \text{ ;} \\ y'(x) = -c_1\cdot e^{-x} + c_2\cdot e^{-x} - c_2\cdot x\cdot e^{-x} + x\cdot e^{-x} - (x^2/2)\cdot e^{-x} \text{ ;} \\ y'(0) = -c_1 + c_2 = 1 \text{ ; } c_2 = 1 + c_1 = 1 \text{ ; luego se tendrá la integral} \end{cases}$$

particular buscada:

$$\boxed{y(x) = x\cdot e^{-x} + \frac{x^2}{2}e^{-x} = e^{-x}(x + \frac{x^2}{2})}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 9

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' - y = e^{2x} \\ y(0) = 0 \; ; \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea, será:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \; ; \quad \lambda_1 = 1 \; ; \quad \lambda_2 = -1 \; ; \quad y^* = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} \; ;$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea, del tipo:

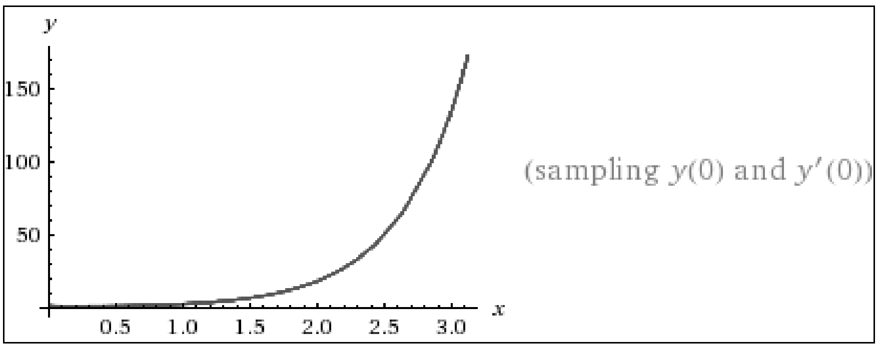
$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^{2x} \\ y'_p = 2A \cdot e^{2x} \\ y''_p = 4A \cdot e^{2x} \end{cases}$$

que, substituyendo en la ecuación anterior, ofrece:

$$4A \cdot e^{2x} - A \cdot e^{2x} = 3A \cdot e^{2x} = e^{2x} \; ; \quad A = 1/3 \text{ ; y la I.G. será:}$$

$$y(x) = y^* + y_p = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + e^{2x}/3.$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



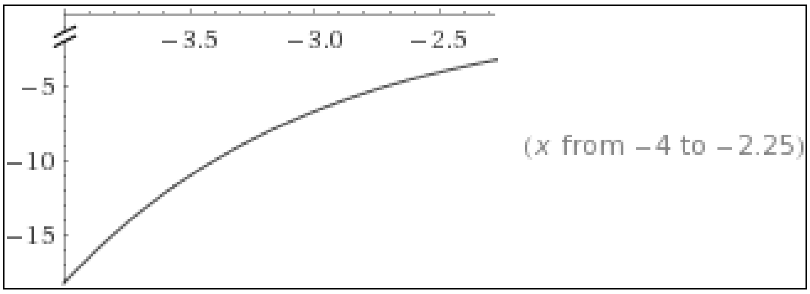
Las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

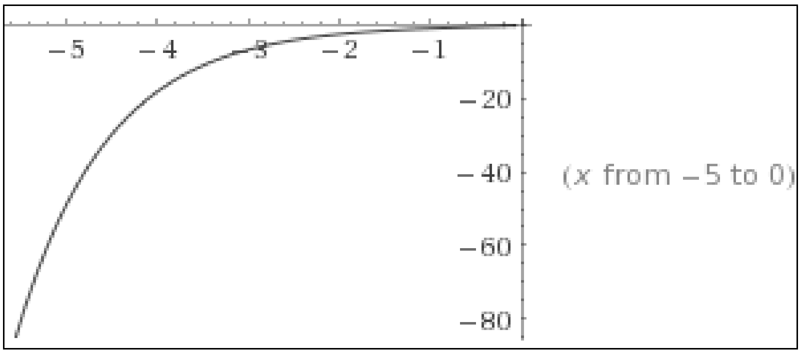
$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + 1/3 = 0 \;; \\ y'(x) = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot e^{2x}/3 \;; \\ y'(0) = c_1 - c_2 + 2/3 = 1 \;; \quad c_1 = 0 \;; \quad c_2 = -1/3 \;; \end{cases}$$

y la expresión de la integral particular buscada, será:

$$\boxed{y(x) = \frac{e^{2x}}{3} - \frac{e^{-x}}{3} = \frac{e^{2x} - e^{-x}}{3}}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 10

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-3x} \\ y(0) = 1 \;; \quad y'(0) = 0 \;; \end{cases}$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea o incompleta, será la siguiente:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \;; \quad \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \text{(raíz doble)}$$

$$y^* = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-x} \;;$$

Ensayaremos ahora una solución particular del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A\cdot e^{-3x} \\ y'_p = -3A\cdot e^{-3x} \\ y''_p = 9A\cdot e^{-3x} \end{cases}$$

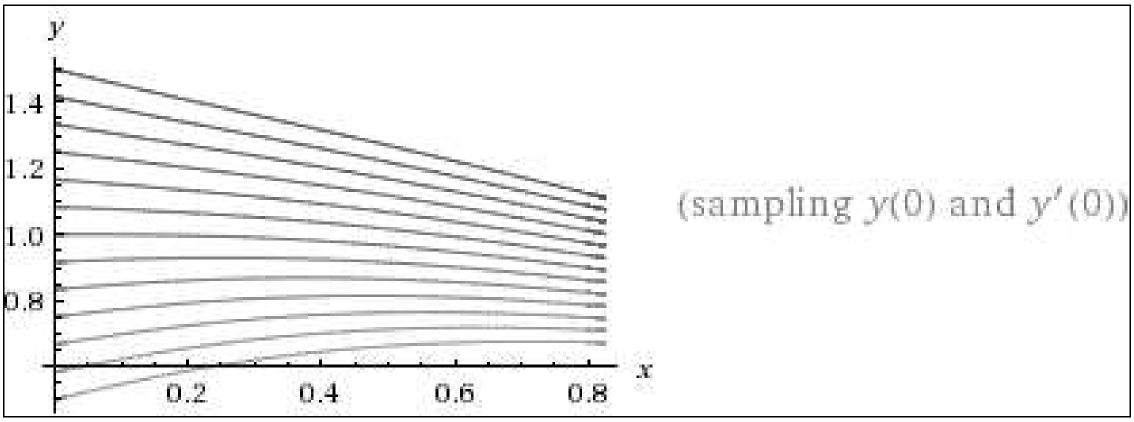
y substituyendo en la ecuación inicialmente planteada, se tiene que:

$$9A\cdot e^{-3x} - 6A\cdot e^{-3x} + A\cdot e^{-3x} = 4A\cdot e^{-3x} = e^{-3x} \ ;$$

de donde se deduce que: A = 1/4 ; y se tendrá la expresión de la integral general:

$$y(x) = y^* + y_p = c_1\cdot e^{-x} + c_2\cdot x\cdot e^{-x} + \frac{e^{-3x}}{4} \ .$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



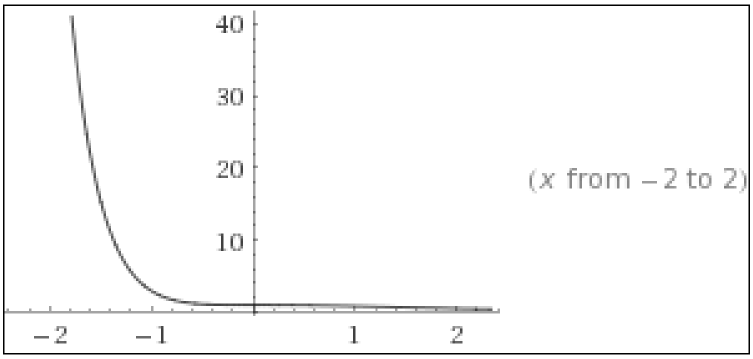
Las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

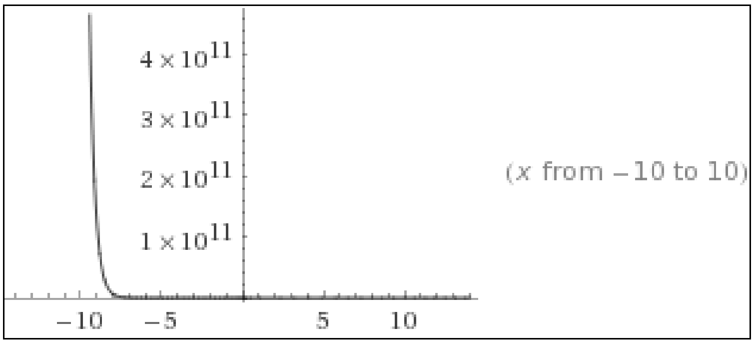
$$\begin{cases} y(0) = c_1 + 1/4 = 1 \ ; \quad c_1 = 3/4 \ ; \\ y'(x) = -c_1\cdot e^{-x} + c_2\cdot e^{-x} - c_2\cdot x\cdot e^{-x} + \dfrac{3\cdot e^{-3x}}{4} \ ; \\ y'(0) = -c_1 + c_2 - 3/4 = 0 \ ; \quad c_2 = 3/2 \ ; \end{cases}$$

y la expresión buscada de la I.P. será:

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{4}e^{-x} + \frac{3}{2}x\cdot e^{-x} + \frac{e^{-3x}}{4} = \frac{e^{-3x} + 3e^{-x} + 6x\cdot e^{-x}}{4}}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 11

Resolver la EDO: $2y'' + y' - y = 2e^x$.

Solución:

La ecuación característica correspondiente admite por raíces las siguientes: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -1$. Luego la solución de la ecuación homogénea es: $y^* = C_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 \cdot e^{-x}$. Como 1 no es raíz de la ecuación característica, se ensaya la solución particular: $y_p = h \cdot e^x$, de donde: $y'_p = h \cdot e^x$, $y''_p = h \cdot e^x$, y substituyendo en la ecuación inicial se obtiene que: $2h \cdot e^x + h \cdot e^x - h \cdot e^x = 2e^x$, de donde: $2h = 2$; $h = 1$.

Luego la solución particular es: $y_p = e^x$ y la integral general buscada es:

$$\boxed{y = y^* + y_p = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x} + e^x}.$$

Ejemplo 12

Hallar la integral general de la EDO: $2y'' + y' - y = 3e^{-x}$.

Solución:

Obsérvese que el primer miembro es el mismo del ejercicio anterior; como -1 en este caso es raíz simple de la ecuación característica, la solución particular a ensayar es del tipo: $y = h \cdot x \cdot e^{-x}$.

Derivando: $y'_p = h{\cdot}e^{-x} - h{\cdot}x{\cdot}e^{-x}$; $y''_p = -2h{\cdot}e^{-x} + h{\cdot}x{\cdot}e^{-x}$, y substituyendo:

- 4h + 2h·x + h – h·x – h·x = 3;   -3h = 3;   h =- 1.

Por tanto, $y_p = - x \cdot e^{-x}$ y la integral general buscada será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x} - x{\cdot}e^{-x}}.$$

3.3.3. b(x) es una función trigonométrica de la forma (a·cos bx + b·sen bx)

Entonces se ensaya una solución de la forma: y_p = h·cos bx + k·sen bx, pero si b_i es raíz de la ecuación característica de orden de multiplicidad **m**, se ensayará dicha solución multiplicada por x^m.

Veámoslo mediante la resolución de algunos ejemplos suficientemente representativos:

Ejemplo 1

Sea, como ejemplo, resolver la ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' - 2y' + 5y = 3 \text{ sen } x$$

Solución:

La ecuación característica, $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, proporciona las raíces imaginarias conjugadas:

$$\lambda_1 = 1 + 2i \ ; \quad \lambda_2 = 1 - 2i$$

o sea, la integral general de la homogénea será:

$$y^* = e^x \cdot (c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \text{sen } 2x)$$

Para determinar una solución particular de la no homogénea se ensaya:

$$\begin{cases} y_p = h \cdot \cos x + k \cdot \text{sen } x \\ y'_p = -h \cdot \text{sen } x + k \cdot \cos x \\ y''_p = -h \cdot \cos x - k \cdot \text{sen } x \end{cases}$$

substituyendo, ahora, en la ecuación diferencial inicial, se tiene:

$$-h \cdot \cos x - k \cdot \text{sen } x - 2(-h \cdot \text{sen } x + k \cdot \cos x) + 5h \cdot \cos x + 5k \cdot \text{sen } x = 3 \text{ sen } x \ ;$$

$$2h \cdot \text{sen } x - k \cdot \text{sen } x + 5k \cdot \text{sen } x - h \cdot \cos x - 2k \cdot \cos x + 5h \cdot \cos x = 3 \text{ sen } x$$

$$(2h - k + 5k) \cdot \text{sen } x + (5h - h - 2k) \cdot \cos x = 3 \text{ sen } x$$

$$\left.\begin{aligned} 2h + 4k &= 3 \\ 4h - 2k &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} 2h + 4k &= 3 \\ \underline{8h - 4k} &\underline{= 0} \end{aligned}$$

$$10\,h = 3 \;\rightarrow\; \boxed{h = \frac{3}{10}}$$

Así mismo: $2k = 4h$; o sea:

$$\boxed{k = 2h = \frac{3}{5}}$$

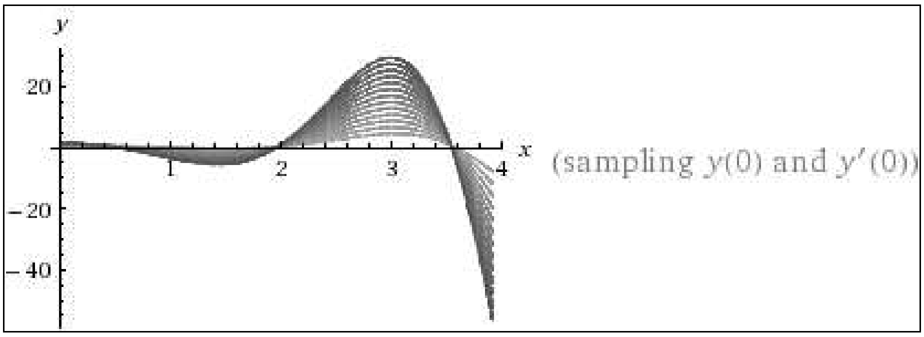
Identificando ahora los coeficientes de cos x y de sen x, se obtiene que:

$$y_p = \frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\operatorname{sen} x$$

y la integral general buscada será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = e^x \cdot (c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \operatorname{sen} 2x) + \frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\operatorname{sen} x} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 2

Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes: a) y'' + y = cos x, b) y'' + y = sen x, y c) y'' + y = sen 2x.

Solución:

a) Como la ecuación característica, $\lambda^2 + 1 = 0$, proporciona las raíces $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, con los coeficientes: $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, damos por resuelta la homogénea (y*) y la solución particular que se deberá ensayar es del tipo:

$$\left\{\begin{aligned} y_p &= hx\cdot\cos x + kx\cdot\operatorname{sen} x \\ y'_p &= h\cdot\cos x - hx\cdot\operatorname{sen} x + k\cdot\operatorname{sen} x + kx\cdot\cos x \\ y''_p &= -h\cdot\operatorname{sen} x - h\cdot\operatorname{sen} x - hx\cdot\cos x + k\cdot\cos x + k\cdot\cos x - kx\cdot\operatorname{sen} x = \\ &= -2h\cdot\operatorname{sen} x + 2k\cdot\cos x - hx\cdot\cos x - kx\cdot\operatorname{sen} x \end{aligned}\right.$$

Substituyendo, ahora, en la ecuación inicial, se obtiene:

$$2h\cdot \text{sen } x + 2k\cdot \cos x - hx\cdot \cos x - kx\cdot \text{sen } x + hx\cdot \cos x + kx\cdot \text{sen } x = \cos x$$

de donde:

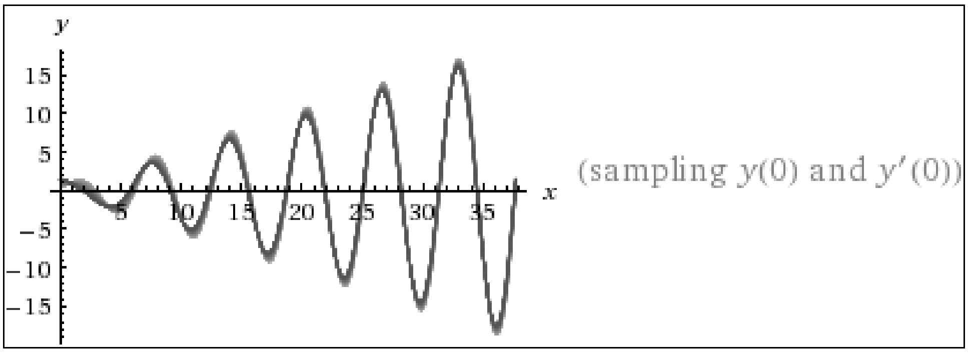
$$-2h\cdot \text{sen } x + 2k\cdot \cos x = \cos x \ ;$$

$$-2h = 0 \Rightarrow \mathbf{h = 0\ ;} \quad 2k = 1 \Rightarrow \mathbf{k = ½}\ ,$$

Luego la integral general buscada será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1\cdot \cos x + c_2\cdot \text{sen } x + \frac{x}{2}\cdot \text{sen } x} \rightarrow \text{I.G.}$$

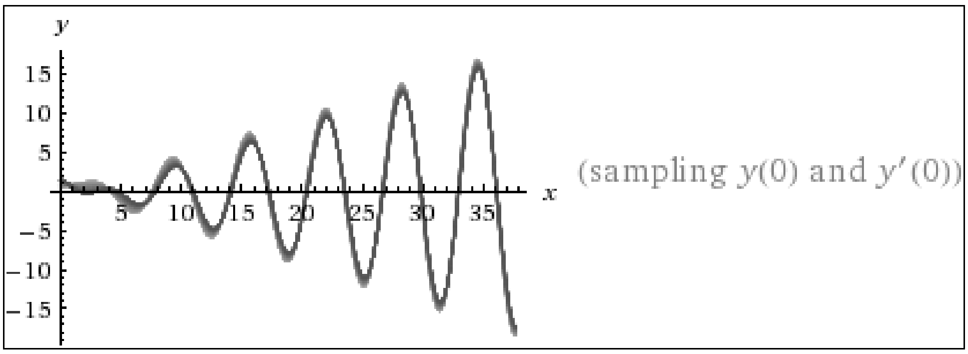
La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



b) Del mismo modo, si se tratara de resolver la ecuación diferencial: y'' + y = sen x, al ensayar la misma solución particular se obtiene:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1\cdot \cos x + c_2\cdot \text{sen } x - \frac{x}{2}\cdot \cos x} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:

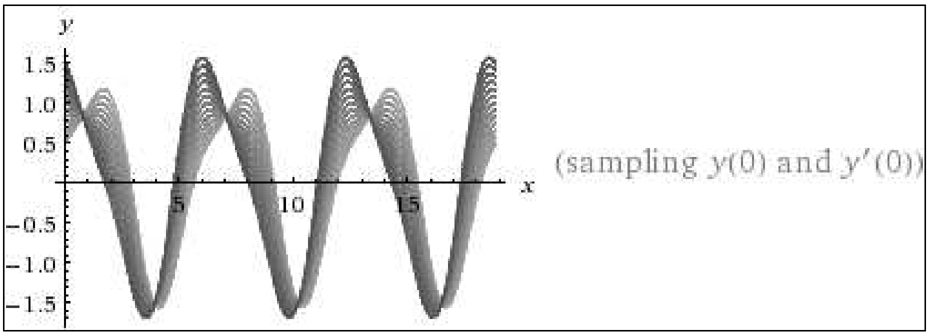


c) Y si, por último, se trata de resolver la ecuación diferencial ordinaria: y'' + y = sen 2x, se obtendría la I.G.:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \text{sen}\, x - \frac{1}{3} \cdot \text{sen}\, 2x},$$

siendo suficiente, en este caso, ensayar la solución particular: $y_p = k \cdot \text{sen}\, 2x$.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 3

Solve the ordinary differential equation: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = \cos x$.

Solution:

Here, the characteristic function is: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, and the roots are: $\lambda = -1, 3$, and the complementary (homogeneous) function is: $y^* = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{3x}$. The right hand member of the differential equation suggest that a particular integral is of the form:

$$y_p = A \cdot \cos bx + B \cdot \sin bx \ (b = 1).$$

Substitute: $y_p = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$, $y'_p = B \cdot \cos x - A \cdot \sin x$,

$y''_p = -A \cdot \cos x - B \cdot \sin x$, in the differential equation to obtain:

$$(-A \cdot \cos x - B \cdot \sin x) - 2(B \cdot \cos x - A \cdot \sin x) - 3(A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) = \cos x$$

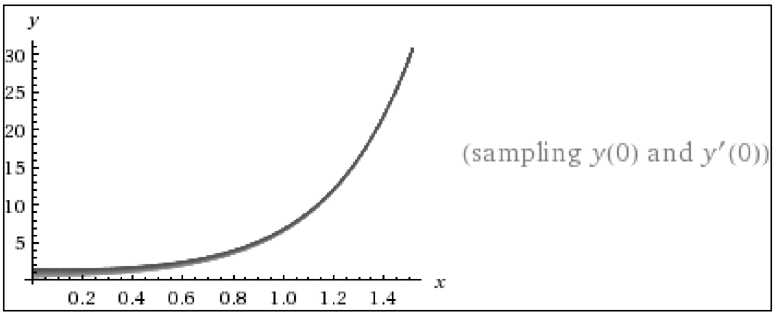
$$-2(2A + B)\cos x + 2(A - 2B)\sin x = \cos x$$

Then: $-2(2A + B) = 1$, $A - 2B = 0$, and $A = -\frac{1}{5}$; $B = -\frac{1}{10}$.

Thus, the general solution of the differential equation is:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}\sin x}$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 4

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} = -9 \cdot \text{sen}\, 3x$.

Solución:

Integrando sucesivamente, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = -9\int \text{sen}\, 3x \cdot dx = 3\cos 3x + c_1 \ ;$$

$$\boxed{y = 3\int \cos 3x \cdot dx + c_1 x + c_2 = \text{sen}\, 3x + c_1 x + c_2} \rightarrow \text{I.G.}$$

A la misma conclusión llegaríamos considerando la ecuación característica o modular de la homogénea: $\lambda^2 = 0$; de raíces: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; esto es: $y^* = c_1x + c_2$; y ensayando la solución particular:

$$\begin{cases} y_p = h \cdot \cos 3x + k \cdot \text{sen}\, 3x \\ y'_p = -3h \cdot \text{sen}\, 3x + 3k \cdot \cos 3x \\ y''_p = -9h \cdot \cos 3x - 9k \cdot \text{sen}\, 3x \end{cases}$$

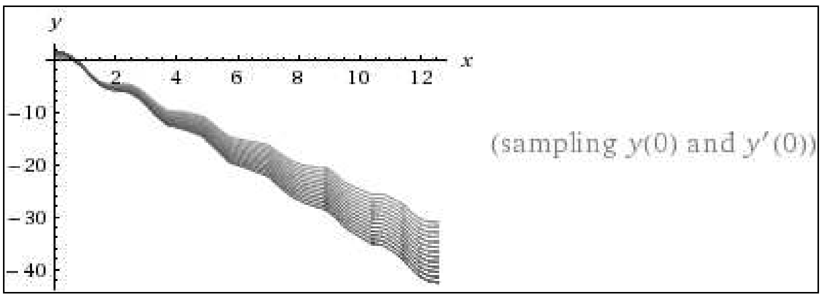
que substituyendo en la ecuación inicial, ofrece:

$-9h \cdot \cos 3x - 9k \cdot \text{sen}\, 3x = -9 \cdot \text{sen}\, 3x$; de donde se deduce que:

$\boxed{\begin{matrix} h = 0 \\ k = 1 \end{matrix}} \rightarrow y_p = \text{sen}\, 3x$; y la integral general buscada será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = \text{sen}\, 3x + c_1 x + c_2} \text{ , c.s.q.d.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 5

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \cos 2x - 2 \cdot \text{sen}\, 2x$.

Solución:

La ecuación característica de la homogénea, será:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \ ; \quad \lambda_1 = 1 \ ; \quad \lambda_2 = -1 \ ;$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea:

$$\begin{cases} y_p = h \cdot \cos 2x + k \cdot \text{sen}\, 2x \\ y'_p = -2h \cdot \text{sen}\, 2x + 2k \cdot \cos 2x \\ y''_p = -4h \cdot \cos 2x - 4k \cdot \text{sen}\, 2x \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$- 4h \cdot \cos 2x - 4k \cdot \text{sen}\, 2x - h \cdot \cos 2x - k \cdot \text{sen}\, 2x = \cos 2x - 2 \cdot \text{sen}\, 2x \ ;$$

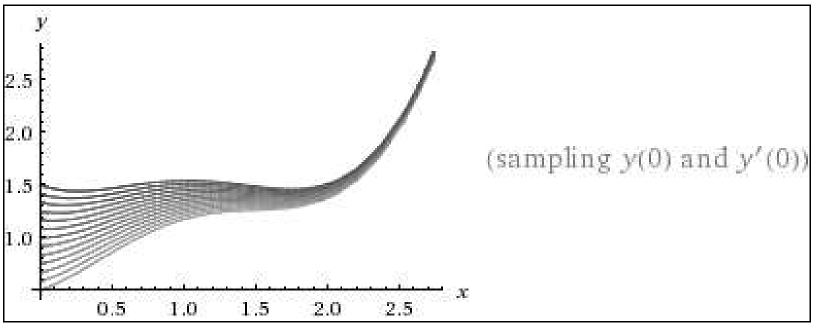
$$-5h \cdot \cos 2x - 5k \cdot \text{sen}\, 2x = \cos 2x - 2 \cdot \text{sen}\, 2x, \text{ por lo que:}$$

$$h = -\frac{1}{5}; \ \ k = \frac{2}{5}; \text{ con lo que:}$$

$$y_p = -\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\text{sen}\, 2x \ ; \text{ y la integral general será:}$$

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\text{sen}\, 2x}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 6

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y'' - 2y' + 5y = 3 \cdot \text{sen}\, x$.

Solución:

Como ya se ha visto en un ejercicio anterior, la solución de la ecuación homogénea viene dada por: $y^* = e^x(c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \text{sen}\, 2x)$.

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea o completa del tipo:

$$\begin{cases} y_p = h\cdot\cos x + k\cdot\text{sen } x \\ y'_p = -h\cdot\text{sen } x + k\cdot\cos x \\ y''_p = -h\cdot\cos x - k\cdot\text{sen } x \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$-h\cdot\cos x - k\cdot\text{sen } x + 2h\cdot\text{sen } x - 2k\cdot\cos x + 5h\cdot\cos x + 5k\cdot\text{sen } x = 3 \text{ sen } x \;;$$

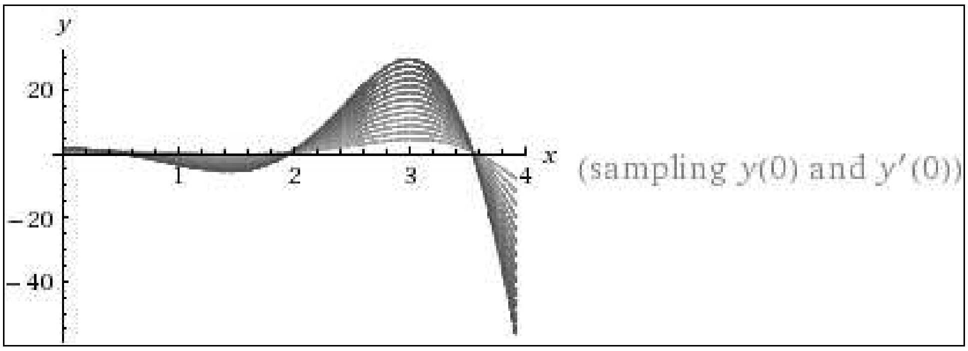
$$4h\cdot\cos x - 2k\cdot\cos x + 2h\cdot\text{sen } x + 4k\cdot\text{sen } x = 3 \text{ sen } x;$$

$$\left.\begin{array}{l} 4h - 2k = 0 \\ 2h = k \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 2h + 4k = 3 \;; \\ 5k = 3 \;; \end{array}$$

de donde: $\boxed{k = \frac{3}{5}}$, $\boxed{h = \frac{3}{10}}$, con lo que la integral general buscada será:

$$y = y^* + y_p = \boxed{e^x(c_1\cdot\cos\ 2x + c_2\cdot\text{sen}\ 2x) + \frac{3}{10}\cos\ x + \frac{3}{5}\text{sen}\ x} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 7

Resolver la ecuación diferencial y el problema de valor inicial:

$y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10\cdot\cos x$, con:

$$\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0 \\ y''(0) = 3 \end{cases}$$

Solución:

Vamos a resolver, en primer lugar, la ecuación homogénea, cuya ecuación característica es:

$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$; $\lambda_1 = -1$; y operando por aplicación de la regla de Ruffini, resulta:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 5 & 2 \\ -1) & & -1 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \rightarrow (\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0 \ ; \ \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$$

o sea, se tendrá que: $y^* = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot x \cdot e^{-x}$.

Ensayaremos, para resolver la I.P. de la no homogénea, una solución del tipo:

$$\begin{cases} y_p = h \cdot \cos x + k \cdot \text{sen } x \\ y'_p = -h \cdot \text{sen } x + k \cdot \cos x \\ y''_p = -h \cdot \cos x - k \cdot \text{sen } x \\ y'''_p = h \cdot \text{sen } x - k \cdot \cos x \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$h \cdot \text{sen } x - k \cdot \cos x - 4h \cdot \cos x - 4k \cdot \text{sen } x - 5h \cdot \text{sen } x + 5k \cdot \cos x + \\ + 2h \cdot \cos x + 2k \cdot \text{sen } x = 10 \cdot \cos x \ ;$$

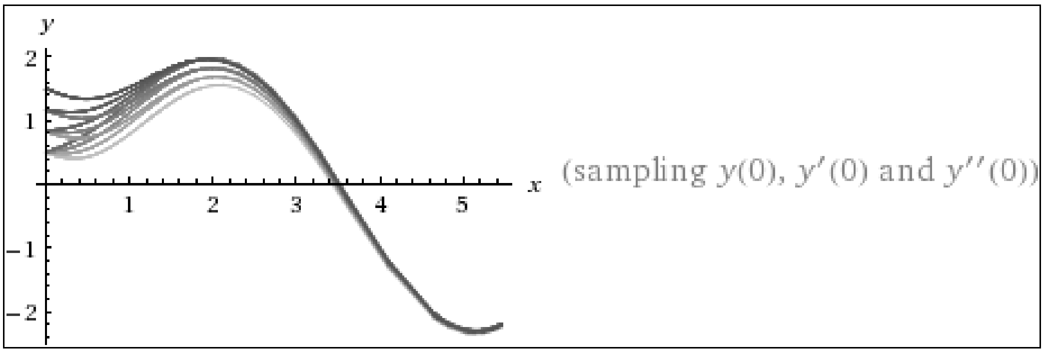
$$-4h \cdot \text{sen } x + 4k \cdot \cos x - 2h \cdot \cos x - 2k \cdot \text{sen } x = 10 \cdot \cos x \ ;$$

$$\left. \begin{array}{l} 4k - 2h = 10 \\ -4h - 2k = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} -4h = 2k; \quad k = -2h; \\ 5k = 10; \quad \boxed{k = 2}; \quad \boxed{h = -1} \end{array}$$

con lo que la integral general buscada será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot x \cdot e^{-x} - \cos x + 2 \cdot \text{sen } x}.$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Por otra parte, de las condiciones iniciales dadas se desprende que:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 - 1 = 0 \\ y'(x) = -2c_1 \cdot e^{-2x} - c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot e^{-x} - c_3 \cdot x \cdot e^{-x} + \text{sen } x + 2\cos x \\ y'(0) = -2c_1 - c_2 + c_3 + 2 = 0 \\ y''(x) = 4c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-x} - c_3 \cdot e^{-x} - c_3 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot x \cdot e^{-x} + \cos x - 2\text{sen } x \\ y''(0) = 4c_1 + c_2 - c_3 - c_3 + 1 = 4c_1 + c_2 - 2c_3 + 1 = 3 \end{cases}$$

con lo que se tiene el sistema de ecuaciones no homogéneo, compatible y determinado, siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 - c_2 + c_3 = -2 \\ 4c_1 + c_2 - 2c_3 = 2 \end{array}\right\}$$

, sistema heterogéneo que resolveremos por aplicación de la regla de Cramer, así:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{1} = -1$$

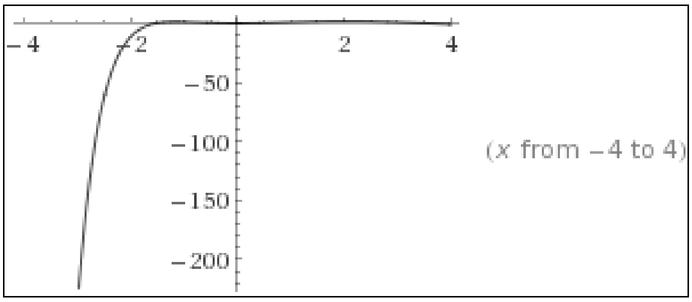
$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2$$

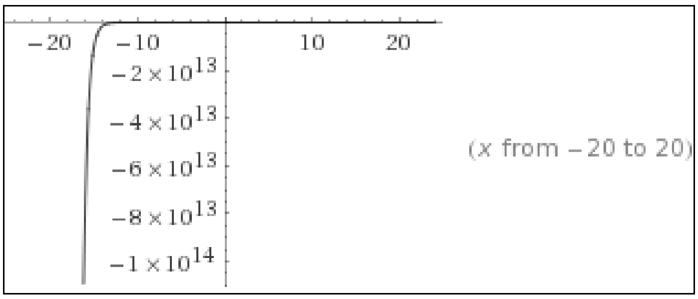
$$c_3 = -2 + 2c_1 + c_2 = -2 - 2 + 2 = -2 \,,$$

y se tendrá, en definitiva, la I.P.:

$$\boxed{y = -e^{-2x} + 2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - \cos x + 2 \cdot \text{sen } x}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 8

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 16y = \cos 4x \\ y(0) = 0 \ ; \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea, será:

$\lambda^2 + 16 = 0$; $\lambda = \pm\sqrt{-16} = \begin{cases} \lambda_1 = 4i \\ \lambda_2 = -4i \end{cases}$, con los coeficientes: $\alpha = 0$ y $\beta = 4$,

y la solución de la homogénea será: $y^* = A\cdot\cos 4x + B\cdot\text{sen } 4x$.

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea o completa, para evitar problemas de resonancia, del tipo:

$$\begin{cases} y_p = h\cdot x\cdot\cos 4x + k\cdot x\cdot\text{sen } 4x \\ y'_p = h\cdot\cos 4x - 4h\cdot x\cdot\text{sen } 4x + k\cdot\text{sen } 4x + 4kx\cdot\cos 4x \\ y''_p = -4h\cdot\text{sen } 4x - 16hx\cdot\cos 4x - 4h\cdot\text{sen } 4x + 4k\cdot\cos 4x + 4k\cdot\cos 4x - \\ 16kx\cdot\text{sen } 4x = -8h\cdot\text{sen } 4x + 8k\cdot\cos 4x - 16hx\cdot\cos 4x - 16kx\cdot\text{sen } 4x \ ; \end{cases}$$

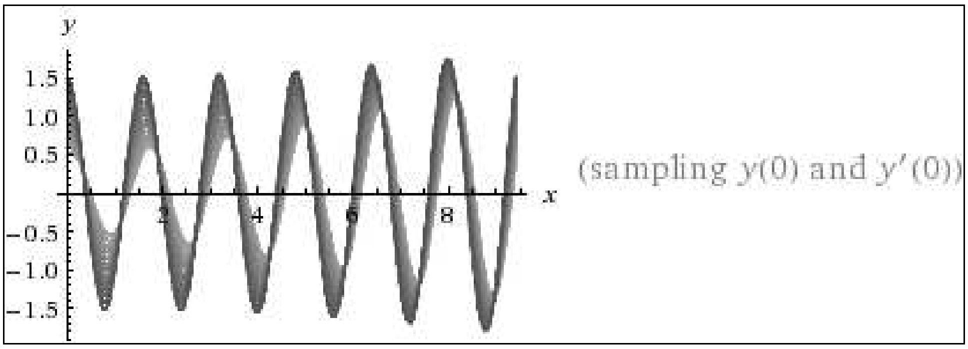
que, substituyendo en la ecuación inicial, ofrece:

$$-8h\cdot\text{sen } 4x + 8k\cdot\cos 4x - 16hx\cdot\cos 4x - 16\,kx\cdot\text{sen } 4x + 16hx\cdot\cos 4x +$$
$$+ 16\,kx\cdot\text{sen } 4x = \cos 4x \ ; \quad h = 0 \ ; \quad k = 1/8 \ ;$$

con lo que resultará la I.G.:

$$y(x) = y^* + y_p = A\cdot\cos 4x + B\cdot\text{sen } 4x + (x/8)\cdot\text{sen } 4x.$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:

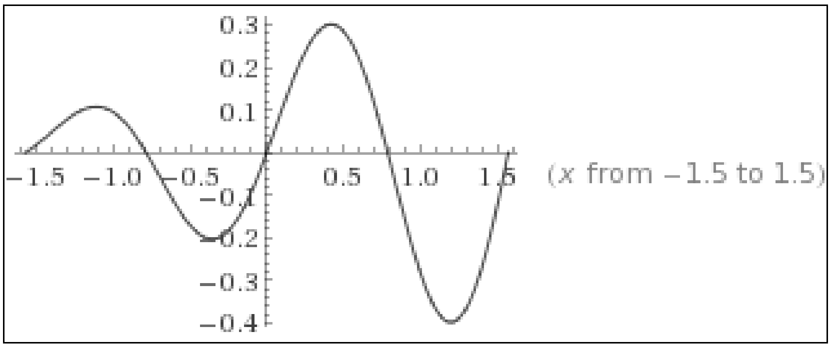


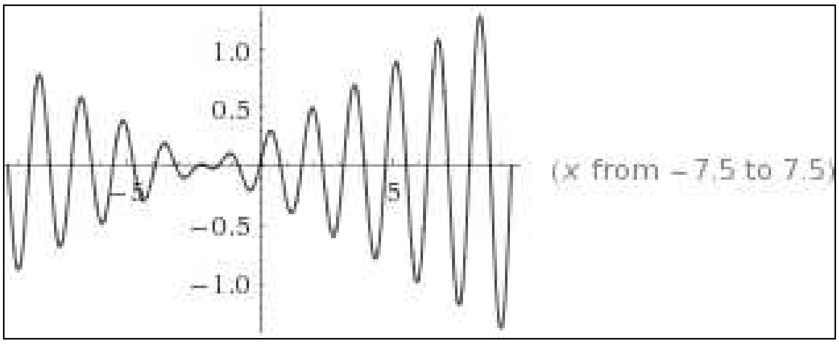
Las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

$$\begin{cases} y(0) = A = 0\ ; \\ y'(x) = -4A\cdot \text{sen}\,4x + 4B\cdot\cos 4x + \dfrac{\text{sen}\,4x}{8} + \dfrac{x}{2}\cdot\cos 4x \\ y'(0) = 4B = 1\ ;\quad B = 1/4\ ; \end{cases}$$

y la expresión de la I.P. buscada, será: $\boxed{y(x) = \dfrac{\text{sen}\,4x}{4} + \dfrac{x}{8}\cdot\text{sen}\,4x}$.

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 9

Obtener la integral general de la EDO: y'' - 3y′ + 2y = 10 sen x.

Solución:

La ecuación característica correspondiente es: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, que proporciona las raíces $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Como la ecuación característica no admite $1 \cdot i = i$, como raíz, la solución a ensayar es:

$y_p = h\cdot\text{sen}\ x + k\cdot\cos\ x$; $\quad y'_p = h\cdot\cos x - k\cdot\text{sen}\,x$; $\quad y''_p = -h\cdot\text{sen}\,x - k\cdot\cos x$.

Substituyendo en la ecuación inicial, se tendrá que:

$-h\cdot\text{sen}\ x - k\cdot\cos\ x - 3h\cdot\cos\ x + 3k\cdot\text{sen}\ x + 2h\cdot\text{sen}\ x + 2h\cdot\text{sen}\ x + 2k\cdot\cos\ x =$

$= 10\ \text{sen}\ x.$

Igualando los coeficientes de sen x y de cos x, resulta que:

$$-h + 3k + 2h = 10$$
$$-k - 3h + 2k = 0$$

de donde: h = 1, k = 3; la solución particular será: y_p = sen x + 3cos x, y la integral general buscada:

$$\boxed{y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{x} + \text{sen } x + 3\cos x}$$

Ejemplo 10

Resolver la EDO: y'' + y = sen x.

Solución:

La solución de la homogénea ya se ha hallado en un problema anterior, con lo que: $y^* = C_1 \cdot \text{sen } x + C_2 \cdot \cos x$; como $\lambda^2 + 1 = 0$ admite $1 \cdot i$ como raíz, la solución particular a ensayar debe ser, para evitar problemas de resonancia, del tipo:

$y_p = x(h\cdot\cos x + k\cdot\text{sen } x)$, o sea: $y_p = h\cdot x\cdot\cos x + k\cdot x\cdot\text{sen } x$;

$$y'_p = h\cdot\cos x - hx\cdot\text{sen}\,x + k\cdot\text{sen}\,x + k\cdot x\cdot\cos x\ ;$$

$$y''_p = -h\cdot\text{sen}\,x - h\cdot\text{sen}\,x - hx\cdot\cos x + k\cdot\cos x + k\cdot\cos x - k\cdot x\cdot\text{sen}\,x =$$
$$= -2h\cdot\text{sen}\,x + 2k\cdot\cos x - hx\cdot\cos x - kx\cdot\text{sen}\,x.$$

Substituyendo estos valores en la ecuación inicial, se tendrá que:

$$-2h\cdot\text{sen}\,x + 2k\cdot\cos x - hx\cdot\cos x - kx\cdot\text{sen}\,x + hx\cdot\cos x + kx\cdot\text{sen}\,x = \text{sen}\,x\ ;$$

de donde: $h = -\frac{1}{2}$; k = 0; por lo que: $y_p = -\frac{x\cdot\cos x}{2}$; con lo que la integral general será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = C_1\cdot\text{sen}\,x + C_2\cdot\cos x - \frac{x\cdot\cos x}{2}}.$$

3.3.4. b(x) como combinación lineal

Finalmente, si el segundo miembro de la ecuación diferencial problema resulta ser una combinación lineal de los tipos o funciones anteriores, para obtener una solución particular basta con formar la suma de soluciones particulares correspondientes a cada uno de los sumandos. En cualquiera de los tipos anteriores, como en este, el método a seguir se denomina comúnmente "de los coeficientes indeterminados", pues así se obtiene, en definitiva, el valor de las constantes que definen la función del segundo miembro. Veámoslo a continuación:

Ejemplo 1

Resolver, determinando una solución particular adecuada, la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = x{\cdot}e^x$.

Solución:

La solución de la ecuación homogénea se obtiene de $\lambda^2 - 4 = 0$, de donde $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$; por tanto es $y^* = c_1{\cdot}e^{2x} + c_2{\cdot}e^{-2x}$; para determinar una solución particular de la no homogénea o completa, ensayaremos la expresión mixta: $y_p = e^x(ax + b)$, de cuya derivación sucesiva se deduce que:

$$\frac{dy_p}{dx} = e^x(ax + a + b); \quad \frac{d^2y_p}{dx^2} = e^x(ax + 2a + b)$$

que, substituida en la ecuación diferencial inicial, ofrece:

$$e^x(ax + 2a + b) - 4e^x(ax + b) = x{\cdot}e^x$$

de donde se deduce que :

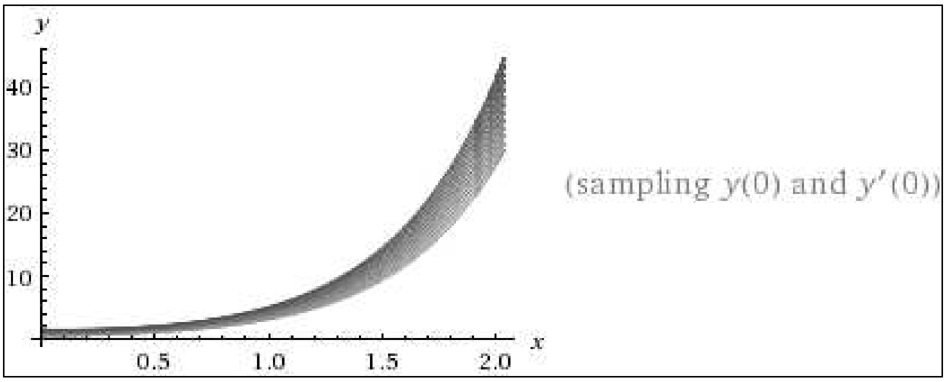
$$\begin{cases} -3a = 1 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases}$$

y por tanto, $a = -1/3$, $b = -2/9$.

La solución general buscada será, pues:

$$\boxed{y = c_1{\cdot}e^{2x} + c_2{\cdot}e^{-2x} - e^x{\cdot}\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right)} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 2

Solve the ordinary differential equation: $\frac{d^2y}{dx^2} = x{\cdot}e^x + \cos x$.

Solution:

Here,

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x{\cdot}e^x + \cos\ x$, $\frac{dy}{dx} = \int (x{\cdot}e^x + \cos x)dx = x{\cdot}e^x - e^x + \sin x + C_1$, and the general integral is:

$$\boxed{y = x{\cdot}e^x - 2e^x - \cos x + C_1 x + C_2}.$$

Also, the equation is:

$y'' = x\cdot e^x + \cos x$, and the characteristic equation of homogeneous is:

$$\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0\ ,$$

and the solution of the homogeneous equation is: $y^* = C_1 + C_2\cdot x$.

To find a particular integral of the complete equation we shall assume it to be of the form:

$$\begin{cases} y_p = (Ax + B)\cdot e^x + C\cdot \cos x + D\cdot \text{sen } x \\ y'_p = A\cdot e^x + (Ax + B)\cdot e^x - C\cdot \text{sen } x + D\cdot \cos x \\ y''_p = A\cdot e^x + A\cdot e^x + Ax\cdot e^x + B\cdot e^x - C\cdot \cos x - D\cdot \text{sen } x\ ; \end{cases}$$

Thus, in the initial differential equation:

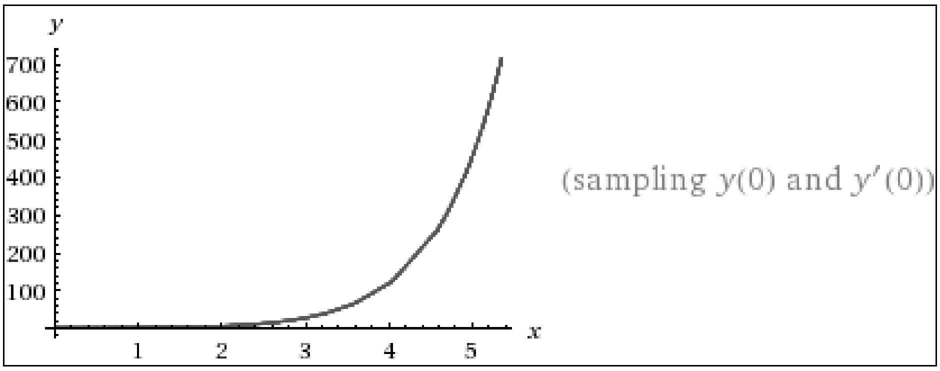
$$(2A + B)\cdot e^x + Ax\cdot e^x - C\cdot \cos x - D\cdot \text{sen } x = x\cdot e^x + \cos x$$

$$2A + B = 0\ ;\quad B = -2\ ;\quad A = 1\ ;\quad C = -1\ ;\quad D = 0\ ;$$

and the particular integral is: $y_p = (x - 2)\cdot e^x - \cos x$; and the general integral is, really:

$$y = y^* + y_p = C_1 + C_2\cdot x + x\cdot e^x - 2\cdot e^x - \cos x$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 3

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = x + e^{2x}$.

Solución:

La ecuación característica de la homogénea, será:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \; ; \quad \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

con lo que la solución de la homogénea, será: $y^* = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{3x}$;

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea, que es una combinación lineal de dos funciones (polinómica y exponencial), así:

$$\begin{cases} y_p = ax + b + A\cdot e^{2x} \\ y'_p = a + 2A\cdot e^{2x} \\ y''_p = 4A\cdot e^{2x} \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$\cancel{4A\cdot e^{2x}} - 6a - \cancel{12A\cdot e^{2x}} + 9ax + 9b + \cancel{9A\cdot e^{2x}} = x + e^{2x} \; ;$$

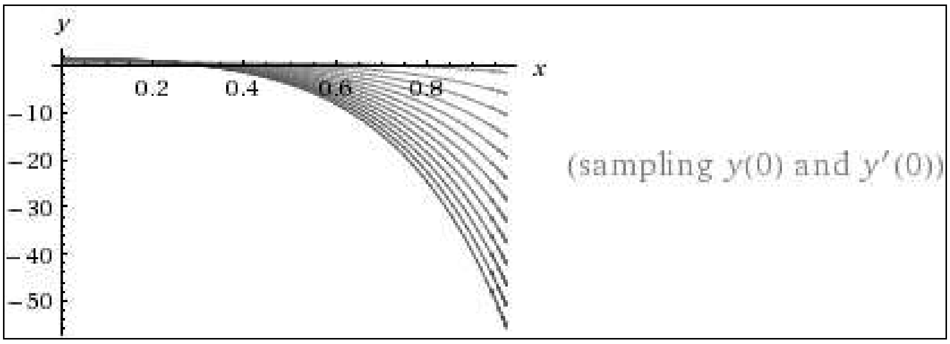
$$A\cdot e^{2x} + 9ax + 9b - 6a = x + e^{2x} \; ;$$

$a = \frac{1}{9}$; $A = 1$; $9b - \frac{6}{9} = 0$; $9b = \frac{2}{3}$; $b = \frac{2}{27}$; con ello:

$y_p = \frac{x}{9} + \frac{2}{27} + e^{2x}$; y la integral general buscada será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{3x} + e^{2x} + \frac{x}{9} + \frac{2}{27}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 4

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = (x^3 - 2x + 1)\cdot e^{-x}$.

Solución:

La ecuación característica de la homogénea ofrece las raíces reales:

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \; ; \quad \lambda_1 = 0 \; ; \quad \lambda_2 = 2 \; ;$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea, que resulta ser una combinación lineal de soluciones, del tipo:

$$y_p = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\cdot e^{-x}$$

$$y^I_p = (3ax^2 + 2bx + c)\cdot e^{-x} - (ax^3 + bx^2 + cx + d)\cdot e^{-x} =$$
$$= e^{-x}(3ax^2 + 2bx + c - ax^3 - bx^2 - cx - d);$$
$$y^{II}_p = e^{-x}(6ax + 2b - 3ax^2 - 2bx - c) -$$
$$- e^{-x}(3ax^2 + 2bx + c - ax^3 - bx^2 - cx - d) =$$
$$= e^{-x}(6ax + 2b - 3ax^2 - 2bx - c - 3ax^2 - 2bx - c + ax^3 + bx^2 + cx + d) =$$
$$= e^{-x}(ax^3 - 6ax^2 + bx^2 - 4bx + 6ax + cx + 2b - 2c + d)$$

Substituyendo estos valores en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$e^{-x}(ax^2 - 6ax^2 + bx^2 - 4bx + 6ax + cx + 2b - 2c + d) -$$
$$- 2\cdot e^{-x}(3ax^2 + 2bx + c - ax^3 - bx^2 - cx - d) = (x^3 - 2x + 1)\cdot e^{-x};$$

$$ax^3 - 6ax^2 + bx^2 - 4bx + 6ax + cx + 2b - 2c +$$
$$+ d - 6ax^2 - 4bx - 2c + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d = x^3 - 2x + 1;$$

$$3ax^3 - 12ax^2 + 3bx^2 - 8bx + 6ax + 3cx + 2b - 4c + 3d = x^3 - 2x + 1;$$

$$3ax^3 + (3b - 12a)x^2 + (6a - 8b + 3c)x + 2(b - 2c) + 3d = x^3 - 2x + 1;$$

$$6a - 8b + 3c = -2; \quad 2 - 32/3 + 3c = -2; \quad 6 - 32 + 9c = -6; \quad 3b = 12a = 4;$$

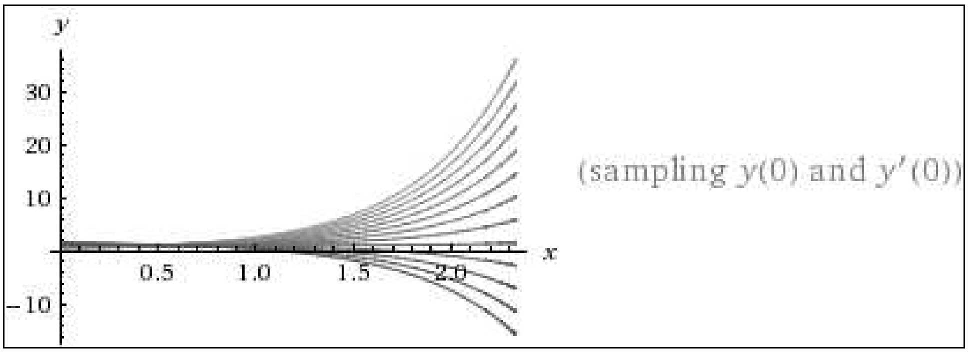
$$9c = 32 - 6 - 6 = 20; \quad 2b - 4c + 3d = 1; \quad 3d = 1 - 2b + 4c = 1 - 8/3 + 80/9;$$

$$a = \frac{1}{3}; \quad b = \frac{4}{3}; \quad c = \frac{20}{9}; \qquad d = \frac{1}{3} - \frac{8}{9} + \frac{80}{27} = \frac{9}{27} - \frac{24}{27} + \frac{80}{27} = \frac{65}{27}$$

De este modo, la integral general buscada vendrá dada por:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 + c_2\cdot e^{2x} + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{3} + \frac{20x}{9} + \frac{65}{27}\right)\cdot e^{-x}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 5

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = e^x \cdot \cos x$.

Solución:

La ecuación característica de la homogénea, ofrece:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \ ; \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1+i \\ \lambda_2 = 1-i \end{cases}$$

, con los coeficientes respectivos de las partes real e imaginaria: $\alpha = \beta = 1$.

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea o completa del tipo: $y_p = e^x(hx\cdot\cos x + kx\cdot \text{sen } x)$, para evitar problemas de resonancia, con lo que:

$$y'_p = e^x(hx\cdot\cos x + kx\cdot\text{sen } x) + e^x(h\cdot\cos x - hx\cdot\text{sen } x + k\cdot\text{sen } x + kx\cdot\cos x) =$$
$$= e^x(hx\cdot\cos x + kx\cdot\text{sen } x + h\cdot\cos x - hx\cdot\text{sen } x + k\cdot\text{sen } x+ kx\cdot\cos x);$$
$$y''_p = e^x(hx\cdot\cos x + kx\cdot\text{sen } x + h\cdot\cos x - hx\cdot\text{sen } x + k\cdot\text{sen } x+ kx\cdot\cos x) +$$
$$+ e^x(h\cdot\cos x - hx\cdot\text{sen } x + k\cdot\text{sen } x + kx\cdot\cos x - h\cdot\text{sen } x- h\cdot\text{sen } x - hx\cdot\cos x +$$
$$+k\cdot\cos x + k\cdot\cos x - kx\cdot\text{sen } x) =$$
$$= 2e^x(h\cdot\cos x - hx\cdot\text{sen } x + k\cdot\text{sen } x + kx\cdot\cos x - h\cdot\text{sen } x+ k\cdot\cos x),$$

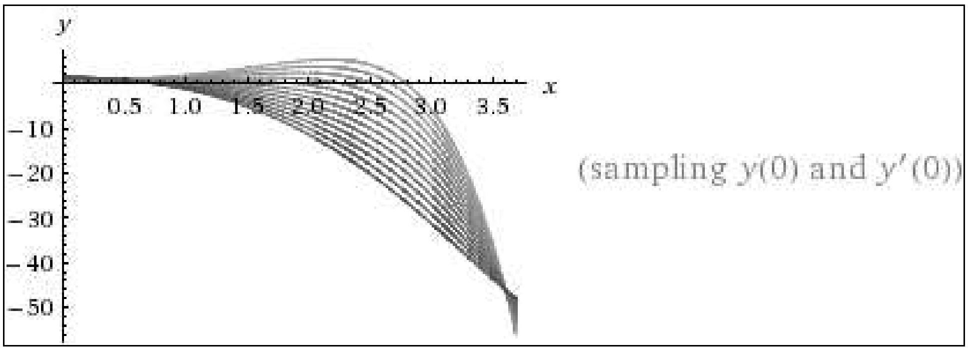
que una vez substituidos estos valores en la ecuación inicial ofrecen, como podrá comprobar el amable lector, los valores siguientes: h = 0 y k = ½; o sea:

$$y_p = e^x\cdot(x/2)\cdot\text{sen } x \ ;$$

con lo que se tiene la integral general buscada siguiente:

$$y = y^* + y_p = e^x(c_1\cdot\cos x + c_2\cdot\text{sen } x) + e^x\cdot\frac{x}{2}\cdot\text{sen } x =$$
$$\boxed{= e^x(c_1\cdot\cos x + c_2\cdot\text{sen } x + \frac{x}{2}\cdot\text{sen } x)}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 6

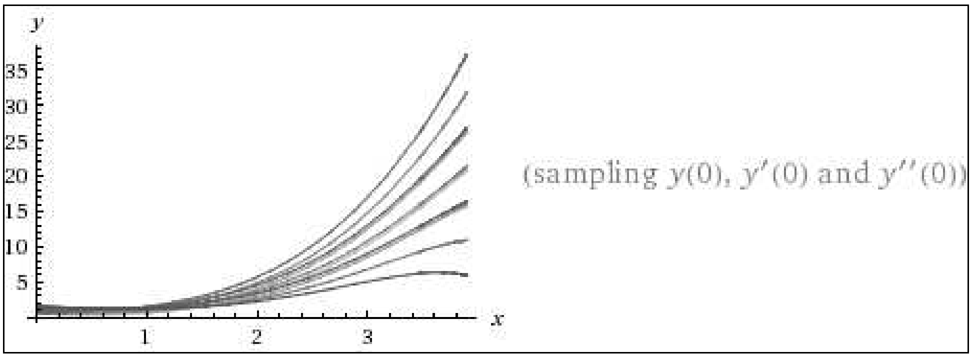
Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y''' + y'' - 2y' = 5 - e^x$.

Solución:

Que resuelta como combinación lineal de ejercicios anteriores, cuestión que dejamos en mano del amable lector, ofrece la integral general:

$$y = y^* + y_p = \boxed{c_1 + c_2 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{3} x \cdot e^x - \frac{5x}{2}} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 7

Resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias:

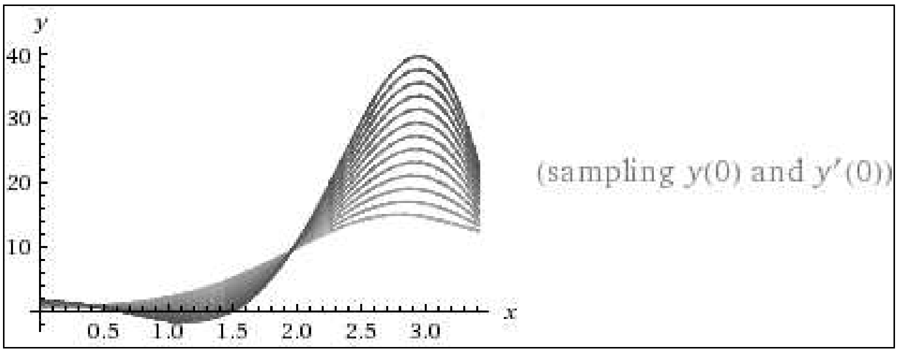
a) $y'' - 2y' + 5y = 2 \cdot e^x + 3 \text{ sen } x + 3x^2 - x$,
b) $y'' - 2y' + 5y = 2 \cdot e^{-x} + 3 \text{ sen } x + 3x^2 - x$

Solución:

a) Resuelta como combinación lineal de ejercicios anteriores, ofrece la integral general: $y = y^* + y_p =$

$$= \boxed{e^x (c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \text{sen } 2x) + \frac{e^x}{2} + \frac{3 \cdot \cos x}{10} + \frac{3 \cdot \text{sen } x}{5} + \frac{3x^2}{5} + \frac{7x}{25} - \frac{16}{125}} \rightarrow \text{I.G.}$$

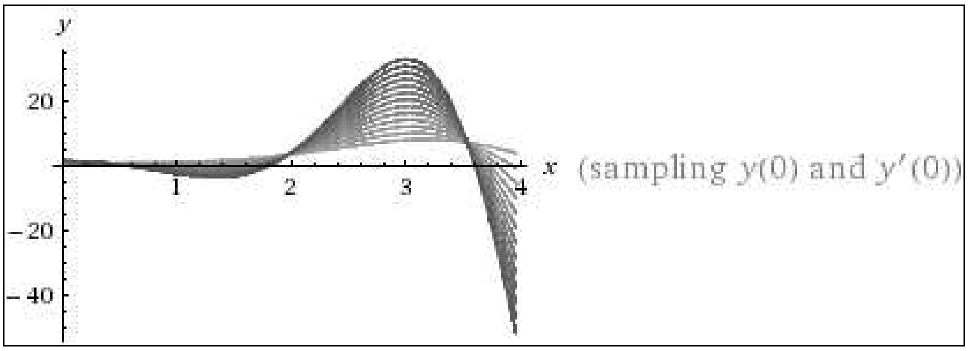
La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



b) Resuelta como combinación lineal de ejercicios anteriores, ofrece la integral general: $y = y^* + y_p =$

$$= \boxed{e^x(c_1\cdot\cos 2x + c_2\cdot\text{sen}\,2x) + \frac{e^{-x}}{4} + \frac{3\cdot\cos x}{10} + \frac{3\text{sen}\,x}{5} + \frac{3x^2}{5} + \frac{7x}{25} - \frac{16}{125}} \to \text{I.G.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 8

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = x^2\cdot e^{3x} \\ y(0) = 2\ ;\quad y'(0) = 6\ ; \end{cases}$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea, es:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0\ ;\quad \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

$$y^* = c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot x\cdot e^{3x}\ .$$

Ensayaremos una solución particular que sea combinación lineal de soluciones, habida cuenta de la naturaleza del segundo miembro (producto de un polinomio por una función exponencial), así como para evitar indeseables fenómenos de resonancia, con lo que:

$$y_p = (ax^2 + bx + c)\cdot x^2\cdot e^{3x} = e^{3x}(ax^4 + bx^3 + cx^2) \ ;$$

$$y'_p = 3\cdot e^{3x}(ax^4 + bx^3 + cx^2) + e^{3x}(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx) =$$
$$= e^{3x}(3ax^4 + 3bx^3 + 3cx^2 + 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx)$$

$$y''_p = 3\cdot e^{3x}(3ax^4 + 3bx^3 + 3cx^2 + 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx) +$$
$$+ e^{3x}(12ax^3 + 9bx^2 + 6cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) =$$
$$= e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2 + 12ax^3 + 9bx^2 + 6cx +$$
$$+ 12ax^3 + 9bx^2 + 6cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) =$$
$$= e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2 + 24ax^3 + 18bx^2 +$$
$$+ 12cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) \ ;$$

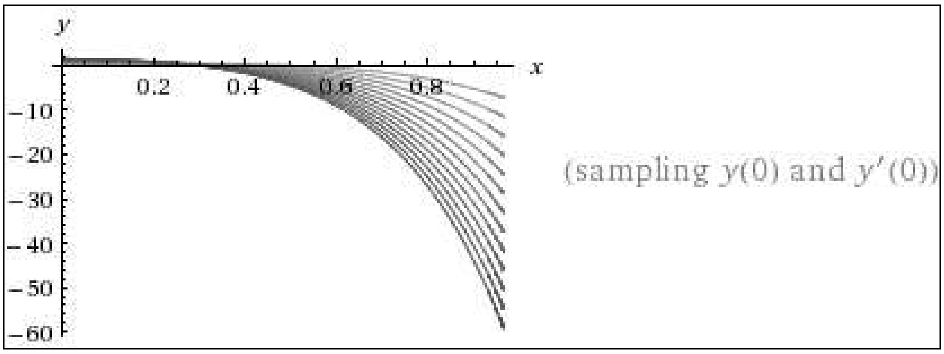
y substituyendo los valores obtenidos en la ecuación inicial, se tiene que:

$$e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2 + 24ax^3 + 18bx^2 + 12cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) -$$
$$- e^{3x}(18ax^4 + 18bx^3 + 18cx^2 + 24ax^3 + 18bx^2 + 12cx) +$$
$$+ e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2) = e^{3x}(12ax^2 + 6bx + 2c) = e^{3x}\cdot x^2 \ ;$$

$12ax^2 + 6bx + 2c = x^2$; o sea: $a = 1/12$; $b = 0$; $c = 0$; con lo que resultará la integral general:

$$y(x) = y^* + y_p = c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot x\cdot e^{3x} + \frac{e^{3x}\cdot x^4}{12} .$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



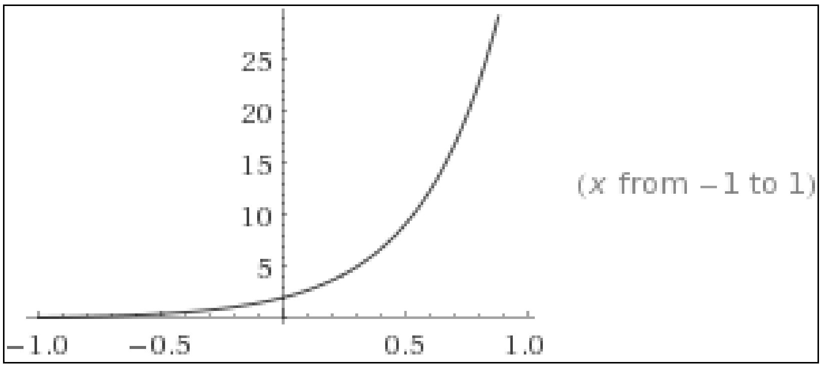
Ahora bien, las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

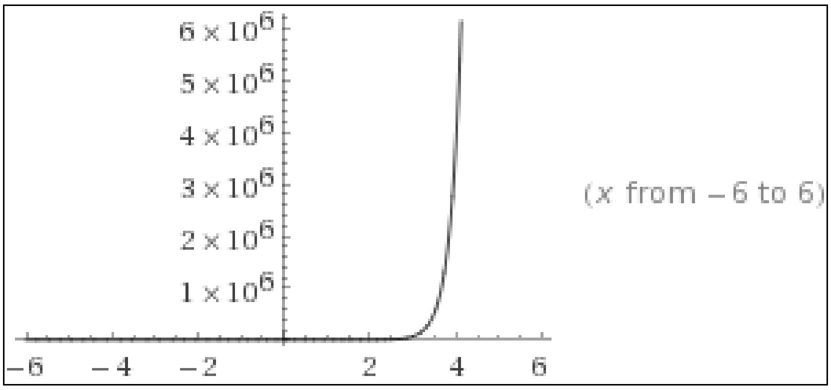
$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 2 \ ; \\ y'(x) = 3\cdot c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot e^{3x} + 3c_2\cdot x\cdot e^{3x} + \dfrac{3e^{3x}\cdot x^4 + 4x^3\cdot e^{3x}}{12} \ ; \\ y'(0) = 3c_1 + c_2 = 6 \ ; \quad c_2 = 0 \ ; \end{cases}$$

y resultará, en definitiva, la I.P. buscada:

$$\boxed{y(x) = 2e^{3x} + \frac{e^{3x} \cdot x^4}{12} = \frac{e^{3x}(24 + x^4)}{12}}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 9

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-x} \\ y(0) = 0 \ ; \quad y'(0) = 0 \ ; \end{cases}$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea, es:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0 \ ; \quad \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -2 + \sqrt{2}\, i \\ \lambda_2 = -2 - \sqrt{2}\, i \end{cases}$$

$$y^* = e^{-2x}(A \cdot \cos\sqrt{2} \cdot x + B \cdot \operatorname{sen}\sqrt{2} \cdot x)$$

Ensayaremos ahora una solución particular de la completa que sea combinación lineal de soluciones, habida cuenta de la naturaleza del segundo miembro (suma de una constante y una función exponencial), con lo que:

$$\begin{cases} y_p = a + h\cdot e^{-x} \\ y'_p = -h\cdot e^{-x} \\ y''_p = h\cdot e^{-x} \end{cases}$$

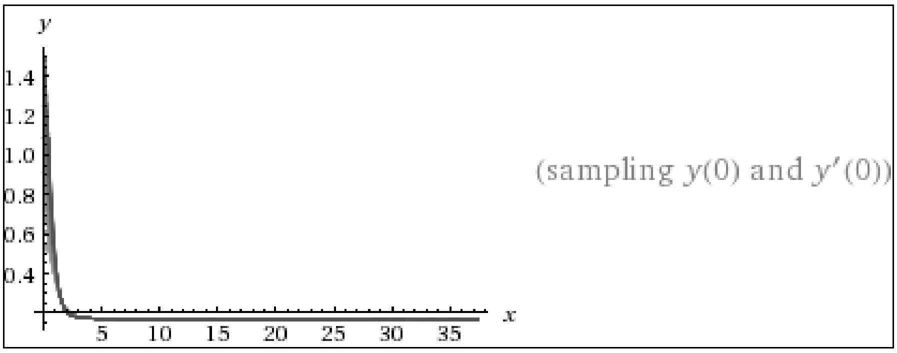
y substituyendo estos valores en la ecuación inicial, se tiene que:

$$h\cdot e^{-x} - 4h\cdot e^{-x} + 6a + 6h\cdot e^{-x} = 6a + 3h\cdot e^{-x} = 1 + e^{-x};$$

de donde: a = 1/6; h = 1/3; y la I.G. será:

$$y(x) = y^* + y_p = e^{-2x}(A\cdot\cos\sqrt{2}\cdot x + B\cdot\operatorname{sen}\sqrt{2}\cdot x) + \frac{1}{6} + \frac{e^{-x}}{3}.$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



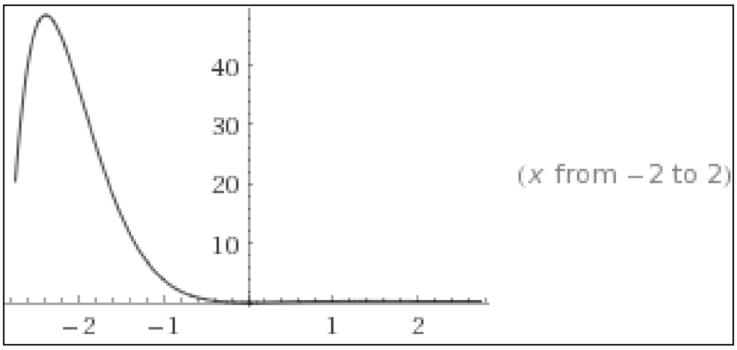
Las condiciones iniciales dadas del problema planteado exigen que:

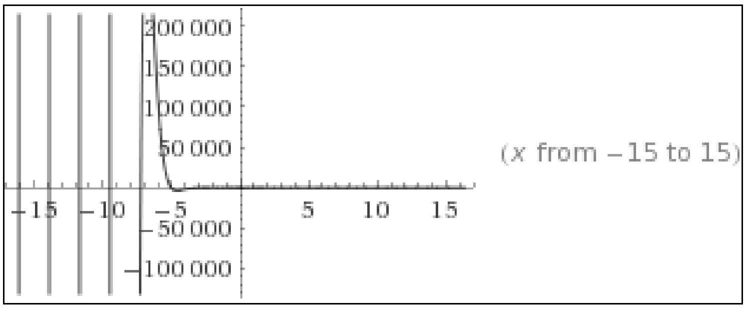
$$\begin{cases} y(0) = A + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} = 0;\quad A = -\dfrac{1}{2}; \\ y'(x) = -2e^{-2x}(A\cdot\cos\sqrt{2}\cdot x + B\cdot\operatorname{sen}\sqrt{2}\cdot x) + e^{-2x}(-A\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\sqrt{2}\cdot x + B\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\sqrt{2}\cdot x) - \dfrac{e^{-x}}{3}; \\ y'(0) = -2A + B\sqrt{2} - \dfrac{1}{3} = 0;\quad B = -\dfrac{2}{3\sqrt{2}}; \end{cases}$$

y la expresión buscada será:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= -e^{-2x}\left(\frac{\cos\sqrt{2}\cdot x}{2} + \frac{2\cdot\operatorname{sen}\sqrt{2}\cdot x}{3\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{6} + \frac{e^{-x}}{3} = \\ &= \frac{1 + 2\cdot e^{-x} - 3\cdot e^{-2x}\cdot\cos\sqrt{2}\cdot x - 2\sqrt{2}\cdot e^{-2x}\cdot\operatorname{sen}\sqrt{2}\cdot x}{6} \end{aligned}}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





4. ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES VARIABLES

4.1. EL POLINOMIO P(D) SE PUEDE DESCOMPONER EN FACTORES LINEALES

Ejemplo 1

Sea resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - y = 3x^2$.

Solución:

Esta ecuación puede ser escrita en términos del operador diferencial D, cuya notoria aplicabilidad a la resolución de las EDO veremos en el último epígrafe de este mismo capítulo así como en el capítulo siguiente referido a los sistemas de EDO, con lo que: $(D^2 - x\cdot D - 1)y = 3x^2$.

Supongamos que P(D) sea descomponible: $(D - a)(D - b)y = 3x^2$, de donde: $(D - a)(Dy - by) = D^2y - b'y - bDy - aDy + aby$.

Para a = 0, b = x, se observa que: $D(D - x)y = D^2y - y - xDy$.

Luego la ecuación se puede escribir: $D(D - x)y = 3x^2$.

Haciendo $(D - x)y = z$, resulta: $Dz = 3x^2$, de donde: $z = x^3 + c_1$.

Substituyendo: $(D - x)y = z = x^3 + c_1$, o sea: $y' - xy - x^3 - c_1 = 0$, que es una ecuación diferencial lineal de primer orden ya estudiada en el capítulo anterior de nuestro libro y de resolución conocida.

Estos problemas también pueden presentarse del siguiente modo:

Ejemplo 2

Show that (a) $y = 2e^x$, (b) $y = 3x$, and (c) $y = C_1 \cdot e^x + C_2 x$, where C_1 and C_2 are arbitrary constants, are solutions of the ordinary differential equation:

$$(1 - x)y'' + x \cdot y' - y = 0.$$

Solution:

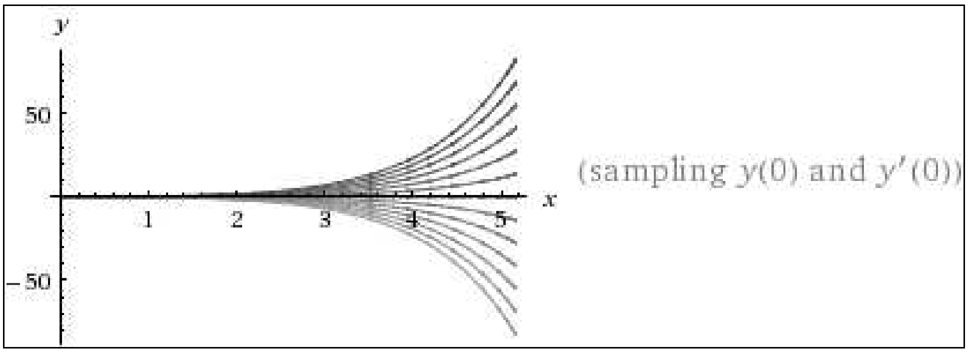
(a) Differentiate $y = 2e^x$ twice to obtain $y' = 2e^x$ and $y'' = 2e^x$. Substitute in the differential equation to obtain the identity: $2e^x(1 - x) + 2e^x x - 2e^x = 0$.

(b) Differentiate $y = 3x$ twice to obtain $y' = 3$ and $y'' = 0$. Substitute in the differential equation to obtain the identity: $0(1 - x) + 3x - 3x = 0$.

(c) Differentiate $y = C_1e^x + C_2x$ twice to obtain $y' = C_1e^x + C_2$, and $y'' = C_1e^x$. Substitute in the differential equation to obtain the identity: $C_1e^x(1 - x) + (C_1e^x + C_2)x - (C_1e^x + C_2x) = 0$.

Solution (c) is the general solution of the differential equation since it satisfies the equation and contains the proper number of essential arbitrary constants. Solutions (a) and (b) are called *particular* solutions since each may be obtained by assigning particular values to the arbitrary constants of the general solution.

The graphical representation of the sample solution family is:



4.2. ECUACIÓN DE EULER-CAUCHY

También existen otras ecuaciones diferenciales de coeficientes variables (como la ecuación de Euler-Cauchy[2], que es un caso particular de la ecuación de Lagrange), ya sean homogéneas o completas, que veremos a continuación.

[2] Some of Euler's greatest successes were in solving real-world problems analytically, and in describing numerous applications of the Bernoulli numbers, Fourier series, Venn diagrams, Euler numbers, the constants π and e, continued fractions and integrals. He integrated Leibniz's differential calculus with Newton's Method of Fluxions, and developed tools that made it easier to apply calculus to physical problems. He made great strides in improving the numerical approximation of integrals, inventing what are now known as the Euler approximations. The most notable of these approximations are Euler's method and the Euler–Maclaurin formula. He also facilitated the use of differential equations, in particular introducing the Euler–Mascheroni constant:

Se conoce con este nombre una ecuación unidimensional (o aún mejor *equidimensional*) de la forma:

$$a_0(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2(ax+b)^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+$$
$$+\ldots+a_{n-1}(ax+b)\frac{dy}{dx}+a_ny=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(ax+b)^{n-i}\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}+a_ny=F(x)$$

, que se reduce a una EDO lineal de coeficientes constantes, mediante el cambio de variable: $ax + b = z = e^t$. En este caso extensivo, recibe el nombre de "ecuación de Legendre". Para a = 1 y b = 0 estaríamos hablando propiamente de la "ecuación de Euler-Cauchy" (E-C).

A continuación, pueden verse los siguientes ejemplos representativos de este tipo de EDO:

Ejemplo 1

Sea resolver la ecuación: $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$.

Solución:

Haciendo el cambio de variable $x = e^t$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^t}\cdot\frac{dy}{dt};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{e^{2t}}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right];\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{e^{3t}}\left[\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right]$$

que substituidas en la ecuación dada resulta:

$$\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{dy}{dt}+2y=0\text{, cuya ecuación característica:}$$

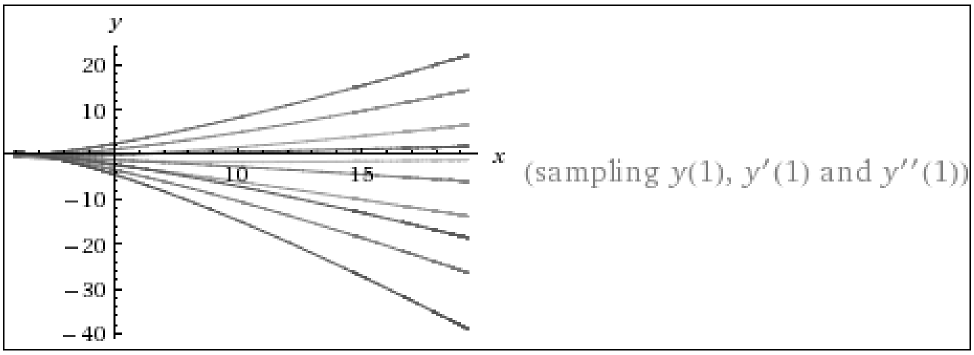
$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$, proporciona las raíces: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Por tanto:

$y = c_1\cdot e^t + c_2\cdot t\cdot e^t + c_3\cdot e^{-2t}$, y como $x = e^t$, $t = \ln x$, resultará que:

$$\boxed{y=c_1x+c_2x\cdot\ln x+c_3\frac{1}{x^2}}\rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right).$$



Ejemplo 2

Sea ahora resolver: $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=18x\cdot\ln x$, por el método de variación de constantes.

Solución:

Como la ecuación homogénea correspondiente se ha resuelto en el ejercicio anterior, obteniéndose la solución:

$$y=c_1x+c_2x\cdot\ln x+\frac{c_3}{x^2}$$

vamos a aplicar aquí el método de variación de constantes, a saber:

$$y'=\frac{dy}{dx}=c_1+c_2\cdot\ln x+c_2-\frac{2c_3}{x^2} \qquad (1)$$

después de hacer:

$$\frac{dc_1}{dx}x+\frac{dc_2}{dx}x\cdot\ln x+\frac{dc_3}{dx}\cdot\frac{1}{x^2}=0 \qquad (2)$$

Derivando de nuevo, se obtiene que: $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{c_2}{x}+\dfrac{6c_3}{x^4}$ (3)

después de hacer: $\dfrac{dc_1}{dx^2}x+\dfrac{dc_2}{dx}(1+\ln x)-2\dfrac{dc_3}{dx}\cdot\dfrac{1}{x^3}=0$ (4)

Finalmente: $y'''=\dfrac{d^3y}{dx^3}=-\dfrac{c_2}{x^2}+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{dc_2}{dx}-\dfrac{24c_3}{x^5}+\dfrac{6}{x^4}\cdot\dfrac{dc_3}{dx}$ (5)

Substituyendo (1), (3) y (5) en la ecuación dada se tiene que:

$$x^2\frac{dc_2}{dx}+\frac{6}{x}\cdot\frac{dc_3}{dx}=18x\cdot\ln x \qquad (6)$$

Resuelto el sistema formado por las ecuaciones (2), (4) y (6), tomando como incógnitas:

$$\frac{dc_1}{dx},\ \frac{dc_2}{dx}\ \text{y}\ \frac{dc_3}{dx},$$

, resulta que:

$$\begin{cases} c'_1 = \dfrac{dc_1}{dx} = -\dfrac{2}{x}\ln x - \dfrac{6}{x}(\ln x)^2 \\ c'_2 = \dfrac{dc_2}{dx} = \dfrac{6}{x}\ln x \\ c'_3 = \dfrac{dc_3}{dx} = 2x^2 \ln x \end{cases}$$

que una vez integradas, ofrecen, respectivamente:

$$c_1 = K_1 - (\ln x)^2 - 2(\ln x)^3\ ;\quad c_2 = K_2 + 3(\ln x)^2\ ;\quad c_3 = K_3 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^3 \ln x$$

y substituidas en la solución de la homogénea, permiten escribir:

$$\boxed{y(x) = \left[K_1 - (\ln x)^2 - 2(\ln x)^3\right]x + \left[K_2 + 3(\ln x)^2\right]x\cdot\ln x + \left[K_3 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^3\cdot\ln x\right]\frac{1}{x^2}}$$

, o bien teniendo en cuenta la arbitrariedad de las constantes:

$$y(x) = \frac{c_1}{x^2} + c_2\,x + c_3\,x\log(x) + \frac{1}{9}\,x\left(9\log^3(x) - 9\log^2(x) + 6\log(x) - 2\right)$$

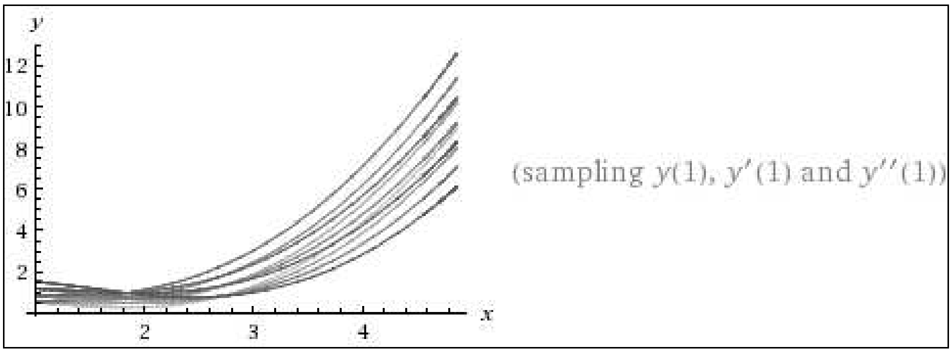
, o aún más simplificadamente:

$$\boxed{y(x) = \frac{c_1}{x^2} + c_2\,x + c_3\,x\log(x) + x\log^3(x) - x\log^2(x)}$$

que es la integral general buscada [la notación log(x) = ln x representa aquí el logaritmo neperiano de la variable independiente x, que no debe confundirse con el correspondiente logaritmo decimal o de Briggs[3], de igual notación].

[3] Henry Briggs (February 1561 – 26 January 1630) was an English mathematician notable for changing the original logarithms invented by John Napier into common (base 10) logarithms, which are sometimes known as Briggsian logarithms in his honour. In 1624 his *Arithmetica Logarithmica*, in folio, a work containing the logarithms of thirty thousand natural numbers to fourteen decimal places (1-20,000 and 90,001 to 100,000). This table was later extended by Adriaan Vlacq, but to 10 places, and by Alexander John Thompson to 20 places in 1952. Briggs was one of the first to use finite-difference methods to compute tables of functions. He also completed a table of logarithmic sines and tangents for the hundredth part of every degree to fourteen decimal places, with a table of natural sines to fifteen places, and the tangents and secants for the same to ten places; all of which were printed at Gouda in 1631 and published in 1633 under the title of *Trigonometria Britannica*; this work was probably a successor to his 1617 *Logarithmorum Chilias Prima* ("The First Thousand Logarithms"), which gave a brief account of logarithms and a long table of the first 1000 integers calculated to the 14th decimal place. Briggs discovered, in a somewhat concealed form and without proof, the binomial theorem. English translations of Briggs's *Arithmetica* and the first part of his *Trigonometria Britannica* are available on the web.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 3

Form the ordinary differential equation whose general solution is:

$$y = C_1 \cdot x^3 + C_2 \cdot x + C_3.$$

Solution:

Differentiate $y = C_1 \cdot x^3 + C_2 \cdot x + C_3$ three times to obtain:

$$y' = 3C_1x^2 + C_2;\ y'' = 6C_1x;\ y''' = 6C_1.$$

Then $y'' = x \cdot y'''$, or: $x \cdot y''' - y'' = 0$ is the required equation. Note that the given relation is a solution of the equation $y^{IV} = 0$ but is not the general solution since it contains only three arbitrary constants.

Also is an E-C (Euler-Cauchy) equation, then is the same as:

$$x^3 \cdot y''' - x^2 \cdot y'' = 0;$$

$x = e^t$; $dx = e^t \cdot dt$; $t = \ln x$; $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$; $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})$; and

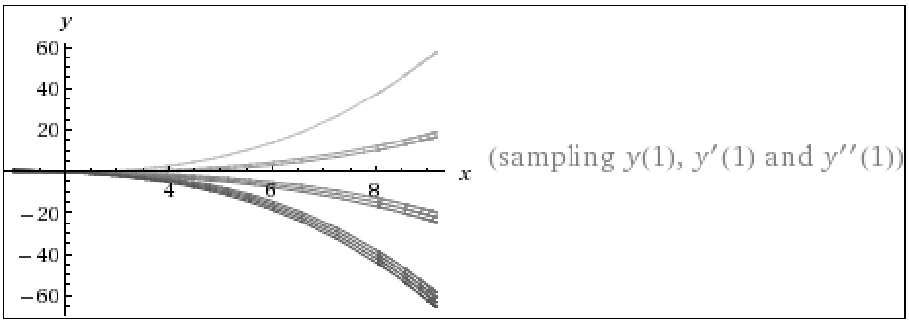
$y''' = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$, and substitute in initial equation on obtain:

$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 0$, or also: $\frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} = 0$.

The characteristic equation is: $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$, and the three roots are: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$, and the general integral is, really:

$$y = C_1 + C_2 \cdot e^{3t} + C_3 \cdot e^t = C_1 + C_2 \cdot x^3 + C_3 \cdot x.$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 4

Form the differential equation whose general solution is: $y = C\cdot x^2 - x$.

Solution:

Differentiate $y = C\cdot x^2 - x$ once to obtain $y' = 2Cx - 1$. Solve for: $C = \frac{1}{2}(\frac{y'+1}{x})$, and substitute in the given relation (general solution) to obtain: $y = \frac{1}{2}(\frac{y'+1}{x})x^2 - x$, or: $y'\cdot x = 2\cdot y + x$; and the differential equation of first order is: $x\cdot y' - 2y = x$. Here is an equation of Euler-Cauchy (E-C), thus:

$x = e^t$; $dx = e^t\cdot dt$; $t = \ln x$; $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$. Then, on obtain: $\frac{dy}{dt} - 2y = e^t$.

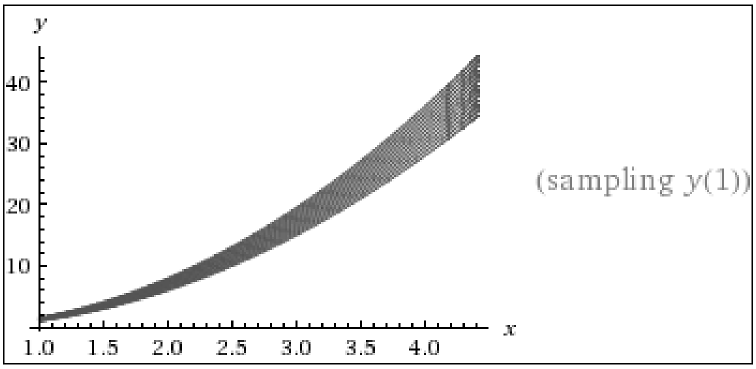
One particular integral of the equation is:

$$\begin{cases} y_p = A\cdot e^t \\ y'_p = A\cdot e^t \end{cases}$$

Substitute in the differential equation to obtain:

$$A\cdot e^t - 2A\cdot e^t = e^t = - A\cdot e^t \text{ ; and } A = -1 \text{ ; } y_p = -e^t = -x.$$

The characteristic equation of the homogeneous is: $\lambda - 2 = 0$; $\lambda = 2$. Thus, the required relation is: $y^* = C\cdot e^{2t} = C\cdot x^2$. The general solution is, really, $y(x) = y^* + y_p = C\cdot x^2 - x$, and the graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 5

Solve the ordinary differential equation: $x\cdot dy - y\cdot dx = 2x^3dx$.

Solution:

The combination $(x\cdot dy - y\cdot dx)$ suggests $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\cdot dy - y\cdot dx}{x^2}$. Hence, multiplying the given equation by $\xi(x) = \frac{1}{x^2}$, $\frac{x\cdot dy - y\cdot dx}{x^2} = 2x\cdot dx$, and $\frac{y}{x} = x^2 + C$ or $\boxed{y = x^3 + C\cdot x}$.

Also is an E-C equation, then is the same as: $x\cdot y' - y = 2x^3$. With the change of variable: $x = e^t$; $dx = e^t\cdot dt$; $t = \ln x$; $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$.

Substitute in equation: $\frac{dy}{dt} - y = 2e^{3t}$, and the characteristic root of the homogeneous equation is: $\lambda = 1$. One particular integral of the complete equation is:

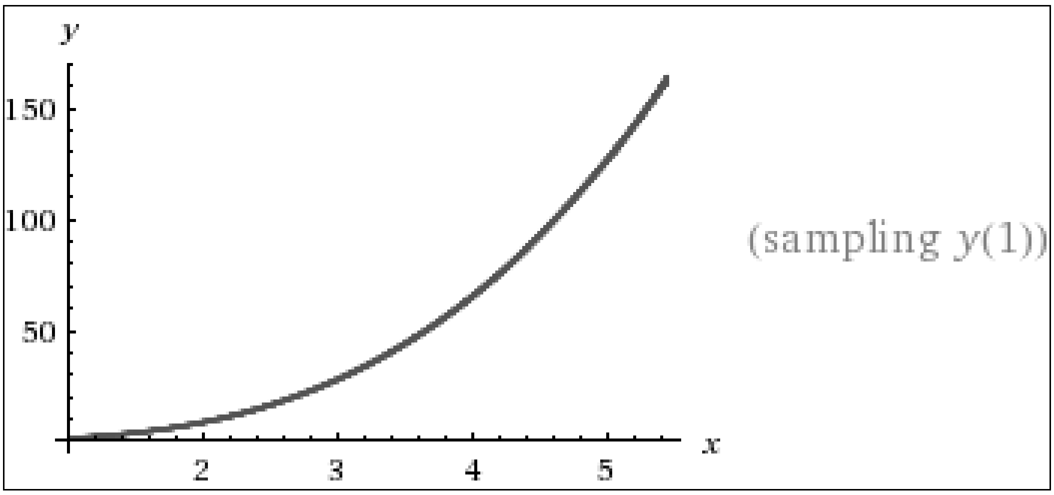
$$\begin{cases} y_p = A\cdot e^{3t} \\ y'_p = 3\cdot A\cdot e^{3t} \end{cases}$$

Substitute in the differential equation to obtain:

$3\cdot A\cdot e^{3t} - A\cdot e^{3t} = 2A\cdot e^{3t} = 2e^{3t}$; and $A = 1$; $y_p = e^{3t} = x^3$, and the general integral is, really:

$$y = y^* + y_p = C\cdot e^t + e^{3t} = C\cdot x + x^3.$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 6

Solve the ordinary differential equation: $x\cdot dy + (3y - e^x)dx = 0$.

Solution:

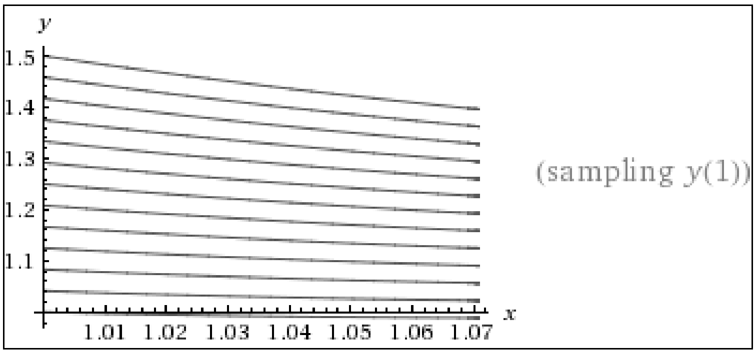
Multiply the equation by: $\xi(x) = x^2$ to obtain: $x^3dy + 3x^2y\cdot dx = x^2e^x\cdot dx$. Then: $x^3\cdot y = \int x^2\cdot e^x\cdot dx = x^2e^x - 2x\cdot e^x + 2e^x + C$;

$$\boxed{y = \frac{e^x}{x} - \frac{2e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + \frac{C}{x^3}}.$$

Also is an E-C equation, then is the same as: $x\cdot y' + 3y = e^x$. With the change of variable : $x = e^t$; $dx = e^t\cdot dt$; $t = \ln x$; $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$.

Substitute in equation: $\frac{dy}{dt} + 3y = e^{e^t}$, and the characteristic root of the homogeneous equation is: λ = -3, and continuing with the resolution of the problem would get the same result as above.

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 7

Solve the ordinary differential equation: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 6x^3$.

Solution:

Here $P(x) = \frac{2}{x}$, $\int P(x)\cdot dx = \ln x^2$, and $\xi(x) = e^{\ln x^2} = x^2$.

Multiply the equation by $\xi(x) = x^2$, to obtain: $x^2dy + 2xy\cdot dx = 6x^5dx$.

Then $x^2y = x^6 + C$; $y = x^4 + \frac{C}{x^2}$.

Note 1. After multiplying by the integrating factor, the terms on the left side of the resulting equation are an integrable combination.

Note 2. The integrating factor of a given equation is not unique. In this problem x^2, $3x^2$, $(½)x^2$, etc., are all integrating factors. Hence, we write the simplest particular integral of $P(x)\cdot dx$ rather than the general integral, $\ln x^2 + \ln C = \ln Cx^2$.

Note 3. Also is an E-C equation, then is the same as: $x\cdot y' + 2y = 6x^4$. With the change of variable : $x = e^t$; $dx = e^t\cdot dt$; $t = \ln x$; $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$.

Substitute in equation: $\frac{dy}{dt} + 2y = 6e^{4t}$, and the characteristic root of the homogeneous equation is: $\lambda = -2$. One particular integral of the complete equation is:

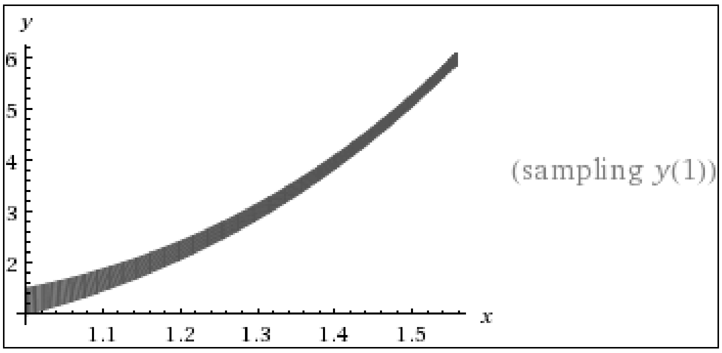
$$\begin{cases} y_p = A\cdot e^{4t} \\ y'_p = 4A\cdot e^{4t} \end{cases}$$

Substitute this values in the differential equation to obtain:

$4A\cdot e^{4t} + 2A\cdot e^{4t} = 6A\cdot e^{4t} = 6\cdot e^{4t}$; and $A = 1$; $y_p = e^{4t} = x^4$, and the general integral is, really:

$$\boxed{y(x) = y^* + y_p = C\cdot e^{-2t} + e^{4t} = C/x^2 + x^4}.$$

The graphical representation of the sample solution family is:



Ejemplo 8

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $x\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 4x = 0$.

Solución:

De hecho se trata de una E.D.O. del tipo Euler-Cauchy, no homogénea, puesto que multiplicando por x en ambos miembros, se tiene:

$$x^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\cdot\frac{dy}{dx} = -4x^2$$; haciendo el cambio de variable:

$$x = e^t\ ; \quad dx = e^t\cdot dt\ ; \quad t = \ln x\ ;$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} ;\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$; con lo que, substituyendo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 3 \cdot e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} = -4 \cdot e^{2t} ;\ \text{o sea: } \frac{d^2y}{dt^2} - 4 \cdot \frac{dy}{dt} = -4 \cdot e^{2t} ,$$

que ya es una E.D. lineal de coeficientes constantes, con una ecuación característica de la homogénea: $\lambda^2 - 4\lambda = 0$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 4$; ensayaremos, ahora, la solución particular de la no homogénea o completa del tipo:

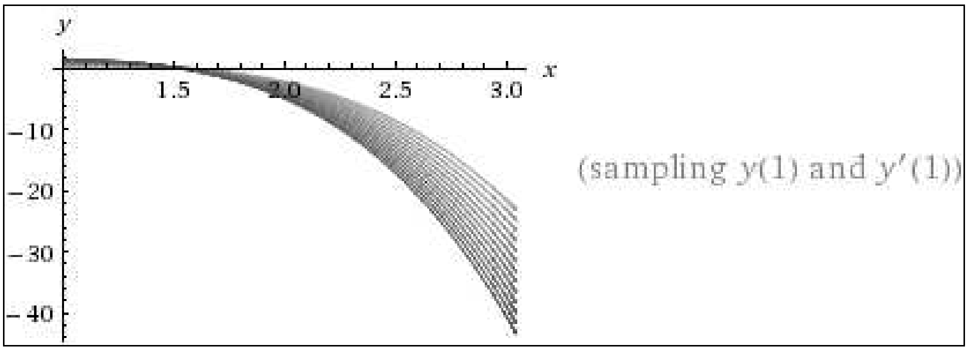
$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^{2t} \\ y'_p = 2A \cdot e^{2t} \\ y''_p = 4A \cdot e^{2t} \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación anterior, ofrece: $4A \cdot e^{2t} - 8A \cdot e^{2t} = -4A \cdot e^{2t} = -4 \cdot e^{2t}$; de donde resulta que:

$\boxed{A = 1}$, con lo que: $y_p = e^{2t}$; y la integral general buscada será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 + c_2 e^{4t} + e^{2t} = c_1 + c_2 \cdot x^4 + x^2}$$, c.s.q.d.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 9

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 8x^2$.

Solución:

De hecho se trata también de una E.D.O. del tipo Euler-Cauchy, no homogénea, puesto que multiplicando por x en ambos miembros, se tiene que:

$$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - x \cdot \frac{dy}{dx} = 8x^3$$; haciendo el cambio de variable:

$x = e^t$; $dx = e^t \cdot dt$; $t = \ln x$; se tendrá que:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} \; ; \; y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$; con lo que, substituyendo:

$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = 8 \cdot e^{3t}$, que ya es una E.D. lineal de coeficientes constantes, con la ecuación característica de la homogénea siguiente: $\lambda^2 - 2\lambda = 0$; de raíces: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$; ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^{3t} \\ y'_p = 3A \cdot e^{3t} \\ y''_p = 9A \cdot e^{3t} \end{cases}$$

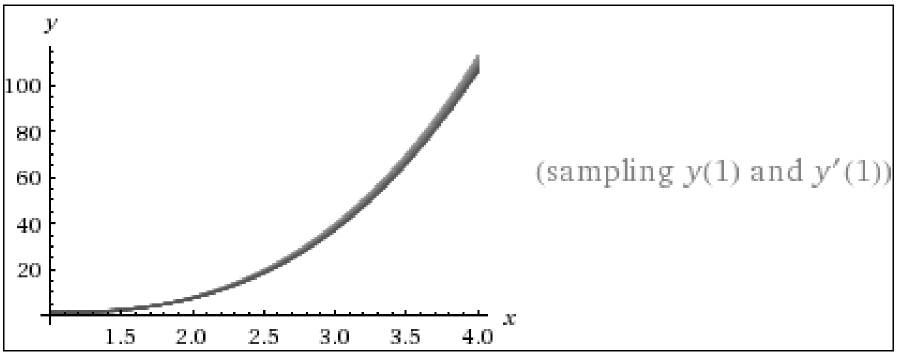
que substituyendo estos valores en la ecuación anterior, ofrece:

$$9A \cdot e^{3t} - 6A \cdot e^{3t} = 8 \cdot e^{3t} = 3A \cdot e^{3t}$$; de donde:

$\boxed{A = 8/3}$, con lo que: $y_p = (8/3) \cdot e^{3t}$; y la integral general será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{8}{3} e^{3t} = c_1 + c_2 \cdot x^2 + \frac{8}{3} x^3}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 10

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 8x^3$.

Solución:

Procediendo como en el caso anterior, se tiene: $x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - x \cdot \frac{dy}{dx} = 8x^4$;

y después de efectuar el correspondiente cambio de variable, se tiene que:

$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = 8 \cdot e^{4t}$. En este caso, la solución particular de la no homogénea ofrece:

$$\begin{cases} y_p = A\cdot e^{4t} \\ y'_p = 4A\cdot e^{4t} \\ y''_p = 16A\cdot e^{4t} \end{cases}$$

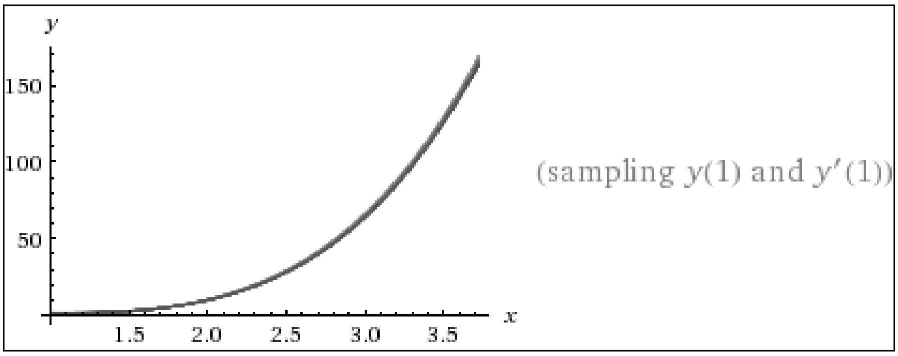
que substituyendo estos valores en la ecuación anterior proporciona:

$$16A\cdot e^{4t} - 8A\cdot e^{4t} = 8\cdot e^{4t} = 8A\cdot e^{-4t} \text{ ; de donde:}$$

$\boxed{A = 1}$, con lo que: $y_p = e^{4t}$; y la integral general será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 + c_2\cdot e^{2t} + e^{4t} = c_1 + c_2\cdot x^2 + x^4}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 11

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $x^2\cdot y'' + x\cdot y' - y = x^3$, y representar gráficamente una solución particular cualquiera.

Solución:

Se trata evidentemente de una E.D.O. del tipo Euler-Cauchy, no homogénea, puesto que multiplicando por x, por lo que haremos el cambio de variable:

$$x = e^t \text{ ; } \quad dx = e^t\cdot dt \text{ ; } \quad t = \ln x \text{ ; y las derivadas sucesivas:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}; \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right);$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

con lo que substituyendo en la ecuación inicial, resultará que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = e^{3t},$$

que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \; ; \quad \lambda = \pm\sqrt{1} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^{3t} \\ y'_p = 3 \cdot A \cdot e^{3t} \\ y''_p = 9 \cdot A \cdot e^{3t} \end{cases}$$

que, substituyendo los valores así obtenidos en la ecuación anterior, ofrece:

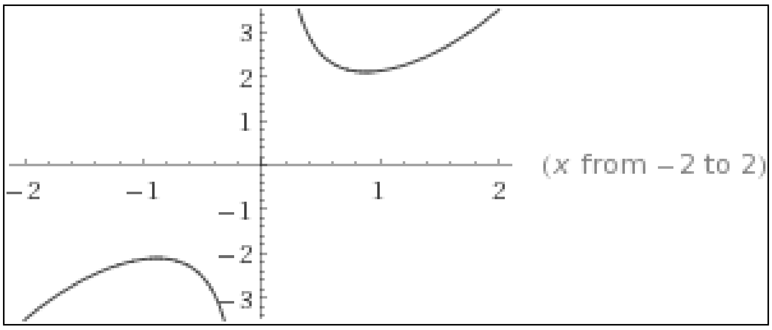
$9 \cdot A \cdot e^{3t} - A \cdot e^{3t} = e^{3t} = 8 \cdot A \cdot e^{3t}$; de donde se deduce que:

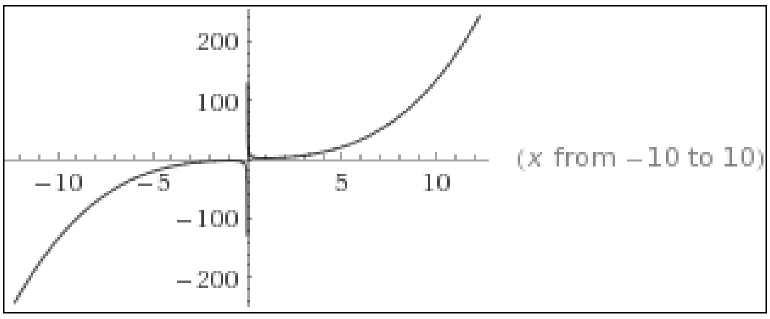
$A = \frac{1}{8}$, con lo que: $y_p = \frac{e^{3t}}{8}$; y la integral general será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-t} + \frac{e^{3t}}{8} = c_1 \cdot x + \frac{c_2}{x} + \frac{x^3}{8}}$$

Si hacemos ahora, por ejemplo: $c_1 = c_2 = 1$, obtendremos la solución particular siguiente: $y(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{x^3}{8}$.

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 12

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $4x^2 \cdot y''' - 15 \cdot y' = 4$.

Solución:

De hecho, se trata de una E.D.O. del tipo Euler-Cauchy, no homogénea, puesto que multiplicando ambos miembros por x, se tiene la expresión:

$4x^3 \cdot y''' - 15x \cdot y' = 4x$; haciendo el cambio de variable:

$x = e^t$; $dx = e^t \cdot dt$; $t = \ln x$; y las derivadas sucesivas:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}; \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right);$$
$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

por aplicación de la regla de la cadena (ver capítulo 9 "Complementos"), con lo que substituyendo se tiene que:

$$4 \cdot \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dt}\right) - 15\frac{dy}{dt} = 4 \cdot e^t; \quad 4 \cdot \frac{d^3y}{dt^3} - 12 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - 7\frac{dy}{dt} = 4 \cdot e^t;$$

que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la ecuación característica de la homogénea:

$4\lambda^3 - 12\lambda^2 - 7\lambda = 0$; $\lambda_1 = 0$, y operando por Ruffini:

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 7 = 0 ; \quad \lambda = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 112}}{8} = \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{7}{2} \\ \lambda_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea, del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^t \\ y'_p = A \cdot e^t \\ y''_p = A \cdot e^t \\ y'''_p = A \cdot e^t \end{cases}$$

que, substituyendo estos valores en la ecuación anterior, ofrece:

$4A \cdot e^t - 12A \cdot e^t - 7\, A \cdot e^t = 4 \cdot e^t = -15A \cdot e^t$; de donde se deduce que:

$A = -\dfrac{4}{15}$, con lo que: $y_p = -\dfrac{4e^t}{15}$; y la integral general buscada será:

$$y = y^* + y_p = c_1 + c_2 \cdot e^{\frac{7}{2}t} + c_3{}^{-\frac{t}{2}} - \frac{4e^t}{15} =$$

$$= \boxed{c_1 + c_2 \cdot x^{\frac{7}{2}} + \frac{c_3}{\sqrt{x}} - \frac{4x}{15}} \rightarrow \text{I.G.}$$

Otra forma alternativa de solucionarlo, sin necesidad de multiplicar previamente la ecuación por x, ni de hacer el cambio de variable: $x = e^t$, se produce al ensayar directamente soluciones homogéneas de la forma $y = x^{\lambda}$, que dan:

$$y' = \lambda \cdot x^{\lambda-1} \; ; \; y'' = \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} \; ; \; y''' = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)x^{\lambda-3}$$

y substituyendo se habrá de satisfacer:

$$4\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - 15\lambda = 0, \text{ que tiene las raíces:}$$

$$\lambda_1 = 0 \; ; \quad \lambda_2 = 7/2 \; ; \quad \lambda_3 = -½ \; ;$$

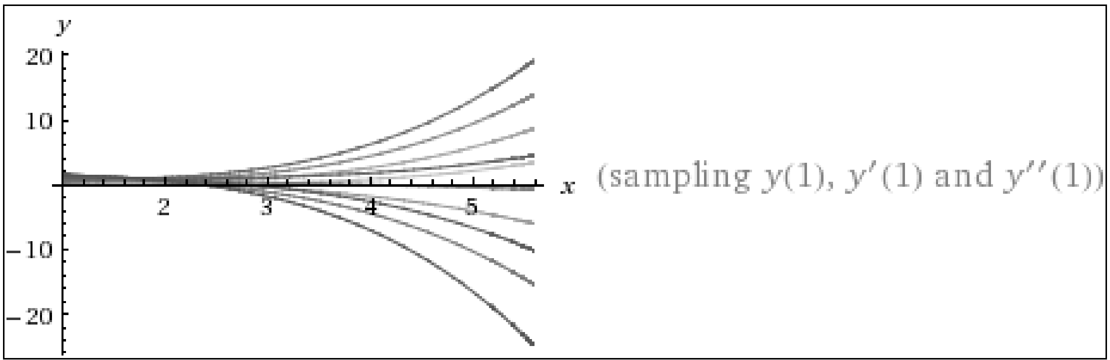
La integral general de la ecuación incompleta, pues, será:

$$y^* = c_1 + c_2 \cdot x^{7/2} + c_3 \cdot x^{-1/2}$$

Para buscar una solución particular de la completa, veamos que la transformada (después de multiplicar por x) tendría un segundo miembro de la forma $4e^t$ y en ella ensayaríamos soluciones de la forma $y = k \cdot e^t$; aquí ensayaremos, pues, soluciones de la forma $y = k \cdot x$ que da inmediatamente: $-15k = 4$, o sea: $k = -4/15$. En resumen, la integral general buscada es la siguiente:

$$\boxed{y = c_1 + c_2 \cdot x^{\frac{7}{2}} + c_3 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{15}x} \text{ , c.s.q.d.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 13

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $2y''+\dfrac{y}{x^2}=\sqrt{x}$.

Solución:

Como en el caso anterior (tipo E-C), multiplicando ahora por x^2, se tiene:

$2x^2\cdot y''+y=x^2\cdot\sqrt{x}=x^{5/2}$; haciendo el cambio de variable:

$x = e^t$; $dx = e^t\cdot dt$; $t = \ln x$; y las derivadas sucesivas:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t};\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right);\text{ o sea: } 2\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+y=e^{(5/2)\cdot t}$$

que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la ecuación característica de la homogénea:

$$2\lambda^2-2\lambda+1=0\ ;\quad \lambda=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{4}=\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{1+i}{2}\\[2mm] \lambda_2=\dfrac{1-i}{2}\end{cases}$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea, del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A\cdot e^{5t/2}\\ y'_p = (5/2)\cdot A\cdot e^{5t/2}\\ y''_p = (25/4)\cdot A\cdot e^{5t/2}\end{cases}$$

que, substituyendo estos valores en la ecuación anterior, ofrece:

$$(25/2)\cdot A\cdot e^{5t/2} - 5\cdot A\cdot e^{5t/2} + A\cdot e^{5t/2} = e^{5t/2}\ ;$$

$$\frac{17}{2}A=1;\ \boxed{A=\frac{2}{17}},\ \text{ con lo que: } y_p=\frac{2\cdot e^{5t/2}}{17};$$

pero como la ecuación homogénea posee raíces complejas conjugadas del tipo: $\alpha\pm\beta i$, con los coeficientes respectivos de las partes real e imaginaria siguientes: $\alpha = ½$ y $\beta = ½$, se tiene que:

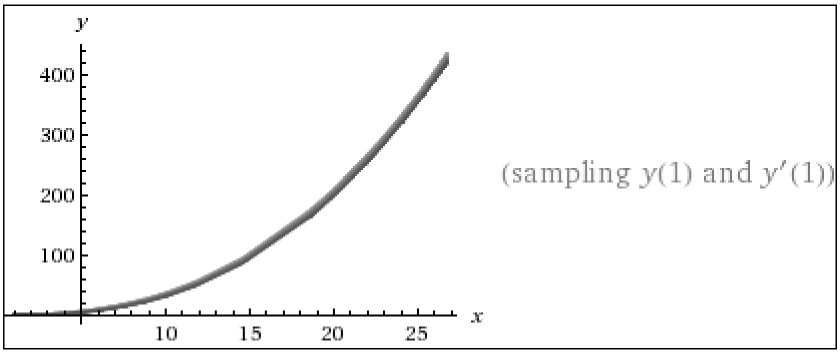
$$y^*=e^{\alpha t}(A\cdot\cos\beta t+B\cdot\operatorname{sen}\beta t)=e^{t/2}(c_1\cdot\cos\frac{t}{2}+c_2\cdot\operatorname{sen}\frac{t}{2}),$$

y la integral general buscada será:

$$y=y^*+y_p=\sqrt{x}\left(c_1\cdot\cos\frac{\ln x}{2}+c_2\cdot\operatorname{sen}\frac{\ln x}{2}\right)+\frac{2\cdot x^{5/2}}{17}=$$

$$= \boxed{\sqrt{x}\left(c_1 \cdot \cos \ln\sqrt{x} + c_2 \cdot \text{sen } \ln\sqrt{x} + \frac{2x^2}{17}\right)} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Otra forma de solucionar este problema se consigue si ensayamos en la homogénea $2y'' + \frac{y}{x^2} = 0$ soluciones de la forma $y = x^\lambda$, con las derivadas sucesivas: $y' = \lambda \cdot x^{\lambda-1}$; $y'' = \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2}$, y resulta la ecuación $2\lambda(\lambda - 1) + 1 = 0$, cuyas raíces: $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+i); \lambda_2 = \frac{1}{2}(1-i)$, dan las soluciones:

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{i}{2}} = x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}lx} = \sqrt{x}(\cos \ln\sqrt{x} + i \,\text{sen} \ln\sqrt{x}) \\ y_2 = \sqrt{x}(\cos \ln\sqrt{x} - i \,\text{sen} \ln\sqrt{x}) \end{cases}$$

La integral general de la ecuación incompleta u homogénea será, pues: $y^* = \sqrt{x}(c_1 \cdot \cos \ln\sqrt{x} + c_2 \cdot \text{sen } \ln\sqrt{x})$. Como el segundo miembro, después de multiplicado por x^2 y transformado sería de la forma $e^{(5/2)t}$ ensayaríamos una solución particular del tipo: $y_p = k \cdot e^{(5/2)t}$; por tanto, corresponde ensayar aquí: $y_p = k \cdot x^{5/2}$, y se obtiene: $2k \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + kx^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$; $k = 1 : (17/2) = 2/17$. Con lo que se deduce la I.G.:

$$y = y^* + y_p = \sqrt{x}\left(c_1 \cdot \cos \ln\sqrt{x} + c_2 \cdot \text{sen} \ln\sqrt{x} + \frac{2x^2}{17}\right), \text{ c.s.q.d.}$$

Ejemplo 14

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $x^2 \cdot y'' + 4x \cdot y' + 2y = 1/x$.

Solución:

Se trata de una E.D.O. del tipo Euler-Cauchy, no homogénea, por lo que haremos, como siempre, el cambio de variable:

$$x = e^t \; ; \quad dx = e^t \cdot dt \; ; \quad t = \ln x \; ; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} \; ; \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

con lo que substituyendo en la ecuación inicialmente planteada, resultará que:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t} \; ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t} \; ;$$

que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \; ; \quad \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo: $y_p = A \cdot t \cdot e^{-t}$, puesto que -1 es raíz de la ecuación característica de orden o grado de multiplicidad 1, con lo que:

$$\begin{cases} y'_p = A \cdot e^{-t} - A \cdot t \cdot e^{-t} = A(e^{-t} - t \cdot e^{-t}) \\ y''_p = A(-e^{-t} - e^{-t} + t \cdot e^{-t}) = A(-2 \cdot e^{-t} + t \cdot e^{-t}) = A \cdot e^{-t}(t - 2) \end{cases}$$

que, substituyendo estos valores en la ecuación anterior, ofrece:

$A \cdot t \cdot e^{-t} - 2A \cdot e^{-t} + 3A \cdot e^{-t} - 3t \cdot A \cdot e^{-t} + 2A \cdot t \cdot e^{-t} = e^{-t}$; de donde se deduce que:

$A \cdot e^{-t} = e^{-t}$; $\boxed{A = 1}$; con lo que: $y_p = t \cdot e^{-t}$;

y la integral general buscada vendrá dada por:

$$y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{-2t} + t \cdot e^{-t} = \boxed{\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{\ln x}{x}} \rightarrow \text{I.G.}$$

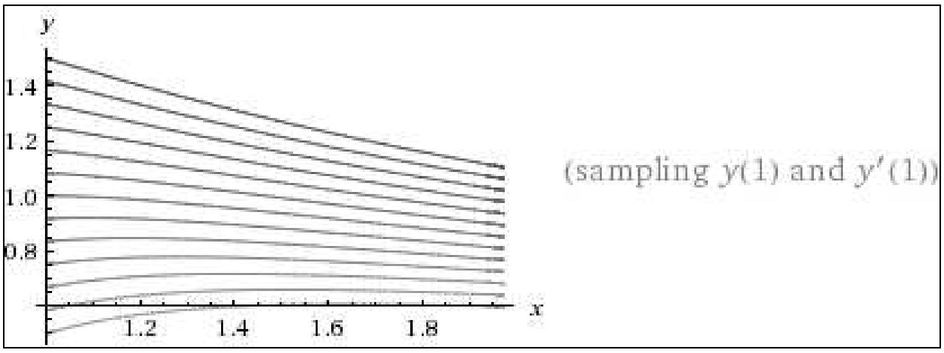
Otra forma alternativa de solucionar esta ecuación diferencial, sería realizar el ensayo $y = x^\lambda$, con las derivadas sucesivas:

$$y' = \lambda \cdot x^{\lambda-1} \; ; \; y'' = \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} \; ,$$

que conduce a la ecuación: $\lambda(\lambda - 1) + 4\lambda + 2 = 0$, que tiene las raíces: -1, -2; por tanto, $y^* = c_1 \cdot x^{-1} + c_2 \cdot x^{-2}$ es la integral de la homogénea. Como el segundo miembro es solución de la homogénea no podemos ensayar aquí una expresión del tipo k/x. En la transformada probaríamos una solución particular del tipo $k \cdot t \cdot e^{-t}$; ensayaremos, pues, aquí una solución de la forma $y_p = k \cdot x^{-1} \cdot \ln x$, con lo que se obtiene fácilmente k = 1 y la integral general buscada será, efectivamente:

$$y = y^* + y_p = c_1 \cdot x^{-1} + c_2 \cdot x^{-2} + x^{-1} \ln x \; , \text{ c.s.q.d.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 15

Resolver la ecuación diferencial ordinaria siguiente:
$x^4 \cdot y^{IV} - 11x^2 \cdot y^{II} + 49xy^{I} - 81y = 0$.

Solución:

Se trata de una E.D.O. del tipo Euler-Cauchy, homogénea, por lo que haremos el cambio de variable: $x = e^t$; $dx = e^t \cdot dt$; $t = \ln x$; y las derivadas sucesivas siguientes mediante la aplicación de la "regla de la cadena" (ver capítulo 9 de "Complementos"):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}; \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right);$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right);$$

$$y^{IV} = \frac{d^4y}{dx^4} = e^{-4t}\left(\frac{d^4y}{dt^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} + 11\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt}\right)$$

, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se obtiene la expresión:

$$\frac{d^4y}{dt^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} + 11\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} - 11\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 49\frac{dy}{dt} - 81y = 0 \,;$$

$$\frac{d^4y}{dt^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} + 54\frac{dy}{dt} - 81y = 0 \,,$$

que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 54\lambda - 81 = 0 \; ; \text{ donde: } \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3 \text{ (raíz triple)} \\ \lambda_4 = -3 \end{cases}$$

con lo que la integral general buscada vendrá dada por la expresión:

$$y = c_1\cdot e^{3t} + c_2\cdot t\cdot e^{3t} + c_3\cdot t^2\cdot e^{3t} + c_4\cdot e^{-3t} =$$

$$= c_1\cdot x^3 + c_2\cdot x^3\cdot \ln x + c_3\cdot x^3\cdot \ln^2 x + c_4/x^3 =$$

$$= \boxed{x^3(c_1 + c_2\cdot \ln x + c_3\cdot \ln^2 x) + c_4/x^3} \rightarrow \text{I.G.}$$

Tal como ya hemos expuesto en ejercicios precedentes, se consigue una resolución más simplificada del presente ejercicio realizando el ensayo: $y = x^{\lambda}$, que conduce a:

$$\begin{cases} y^{I} = \lambda\cdot x^{\lambda-1} \\ y^{II} = \lambda(\lambda-1)\cdot x^{\lambda-2} \\ y^{III} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdot x^{\lambda-3} \\ y^{IV} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\cdot x^{\lambda-4} \end{cases}$$

y substituyendo estos valores en la ecuación inicial, se obtiene que:

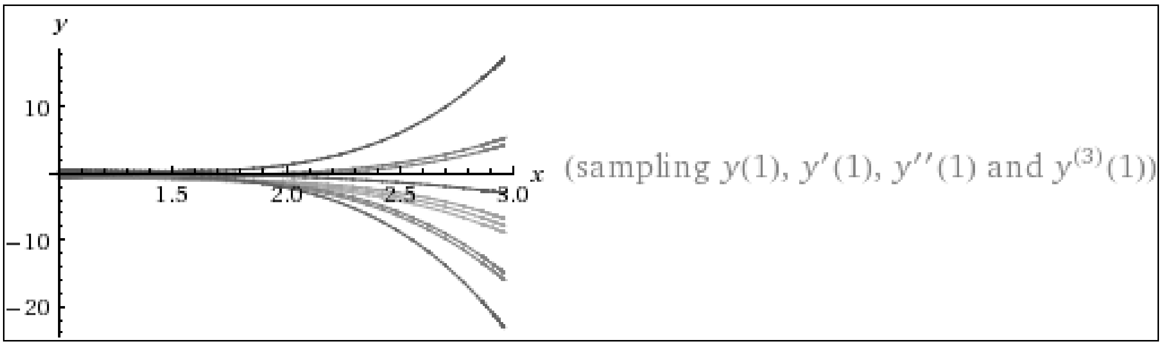
$$x^4\cdot\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\cdot x^{\lambda-4} - 11x^2\cdot\lambda(\lambda-1)\cdot x^{\lambda-2} + 49\cdot x\cdot\lambda\cdot x^{\lambda-1} - 81x^{\lambda} = 0;$$

$$\text{de donde: } \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) - 11\lambda(\lambda-1) + 49\lambda - 81 = 0,$$

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 54\lambda - 81 = 0,$$

que resulta ser la misma ecuación característica del caso anterior, por lo que se deduce también, obviamente, el mismo resultado, c.s.q.d.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente es la siguiente:



Ejemplo 16

Resolver la ecuación diferencial ordinaria:

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 18x\cdot\ln x\ .$$

Solución:

Este ejercicio ya ha sido resuelto anteriormente mediante los ejemplos 1 y 2. No obstante, aquí incorporaremos algunas aclaraciones del proceso allí seguido. De hecho, se trata de una E.D.O. del tipo Euler-Cauchy, no homogénea, puesto que se tiene que:

$x^3 \cdot y''' + 3x^2 y'' - 2x \cdot y' + 2y = 18x \cdot \ln x$; haciendo el cambio de variable:

$x = e^t$; $dx = e^t \cdot dt$; $t = \ln x$; y las derivadas sucesivas:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}; \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right);$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

por aplicación de la denominada "regla de la cadena", con lo que substituyendo en la ecuación dada se tiene que: $\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$; que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la ecuación característica de la homogénea: $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$; con las raíces reales: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -2$, y la solución de la ecuación homogénea correspondiente es, después de realizadas las substituciones pertinentes:

$$y = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t + c_3 \cdot e^{-2t} = c_1 x + c_2 x \cdot \ln x + \frac{c_3}{x^2}$$

Vamos a aplicar, ahora, el método de variación de constantes al objeto de resolver la ecuación completa:

$$y' = \frac{dy}{dx} = c_1 + c_2 \ln x + c_2 - \frac{2c_3}{x^2} \qquad \text{(1), después de hacer:}$$

$$\frac{dc_1}{dx} x + \frac{dc_2}{dx} x \cdot \ln x + \frac{dc_3}{dx} \times \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \text{(2). Derivando de nuevo:}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c_2}{x} + \frac{6c_3}{x^4} \qquad \text{(3), después de hacer:}$$

$$\frac{dc_1}{dx} + \frac{dc_2}{dx}(1 + \ln x) - 2\frac{dc_3}{dx} \cdot \frac{1}{x^3} = 0 \qquad \text{(4). Finalmente:}$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{c_2}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dc_2}{dx} - \frac{24c_3}{x^5} + \frac{6}{x^4} \cdot \frac{dc_3}{dx} \quad (5)$$

Substituyendo (1), (3) y (5) en la ecuación dada se tiene que:

$$x^2 \frac{dc_2}{dx} + \frac{6}{x} \cdot \frac{dc_3}{dx} = 18x \cdot \ln x \qquad (6)$$

Resuelto el sistema formado por las ecuaciones (2), (4) y (6), tomando como incógnitas:

$$\frac{dc_1}{dx},\ \frac{dc_2}{dx}\ \text{y}\ \frac{dc_3}{dx},\ \text{resulta que:}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dc_1}{dx} = -\dfrac{2}{x}\ln x - \dfrac{6}{x}(\ln x)^2 \\ \dfrac{dc_2}{dx} = \dfrac{6}{x}\ln x \\ \dfrac{dc_3}{dx} = 2x^2 \ln x \end{cases}$$

que integradas ofrecen, respectivamente:

$$c_1 = -2\int \frac{\ln x}{x}dx - 6\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = -2\frac{1}{2}(\ln x)^2 - 6\frac{1}{3}(\ln x)^3 + K_1 = K_1 - (\ln x)^2 - 2(\ln x)^3\ ;$$

$$c_2 = 6\int \frac{\ln x}{x}dx = 6\frac{1}{2}(\ln x)^2 + K_2 = K_2 + 3(\ln x)^2\ ;$$

$$c_3 = 2\int x^2 \cdot \ln x \cdot dx = (\text{por partes}) = 2 \cdot x^3 \cdot \ln x - 2\int x \cdot (2x \cdot \ln x + x) \cdot dx =$$

$$= 2x^3 \cdot \ln x - 2\int 2x^2 \cdot \ln x \cdot dx - 2\int x^2 \cdot dx = 2x^3 \cdot \ln x - 4\int x^2 \cdot \ln x \cdot dx - \frac{2x^3}{3}.$$

$$\text{Haciendo}: I = \int x^2 \cdot \ln x \cdot dx, \text{se tiene que}: 2I = 2x^3 \cdot \ln x - 4I - \frac{2x^3}{3}; \text{de donde}:$$

$$6I = 2x^3 \cdot \ln x - \frac{2x^3}{3}; I = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}; \text{y entonces}:$$

$$c_3 = 2I = K_3 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^3 \ln x,$$

y substituidas todas ellas en la solución de la homogénea, permiten escribir:

$$y = \left[K_1 - (\ln x)^2 - 2(\ln x)^3\right]x + \left[K_2 + 3(\ln x)^2\right]x \cdot \ln x + \left[K_3 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^3 \cdot \ln x\right]\frac{1}{x^2} =$$

$$= \boxed{x \cdot \ln^3 x + C_1 \cdot x \cdot \ln x - x \cdot \ln^2 x + C_2 \cdot x + C_3/x^2}$$

que es la integral general buscada, en donde se ha efectuado, después de operar convenientemente, la asimilación de las tres constantes arbitrarias:

$$C_1 = K_2 + \frac{2}{3};\ C_2 = K_1 - \frac{2}{9};\ C_3 = K_3\,.$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones ya ha sido expuesta al final del ejemplo 2, por lo que la obviaremos aquí.

Ejemplo 17

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y''-\frac{2y}{x^2}=0$.

Solución:

Multiplicando por x^2 se tiene una ecuación del tipo Euler-Cauchy, puesto que resulta la expresión: $x^2 \cdot y'' - 2y = 0$; haciendo, ahora, el cambio de variable:

$$x = e^t \ ; \quad dx = e^t \cdot dt \ ; \quad t = \ln x \ ;$$

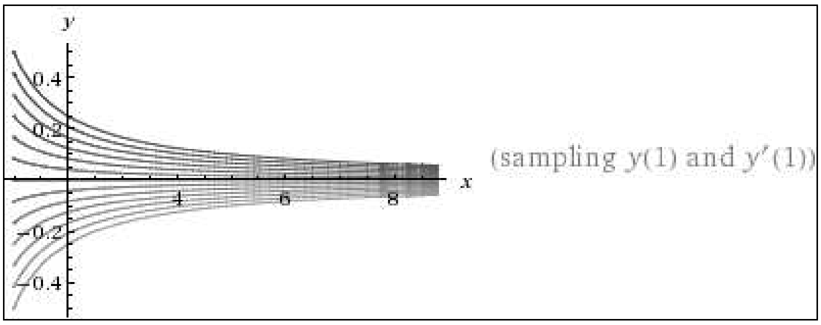
$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}; \quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

con lo que substituyendo: $\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2y=0$; que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda^2-\lambda-2=0 \ ; \quad \lambda=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases}\lambda_1=2\\ \lambda_2=-1\end{cases}; \text{ y se tiene la solución buscada:}$$

$$y=c_1\cdot e^{2t}+c_2\cdot e^{-t}=\boxed{c_1\cdot x^2+\frac{c_2}{x}}\rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 18

Resolver la ecuación diferencial y el problema de valor inicial siguiente:

$$x^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0, \quad \text{con } \begin{cases}y(0)=0\\ y'(0)=2\\ y''(0)=4\end{cases}$$

Solución:

a) Se trata de una EDO del tipo Euler-Cauchy, por lo que efectuaremos el cambio de variable habitual:

$$x = e^t \; ; \quad dx = e^t \cdot dt \; ; \quad t = \ln x \; ; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} ; \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

con lo que substituyendo estas expresiones en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0 ; \text{ con lo que resulta: } \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0 ;$$

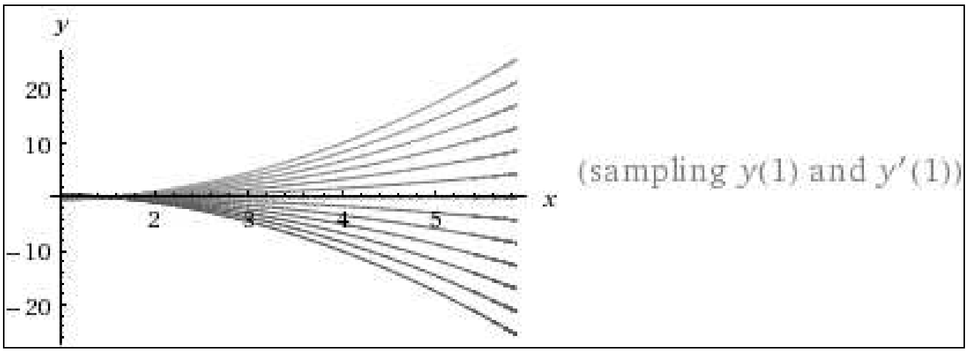
que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \; ; \quad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

y la integral general vendrá dada por la expresión:

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^t = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x}.$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



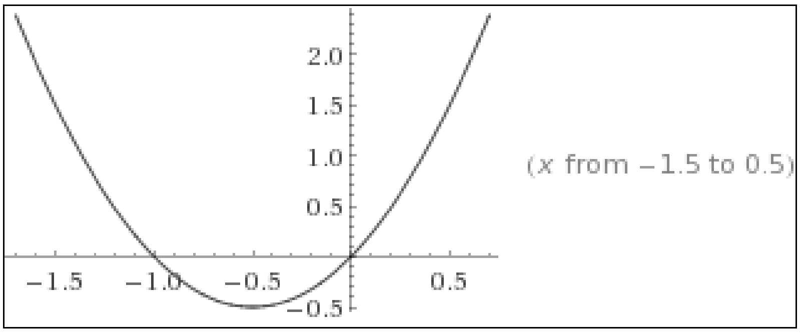
b) Las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

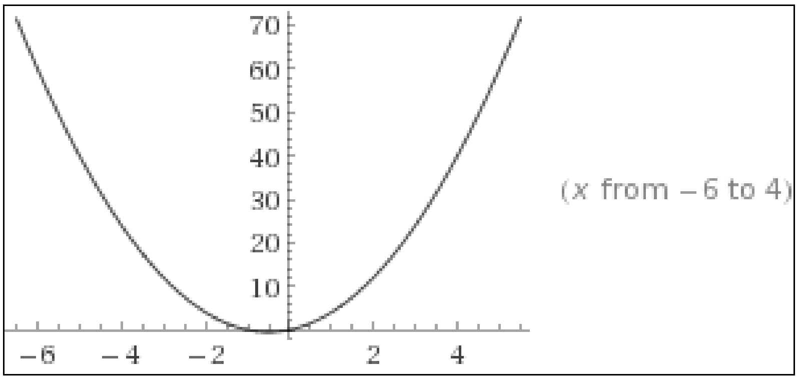
$$\begin{cases} y(0) = 0 \; ; \\ y'(x) = 2c_1x + c_2 \; ; \quad y'(0) = c_2 = 2 \\ y''(x) = 2c_1 \; ; \; y''(0) = 2c_1 = 4 \; ; \; c_1 = 2 \; ; \end{cases}$$

por lo que, con las condiciones iniciales prefijadas, se obtendría la solución:

$$\boxed{y = 2x^2 + 2x = 2(x + x^2)}$$

La representación gráfica correspondiente de esta solución particular pedida es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





5. PROBLEMAS DE VALOR INICIAL Y DE FRONTERA

5.1. INTRODUCCIÓN

En la mayoría de las aplicaciones a las ciencias puras o aplicadas se está interesado no precisamente en la obtención de la solución general de una ecuación diferencial, sino en el hallazgo de una solución particular que satisfaga ciertas condiciones dadas. Esto da origen a los problemas de valor inicial (PVI) o de frontera (PVF) que vamos a tratar a continuación, aunque la resolución de algunos de ellos ya se ha contemplado en epígrafes precedentes con motivo de la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales de órdenes diversos como la planteada justamente en el ejemplo anterior.

5.2. PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Un problema de valor inicial o de Cauchy consta de una ecuación diferencial de orden *n* y de *n* condiciones iniciales impuestas a la función desconocida y a sus (n-1) primeras derivadas en un valor de la variable independiente. Es decir:

$$\begin{aligned}
\frac{d^n y}{dx^n} &= f(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}) \\
y(x_0) &= y_0 \\
y^{(1)}(x_0) &= y_1 \\
y^{(2)}(x_0) &= y_2 \\
\vdots &= \vdots \\
y^{(n)}(x_0) &= y_{n-1}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1

Una partícula P se mueve a lo largo del eje OX de manera tal que su aceleración en cualquier tiempo t ≥ 0 está dada por la expresión:

$$a(t) = 8 - 4t + t^2 \ (m/seg^2)$$

Deseamos encontrar la posición x(t) de la partícula en cualquier tiempo t, suponiendo que inicialmente la partícula está localizada en x = 1 m. y está viajando a una velocidad de v = -3 m/seg. (parecidos ejemplos encontraremos resueltos en el Cap. 8 de "Aplicaciones diversas").

Solución:

Hay que recordar que la primera derivada de la posición nos da la velocidad y la segunda derivada la aceleración. De ello se deduce que el problema de valor inicial de tal suerte planteado sería el siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 8 - 4t + t^2 \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) &= -3 \end{aligned}}$$

Integrando con respecto a x obtenemos la expresión:

$$\frac{dx}{dt} = 8t - 2t^2 + \frac{t^3}{3} + A$$

y usando la condición de que x'(0) = -3 m/seg. podemos hallar inmediatamente que la constante A = -3, con lo cual la velocidad en cualquier tiempo t sería:

$$\frac{dx}{dt} = 8t - 2t^2 + \frac{t^3}{3} - 3$$

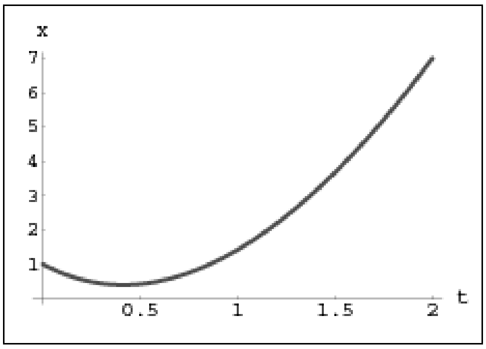
Integrando de nuevo, se tendrá que:

$$x(t) = 4t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4 - 3t + B$$

y usando la condición de que x(0) = 1, podemos determinar que B = 1 y obtener, en consecuencia, la posición de la partícula en cualquier tiempo t mediante la integral general:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + 4t^2 - 3t + 1}$$

La gráfica de la posición x(t) se muestra en la figura siguiente por medio de la gráfica de la posición de la partícula *versus* tiempo (parábola o función polinómica de 4º grado). Esto es:



Ejemplo 2

Una familia o haz de curvas tiene la propiedad de que la pendiente de la recta tangente en el punto (x,y) está dada por x/y. Se pide hallar el miembro de esta familia que pasa por el punto de coordenadas cartesianas rectangulares (1,2).

Solución:

El problema de valor inicial asociado es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \text{ con: } y(1) = 2.$$

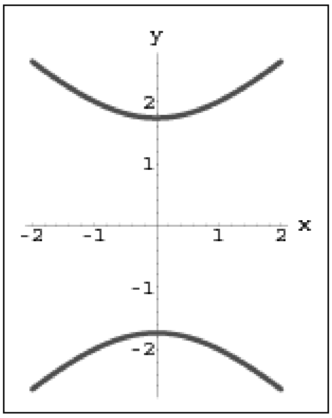
Para resolver la ecuación diferencial referenciada debemos separar variables e integrar, con lo que resultará:

$$ydy = xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C$$

Y usando la condición inicial y(1) = 2 obtenemos que K = 3, puesto que:

$$y^2 - x^2 = 2C = K; \; y(x) = \pm\sqrt{K + x^2} \; ; \; y(1) = \pm\sqrt{K+1} = 2; \text{ de donde } K = 3,$$

con lo cual la curva buscada es: $y^2 - x^2 = 3$, cuya solución particular se muestra gráficamente representada en la figura siguiente:



Su clasificación geométrica conduce a la de una cónica no degenerada, puesto que su invariante proyectivo o cúbico es:

$$I_3 = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Además, el invariante afín o cuadrático (adjunto o cofactor del elemento a_{33}) resulta ser:

$$I_2 = A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

luego se trata de una hipérbola real en que, además, el invariante métrico o lineal viene dado por: $I_1 = a_{11} + a_{22} = -1 + 1 = 0$, por lo que se trata de una hipérbola equilátera con centro en el origen de las coordenadas cartesianas rectangulares (0,0). Normalmente, la ecuación general de esta cónica se pasará a la forma reducida mediante una traslación y un giro. En este caso, debemos hallar las raíces de la ecuación:

$$r^2 - I_1 \cdot r + I_2 = 0, \text{ esto es: } r^2 - 1 = 0, \text{ de donde: } \alpha = 1;\ \beta = -1;$$

y la ecuación reducida quedará así: $\alpha \cdot y^2 + \beta \cdot x^2 = -\frac{I_3}{I_2}$; o sea: $y^2 - x^2 = 3$, c.s.q.d.

5.3. PROBLEMAS DE VALOR FRONTERA

En este caso, un problema de valores en la frontera o de Dirichlet consta de una ecuación diferencial ordinaria de orden *n* y de *n* condiciones de frontera impuestas sobre la función desconocida en *n* valores de la variable independiente. Es decir:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= f\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y(x_0) &= y_1 \\ y(x_1) &= y_2 \\ \vdots &= \vdots \\ y(x_{n-1}) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

En muchas áreas de las Ciencias Básicas y de la Ingeniería existen problemas donde es necesario encontrar la solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO). Éstas describen fenómenos que cambian frecuentemente con el tiempo.

Comúnmente, una solución de interés está determinada especificando los valores de todas sus componentes en un punto concreto de abscisa: x = a.

Esto es un Problema de Valor Inicial. Sin embargo, en muchas otras ocasiones, una solución está determinada en más de un punto. Un problema de este tipo es denominado como Problema de Valor de Frontera (PVF). Un PVF muy trabajado en la actualidad es el de segundo orden.

Los PVF de segundo orden suelen ser comunes en todas las ramas de las Ciencias Experimentales. Por ejemplo, en Física, las leyes de Newton y muchas otras se expresan como un problema de este tipo; en Biología aparecen en el modelado de la dinámica de poblaciones; en la Química surgen en la evaluación de las concentraciones de diversos reactivos durante una reacción, etc.

A lo largo de los años se han desarrollado diversas técnicas para encontrar la solución analítica a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y por ende, la solución de los PVF que surgen de los modelos anteriormente mencionados. Sin embargo, resulta habitual que en la mayoría de los casos no se conozca la solución analítica de las mismas, y solo estudios cualitativos de dichas ecuaciones son presentados en la literatura matemática existente al respecto. Debido a esto, en la práctica, resulta imperioso usar métodos numéricos para ofrecer aproximaciones numéricas de la solución (aproximaciones que pueden ser tan buenas como se quiera).

Hoy en día, en la literatura matemática, existen muchos métodos que ayudan a estimar la solución de un PVF de segundo orden, que se concentran en el estudio de cinco de ellos, a saber: el método del Disparo y el de las Diferencias Finitas, considerados ambos clásicos dentro de la literatura *ad hoc*; el método de los Elementos Finitos y el Galerkin Discontinuo, los cuales se fundamentan en resultados del Análisis Funcional, y, por último, el método Bvp4c, que usa la idea de superposición y se encuentra implementado en el lenguaje de cálculo técnico Matlab[4].

Ejemplo 1

Aquí, como en el caso de un problema anterior, la partícula P se mueve a lo largo del eje OX de manera tal que su aceleración, en cualquier tiempo $t \geq 0$, está dada por la expresión:

$$a(t) = 8 - 4t + t^2 \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

[4] **MATLAB** (**mat**rix **lab**oratory) is a numerical computing environment and fourth-generation programming language. Developed by MathWorks, MATLAB allows matrix manipulations, plotting of functions and data, implementation of algorithms, creation of user interfaces, and interfacing with programs written in other languages, including C, C++, Java, and Fortran. Although MATLAB is intended primarily for numerical computing, an optional toolbox uses the MuPAD symbolic engine, allowing access to symbolic computing capabilities. An additional package, Simulink, adds graphical multi-domain simulation and Model-Based Design for dynamic and embedded systems. In 2004, MATLAB had around one million users across industry and academia. MATLAB users come from various backgrounds of engineering, science, and economics. MATLAB is widely used in academic and research institutions as well as industrial enterprises.

Se trata ahora de determinar la posición x(t) de la partícula en cualquier tiempo t, suponiendo que inicialmente la partícula está localizada en x = 1 m. y en t = 2 segundos está situada en x = 7 m.

Solución:

El problema de valores de frontera asociado es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} &= 8-4t+t^2 \\ x(0) &= 1 \\ x(2) &= 7 \end{cases}$$

Integrando dos veces obtenemos que la posición de la partícula en cuestión está dada por la expresión:

$$x(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + 4t^2 + At + B$$

Evaluando las condiciones de frontera que nos han dado en el enunciado del problema, obtenemos el siguiente sencillo sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} B &= 1 \\ 2A+B &= -5 \end{cases}$$

de donde se deduce que: A = -3 y B = 1. Y así, la posición de la partícula en cualquier instante del tiempo está dada por la integral general siguiente (al igual que en el caso anterior mencionado):

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + 4t^2 - 3t + 1}$$

Tendremos ocasión de desarrollar algún ejercicio más de este tipo con motivo del estudio más general de los problemas de contorno (ver capítulo 9 de "Complementos").

6. SOLUCIONES OBTENIDAS MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

6.1. INTRODUCCIÓN

Podemos considerar como ecuaciones diferenciales clásicas las de Bessel[5] y las de Legendre[6], que poseen gran belleza estética y numerosas

[5] The Bessel functions, first defined by the mathematician Daniel Bernouilli and generalized by Friedrich Bessel, are canonical solutions *y*(*x*) of Bessel's differential equation:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-\alpha^2)y = 0$$

aplicaciones físicas, que aparecen, respectivamente, en la resolución del problema de Dirichlet[7] en coordenadas cilíndricas y esféricas, y cuyo tratamiento no consideramos de especial interés en este curso introductorio, objeto del presente libro, por lo que obviaremos aquí su presentación pormenorizada.

Se ha visto en apartados anteriores cómo resolver algunas ecuaciones lineales de orden *n*: las de coeficientes constantes y algunas de coeficientes variables, como las de Euler-Cauchy o aquellas de las que se conoce una solución particular de la correspondiente homogénea. Pero, en general, no se ha contemplado cómo resolver las ecuaciones lineales con coeficientes

for an arbitrary real or complex number α (the order of the Bessel function); the most common and important cases are for α an integer or half-integer. Although α and $-\alpha$ produce the same differential equation, it is conventional to define different Bessel functions for these two orders (e.g., so that the Bessel functions are mostly smooth functions of α). Bessel functions are also known as cylinder functions or cylindrical harmonics because they are found in the solution to Laplace's equation in cylindrical coordinates. Bessel's equation arises when finding separable solutions to Laplace's equation and the Helmholtz equation in cylindrical or spherical coordinates. Bessel functions are therefore especially important for many problems of wave propagation and static potentials. In solving problems in cylindrical coordinate systems, one obtains Bessel functions of integer order ($\alpha = n$); in spherical problems, one obtains half-integer orders ($\alpha = n + ½$).

[6] Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Most of his work was brought to perfection by others: his work on roots of polynomials inspired Galois theory; Abel's work on elliptic functions was built on Legendre's; some of Gauss' work in statistics and number theory completed that of Legendre. He developed the least squares method, which has broad application in linear regression, signal processing, statistics, and curve fitting; this was published in 1806 as an appendix to his book on the paths of comets. Today, the term "least squares method" is used as a direct translation from the French "méthode des moindres carrés". In 1830 he gave a proof of Fermat's last theorem for exponent $\boldsymbol{n = 5}$, which was also proven by Dirichlet in 1828. In number theory, he conjectured the quadratic reciprocity law, subsequently proved by Gauss; in connection to this, the Legendre symbol is named after him. He also did pioneering work on the distribution of primes, and on the application of analysis to number theory. His 1796 conjecture of the Prime number theorem was rigorously proved by Hadamard and de la Vallée-Poussin in 1898. Legendre did an impressive amount of work on elliptic functions, including the classification of elliptic integrals, but it took Abel's stroke of genius to study the inverses of Jacobi's functions and solve the problem completely. He is known for the Legendre transformation, which is used to go from the Lagrangian to the Hamiltonian formulation of classical mechanics. In thermodynamics it is also used to obtain the enthalpy and the Helmholtz and Gibbs (free) energies from the internal energy. He is also the name giver of the Legendre polynomials, solutions to Legendre's differential equation, which occur frequently in physics and engineering applications, *e.g.* electrostatics. Legendre is best known as the author of *Éléments de géométrie*, which was published in 1794 and was the leading elementary text on the topic for around 100 years. This text greatly rearranged and simplified many of the propositions from Euclid's Elements to create a more effective textbook.

[7] Peter Gustav Lejeune Dirichlet, (born Feb. 13, 1805, Düren, French Empire [now in Germany]—died May 5, 1859, Göttingen, Hanover), German mathematician who made valuable contributions to number theory, analysis, and mechanics. He taught at the universities of Breslau (1827) and Berlin (1828–55) and in 1855 succeeded Carl Friedrich Gauss at the University of Göttingen. Dirichlet made notable contributions still associated with his name in many fields of mathematics. In number theory he proved the existence of an infinite number of primes in any arithmetic series $a + b, 2a + b, 3a + b, \ldots, na + b,$ in which a and b are not divisible by one another. He developed the general theory of units in algebraic number theory. His *Vorlesungen über Zahlentheorie* (1863; "Lectures Concerning Number Theory"), with later addenda, contains some material important to the theory of ideals. In 1837 Dirichlet proposed the modern concept of a function $y = f(x)$ in which for every x, there is associated with it a unique y. In mechanics he investigated the equilibrium of systems and potential theory, which led him to the Dirichlet problem concerning harmonic functions with prescribed boundary values. His *Gesammelte Werke* (1889, 1897; "Collected Works") was published in two volumes.

variables, algunas de las cuales aparecen ligadas a importantes problemas de la Física, como por ejemplo las ecuaciones de Legendre, Hermite, Airy o Stokes, Laguerre[8], Tchebyshev[9], Bessel, etc. que son de coeficientes polinómicos y que podemos ver conjuntamente sintetizadas en el siguiente cuadro:

TIPO	ECUACIÓN DIFERENCIAL
Tchebyshev	$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$
Hermite	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$
Laguerre	$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$
Legendre	$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$
Bessel	$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$
Airy / Stokes	$y'' - xy = 0$

Además, las ecuaciones hasta ahora vistas, generalmente tienen soluciones expresables en términos de un número finito de funciones elementales (polinomios, exponenciales, trigonométricas, etc., o inversas de éstas). Otras veces, aún sabiendo resolver la ecuación, había que expresar la solución por medio de una integral.

Pero, en general, las soluciones no pueden expresarse tan fácilmente. Es necesario, por tanto, buscar otros modos de expresar las soluciones de ecuaciones lineales de 2º orden, que propicien a su vez nuevos métodos de resolución de las mismas.

En este epígrafe del presente capítulo de nuestro libro se estudiará un método de resolución basado en la representación de soluciones mediante el método de las series de potencias que puede revestir gran utilidad en ciertos casos como tendremos ocasión de comprobar mediante la resolución de algunos ejemplos.

---

[8] The sequence of Edmond Laguerre (1834-1886) polynomials is a Sheffer sequence. The rook polynomials in combinatorics are more or less the same as Laguerre polynomials, up to elementary changes of variables. The Laguerre polynomials arise in quantum mechanics, in the radial part of the solution of the Schrödinger equation for a one-electron atom. Physicists often use a definition for the Laguerre polynomials that is larger, by a factor of *n*!, than the definition used here. (Furthermore, various physicist use somewhat different definitions of the so-called associated Laguerre polynomials, for instance in [Modern Quantum mechanics by J.J. Sakurai] the definition is different than the one found below. A comparison of notations can be found in [Introductory quantum mechanics by R.L. Liboff].)

[9] Pafnuty Tchebyshev (1821-1894) studied at the college level at Moscow University, where he earned his bachelor's degree in 1841. At Moscow University, Tchebyshev was a graduate student of Nikolai Brashman. After Tchebyshev became a professor of mathematics in Moscow himself, his two most illustrious graduate students were Andrei Andreyevich Markov (the elder) and Alexandr Lyapunov. Tchebyshev is considered to be a founding father of Russian mathematics. Among his well-known students were the prolific mathematicians Dmitry Grave, Aleksandr Korkin, Aleksandr Lyapunov, and Andrei Markov. According to the Mathematics Genealogy Project, Tchebyshev has 7.483 mathematical "descendants" as of 2010. The lunar crater Tchebyshev and the asteroid 2010 Tchebyshev were named in his honour.

6.2. SOLUCIÓN EN EL ENTORNO DE UN PUNTO ORDINARIO

6.2.1. Definiciones

Se va a considerar, a continuación, el caso de la ecuación diferencial lineal homogénea de 2º orden siguiente:

$$\boxed{P(x)\cdot y'' + Q(x)\cdot y' + R(x)\cdot y = 0} \qquad \textbf{[1]}$$

o bien expresándola en forma canónica:

$$\boxed{y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = 0} \qquad \textbf{[1´]}$$

Un punto cualquiera x_0 se llama *punto ordinario* de [1] o [1´] si las funciones: $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ son *analíticas* en x_0, es decir, si p(x) y q(x) tienen desarrollos en serie de Taylor[10] en torno a x_0 con radios respectivos de convergencia R_1 y R_2 no nulos. Si cualesquiera de estas funciones no es analítica en x_0, entonces x_0 es un *punto singular*. Una función cualquiera f(x) es *analítica* en x_0 si su serie de Taylor alrededor de x_0, a saber:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x - x_0)^n}{n!}$$

converge a f(x) en alguna vecindad de x_0. Los polinomios, las funciones trigonométricas directas sen x y cos x, así como la exponencial e^x, son analíticos en cualquier lugar, con lo que también lo son las sumas, diferencias y productos de estas funciones. Los cocientes de cualesquiera de estas dos funciones son analíticos en todos los puntos donde el denominador es diferente de cero.

Si P(x), Q(x), R(x) son polinomios, entonces x_0 es punto ordinario de [1] si y solo si $P(x_0) \neq 0$ (siendo [1] no simplificable). Si x_0 no es punto ordinario, como ya se ha visto, se llama *punto singular* de la ecuación [1] ó [1´].

Según el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, la simple continuidad de p(*x*) y q(*x*) en un entorno *I* de un punto x_0, es suficiente como para garantizar la existencia de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación [1´] en dicho entorno, así como para garantizar

[10] A **Taylor series** is a representation of a function as an infinite sum of terms that are calculated from the values of the function's derivatives at a single point. The concept of a Taylor series was formally introduced by the English mathematician Brook Taylor (1685-1731) in 1715. If the Taylor series is centered at zero, then that series is also called a **Maclaurin series**, named after the Scottish mathematician Colin Maclaurin (1698-1746), who made extensive use of this special case of Taylor series in the 18th century. It is common practice to approximate a function by using a finite number of terms of its Taylor series. Taylor's theorem gives quantitative estimates on the error in this approximation. Any finite number of initial terms of the Taylor series of a function is called a Taylor polynomial. The Taylor series of a function is the limit of that function's Taylor polynomials, provided that the limit exists. A function may not be equal to its Taylor series, even if its Taylor series converges at every point. A function that is equal to its Taylor series in an open interval (or a disc in the complex plane) is known as an analytic function.

la existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial definido por [1´] y las condiciones: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = b_0$, con $x_0 \in I$.

Pero si además es x_0 un punto ordinario de [1] ó [1´], las $p(x)$ y $q(x)$ no solo son continuas en *I*, sino analíticas. Y cabe preguntarse entonces si las soluciones de tal ecuación heredarán dicha propiedad. Por tanto, si x_0 es un punto ordinario de [1], surgen inmediatamente las preguntas siguientes:

- *¿Existen soluciones analíticas de [1] en un entorno de x_0 , es decir, soluciones de la forma:*

$$\boxed{y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...} \;, \quad [2]$$

Y en caso afirmativo:

- *¿Cómo se obtienen los coeficientes a_n?*
- *¿Dónde converge la serie [2]?*

Es importante, sin duda, poder responder adecuadamente a estas preguntas, pues sería absurdo intentar buscar soluciones de la forma [2], si no existen. Si existen en *I*, pueden además derivarse término a término en *I*.

Las respuestas a estas preguntas las da el siguiente teorema, que será enunciado, pero no demostrado, por razones obvias de espacio.

6.2.2. Teorema

"Si x_0 es un punto ordinario de [1] (ó [1']) entonces la solución general de [1] en un cierto entorno de x_0 puede escribirse en la forma [2] y a su vez :

$$\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 \cdot y_1(x) + a_1 \cdot y_2(x)},$$

siendo a_0 y a_1 constantes arbitrarias e $y_1(x)$ e $y_2(x)$ analíticas en un entorno I de x_0, y linealmente independientes en I".

El radio de convergencia de las series $y_1(x)$ e $y_2(x)$ es, al menos, tan grande como el mínimo de los radios de convergencia de los desarrollos en serie de $p(x)$ y $q(x)$ en torno a x_0 (es decir, al menos igual a la distancia de x_0 al punto singular más próximo de la ecuación [1], ya sea dicho punto real o complejo).

Los coeficientes a_n de la serie [2] se obtienen en términos de a_0 y a_1, substituyendo la serie genérica $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ en [1], (así como los desarrollos de p(x) y q(x) si P(x), Q(x), R(x) no son polinomios) y procediendo por el método de los coeficientes indeterminados.

6.2.3. Observaciones

a) La serie solución puede converger con radio mayor que el indicado en el teorema.

b) Si el punto ordinario es $x_0 \neq 0$, pueden simplificarse las notaciones trasladando x_0 al origen de coordenadas, mediante el cambio de variable: $x - x_0 = t$. La solución de la nueva ED resultante se puede obtener por el método de las series de potencias alrededor de t = 0. Entonces, la solución de la ecuación original se obtiene fácilmente regresando a la variable original substituyendo la ecuación de transformación del cambio de variables antedicho.

c) Según el teorema de existencia y unicidad, cada solución está determinada de manera única por los valores $y(x_0)$ e $y'(x_0)$, es decir, por a_0 y a_1. Por eso, todos los coeficientes se obtienen en términos de a_0 y a_1.

d) El método para resolver una ecuación completa del tipo: $y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = h(x)$, siendo x_0 punto ordinario y h(x) analítica en x_0, es análogo. En este caso, también hay que desarrollar h(x) en serie de potencias en torno a x_0, antes de proceder por coeficientes indeterminados. También podría resolverse en primer lugar la ecuación homogénea y actuar luego por el método de variación de constantes, o bien por reducción de orden.

e) Es claro que podría usarse un método semejante para la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

6.3. ECUACIÓN Y POLINOMIOS DE LEGENDRE

6.3.1. Definiciones

La denominada "ecuación de Legendre", de parámetro m ≥ 0, es:

$$\boxed{(1-x^2)y'' - 2xy' + m\cdot(m+1)y = 0} \qquad [3]$$

Se trata de hallar soluciones en serie de potencias de x, es decir en torno al punto $x_0 = 0$.

Sucede que: $\begin{cases} p(x) = -\dfrac{2x}{1-x^2} \\ q(x) = \dfrac{m(m+1)}{1-x^2} \end{cases}$ Ambas analíticas en $x_0 = 0$, con radio de convergencia de los respectivos desarrollos: $R_1 = R_2 = 1$.

Luego $x_0 = 0$ es un punto ordinario, existiendo solución en serie de potencias de *x*, válida, al menos para $|x| < 1$.

Sea ahora $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Substituyendo en la mencionada ecuación de Legendre, se tiene que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} m\cdot(m+1)a_n x^n \equiv 0$$

Habrán de ser nulos los coeficientes de todas las potencias de *x*, o sea:

x^0 : $\quad 2\cdot 1\cdot a_2 + m(m+1)a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\dfrac{m(m+1)}{2\cdot 1}a_0$

x^1 : $\quad 3\cdot 2\cdot a_3 - 2a_1 + m(m+1)a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\dfrac{m(m+1)-2}{3\cdot 2}a_1 = -\dfrac{(m-1)(m+2)}{3!}a_1$

....

x^n : $\quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2n\cdot a_n + m(m+1)a_n = 0$

$$a_{n+2} = -\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n \Rightarrow \boxed{a_n = -\frac{(m-n+2)(m+n-1)}{n(n-1)}a_{n-2}\ ,\forall n \ge 2}$$

Luego resultará la integral general de la EDO:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= a_0\left[1 - \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \frac{(m-2)m(m+1)(m+3)}{4!}x^4 - \ldots\right] + \\ &\quad + a_1\left[x - \frac{(m-1)(m+2)}{3!}x^3 + \frac{(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)}{5!}x^5 - \ldots\right], \forall |x| < 1 \end{aligned}}$$

, es decir, se tendrá que: $\quad y(x) = a_0\cdot y_1(x) + a_1\cdot y_2(x)$

Si m = 0, 1, 2, ..., una de las dos series es un polinomio de grado m. Dichos polinomios $p_n(x)$ son, respectivamente:

$p_0 = 1$; $p_1(x) = x$; $p_2(x) = 1 - 3x^2$; $p_3(x) = x - \dfrac{5}{3}x^3$; ... , y así sucesivamente.

Pues bien, se llama *polinomio de Legendre de orden m* y se designa con la notación $P_m(x)$, a la solución polinómica de la ecuación de Legendre de parámetro m, o sea, el múltiplo de $p_n(x)$, tal que $P_m(1) = 1$.

Será, pues:

$P_0(x) = 1$;
$P_1(x) = x$;
$P_2(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$; $P_3(x) = \dfrac{5}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x$; ... ;
y así sucesivamente.

6.3.2. Algunas propiedades

Son las siguientes:

- Los polinomios de Legendre pueden darse mediante la denominada *fórmula de Rodrigues:*

$$\boxed{P_n(x) = \frac{1}{(2n)!!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n}$$

, en la que aparece el doble factorial: $(2n)!! = 2^n \cdot n!$

- O bien mediante una *función generadora*, debida a Legendre, a saber:

$$\boxed{\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2} = P_0(x)+P_1(x)\cdot t+P_2(x)\cdot t^2+\ldots}$$

También mediante *fórmulas de recurrencia* del tipo*:*

$$\boxed{\begin{array}{l} P_{n+1}(x) = \dfrac{2n+1}{n+1}x\cdot P_n(x) - \dfrac{n}{n+1}P_{n-1}(x) \\ P'_{n+1} - P'_{n-1} = 2(n+1)\cdot P_n \end{array}}$$

- Cumplen la *relación de ortogonalidad:*

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_m(x)\cdot P_n(x)\cdot dx = \begin{cases} 0 & ,\forall m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & ,\forall m = n \end{cases}} \quad \textbf{[4]}$$

La ecuación de Legendre aparece, en fin, en varios problemas de la Física dotados de simetría esférica.

6.4. ECUACIÓN Y POLINOMIOS DE HERMITE

6.4.1. Definiciones

La denominada "ecuación de Hermite"[11] es la siguiente:

$$\boxed{y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0} \quad \textbf{[5]}$$

[11] Charles Hermite (1822-1901) made friends with important mathematicians at this time and frequently visited Joseph Bertrand. On a personal note this was highly significant for he would marry Joseph Bertrand's sister. More significantly from a mathematical point of view he began corresponding with Jacobi and, despite not shining in his formal education, he was already producing research which was ranking as a leading world-class mathematician. The letters he exchanged with Jacobi show that Hermite had discovered some differential equations satisfied by theta-functions and he was using Fourier series to study them. He had found general solutions to the equations in terms of theta-functions. Hermite may have still been an undergraduate but it is likely that his ideas from around 1843 helped Liouville to his important 1844 results which include the result now known as Liouville's theorem.

Aparece esta ecuación, por ejemplo, en la mecánica cuántica, a partir de la ecuación de Schrödinger[12] para un oscilador armónico.

Se trata ahora de obtener su solución por el método de las series potenciales, en torno al punto $x_0= 0$. El $x_0 = 0$ es un punto ordinario de la ecuación [5], pues $p(x) = -2x$, y $q(x) = 2\lambda$ son analíticas en $x = 0$. Además, los radios de convergencia de los respectivos desarrollos son ambos infinitos. Luego existe solución de la ecuación de Hermite [5], de la forma: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, que resulta válida para todo x real. Substituyendo en la ecuación [5] de Hermite, se obtiene que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot a_n x^n - 2\lambda\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0, \quad \forall x \in \{\Re\}$$

Luego, se tendrá que:

Coeficiente de 1: $\quad 2a_2 + 2\lambda a_0 = 0 \;\Rightarrow\; a_2 = -\lambda a_0$

……………………………………………………………………..

Coeficiente de x^{n-2}: $\quad n\cdot(n-1)\cdot a_n - 2(n-2)\cdot a_{n-2} + 2\lambda\cdot a_n = 0$

Relación de recurrencia: $\boxed{a_n = \dfrac{-2(\lambda+2-n)\cdot a_{n-2}}{n\cdot(n-1)}}$ $\quad \forall n \geq 2$

Luego:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= a_0\left[1 - \frac{2\lambda}{2!}x^2 + \frac{2^2\lambda(\lambda-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)}{6!}x^6 + \dots\right] + \\ &+ a_1\left[x - \frac{2(\lambda-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^5 - \frac{2^3(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{7!}x^7 + \dots\right], \forall x \end{aligned}}$$

, es decir, se tendrá, como en el caso anterior, que:

$$y(x) = a_0\cdot y_1(x) + a_1\cdot y_2(x)$$

Esta solución general de la ecuación de Hermite también puede expresarse como:

$$y(x) = c_1\, H_m(x) + c_2\, {}_1F_1\left(-\frac{m}{2}\,;\, \frac{1}{2}\,;\, x^2\right)$$

---

[12] The Schrödinger (1887-1961) equation is the fundamental equation of physics for describing quantum mechanical behaviour. It is also often called the Schrödinger wave equation, and is a partial differential equation that describes how the wave function of a physical system evolves over time. Viewing quantum mechanical systems as solutions to the Schrödinger equation is sometimes known as the Schrödinger picture, as distinguished from the matrix mechanical viewpoint, sometimes known as the Heisenberg picture.

, siendo m = λ, y: ${}_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2};\frac{1}{2};x^2\right)$ la función hipergeométrica confluente de Kummer[13]. Para λ = 0,1, 2, ..., una de las dos series es un polinomio. Dichos polinomios $h_n(x)$, para $\lambda = n$ = 0,1, 2,..., son, respectivamente:

$$h_0(x) = 1,\ h_1(x) = x,\ h_2(x) = 1 - 2x^2,\ h_3(x) = x - \frac{2}{3}x^3, \ldots,$$ y así sucesivamente.

Se *llama polinomio de Hermite de grado n*, y se designa por $\underline{H_n(x)}$, a la solución polinómica de la ecuación de Hermite de parámetro $\lambda = n$ (o sea el múltiplo de $h_n(x)$), cuyo coeficiente de x^n es 2^n. Será, por tanto:

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2,\ H_3(x) = 8x^3 - 12x, \ldots,$$ y así sucesivamente.

6.4.2. Algunas propiedades

- Los polinomios de Hermite pueden darse también mediante la denominada *fórmula de Rodrigues:*

$$\boxed{H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}}$$

- También por medio de la *función generadora*, esto es:

$$\boxed{e^{2tx - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n}$$

- O bien mediante las *fórmulas de recurrencia:*

$$\boxed{\begin{array}{l} H_{n+1}(x) = 2x \cdot H_n(x) - 2n \cdot H_{n-1}(x) \\ H_n'(x) = 2n \cdot H_{n-1}(x) \end{array}}$$

- Cumplen la *relación de ortogonalidad*, a saber*:*

---

[13] Ernst Eduard Kummer (1810-1893) made several contributions to mathematics in different areas; he codified some of the relations between different hypergeometric series, known as contiguity relations. The Kummer surface results from taking the quotient of a two-dimensional abelian variety by the cyclic group {1, −1} (an early orbifold: it has 16 singular points, and its geometry was intensively studied in the nineteenth century). See also Kummer's function, Kummer ring and Kummer sum. Kummer also proved Fermat's last theorem for a considerable class of prime exponents (see regular prime, ideal class group). His methods were closer, perhaps, to p-adic ones than to ideal theory as understood later, though the term 'ideal' arose here. He studied what were later called Kummer extensions of fields: that is, extensions generated by adjoining an *n*th root to a field already containing a primitive *n*th root of unity. This is a significant extension of the theory of quadratic extensions, and the genus theory of quadratic forms (linked to the 2-torsion of the class group). As such, it is still foundational for class field theory.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot H_m(x) \cdot H_n(x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & ,\forall m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} = \pi^{\frac{1}{2}} \cdot (2n)!!, \forall m = n \end{cases}$$

6.5. EJERCICIOS DE APLICACIÓN

La aplicabilidad de este método de las series de potencias a la resolución de las EDO no resulta en absoluto despreciable. Veamos, a continuación, algunos ejercicios representativos de ello después de haber tenido en cuenta la teoría correspondiente en los anteriores epígrafes.

Ejemplo 1

Resolver la EDO: $y'' + y = 0$.

Solución:

La ecuación propuesta se puede escribir así:

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$. Teniendo en cuenta que:

$$k = n - 2 \qquad\qquad k = n$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \left[(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_k\right] = 0 \Rightarrow C_{k+2} = \frac{-C_k}{(k+2)(k+1)}$$

Se tiene que:

$$\begin{cases} k = 1 \Rightarrow C_3 = \dfrac{-C_1}{6} \\ k = 2 \Rightarrow C_4 = \dfrac{-C_2}{12} = \dfrac{-\left(-C_0/2\right)}{12} = \dfrac{C_0}{24} \\ k = 3 \Rightarrow C_5 = \dfrac{-C_3}{20} = \dfrac{-\left(-C_1/6\right)}{20} = \dfrac{C_1}{120} \\ k = 4 \Rightarrow C_6 = \dfrac{-C_4}{30} = \dfrac{-\left(C_0/24\right)}{30} = \dfrac{-C_0}{720} \\ k = 5 \Rightarrow C_7 = \dfrac{-C_5}{42} = \dfrac{-\left(C_1/120\right)}{42} = \dfrac{-C_1}{5.040} \\ k = 6 \Rightarrow C_8 = \dfrac{-C_6}{56} = \dfrac{-\left(-C_0/720\right)}{56} = \dfrac{C_0}{40.320} \end{cases}$$

$$y = C_0 + C_1 x - \frac{C_0}{2}x^2 - \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_0}{24}x^4 + \frac{C_1}{120}x^5 - \frac{C_0}{720}x^6 - \frac{C_1}{5.040}x^7 + \frac{C_0}{40.320}x^8$$

$$\begin{cases} y_1 = C_0 - \dfrac{C_0}{2}x^2 + \dfrac{C_0}{24}x^4 - \dfrac{C_0}{720}x^6 + \dfrac{C_0}{40.320}x^8 \\ y_1 = C_0\left[1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!}\right] = C_0 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = C_0 \cdot \cos x \end{cases}$$

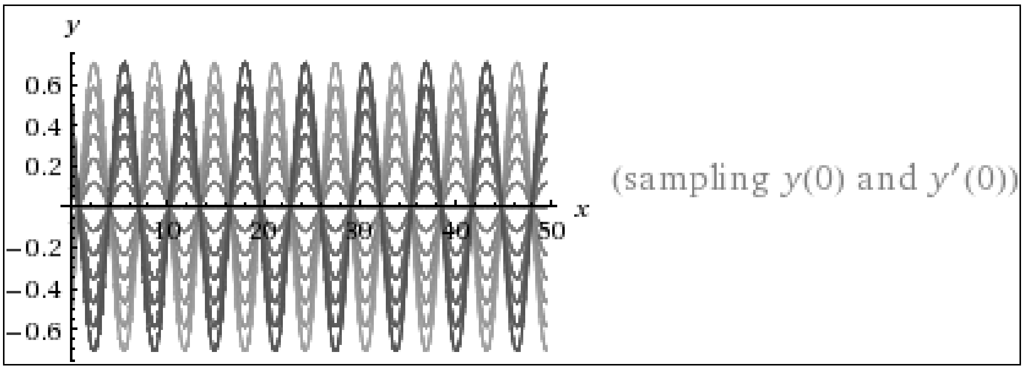
Del mismo modo, se tendrá que:

$$\begin{cases} y_2 = C_1 x - \dfrac{C_1}{6}x^3 + \dfrac{C_1}{120}x^5 - \dfrac{C_1}{5.040}x^7 \\ y_2 = C_1\left[x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}\right] = C_1 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = C_1 \cdot \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Lo que ofrece la integral general:

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = C_0 \cdot \cos x + C_1 \cdot \operatorname{sen} x}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



El resultado anteriormente obtenido es obvio si procedemos a efectuar la resolución de este problema directamente, esto es, considerando la ecuación característica o modular:

$\lambda^2 + 1 = 0$; $\lambda = \pm i$, con lo que, aplicando la fórmula correspondiente, con los coeficientes respectivos: $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, se tendrá la integral general de la EDO:

$\boxed{y(x) = C_0 \cdot \cos x + C_1 \cdot \operatorname{sen} x}$, c.s.q.d.

Está claro que en el caso aquí desarrollado resulta más rápida y efectiva su resolución por el método tradicional. Pero no siempre sucederá así, como podremos comprobar en otros ejemplos.

Ejemplo 2

Hallar la solución general de la ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' - xy' - y = 0\,,$$

determinando dos soluciones linealmente independientes en serie de potencias de x, así como el campo de validez de las mismas. En particular, obtener la solución PVI tal que: y(0) = 1 ; y'(0) = 0.

Solución:

En este caso, es: $\begin{cases} p(x) = -x \\ q(x) = -1 \end{cases}$. Ambas analíticas en $x_0 = 0$, con radios de convergencia de sus respectivos desarrollos $\begin{cases} R_1 = \infty \\ R_2 = \infty \end{cases}$, es decir $x_0 = 0$ es un punto ordinario.

Luego, según el teorema anterior, existe solución de la ecuación en serie de potencias de *x*, válida para todo $x \in \{\Re\}$.

Sea ahora: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Por tanto: $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, y también: $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot a_n x^{n-2}$. Substituyendo estos valores en la ecuación diferencial dada, se tendrá que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0 \text{ en } \{\Re\}$$

Término independiente:	$2\cdot 1\cdot a_2 - a_0 = 0$	$\Rightarrow a_2 = \frac{a_0}{2}$
Coeficiente de x:	$3\cdot 2\cdot a_3 - a_1 - a_1 = 0$	$\Rightarrow a_3 = \frac{a_1}{3}$
....	....	....
Coeficiente de x^n:	$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_n = 0$	$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2}$

Ley de recurrencia: $\boxed{a_n = \frac{a_{n-2}}{n}, \forall n \geq 2}$

Luego a_0 y a_1 son libres y $\begin{cases} a_{2n} = \dfrac{a_0}{(2n)!!} = \dfrac{a_0}{2^n\cdot n!} \\ a_{2n+1} = \dfrac{a_1}{(2n+1)!!} = \dfrac{a_1\cdot 2^n\cdot n!}{(2n+1)!} \end{cases}$

Por tanto:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= a_0\left[1+\frac{x^2}{2!!}+\frac{x^4}{4!!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!!}+\ldots\right]+a_1\left[x+\frac{x^3}{3!!}+\frac{x^5}{5!!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}+\ldots\right]= \\ &= a_0\cdot y_1(x)+a_1\cdot y_2(x), \forall x\in\{\Re\} \end{aligned}}$$

Solución particular (PVI): $\begin{cases} y(0)=1 \Rightarrow a_0 = 1 \\ y'(0)=0 \Rightarrow a_1 = 0 \end{cases}$

Luego se tiene que: $y(x)=\sum_0 \frac{x^{2n}}{(2n)!!} \Rightarrow y(x)=\sum_0 \frac{x^{2n}}{2^n n!}=\sum_0 \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!}$

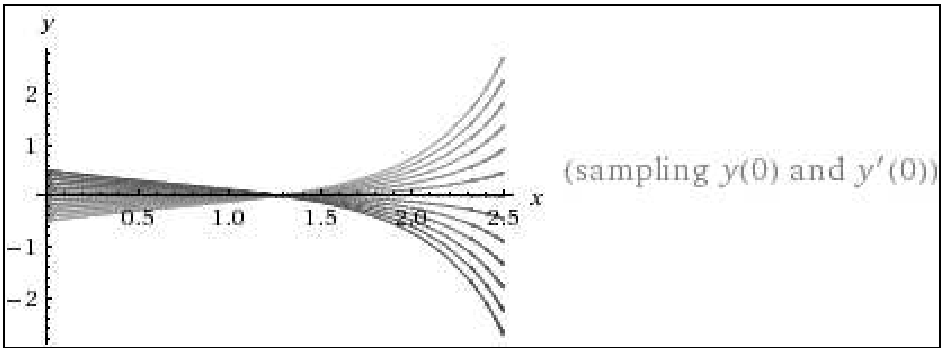
Y resulta, en fin, la solución buscada:

$$\boxed{y(x)=e^{\frac{x^2}{2}}}$$

Debe tenerse en cuenta que la integral general de esta EDO puede expresarse como:

$$\boxed{y(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ c_1\, e^{\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c_2\, e^{\frac{x^2}{2}}}$$

, siendo *erf* la función error. La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:

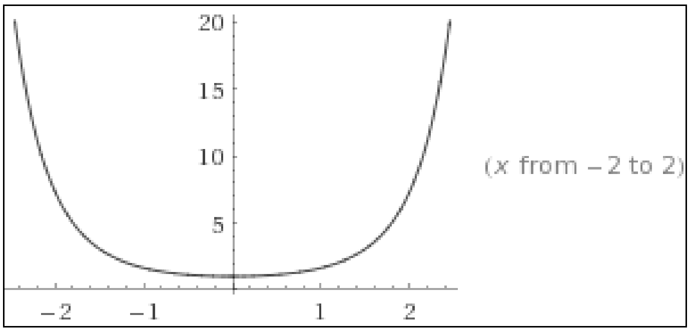


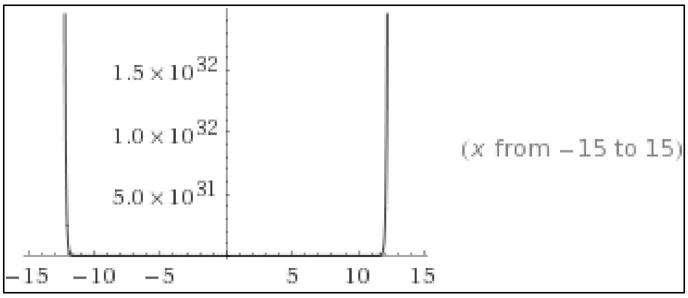
Por otra parte, se tendrá, teniendo en cuenta las condiciones particulares iniciales dadas del problema, que:

$y(0) = c_2 = 1$, y $c_1 = 0$, por lo que resultará, en efecto, que: $y(x) = e^{x^2/2}$,

c.s.q.d.

La representación gráfica de esta solución particular, que es evidentemente una función exponencial, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 3

Hallar, por el método de las series de potencias en torno al punto $x_0 = 0$, la solución general de la ecuación diferencial ordinaria:

$$(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0\,.$$

Solución:

En este caso, es $\begin{cases} p(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \\ q(x) = \dfrac{-2}{1+x^2} \end{cases}$ Ambas analíticas en $x_0 = 0$, con $R_1 = R_2 = 1$. Luego existe solución analítica en $x_0 = 0$, válida al menos para $|\,x\,| < 1$.

Substituyendo ahora: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en la ecuación diferencial problema dada, se obtendrá que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot a_n x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0$$

Término independiente: $2a_2 - 2a_0 = 0 \quad \Rightarrow a_2 = a_0$

Coeficiente de x: $6a_3 + 2a_1 - 2a_1 = 0 \quad \Rightarrow a_3 = 0$

....

Coeficiente de x^n: $(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + 2n\cdot a_n - 2a_n = 0$

Luego a_0 y a_1 libres, $a_2 = a_0$, $a_3 = 0$,

$$a_{n+2} = -\frac{n(n-1)+2n-2}{(n+1)(n+2)}a_n = -\frac{(n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}a_n \Rightarrow \boxed{a_n = -\frac{n-3}{n-1}a_{n-2}} \qquad \forall n \ge 2$$

Como: $a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = a_7 = ... = a_{2n+1} = ... = 0$;

$$\boxed{a_{2n}} = -\frac{2n-3}{2n-1}a_{2n-2} = ... = (-1)^n \frac{2n-3}{2n-1}\cdot\frac{2n-5}{2n-3}\cdot...\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{1}\right)a_0 = \boxed{\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}a_0}$$

Por lo tanto, se tendrá que:

$$y(x) = a_0\left[1+\frac{x^2}{1}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{5}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n}+...\right]+a_1x, \forall |x|<1$$

En este caso puede sumarse la serie, con lo que:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = a_0\left[1+x\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...\right)\right]+a_1x \Rightarrow$$ y la solución buscada será:

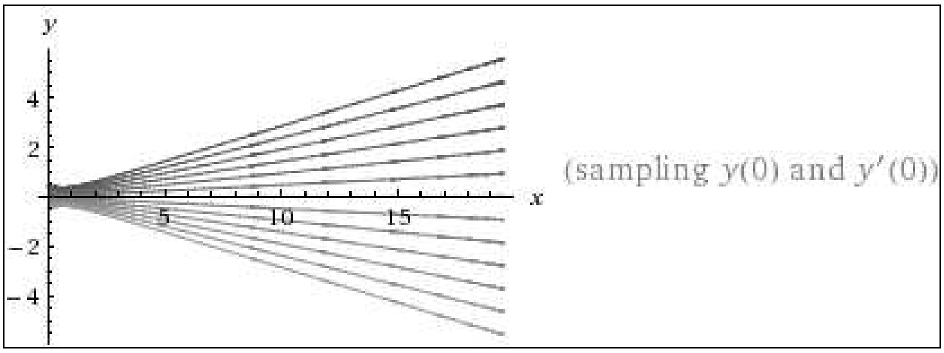
$$\boxed{y(x) = a_0[1+x\cdot \text{arctg}\, x] + a_1\cdot x}$$

Debe tenerse en cuenta que la integral general también puede expresarse como:

$$\boxed{y(x) = i\, c_1\, x + c_2\left(-1-\frac{1}{2}\, i\, x\,(\log(1-i\,x)-\log(1+i\,x))\right)}$$

siendo la expresión *log* el logaritmo natural o neperiano *ln*.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Nota:

En los dos ejemplos anteriormente desarrollados, la relación de recurrencia ha consistido únicamente en dos términos y además podía deducirse fácilmente de ella, la forma general de a_n. Sin embargo, pueden aparecer relaciones con dos o más términos (con 3 en el ejemplo siguiente), que sean más complicadas de resolver, tales que no pueda determinarse la forma general de los coeficientes a_n. Entonces, solo podrán obtenerse algunos términos. Veámoslo seguidamente.

Ejemplo 4

Hallar, por el método de las series de potencias en torno al punto $x_0 = 1$, los términos hasta la potencia de grado 4, correspondientes a la solución general de la ecuación diferencial ordinaria: $2y'' + xy' + y = 0$.

Solución:

Se efectúa el cambio de variable: $x - 1 = t$ ó $x = t + 1$.

Entonces: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{y}$, $y'' = \ddot{y}$; $2\ddot{y} + (t+1)\dot{y} + y = 0$, $t_0 = 0$

$$\begin{cases} p(t) = \dfrac{t+1}{2} \\ q(t) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ Ambas analíticas en $t = 0$, con $R_1 = R_2 = \infty$

, luego existe solución analítica en $t = 0$, válida para todo t.

Substituyendo ahora $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ en la ecuación diferencial dada, se tiene que:

$$2\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \equiv 0$$

Término independiente: $2\cdot 2\cdot 1 a_2 + a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0 + a_1}{4}$

Coeficiente de t: $2\cdot 3\cdot 2a_3 + a_1 + 2a_2 + a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_1 + a_2}{6}$

....

Coeficiente de t^n: $2(n+2)\cdot(n+1)\cdot a_{n+2} + n\cdot a_n + (n+1)\cdot a_{n+1} + a_n = 0$

$$a_{n+2} = -\frac{(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n}{2(n+1)(n+2)} = -\frac{a_{n+1} + a_n}{2(n+2)} \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2n}$$

Luego: $a_2 = -\frac{a_0 + a_1}{4}$; $a_3 = -\frac{a_1 - \frac{a_0 + a_1}{4}}{6} = -\frac{3a_1 - a_0}{24}$;

$$a_4 = -\frac{a_2 + a_3}{8} = +\frac{\frac{a_0 + a_1}{4} + \frac{3a_1 - a_0}{24}}{8} = \frac{6a_0 + 6a_1 + 3a_1 - a_0}{192} = \frac{5a_0 + 9a_1}{192}$$

, con lo que se obtiene la solución general buscada:

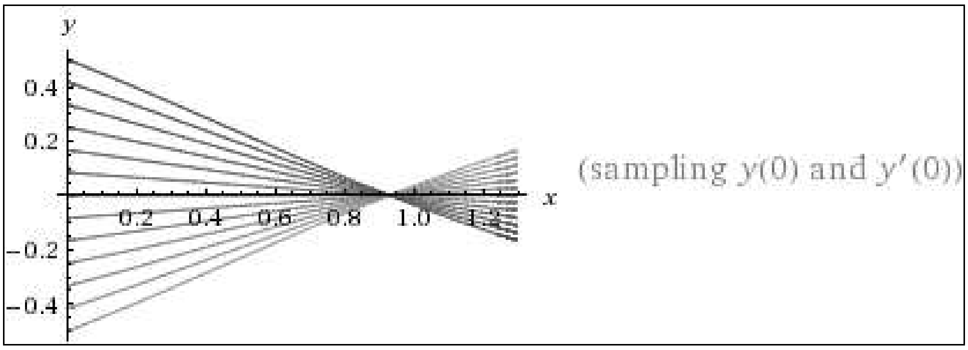
$$\boxed{\begin{aligned}\Rightarrow\quad y(x) = y_1(x) + y_2(x) = a_0\left[1 - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{24} + \frac{5}{192}(x-1)^4 + \ldots\right] + \\ + a_1\left[(x-1) - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^3}{8} + \frac{9}{192}(x-1)^4 + \ldots\right],\ \forall x\end{aligned}}$$

Debe tenerse en cuenta que la integral general también puede expresarse como:

$$\boxed{y(x) = \sqrt{\pi}\ c_1\, e^{-\frac{x^2}{4}}\ \mathrm{erfi}\left(\frac{x}{2}\right) + c_2\, e^{-\frac{x^2}{4}}}$$

, en que *erfi* es la función imaginaria de error.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 5

Hallar, por el método de las series de potencias, la solución del problema de valor inicial: y’’ – 2xy’ + 8y = 0; con las condiciones iniciales siguientes: y(0) = 3 , y’(0) = 0.

Solución:

Son p(x) = -2x y q(x) = 8, ambas analíticas en $x_o = 0$, con $R_1 = R_2 = \infty$. Por tanto, existe solución y = y(x), analítica en $x_o = 0$, válida para todo x.

Substituyendo: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en la ecuación diferencial dada, se tiene que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot a_n x^{n-2}\ -\ 2\ \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n x^n\ +\ 8\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0$$

Término independiente: $2a_2 + 8a_0 = 0$ $\Rightarrow$ $a_2 = -4a_0$

Coeficiente de *x*: $6a_3 - 2a_1 + 8a_1 = 0$ $\Rightarrow$ $a_3 = -a_1$

....

Coeficiente de x^n: $(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2n\cdot a_n + 8a_n = 0$

, luego: $a_{n+2} = \frac{2(n-4)}{(n+1)(n+2)} a_n$. De donde: $\boxed{a_n = \frac{2(n-6)}{n(n-1)} a_{n-2}}$, $\forall n \geq 2$

Se pide la solución del PVI tal que: y(0) = 3 e y'(0) = 0, es decir, tal que: $a_o = 3$ y $a_1 = 0$.

$$\text{Luego:} \begin{cases} a_0 = 3 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -12 \\ a_3 = a_5 = \ldots\ldots = 0 \\ a_4 = \frac{-4a_2}{12} = 4 \\ a_6 = 0 \;\Rightarrow\; a_8 = a_{10} = \ldots\ldots = 0 \end{cases}$$

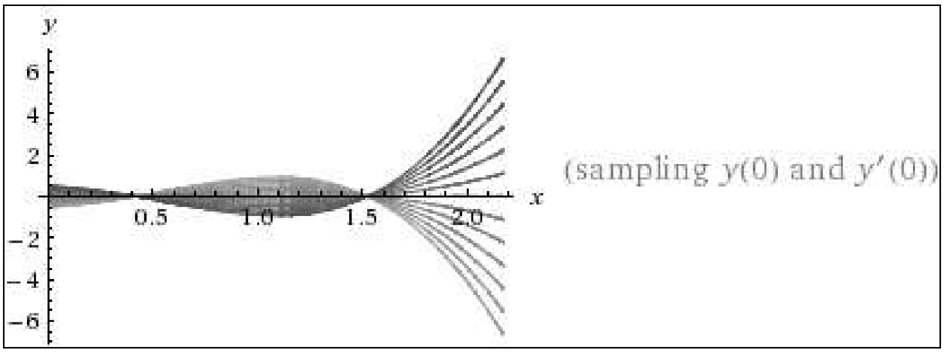
Por tanto, la solución buscada será:

$$\boxed{y = 4x^4 - 12x^2 + 3}$$

Debe tenerse en cuenta que la integral general de esta EDO puede también expresarse como:

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = c_2\left(\sqrt{\pi}\,\left(4x^4 - 12x^2 + 3\right)\operatorname{erfi}(x) + 10\,e^{x^2}\,x - 4\,e^{x^2}\,x^3\right) + \\ \qquad c_1\left(\left(x^2 - 3\right)x^2 + \frac{3}{4}\right) \end{array}}$$

, en que *erfi* es la función imaginaria de error. La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



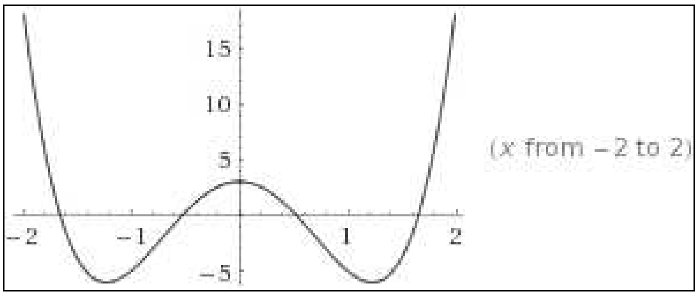
Aplicando, ahora, las condiciones iniciales dadas, hallaremos el valor de las constantes:

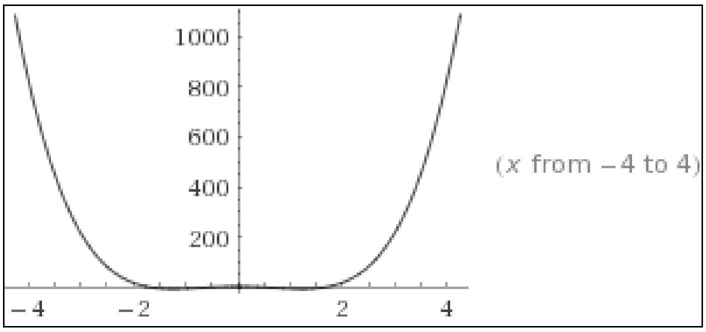
$$y(0) = c_1 \times \frac{3}{4} = 3 \text{ , de donde: } c_1 = 4\text{; así mismo:}$$

y'(0) = 0, de donde se deduce que: $c_2 = 0$, con lo que resultará:

$$y(x) = 4(x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4}) = 4x^4 - 12x^2 + 3, \text{ c.s.q.d.}$$

La representación gráfica de esta solución particular, que es evidentemente una función parabólica, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





7. EL OPERADOR POLINOMIAL Y EL OPERADOR ALGEBRAICO DE HEAVISIDE

7.1. EL OPERADOR DIRECTO

Al tratar de resolver ecuaciones diferenciales relacionadas con la teoría de vibraciones, el ingeniero inglés Oliver Heaviside[14] (1850-1925) descubrió que los operadores diferenciales podían tratarse analíticamente como variables algebraicas. De acuerdo con el *"cálculo operacional"*, si se tiene una ecuación diferencial de primer orden de la forma: (D – a)y = f(t), donde D es el operador diferencial, esto es, D = d/dt, o bien D = d/dx, entonces la solución general a dicha ecuación es de la forma:

$$y = e^{at}\int \epsilon^{-at} f(t)dt + c_1 e^{at}.$$

[14] Heaviside was a self-taught English electrical engineer, mathematician, and physicist who adapted complex numbers to the study of electrical circuits, invented mathematical techniques to the solution of differential equations (later found to be equivalent to Laplace transforms), reformulated Maxwell's field equations in terms of electric and magnetic forces and energy flux, and independently co-formulated vector analysis. Although at odds with the scientific establishment for most of his life, Heaviside changed the face of mathematics and science for years to come. Between 1880 and 1887, Heaviside developed the operational calculus (involving the *D* notation for the differential operator, which he is credited with creating), a method of solving differential equations by transforming them into ordinary algebraic equations which caused a great deal of controversy when first introduced, owing to the lack of rigor in his derivation of it. He famously said, "Mathematics is an experimental science, and definitions do not come first, but later on." He was replying to criticism over his use of operators that were not clearly defined. On another occasion he stated somewhat more defensively, "I do not refuse my dinner simply because I do not understand the process of digestion."

Heaviside observó que si se trataba al operador diferencial D como una variable algebraica, era posible alcanzar igualmente la solución de toda ecuación pareja a la de arriba. En efecto, según la solución general, se cumple que:

$$y = \frac{1}{D-a}f(t) = e^{at}\int e^{-at}f(t)dt + c_1 e^{at}$$

El método en cuestión puede aplicarse a ecuaciones diferenciales de orden n, ya que si se tiene que:

$$(D - m_1)\cdot(D - m_2) \ldots (D - m_n)\cdot y = b(x)$$

entonces se puede definir la función u como:

$$u = (D - m_2) \ldots (D - m_n)\cdot y$$

y lo que queda es resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$(D - m_1)\cdot u = b(x)$$

Una vez resuelta la ecuación para u se substituye en:

$$(D - m_2)\cdot(D - m_3) \ldots (D - m_n)\cdot y = u(x)$$

Repitiendo el proceso señalado, se tiene que:

$$v = (D - m_3) \ldots (D - m_n)\cdot y \Rightarrow (D - m_2)\cdot v = u(x)$$

Integrando:

$$(D - m_3) \ldots (D - m_n)\cdot y = v(x)$$

Esta repetición nos llevará entonces hasta la solución y(x).

Heaviside publicó sus resultados, cuya utilidad a la hora de resolver ecuaciones de la física y la ingeniería hizo que pronto se extendieran. Sin embargo, el trabajo de Heaviside, formal y poco riguroso, atrajo las críticas de algunos matemáticos puristas que los rechazaron argumentando que los resultados de Heaviside no podían surgir de tal forma. No obstante, el éxito del método hizo que pronto fuera adoptado por ingenieros y físicos de todo el mundo, de manera que al final atrajo la atención de cierto número de matemáticos tratando de justificar el método de manera rigurosa. Tras varias décadas de infructuosos intentos, se reparó en que la Transformada descubierta por Laplace (que veremos en el posterior capítulo 5) hacía un siglo no solo ofrecía un fundamento teórico plausible al método de cálculo operacional de Heaviside, sino que además presentaba una alternativa mucho más sistemática a la aplicación de tales métodos.

Pues bien, para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)\ , \quad a_n \neq 0\ ,$$

es decir, con coeficientes constantes, vamos a estudiar los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^{2x}$.

Solución:

Al escribir esta ecuación utilizando el operador diferencial resulta:

$$(D^3 + 2D^2 - D - 2)y = e^{2x} \Rightarrow (D - 1)(D + 1)(D + 2)y = e^{2x}$$

Si llamamos u = (D + 1)(D + 2) y entonces se puede ver que:

$$(D - 1)u = e^{2x} \Rightarrow u' - u = e^{2x} \Rightarrow u = e^{2x} + c_1 \cdot e^x$$

Conocida la función u entonces se tiene que:

$$(D + 1)(D + 2)y = e^{2x} + c_1 \cdot e^x$$

Repetimos el proceso anterior, pero ahora hacemos: v = (D + 2)y, por lo tanto:

$$(D + 1)v = e^{2x} + c_1 e^x \Rightarrow v' + v = e^{2x} + c_1 e^x \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{c_1}{2}e^x + c_2 e^{-x}$$

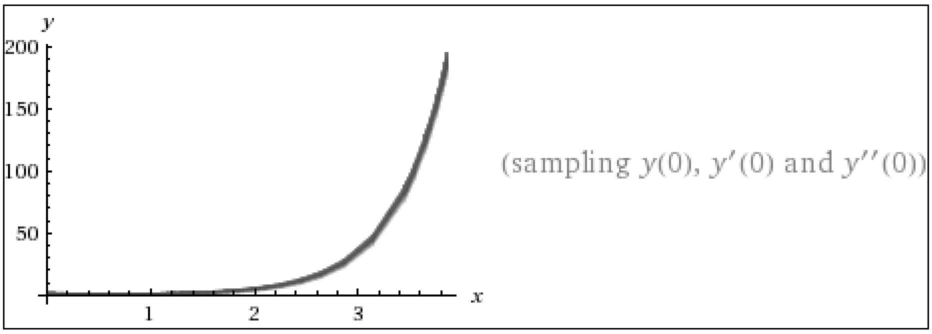
Conocida v, entonces resulta que: $(D + 2)y = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{c_1}{2}e^x + c_2 e^{-x}$.

Integrando una vez más, se obtiene que:

$$\boxed{y' + 2y = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{c_1}{2}e^x + c_2 e^{-x} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{12}e^{2x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}}$$

, que constituye la solución o integral general del problema planteado.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Esta misma EDO puede resolverse, alternativamente, por aplicación del método clásico de los coeficientes indeterminados, así: $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^{2x}$.

La ecuación característica de la homogénea, ofrece:

$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$; $\lambda_1 = 1$; operando por la regla de Ruffini, se tiene que:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \;; \quad \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$$

$$y^* = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot e^{-2x}.$$

Para la no homogénea, ensayamos una solución particular del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^{2x} \\ y'_p = 2A \cdot e^{2x} \\ y''_p = 4A \cdot e^{2x} \\ y'''_p = 8A \cdot e^{2x} \end{cases}$$

Substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$8A \cdot e^{2x} + 8A \cdot e^{2x} - 2A \cdot e^{2x} - 2A \cdot e^{2x} = e^{2x} \;;$$

$$12A \cdot e^{2x} = e^{2x} \;; \quad \boxed{A = \frac{1}{12}}, \text{ y la integral general será:}$$

$$y(x) = y^* + y_p = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{12} \text{ , c.s.q.d.}$$

Ejemplo 2

Se considera ahora una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden como la siguiente: $y'' - 3y' + 2y = e^t$.

Solución:

Ésta puede reescribirse, para resaltar el operador D, como sigue:

$$(D^2 - 3D + 2)y = e^t$$

Pues bien, Heaviside propuso despejar *y* y tratar al operador D algebraicamente, en cuyo caso se tendría que:

$$y = \frac{e^t}{D^2 - 3D + 2} = \frac{e^t}{(D-1)(D-2)} = \frac{1}{D-2}e^t - \frac{1}{D-1}e^t$$

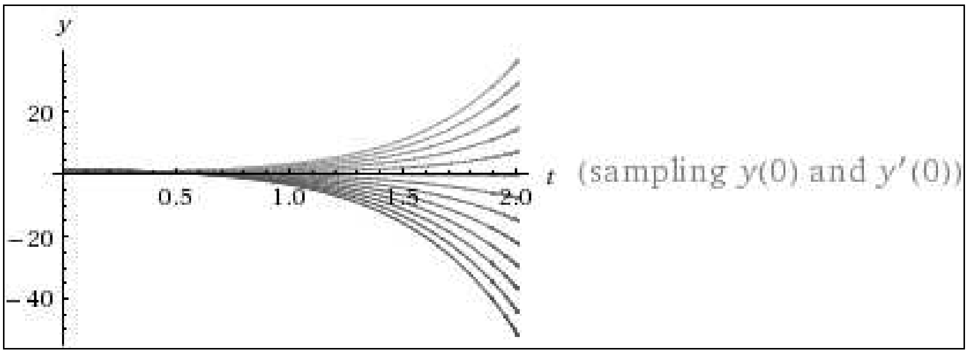
Substituyendo, ahora, las fracciones en D por la expresión integral de las mismas arriba presentada, se llega a la solución de la ecuación diferencial:

$$y = (e^{2t}\int e^{-2t}f(t)dt + c_1e^{2t}) - (e^t\int e^{-t}f(t)dt + c_2e^t) = e^{2t}(-e^{-t}) + c_1e^{2t}) - (e^t(t) + c_2e^t)$$

O lo que es lo mismo, después de simplificar y agrupar las constantes, se obtiene la integral general:

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^t - t \cdot e^t}.$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Si al igual que en el caso anterior pretendemos resolver, alternativamente, esta E.D.O. por aplicación del método clásico de los coeficientes indeterminados, obtendremos como ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \; ; \quad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

con lo que se tendrá que: $y^* = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^t$; pero como 1 es raíz de la anterior ecuación característica de orden de multiplicidad 1, ensayemos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A \cdot t \cdot e^t \\ y'_p = A \cdot e^t + A \cdot t \cdot e^t \\ y''_p = A \cdot e^t + A \cdot e^t + A \cdot t \cdot e^t \end{cases}$$

Substituyendo estos valores en la ecuación inicial, se tiene que:

$2A \cdot e^t + A \cdot t \cdot e^t - 3A \cdot e^t - 3A \cdot t \cdot e^t + 2A \cdot t \cdot e^t = e^t$, y entonces:

$-A \cdot e^t = e^t$; $A = -1$, con lo que la integral general buscada será:

$y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^t - t \cdot e^t = e^t(c_1 \cdot e^t + c_2 - t)$, c.s.q.d.

7.2. EL OPERADOR INVERSO

Los operadores suelen tener su inversa; esto significa que si:

$$P(D)y = b(x) \Rightarrow P^{-1}(D)P(D)y = P^{-1}(D)b(x) \Rightarrow y_p = P^{-1}(D)b(x),$$

donde $y_p(x)$ es una solución particular de la EDO $P(D)y = b(x)$. Notemos que esto significa también que:

$$D^{-n}b(x) = \underbrace{\iint \cdots \int}_{n\ \text{veces}} b(x)\cdot dx$$

El operador inverso de P(D), es decir $P^{-1}(D)$, puede también representarse como 1/P(D). Debe quedar claro que su significado radica en el hecho de que al actuar sobre b(x) produce una solución particular y_p. Esta última notación resulta ser a veces más conveniente y dependiendo de la forma de b(x) puede resultar algunas veces de fácil solución.

En general se tiene que si:

$$P(D)y = (a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0)y = b(x),$$

entonces se cumple que:

$$y_p = \frac{1}{P(D)}[b(x)] = \frac{1}{a_0\left(1+\frac{a_1}{a_0}D+\frac{a_2}{a_0}D^2+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_0}D^{n-1}+\frac{a_n}{a_0}D^n\right)}[b(x)] =$$
$$= \frac{1}{a_0}\left(1+c_1D+c_2D^2+\ldots+c_{n-1}D^{n-1}+c_nD^n\right)[b(x)],\ \forall a_0 \neq 0$$

donde el término $(1 + c_1D + c_2D^2 + \ldots + c_{n-1}D^{n-1} + c_nD^n) / a_0$, es la expansión en serie de 1/P(D).

Por otro lado, notemos que si $a_0 = 0$, entonces:

$$P(D)y = (a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D)y = D(a_nD^{n-1} + a_{n-1}D^{n-2} + \ldots + a_1)y = b(x).$$

Si ambos $a_0 = 0$ y $a_1 = 0$, entonces se puede seguir factorizando. Por lo tanto, en general se tendrá que:

$$P(D)y = D^r(a_nD^{n-r} + \ldots + a_{r+1}D + a_r)y = b(x),$$

y a partir de aquí se podrá despejar la solución particular y_p.

El proceso descrito se puede simplificar notablemente según la naturaleza de la función b(x). Así, veremos posteriormente un ejemplo de función potencial en que $b(x) = h\cdot x^k$.

Ejemplo 1

Evaluar la EDO: $D^{-2}(2x + 3)$.

Solución:

En este caso, $b(x) = 2x + 3$. Se tiene entonces lo siguiente:

$$D^{-2}(2x+3) = D^{-1}\int(2x+3)\cdot dx = D^{-1}(x^2+3x+c_1) =$$
$$= \int(x^2+3x+c_1)\cdot dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c_1\cdot x + c_2$$

De todos modos es fácil verificar que $\boxed{y_p = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}}$ es una solución particular de $D^2y = 2x + 3$.

Ejemplo 2

Encontrar una solución particular de la EDO: $y'' - 2y' - 3y = 5$.

Solución:

La ecuación completa en cuestión también se puede escribir así:

$(D^2 - 2D - 3)y = 5$, y aquí, $a_0 = -3$, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $h = 5$ y $k = 0$, tal como hemos visto en la introducción teórica, por lo tanto se tendrá que:

$$\boxed{y = \frac{1}{P(D)}[5] = \frac{h}{a_0} = -\frac{5}{3}},\ \forall\ a_0 = -3 \neq 0.$$

Ello resulta de fácil comprobación si se tiene en cuenta que las raíces reales de la ecuación: $D^2 - 2D - 3 = 0$, son: $D_1 = 3$ y $D_2 = -1$, con lo que se tendrá la solución de la ecuación homogénea o incompleta correspondiente: $y^* = c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot e^{-x}$. Ahora bien, una solución particular de la completa será del tipo: $y_p = a$; $y'_p = y''_p = 0$, por lo que substituyendo en la ecuación inicial se concluye que: $a = -5/3$, y la integral general de esta EDO será:

$$y = y^* + y_p = c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot e^{-x} - \frac{5}{3}$$

Si ahora, v. gr., hacemos $c_1 = c_2 = 0$, resulta evidente que $y = -\frac{5}{3}$ es una solución particular de la EDO planteada, c.s.q.d.

CAPÍTULO 4
SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

1. INTRODUCCIÓN

Para la determinación de varias funciones: $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, son necesarias entre ellas, sus derivadas y la variable independiente o explicativa *x*, por lo menos tantas ecuaciones diferenciales como indica el número *n* de funciones incógnita. Si estas ecuaciones diferenciales no son todas de primer orden, por la introducción de funciones de nuevas incógnitas se podrá conseguir siempre la obtención de un denominado *sistema de primer orden*.

En el presente capítulo estudiaremos básicamente los sistemas de EDO de primer orden (en concreto los lineales) y alguno de segundo orden. Al respecto, es importante hacer notar que un sistema de ecuaciones diferenciales de cualquier orden puede transformarse en uno de primer orden, lo que simplifica su resolución.

En efecto, un sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias, se puede escribir así en la denominada "forma normal" cuando viene expresado del siguiente modo:

$$\begin{cases} y'_1 = \dfrac{dy_1}{dx} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{1i}y_i + b_1(x) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ y'_2 = \dfrac{dy_2}{dx} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{2i}y_i + b_2(x) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + b_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n = \dfrac{dy_n}{dx} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ni}y_i + b_n(x) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{cases}$$

donde, en general, las a_{ij} son funciones de la variable independiente x, aunque nosotros estudiaremos únicamente el caso de que dichos coeficientes sean constantes. En el caso en que todas las $b_i(x)$ sean idénticamente nulas, el sistema se llama homogéneo; en caso contrario, se trataría de un sistema no homogéneo o completo.

El método general para resolver el sistema anterior consiste, mediante derivaciones convenientes, en eliminar n-1 funciones y_i, quedando reducido el sistema a una ecuación diferencial lineal de orden n; si el sistema es de coeficientes constantes, la ecuación resultante, también lo será. Dicha eliminación puede lograrse bien directamente o bien utilizando el operador D, como hemos hecho en el capítulo anterior, lo que se verá posteriormente en la resolución de algunos ejemplos.

2. INTEGRAL GENERAL DE UN SISTEMA LINEAL HOMOGÉNEO CON COEFICIENTES CONSTANTES

2.1. RAÍCES SIMPLES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

Nos plantearemos, en este epígrafe, obtener la solución general de un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} y'_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}y_i = a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}y_i = a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

en la que $a_{ij} \in$ R, $\forall$ i,j = 1, …, n.

De los resultados anteriores sabemos que, conociendo n soluciones linealmente independientes del sistema, estaremos en condiciones de dar una expresión de su solución general. Con este fin, sea:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

la que denominaremos “ecuación característica o secular del sistema”. Sabemos que sus raíces son los autovalores, raíces características o valores propios de la matriz siguiente de los coeficientes del sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Son precisamente dichas raíces las que nos van a proporcionar las soluciones buscadas. En efecto, las *n* soluciones del sistema:

$$y_1 = \begin{bmatrix} x_{11}e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ x_{n1}e^{\lambda_1 x} \end{bmatrix}, ..., y_n = \begin{bmatrix} x_{1n}e^{\lambda_n x} \\ \vdots \\ x_{nn}e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}, \text{ son linealmente independientes.}$$

Demostración. Su determinante funcional wronskiano será:

$$W=\begin{vmatrix} x_{11}e^{\lambda_1 x} & \cdots & x_{1n}e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}e^{\lambda_1 x} & \cdots & x_{nn}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x}\cdots e^{\lambda_n x}\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

que es distinto de cero, ya que: $\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, por ser sus columnas una base de autovectores, vectores característicos o vectores propios (ver capítulo 9).

Podemos afirmar, en definitiva, que matricialmente:

$\boxed{y = c_1\begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n\begin{bmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}e^{\lambda_n x}}$. O lo que es lo mismo, que:

$$\begin{cases} y_1 = c_1\cdot x_{11}\cdot e^{\lambda 1\cdot x} + \ldots + c_n\cdot x_{1n}\cdot e^{\lambda n\cdot x} = \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot x_{1i}\cdot e^{\lambda_i\cdot x} \\ y_2 = c_1\cdot x_{21}\cdot e^{\lambda 1\cdot x} + \ldots + c_n\cdot x_{2n}\cdot e^{\lambda n\cdot x} = \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot x_{2i}\cdot e^{\lambda_i\cdot x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = c_1\cdot x_{n1}\cdot e^{\lambda 1\cdot x} + \ldots + c_n\cdot x_{nn}\cdot e^{\lambda n\cdot x} = \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot x_{ni}\cdot e^{\lambda_i\cdot x} \end{cases}$$

constituye la solución o integral general del sistema de EDO planteado.

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos representativos:

Ejemplo 1

Se trata de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + 4y_1 + 3y_2 = 0 \\ \dfrac{dy_2}{dx} + 2y_1 + 5y_2 = 0 \end{cases}$$

Solución:

Este sistema se puede expresar también de la forma siguiente:

$\begin{cases} y'_1 = -4y_1 - 3y_2 \\ y'_2 = -2y_1 - 5y_2 \end{cases}$; $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$; la ecuación característica o secular del sistema será: $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+4 & 3 \\ 2 & \lambda+5 \end{bmatrix}$;

que pasando de matrices a determinantes ofrece:

$$(\lambda + 4)\cdot(\lambda + 5) - 6 = 0 \ ; \quad \lambda^2 + 5\lambda + 4\lambda + 20 - 6 = 0 \ ; \quad \lambda^2 + 9\lambda + 14 = 0$$

$$\lambda = \frac{-9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \begin{cases} -2 = \lambda_1 \\ -7 = \lambda_2 \end{cases} ; \quad A\cdot x_i = \lambda_i\cdot x_i$$

$\boxed{\lambda_1 = -2}$ $\quad \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$;

$$\left.\begin{matrix} -4x_1 - 3x_2 = -2x_1 \\ -2x_1 - 5x_2 = -2x_2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 4x_1 + 3x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 2x_2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2x_1 = -3x_2 \\ 3x_2 = -2x_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow k\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = -7}$ $\quad \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7x_1 \\ -7x_2 \end{bmatrix}$;

$$\left.\begin{matrix} -4x_1 - 3x_2 = -7x_1 \\ -2x_1 - 5x_2 = -7x_2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 4x_1 + 3x_2 = 7x_1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 7x_2 \end{matrix}\right\} \ 3x_2 = 3x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 \ ; \quad k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego la integral general será: $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\cdot e^{-2x} + c_2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot e^{-7x}$; o sea:

$$\boxed{\begin{matrix} y_1 = 3c_1\cdot e^{-2x} + c_2\cdot e^{-7x} \\ y_2 = -2c_1\cdot e^{-2x} + c_2\cdot e^{-7x} \end{matrix}}$$

que constituye la solución buscada, en que también se cumple que:

$$y_1 - y_2 = 5c_1\cdot e^{-2x}.$$

Ejemplo 2

Se trata de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -6y_1 - 3y_2 + 14y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 4y_1 + 3y_2 - 8y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -2y_1 - y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

Solución:

Este sistema se puede expresar también de la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= -6y_1 - 3y_2 + 14y_3 \\ y'_2 &= 4y_1 + 3y_2 - 8y_3 \\ y'_3 &= -2y_1 - y_2 + 5y_3 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

con la siguiente ecuación característica o secular del sistema:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+6 & 3 & -14 \\ -4 & \lambda-3 & 8 \\ 2 & 1 & \lambda-5 \end{bmatrix}$$

que pasando de matrices a determinantes ofrece:

$$(\lambda+6)\cdot(\lambda-3)\cdot(\lambda-5) + 48 + 56 + 28\cdot(\lambda-3) + 12\cdot(\lambda-5) - 8\cdot(\lambda+6) = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \cancel{33\lambda} + \cancel{90} + \cancel{104} + \cancel{28\lambda} - \cancel{84} + \cancel{12\lambda} - \cancel{60} - \cancel{8\lambda} - \cancel{48} = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0\ ;$$

una primera raíz de esta ecuación de tercer grado, que es inmediata, es $\lambda_1 = 1$.

Ahora, por aplicación de la regla de Ruffini, se obtiene que:

$$1)\qquad \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ & 1 & -1 & -2 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0\ ;$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 = \lambda_2 \\ -1 = \lambda_3 \end{cases};\quad A\cdot x_i = \lambda_i\cdot x_i\ ;$$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned} -6x_1 - 3x_2 + 14x_3 &= x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 &= x_2 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 &= x_3 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} -2x_1 + 6x_3 &= x_1 + x_2 \\ -3x_1 + 6x_3 &= x_2 \\ -2x_1 + 4x_3 &= x_2 \end{aligned}\right\}$$

Y a partir de aquí obtendremos el autovector:

$$-3x_1 + 6x_3 = -2x_1 + 4x_3 \,;\; 2x_3 = x_1 \Rightarrow k\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

Del mismo modo operaremos con las otras 2 raíces características:

$\boxed{\lambda_2 = 2}$ Ofrece:

$$\left.\begin{array}{l} -6x_1 - 3x_2 + 14x_3 = 2x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 2x_2 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = 2x_3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2x_1 + 6x_3 = 2x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 3x_3 = x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 3x_3 = x_2 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow k\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}$; o también: $k\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}$ (sería, por ejemplo, otra posible solución).

$\boxed{\lambda_3 = -1}$ Ofrece:

$$\left.\begin{array}{l} -6x_1 - 3x_2 + 14x_3 = -x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = -x_2 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = -x_3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2x_1 + 6x_3 = -x_1 - x_2 \\ -x_1 + 6x_3 = -x_2 \\ x_1 - 6x_3 = x_2 \end{array}\right\}$$

$$-2x_1 - x_1 + 6x_3 + 5x_3 = -x_3 \,;\; -3x_1 + 12x_3 = 0 \Rightarrow 4x_3 - x_1 = 0 \,;$$

$\Rightarrow k\begin{bmatrix}4\\-2\\1\end{bmatrix}$; luego la integral general será :

$$y = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}e^{x} + c_2\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}e^{2x} + c_3\begin{bmatrix}4\\-2\\1\end{bmatrix}e^{-x} \text{ ; o sea:}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = 2c_1\cdot e^{x} + 3c_2\cdot e^{2x} + 4c_3\cdot e^{-x} \\ y_2 = -2c_3\cdot e^{-x} \\ y_3 = c_1\cdot e^{x} + 2c_2\cdot e^{2x} + c_3\cdot e^{-x} \end{array}}$$

De haber considerado, para el valor propio $\lambda_2 = 2$, el autovector alternativo $\Rightarrow k\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}$, se obtendría el resultado siguiente:

$$y_1 = 5c_1 \cdot e^{2x} + 2c_2 \cdot e^{x} + 4c_3 \cdot e^{-x}$$
$$y_2 = -4c_1 \cdot e^{2x} - 2c_3 \cdot e^{-x}$$
$$y_3 = 2c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{x} + c_3 \cdot e^{-x}$$

Ejemplo 3

Obténgase la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente:

$$\begin{cases} y'_1 = -y_1 + y_2 \\ y'_2 = -6y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

con las condiciones iniciales: $y_1(0) = 1$ e $y_2(0) = 2$.

Solución:

Se tiene la matriz: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$. La ecuación característica o secular vendrá dada por:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 6 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

que pasando de matrices a determinantes ofrece:

$$(\lambda + 1)\cdot(\lambda - 4) + 6 = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + \lambda - 4 + 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} ; \; A\cdot x_i = \lambda_i \cdot x_i$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ;$$

$$\left.\begin{matrix} -x_1 + x_2 = x_1 \\ -6x_1 + 4x_2 = x_2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2x_1 = x_2 \\ -6x_1 + 8x_1 = 2x_1 \end{matrix}\right\} \quad k\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 2} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} ;$$

$$\left.\begin{matrix} -x_1 + x_2 = 2x_1 \\ -6x_1 + 4x_2 = 2x_2 \end{matrix}\right\} \; x_2 = 3x_1 \Rightarrow \; k\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

que conforman la integral general:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot e^x + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot e^{2x} = \left\{ \begin{array}{c} c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} = y_1 \\ 2c_1 \cdot e^x + 3c_2 \cdot e^{2x} = y_2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{I.G.},$$

es su solución general, en la que, por cierto, se cumple que:

$$y_2 - y_1 = c_1 \cdot e^x + 2c_2 \cdot e^{2x}.$$

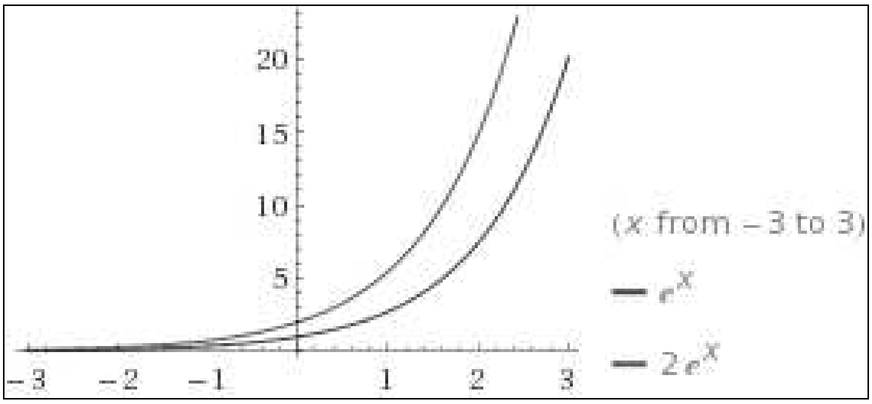
Obtengamos ahora aquella solución particular de dicho sistema tal que $y_1(0) = 1$ e $y_2(0) = 2$ (lo que constituye un problema de valor inicial). Substituyendo en la solución las anteriores condiciones iniciales, tenemos el sencillo sistema de ecuaciones:

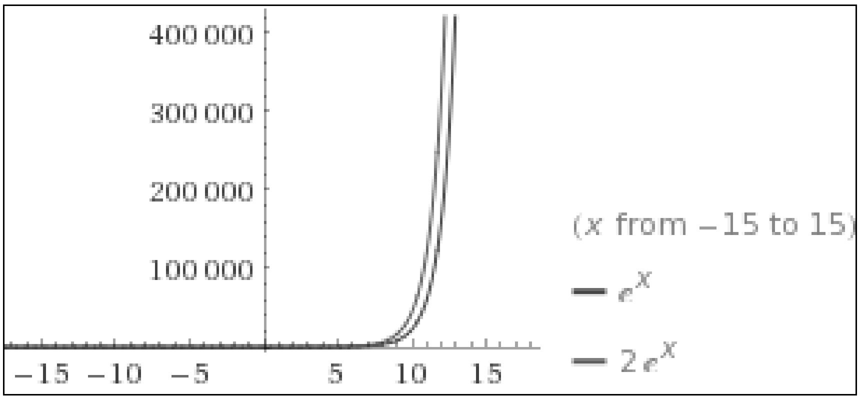
$$\left. \begin{array}{l} 1 = c_1 + c_2 \\ 2 = 2c_1 + 3c_2 \end{array} \right\}$$

cuyas soluciones son $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$. Luego la solución particular buscada es:

$$\boxed{y_1 = e^x\ , \quad y_2 = 2e^x} \Rightarrow \text{o sea: } y_2 = 2y_1$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 4

Resolver, por diversos procedimientos, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + 2y_1 + 3y_2 = 0 \\ \dfrac{dy_2}{dx} + 3y_1 + 2y_2 = 0 \end{cases}$$

Solución:

a) Aplicando el método de los operadores, que se verá con mayor extensión en el epígrafe final del presente capítulo, reduciremos este sistema a una sola ecuación diferencial, con lo que se tendrá:

$$\begin{cases} (D + 2)y_1 + 3y_2 = 0 \\ 3y_1 + (D + 2)y_2 = 0 \end{cases}$$

Eliminando y_2, el sistema anterior se reduce a la ecuación diferencial siguiente: $(D^2 + 4D – 5)y_1 = 0$, esto es: $y''_1 + 4y'_1 – 5y_1 = 0$, que es una ecuación homogénea cuya ecuación característica es: $\lambda^2 + 4\lambda – 5 = 0$, que admite las raíces reales, $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = 1$, de lo que se deduce que: $y_1 = c_1e^{-5x} + c_2e^x$.

Substituida esta solución en la primera ecuación, se obtiene:

$$-3c_1e^{-5x} + 3c_2e^x + 3y_2 = 0, \text{ de donde: } y_2 = c_1e^{-5x} – c_2e^x,$$

con lo que se cumple que: $y_1 + y_2 = 2c_2e^{-5x}$.

b) Ensayando $y_1 = \lambda\cdot e^{rx}$, $y_2 = \mu\cdot e^{rx}$ se obtiene:

$$\begin{cases} \lambda\cdot r\cdot e^{rx} + 2\lambda\cdot e^{rx} + 3\mu\cdot e^{rx} = 0 \\ 3\lambda\cdot e^{rx} + \mu\cdot r\cdot e^{rx} + 2\mu\cdot e^{rx} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda(r+2) + 3\mu = 0 \\ 3\lambda + \mu(r+2) = 0 \end{cases}$$

de donde:

$$\begin{vmatrix} r+2 & 3 \\ 3 & r+2 \end{vmatrix} = 0$$

o sea:

$$\begin{cases} \text{Para } r_1 = -5,\ -3\lambda + 3\mu = 0,\ \lambda = 1,\ \mu = 1 \\ \text{Para } r_2 = 1,\ 3\lambda + 3\mu = 0,\ \lambda = 1,\ \mu = -1 \end{cases}$$

que conducen a la solución hallada en el apartado anterior a).

c) Resolviendo este mismo ejercicio por el sistema de los valores y vectores propios, tenemos que:

$$\begin{cases} y'_1 = -2y_1 - 3y_2 \\ y'_2 = -3y_1 - 2y_2 \end{cases}; \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix};$$

La ecuación característica vendrá dada por:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 3 \\ 3 & \lambda+2 \end{bmatrix};$$

que pasando de matrices a determinantes ofrece:

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 9 = 0$; $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$; cuyas soluciones son:

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \begin{cases} 1 = \lambda_1 \\ -5 = \lambda_2 \end{cases}$$; haciendo: $A \cdot x_i = \lambda_i \cdot x_i$, se tiene:

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ $\rightarrow$ $$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 &= x_1 \\ -3x_1 - 2x_2 &= x_2 \end{aligned}\right\} \ -3x_1 - 3x_2 = 0; \ x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = -5}$ Ofrece:

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 &= -5x_1 \\ -3x_1 - 2x_2 &= -5x_2 \end{aligned}\right\} \ 3x_1 - 3x_2 = 0; \ x_1 = x_2 \Rightarrow k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego la integral general será:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^x + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-5x} = \left\{ \begin{aligned} y_1 &= c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-5x} \\ y_2 &= -c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-5x} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{I.G.},$$

lo que implica que:

$$y_1 + y_2 = 2c_2 \cdot e^{-5x}, \text{ c.s.q.d.}$$

Ejemplo 5

Obténgase la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente:

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \\ y'_2 = y_1 + y_2 + y_3 \\ y'_3 = y_1 + 3y_2 - y_3 \end{cases}$$

Solución:

Se tiene la siguiente matriz del sistema: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

La ecuación característica o secular vendrá dada por:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 2 & -3 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -3 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

que pasando de matrices a determinantes ofrece las soluciones o valores propios: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = 3$; luego los autovectores o vectores propios serán, respectivamente:

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ $$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= x_2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= x_3 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

su determinante $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ = -2 + 9 – 4 – 3 = 0, luego es un sistema compatible indeterminado (con ∞ soluciones), y una solución cualquiera es: $\Rightarrow k\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Para $\boxed{\lambda_2 = -2}$ $\Rightarrow k\begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix}$ y para $\boxed{\lambda_3 = 3}$ $\Rightarrow k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, Con ello, la integral general será :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{x} + c_2\begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix}e^{-2x} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{3x} \rightarrow \text{I.G.}$$

con lo que se tendrá:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= -c_1 \cdot e^x - 11c_2 \cdot e^{-2x} + c_3 \cdot e^{3x} \\ y_2 &= c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-2x} + c_3 \cdot e^{3x} \\ y_3 &= c_1 \cdot e^x + 14c_2 \cdot e^{-2x} + c_3 \cdot e^{3x} \end{aligned}}$$

Ejemplo 6

Resolver el sistema de EDO: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dT} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dT} = 2x + y \end{cases}$.

Solución:

La matriz del sistema es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Procederemos como siempre:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = 0 \quad \begin{cases} \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \\ (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$[\lambda_1 = 4] \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-4 & 3 \\ 2 & 1-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -2k_1 + 3k_2 &= 0 \\ 2k_1 - 3k_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \text{Si} \ \begin{aligned} &k_1 = 1 \Rightarrow -2 + 3k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{2}{3}(3) = 2 \\ &k_1 = 1(3) = 3 \end{aligned}$$

Entonces: $K_1 = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4T}$, $[\lambda_2 = -1] \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-(-1) & 3 \\ 2 & 1-(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} 3k_1 + 3k_2 &= 0 \\ 2k_1 + 2k_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \text{Si } k_2 = 1 \Rightarrow 2k_1 + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = -1$$

También: $K_2 = C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-T}$.

Así pues: $K = K_1 + K_2 = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4T} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-T}$, con lo que la solución buscada será:

$$\boxed{\begin{aligned} x(T) &= 3C_1 \cdot e^{4T} - C_2 \cdot e^{-T} \\ y(T) &= 2C_1 \cdot e^{4T} + C_2 \cdot e^{-T} \end{aligned}}$$

, y también se cumple que: $x(T) + y(T) = 5C_1 \cdot e^{4T}$.

Ejemplo 7

Sea: a) resolver el sistema de EDO:

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 - 3y_2 \\ y'_2 = y_2 - 2y_1 \end{cases}$$, y b) así como la solución particular: $$\begin{cases} y_1(0) = 8 \\ y_2(0) = 3 \end{cases}$$

Solución:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$; con la ecuación característica o secular:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}; \text{o sea}: (\lambda - 2)(\lambda - 1) - 6 = 0;$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \; ; \quad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$; haciendo: $A \cdot X_i = \lambda_i \cdot X_i$;

$\lambda_1 = 4$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = 4x_1 \\ -2x_1 + x_2 = 4x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow K \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = -x_1 \\ -2x_1 + x_2 = -x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow K \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

luego la integral general será:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} \cdot e^{4x} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-x}$$; o sea:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot e^{-x} \\ y_2 = (-2/3)c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot e^{-x} \end{array}}$$

que constituye la solución buscada, en que también se cumple que:

$$y_1 - y_2 = \frac{5c_1}{3} \cdot e^{4x} \; .$$

b) Con los valores iniciales expresados, se tendrá que:

$$\begin{cases} y_1(0) = c_1 + c_2 = 8 \\ y_2(0) = -\frac{2}{3}c_1 + c_2 = 3 \end{cases} ;$$

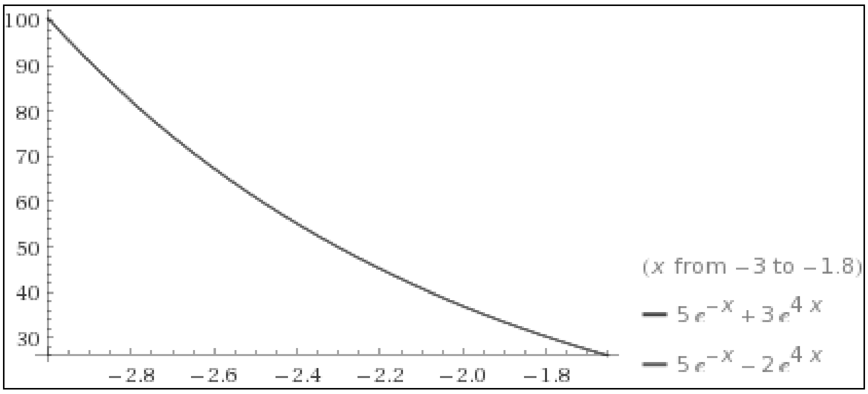
, que es un sistema simple de ecuaciones del que se deduce que: $c_1 = 3$; $c_2 = 5$

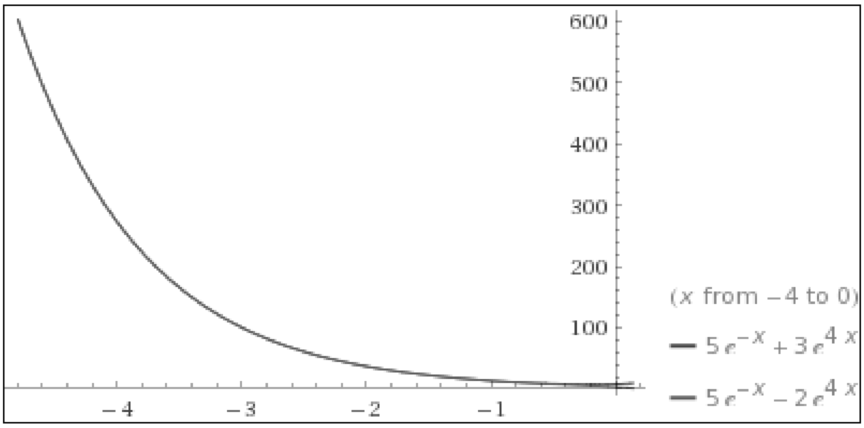
, con lo que la solución particular pedida es:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = 3 \cdot e^{4x} + 5 \cdot e^{-x} \\ y_2 = -2 \cdot e^{4x} + 5 \cdot e^{-x} \end{array}}$$

y también se cumple que: $y_1 - y_2 = 5 \cdot e^{4x}$.

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas), resultando prácticamente coincidentes:





Ejemplo 8

Sea resolver el sistema de EDO siguiente:

$$\begin{cases} y'_1 = -4y_1 + y_2 + y_3 \\ y'_2 = y_1 + 5y_2 - y_3 \\ y'_3 = y_1 - 3y_3 \end{cases}$$

Solución:

Se tiene la matriz: $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$; La ecuación característica o secular, será:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+4 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-5 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda+3 \end{bmatrix}; \text{ o sea:}$$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 5)(\lambda + 3) - 1 - \lambda - 3 + \lambda + 4 = 0$$

$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 23\lambda - 60 = 0$; una raíz es $\lambda_1 = -3$, luego operando por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -23 & -60 \\ -3) & & -3 & 3 & 60 \\ \hline & 1 & -1 & -20 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \lambda^2 - \lambda - 20 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \begin{cases} \lambda_2 = 5 \\ \lambda_3 = -4 \end{cases};$$

Como siempre, hacemos: $A \cdot X_i = \lambda_i \cdot X_i$, o sea:

λ_1 = -3

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 \\ -3x_2 \\ -3x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} -4x_1 + x_2 + x_3 = -3x_1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = -3x_2 \\ x_2 - 3x_3 = -3x_3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_2 = 0 ; \\ x_1 = x_3 ; \end{array}$$

$$\Rightarrow K \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por último, nos quedará que:

λ_2 = 5

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 \\ 5x_2 \\ 5x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + x_2 + x_3 &= 5x_1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 5x_2 \\ x_2 - 3x_3 &= 5x_3 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_3 ; \\ x_2 &= 8x_3 ; \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

λ_3 = -4

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_1 \\ -4x_2 \\ -4x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + x_2 + x_3 &= -4x_1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= -4x_2 \\ x_2 - 3x_3 &= -4x_3 \end{aligned}\right\} \qquad x_2 = -x_3$$

$$\Rightarrow K \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con ello, la integral general será:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-3x} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{5x} + c_3 \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-4x}$$; o sea, se tendrá que:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cdot e^{-3x} + c_2 \cdot e^{5x} + 10c_3 \cdot e^{-4x} \\ y_2 &= 8c_2 \cdot e^{5x} - c_3 \cdot e^{-4x} \\ y_3 &= c_1 \cdot e^{-3x} + c_2 \cdot e^{5x} + c_3 \cdot e^{-4x} \end{aligned}}$$

2.2. RAÍCES MÚLTIPLES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

Supuesto que las raíces de la ecuación característica (2) sean múltiples, pero la matriz (3) no sea diagonalizable[1], no es posible obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales de manera análoga a la seguida en otros casos, ya que sería preciso un conocimiento previo de la

[1] En relación a este concepto, puede consultarse el epígrafe 1.3. del capítulo 9 de este mismo libro.

"forma de Jordan"[2] que no es objeto de tratamiento en el presente curso práctico.

El siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en algunas de las obras de referencia bibliográfica, nos proporciona un procedimiento de obtención de la solución general de un sistema lineal homogéneo, válido para todos los casos, que podemos también emplear en éste.

Proposición.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales como el (1), si $\lambda_1,\ldots,\lambda_2$ son las raíces de su ecuación característica (2) con órdenes o grados de multiplicidad $m_1,\ldots,m_s$, respectivamente, entonces, para cada λ_i, i = 1, …, s, existen soluciones del sistema (1) de la forma:

$$z_i = \begin{bmatrix} P_{i1}(x)e^{\lambda_i x} \\ \vdots \\ P_{in}(x)e^{\lambda_i x} \end{bmatrix}$$

donde $P_{i1}, \ldots, P_{in}$ son polinomios de grado inferior a m_i.

Además, si z es una solución cualquiera de dicho sistema, es posible encontrar los polinomios citados, de tal forma que: $z = \sum_{i=1}^{s} z_i = z_1 + \ldots + z_s$

Ejemplo 1

Obténgase la solución general del sistema de EDO siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y'_1 = 2y_1 + y_2 \\ y'_2 = -y_1 + 4y_2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Su ecuación característica o secular es:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda)+1=0$$

[2] Al tratar de diagonalizar una matriz, si ésta posee algunos de sus autovalores que sean iguales, puede ser que no lleguemos a encontrar ninguna transformación lineal que logre diagonalizarla completamente. Esto ocurre cuando, para ese autovalor múltiple, no podamos encontrar suficientes autovectores linealmente independientes (debemos encontrar autovectores –linealmente independientes- en la misma cantidad que la multiplicidad del autovalor para poderlo diagonalizar completamente). En los casos en que no es posible diagonalizar la matriz, se puede llevar la misma –a través de una transformación lineal- a la denominada *forma de Jordan*, que consiste en tener en la diagonal principal los autovalores λ_i de la matriz, y "unos" extra-diagonales en bloques de Jordan en los lugares de los autovalores múltiples. La cantidad de "unos" extra-diagonales dependerá de la cantidad de autovectores linealmente independientes que podamos obtener del autovalor múltiple. Si el grado de multiplicidad del autovalor es *k*, y obtenemos *l* autovectores linealmente independientes para ese autovalor, entonces la cantidad *m* de "unos" extra-diagonales será: $m = k - l$.

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, que posee una raíz $\lambda = 3$ (doble).

Notemos que la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ no es diagonalizable.

Por la proposición anteriormente enunciada, podemos afirmar que el sistema dado poseerá soluciones de la forma:

$$z = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1 x + c_2)\cdot e^{3x} \\ (c_3 x + c_4)\cdot e^{3x} \end{bmatrix}$$

que, substituidas en el sistema, nos dan:

$$\left.\begin{array}{l} c_1e^{3x} + 3(c_1x + c_2)e^{3x} = 2(c_1x + c_2)e^{3x} + (c_3x + c_4)e^{3x} \\ c_3e^{3x} + 3(c_3x + c_4)e^{3x} = -(c_1x + c_2)e^{3x} + 4(c_3x + c_4)e^{3x} \end{array}\right\}$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{l} 3c_1x + 3c_2 + c_1 = (2c_1 + c_3)x + 2c_2 + c_4 \\ 3c_3x + c_3 + 3c_4 = (4c_3 - c_1)x - c_2 + 4c_4 \end{array}\right\}$$

por ello:

$$\left.\begin{array}{l} 3c_1 = 2c_1 + c_3 \\ 3c_2 + c_1 = 2c_2 + c_4 \\ 3c_3 = 4c_3 - c_1 \\ c_3 + 3c_4 = -c_2 + 4c_4 \end{array}\right\}$$

que nos proporciona las relaciones: $c_3 = c_1$ y $c_4 = c_1 + c_2$.

La solución general buscada es:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = (c_1x + c_2)\cdot e^{3x} \\ y_2 = (c_1x + c_1 + c_2)\cdot e^{3x} \end{array}}$$

de donde también se cumple que: $y_2 - y_1 = c_1\cdot e^{3x}$.

Ejemplo 2

Resolver el sistema de EDO siguiente: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dT} = 3x - 18y \\ \dfrac{dy}{dT} = 2x - 9y \end{cases}$

Solución:

La matriz del sistema es: $A = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$. Procederemos como siempre, con lo que:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -18 \\ 2 & -9-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (3-\lambda)(-9-\lambda) + 36 = 0$$

$(\lambda+3)^2=0 \Rightarrow \lambda=-3$, que es una raíz de grado de multiplicidad 2, con lo que:

$$[\lambda=-3] \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-(-3) & -18 \\ 2 & -9-(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6k_1 - 18k_2 = 0 \\ 2k_1 - 6k_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{Si} \begin{array}{l} k_1 = 1 \Rightarrow 6 - 18k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{3}(3) = 1 \\ k_1 = 1(3) = 3 \end{array}$$

Entonces: $K_1 = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3T}$

$$\left.\begin{array}{l} 6k_1 - 18k_2 = 3 \\ 2k_1 - 6k_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{Si} \begin{array}{l} k_1 = 1 \Rightarrow 6 - 18k_2 = 3 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{6}(6) = 1 \\ k_1 = 1(6) = 6 \end{array}$$

Entonces: $K_2 = C_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} Te^{-3T} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3T} \right]$, y definitivamente:

$$K = K_1 + K_2 = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3T} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} Te^{-3T} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3T} \right]$$

Y la solución buscada será:

$$\boxed{\begin{array}{l} x(T) = 3C_1 \cdot e^{-3T} + 3C_2 \cdot T \cdot e^{-3T} + 6C_2 \cdot e^{-3T} \\ y(T) = C_1 \cdot e^{-3T} + C_2 \cdot T \cdot e^{-3T} + C_2 \cdot e^{-3T} \end{array}}$$

, y también se cumple que: $x(T) + y(T) = 4C_1 \cdot e^{-3T} + 4C_2 \cdot T \cdot e^{-3T} + 7C_2 \cdot e^{-3T}$

2.3. RAÍCES COMPLEJAS DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

Los siguientes ejemplos, resueltos de diferente manera, cuya demostración puede encontrarse en algunas de las obras de referencia bibliográfica, nos proporcionan un procedimiento de obtención de la solución general de un sistema lineal homogéneo con raíces complejas de la ecuación característica, válido para todos los casos, que podemos también emplear en estos.

Ejemplo 1

Obténgase la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente:

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 - 5y_2 \\ y'_2 = y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Solución:

Se tiene la matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. La ecuación característica o secular vendrá dada por:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 5 \\ -1 & \lambda + 2 \end{bmatrix}$$

que pasando de matrices a determinantes ofrece: $(\lambda-2)\cdot(\lambda+2) + 5 = 0$;

$$\lambda^2 - 4 + 5 = \lambda^2 + 1 = 0 \ ; \begin{cases} \lambda_1 = +i \\ \lambda_2 = -i \end{cases}, \text{ con } \alpha = 0, \ \beta = 1.$$

$\boxed{\lambda_1 = i}$ $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$;

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 = ix_1 \\ x_1 - 2x_2 = ix_2 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} (2-i)x_1 = 5x_2 \\ x_1 = (2+i)x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow k\begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = -i}$ $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 = -ix_1 \\ x_1 - 2x_2 = ix_2 \end{array}\right\} \ x_1 = (2-i)x_2 \Rightarrow \ k\begin{bmatrix} 2 - i \\ 1 \end{bmatrix}$

que conforman la integral general del sistema diferencial planteado:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{ix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-ix} \ ; \text{ o sea:}$$

$$y_1 = c_1(2+i)e^{ix} + c_2(2-i)e^{-ix} = c_1(2+i)(\cos x + i\cdot \text{sen } x) + c_2(2-i)(\cos x - i\cdot \text{sen } x)$$

y también: $y_2 = c_1\cdot e^{ix} + c_2\cdot e^{-ix} = c_1(\cos x + i\cdot \text{sen } x) + c_2(\cos x - i\cdot \text{sen } x)$

que, a su vez, pueden desarrollarse dando la expresión real de la solución anterior. Para ello, basta hacer $c_1 = A + Bi$ y $c_2 = A - Bi$, lo que nos permite obtener[3]:

$$\begin{aligned} y_1 &= (A+Bi)(2+i)(\cos x + i\cdot \text{sen } x) + (A-Bi)(2-i)(\cos x - i\cdot \text{sen } x) = \\ &= 2A \cos x + (A+2B)\, i\cdot \cos x - B\cdot \cos x + 2Ai\cdot \text{sen } x - \\ &- (A+2B) \text{ sen } x - Bi\cdot \text{sen } x + 2A\cdot \cos x - (A+2B)\, i\cdot \cos x - \\ &- B \cos x - 2Ai\cdot \text{sen } x - (A+2B) \text{ sen } x + Bi\cdot \text{sen } x = \\ &= (4A - 2B) \cos x - (2A + 4B) \text{ sen } x. \end{aligned}$$

Del mismo modo, se tendrá que:

[3] En el año 1748, L. Euler introdujo las expresiones: $e^{ix} = \cos x + i\cdot \text{sen } x$, así como: $e^{-ix} = \cos x - i\cdot \text{sen } x$, $\forall x \in \{\Re\}$, como definición de la exponencial de ix. De esta definición se deducen diversas propiedades de singular interés y aplicación.

$$y_2 = (A+Bi)(\cos x + i\cdot \text{sen } x) + (A-Bi)(\cos x - i\cdot \text{sen } x) = 2(A\cdot \cos x - B\cdot \text{sen } x)$$

Ejemplo 2

Resolver el sistema de EDO siguiente: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dT} = 6x - y \\ \dfrac{dy}{dT} = 5x + 4y \end{cases}$

Solución:

La matriz del sistema es: $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. Procederemos como siempre, con lo que se tiene la ecuación característica o secular siguiente:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (6-\lambda)(4-\lambda) + 5 = 0$$

De ahí resulta la ecuación: $\lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 5 + 2i \\ \lambda = 5 - 2i \end{cases}$

Con α = 5, β = 2. Entonces, se tendrá que:

$$[\lambda = 5 + 2i] \Rightarrow \begin{vmatrix} 6-(5+2i) & -18 \\ 5 & 4-(5+2i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1-2i)k_1 - 1k_2 = 0 \\ 5k_1 + (-1-2i)k_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{Si} \quad \begin{array}{l} k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = \dfrac{1}{1-2i}(1-2i) = 1 \\ k_2 = 1(1-2i) = 1-2i \end{array}$$

Entonces: $K_1 = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{5T}\cdot \cos 2T$

$$[\lambda = 5 - 2i] \Rightarrow \begin{vmatrix} 6-(5-2i) & -18 \\ 5 & 4-(5-2i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2i & -1 \\ 5 & -1+2i \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1+2i)k_1 - 1k_2 = 0 \\ 5k_1 + (-1+2i)k_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{Si} \quad \begin{array}{l} k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = \dfrac{1}{1+2i}(1+2i) = 1 \\ k_2 = 1(1+2i) = 1+2i \end{array}$$

Entonces: $K_2 = C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{5T}\cdot \text{sen}2T$. Y definitivamente, se tendrá que:

$$K = K_1 + K_2 = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{5T}\cdot \cos 2T + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{5T}\cdot \text{sen}2T$$

, con lo que la solución buscada vendrá expresada por:

$$\boxed{\begin{array}{c} x(T) = C_1 \cdot e^{5T} \cdot \cos 2T + C_2 \cdot e^{5T} \cdot \text{sen } 2T \\ y(T) = C_1(1-2i) \cdot e^{5T} \cdot \cos 2T + C_2(1+2i) \cdot e^{5T} \cdot \text{sen } 2T \end{array}}$$

, y también se cumple que: $x(T) – y(T) = 2i \cdot e^{5T}(\cos 2T – \text{sen } 2T)$.

Una expresión real de la solución anterior también podría ser la siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{l} x(T) = \frac{C_1}{2} e^{5T}(\text{sen}2T + 2\cos 2T) - \frac{C_2}{2} e^{5T} \cdot \text{sen}2T \\ y(T) = \frac{5C_1}{2} e^{5T} \cdot \text{sen}2T + \frac{C_2}{2} e^{5T}(2\cos 2T - \text{sen}2T) \end{array}}$$

Ejemplo 3

Sea resolver el siguiente sistema de EDO:

$$Y' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot Y$$

Solución:

Este sistema, planteado en forma matricial, en realidad es el siguiente:

$$\underset{(3\times1)}{\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix}} = \underset{(3\times3)}{\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}} \times \underset{(3\times1)}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}} = \underset{(3\times1)}{\begin{bmatrix} -3y_1 + 2y_3 \\ y_1 - y_2 \\ -2y_1 - y_2 \end{bmatrix}}$$; o sea, resulta el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = -3y_1 + 2y_3 \\ y'_2 = y_1 - y_2 \\ y'_3 = -2y_1 - y_2 \end{array} \right.$$; con la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$. La ecuación característica o secular, será:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+3 & 0 & -2 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda \end{bmatrix};$$

que pasando de matrices a determinantes ofrece:

$$\lambda(\lambda + 3)(\lambda + 1) +2 + 4(\lambda + 1) = 0$$; esto es:

$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 4\lambda + 6 = 0$; una raíz es $\lambda_1 = -2$, con lo que:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 7 & 6 \\ -2) & & -2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \begin{cases} \lambda_2 = -1 + i\sqrt{2} \\ \lambda_3 = -1 - i\sqrt{2} \end{cases}$$; con $\alpha = -1$, $\beta = \sqrt{2}$,

Como siempre, hacemos: $A \cdot X_i = \lambda_i \cdot X_i$, o sea:

$\boxed{\lambda_1 = -2}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \\ -2x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{r} -3x_1 + 2x_3 = -2x_1 \\ x_1 - x_2 = -2x_2 \\ -2x_1 - x_2 = -2x_3 \end{array}\right\} \qquad x_1 = -x_2 = 2x_3 ;$$

$$\Rightarrow K \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = -1 + i\sqrt{2}}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1+i\sqrt{2})x_1 \\ (-1+i\sqrt{2})x_2 \\ (-1+i\sqrt{2})x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{r} -3x_1 + 2x_3 = -x_1 + i\sqrt{2} \cdot x_1 \\ x_1 - x_2 = -x_2 + i\sqrt{2} \cdot x_2 \\ -2x_1 - x_2 = -x_3 + i\sqrt{2} \cdot x_3 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x_1 = i\sqrt{2} \cdot x_2 ; \\ 2x_3 = (i\sqrt{2} + 2) \cdot x_1 ; \end{array}$$

$$\Rightarrow K \begin{bmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 + i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_3 = -1 - i\sqrt{2}}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1-i\sqrt{2})x_1 \\ (-1-i\sqrt{2})x_2 \\ (-1-i\sqrt{2})x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{r} -3x_1 + 2x_3 = -x_1 - i\sqrt{2}\cdot x_1 \\ x_1 - x_2 = -x_2 - i\sqrt{2}\cdot x_2 \\ -2x_1 - x_2 = -x_3 - i\sqrt{2}\cdot x_3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_1 = -i\sqrt{2}\cdot x_2\,; \\ 2x_3 = (2 - i\sqrt{2})\cdot x_1\,; \end{array}$$

$$\Rightarrow K\begin{bmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1-i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Con ello, la integral general buscada será:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot e^{-2x} + c_2\begin{bmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1+i\sqrt{2} \end{bmatrix}\cdot e^{(-1+i\sqrt{2})x} + c_3\begin{bmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1-i\sqrt{2} \end{bmatrix}\cdot e^{(-1-i\sqrt{2})x}\text{; o sea:}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2c_1\cdot e^{-2x} + (i\sqrt{2})c_2\cdot e^{-x}\cdot e^{(i\sqrt{2})\cdot x} - (i\sqrt{2})\cdot c_3\cdot e^{-x}\cdot e^{-(i\sqrt{2})\cdot x} \\ y_2 = -2c_1\cdot e^{-2x} + c_2\cdot e^{-x}\cdot e^{(i\sqrt{2})\cdot x} + c_3\cdot e^{-x}\cdot e^{-(i\sqrt{2})\cdot x} \\ y_3 = c_1\cdot e^{-2x} + (-1+i\sqrt{2})c_2\cdot e^{-x}\cdot e^{(i\sqrt{2})\cdot x} + (-1-i\sqrt{2})\cdot c_3\cdot e^{-x}\cdot e^{-(i\sqrt{2})\cdot x} \end{cases}$$

que se pueden expresar en forma real mediante las expresiones eulerianas (propuestas por su autor el año 1748):

$$\begin{cases} e^{i(x\sqrt{2})} = \cos(x\sqrt{2}) + i\,\mathrm{sen}(x\sqrt{2})\text{, y también,} \\ e^{-i(x\sqrt{2})} = \cos(x\sqrt{2}) - i\,\mathrm{sen}(x\sqrt{2}) \end{cases}$$

3. INTEGRAL GENERAL DE UN SISTEMA LINEAL COMPLETO CON COEFICIENTES CONSTANTES

3.1. DEFINICIÓN

Trataremos, ahora, el sistema no homogéneo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y'_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}y_i + b_1(x) = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}y_i + b_n(x) = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{array}\right\}$$

en el que $a_{ij} \in$ R.

Sabemos que su solución general se obtiene sumando una solución particular suya a la solución general del correspondiente sistema homogéneo, tal como sucedía con las EDO completas. Previamente hemos tratado la obtención de la solución general del sistema homogéneo con coeficientes constantes. Nos ocuparemos ahora de cómo encontrar una solución particular del sistema completo o no homogéneo.

3.2. MÉTODO DE VARIACIÓN DE CONSTANTES

Para la obtención de una solución particular del sistema anterior nos referiremos únicamente al método de variación de las constantes (también válido para sistemas lineales de coeficientes no constantes o variables).

Supongamos que:

$$y_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix}, \dots, y_n = \begin{bmatrix} y_{1n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{bmatrix}$$

es un sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo correspondiente del completo.

Pues bien, se demuestra que la función:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) y_i(x) = \alpha_1(x)y_1(x) + \dots + \alpha_n(x)y_n(x)$$

en la que las funciones $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ son soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i(x) y_{1i}(x) = \alpha'_1(x)y_{11}(x) + \dots + \alpha'_n(x)y_{1n}(x) = b_1(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i(x) y_{ni}(x) = \alpha'_1(x)y_{n1}(x) + \dots + \alpha'_n(x)y_{nn}(x) = b_n(x) \end{array}\right\}$$

constituye una solución particular del sistema planteado.

3.3. EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejemplo 1

Obténgase la solución general del siguiente sistema de EDO:

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + 2 \\ y'_2 = y_1 + 3y_2 + e^x \end{cases}$$

, con las condiciones iniciales: $y_1(0) = 1$; $y_2(0) = 0$.

Solución:

En primer lugar hemos de obtener la solución general del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 \\ y'_2 = y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

Su ecuación característica o secular es:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$.

Encontremos autovectores asociados a las mismas:

$\boxed{\lambda_1 = 2}$, hemos de resolver:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ ; \ x_{11} + x_{21} = 0 \ ; \ x_{11} = -x_{21}$$

Un autovector es, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\lambda_2 = 3}$, ofrece: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $-x_{12} = 0$.

Un autovector es, v. gr. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. La solución general del sistema es:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{2x} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{3x} \text{, o sea:}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cdot e^{2x} \\ y_2 &= -c_1 \cdot e^{2x} + c_2 e^{3x} \end{aligned}}$$

, con lo que también: $y_1 + y_2 = c_2 \cdot e^{3x}$.

Al obtener la solución general del sistema hemos encontrado un sistema fundamental de soluciones del mismo:

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3x} \end{bmatrix}$$

Una solución particular del sistema será:

$$\alpha_1(x) \begin{bmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \end{bmatrix} + \alpha_2(x) \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3x} \end{bmatrix}$$

donde $\alpha_1(x)$ y $\alpha_2(x)$ son soluciones de:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha'_1(x)\cdot e^{2x} + \alpha'_2(x)\cdot 0 = 2\\ -\alpha'_1(x)\cdot e^{2x} + \alpha'_2(x)\cdot e^{3x} = e^x\end{array}\right\}$$

De la primera de las ecuaciones tenemos que: $\alpha'_1(x) = 2e^{-2x}$, de donde: $\alpha_1(x) = -e^{-2x}$, y de la segunda ecuación se deduce que:

$$-2e^{-2x}\cdot e^{2x} + \alpha'_2(x)\cdot e^{3x} = e^x,\text{ y } \alpha'_2(x) = (e^x + 2)\cdot e^{-3x} = e^{-2x} + 2e^{-3x}$$

de donde: $\alpha_2(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{2}{3}e^{-3x}$. Por lo tanto, una solución particular del sistema será:

$$\begin{bmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \end{bmatrix} = -e^{-2x}\begin{bmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{2}{3}e^{-3x} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ e^{3x} \end{bmatrix}, \text{ o sea:}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_{1p} = -1 \\ y_{2p} = 1 - \frac{1}{2}e^x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^x \end{array}\right.$$

La solución general buscada es, pues:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = c_1\cdot e^{2x} - 1 \\ y_2 = -c_1\cdot e^{2x} + c_2\cdot e^{3x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^x \end{array}}$$

Para concluir, obtengamos la solución particular del sistema que verifica las condiciones iniciales dadas (se trataría, pues de un problema de valor inicial o PVI):

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{array}\right.$$

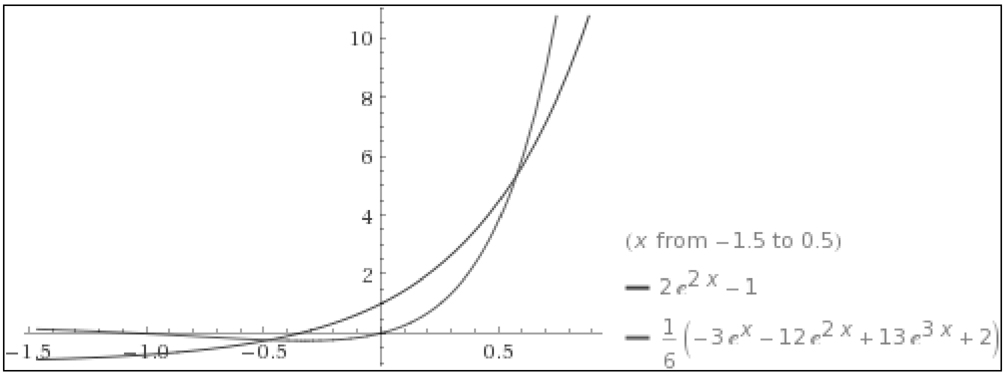
Substituyendo en el sistema anterior dichas condiciones tenemos:

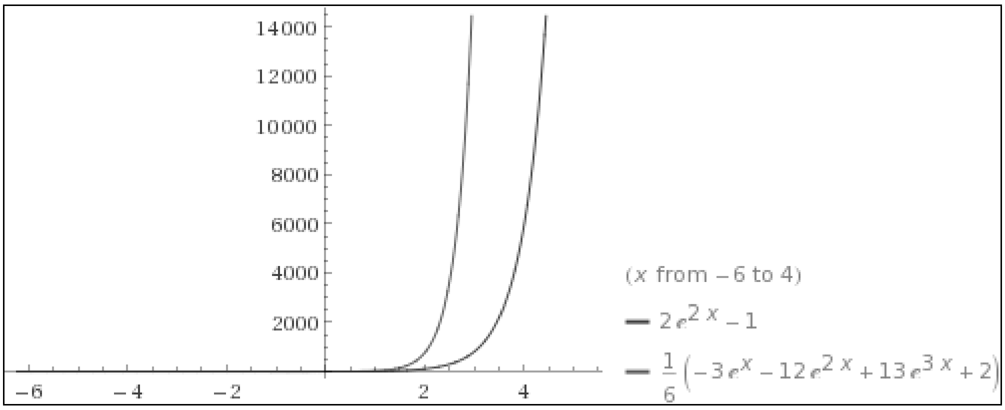
$$\left.\begin{array}{l} 1 = c_1 - 1 \\ 0 = -c_1 + c_2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

de donde $c_1 = 2$ y $c_2 = \frac{13}{6}$. Por lo tanto, la solución particular buscada es:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = 2e^{2x} - 1 \\ y_2 = -2e^{2x} + \frac{13}{6}e^{3x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^x \end{array}}$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 2

Sea ahora resolver el sistema de EDO siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + 4y_1 + 3y_2 = e^{x} \\ \dfrac{dy_2}{dx} + 2y_1 + 5y_2 = e^{3x} \end{cases}$$

Solución:

Como el sistema homogéneo correspondiente, ofrece:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 \cdot e^{-7x} + c_2 \cdot e^{-2x} \\ y_2 = c_1 \cdot e^{-7x} - \dfrac{2}{3} c_2 \cdot e^{-2x} \end{cases}$$

Se obtiene, suponiendo que c_1 y c_2 son funciones:

$$\begin{cases} \dfrac{dc_1}{dx} e^{-7x} + \dfrac{dc_2}{dx} \cdot e^{-2x} = e^{x} \\ \dfrac{dc_1}{dx} + e^{-7x} - \dfrac{2}{3} \dfrac{dc_2}{dx} e^{-2x} = e^{3x} \end{cases}$$

En efecto:

$$\frac{dc_1}{dx}\cdot e^{-7x} - \cancel{c_1\cdot 7\cdot e^{-7x}} + \frac{dc_2}{dx}\cdot e^{-2x} - \cancel{c_2\cdot 2\cdot e^{-2x}} +$$

$$+ \cancel{4c_1\cdot e^{-7x}} + \cancel{4c_2\cdot e^{-2x}} + \cancel{3c_1\cdot e^{-7x}} - \cancel{2c_2\cdot e^{-2x}} = e^x \text{ , con lo que:}$$

$$\frac{dc_1}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^{3x} & -\dfrac{2e^{-2x}}{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-7x} & e^{-2x} \\ e^{-7x} & -\dfrac{2e^{-2x}}{3} \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{-2\cdot e^{-x}}{3} - e^x}{\dfrac{-2\cdot e^{-9x}}{3} - e^{-9x}} = \frac{-2\cdot e^{-x} - 3\cdot e^x}{-2\cdot e^{-9x} - 3\cdot e^{-9x}} =$$

$$= \frac{-2\cdot e^{-x} - 3\cdot e^x}{-5\cdot e^{-9x}} = \frac{2\cdot e^{-x} + 3\cdot e^x}{-5\cdot e^{-9x}} = \frac{2}{5}\cdot e^{8x} + \frac{3}{5}\cdot e^{10x}$$

Del mismo modo, se tiene que:

$$\frac{dc_1}{dx}\cdot e^{-7x} - \cancel{c_1\cdot 7\cdot e^{-7x}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{dc_2}{dx}\cdot e^{-2x} + \frac{4}{3}\cancel{c_2\cdot e^{-2x}} +$$

$$+ 2\cancel{c_1\cdot e^{-7x}} + 2\cancel{c_2\cdot e^{-2x}} + 5\cancel{c_1\cdot e^{-7x}} - \frac{10}{3}\cancel{c_2\cdot e^{-2x}} = e^{3x} \text{ , con lo que:}$$

$$\frac{dc_2}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} e^{-7x} & e^x \\ e^{-7x} & e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-7x} & e^{-2x} \\ e^{-7x} & -\dfrac{2e^{-2x}}{3} \end{vmatrix}} = \frac{e^{-4x} - e^{-6x}}{\dfrac{-2\cdot e^{-9x}}{3} - e^{-9x}} = \frac{3\cdot e^{-4x} - 3\cdot e^{-6x}}{-2\cdot e^{-9x} - 3\cdot e^{-9x}} =$$

$$= \frac{3\cdot e^{-4x} - 3\cdot e^{-6x}}{-5\cdot e^{-9x}} = -\frac{3}{5}\cdot e^{5x} + \frac{3}{5}\cdot e^{3x} \text{ ;}$$

$$c_1 = \int\left(\frac{2}{5}\cdot e^{8x} + \frac{3}{5}\cdot e^{10x}\right)\cdot dx = \frac{2}{5}\int e^{8x}\cdot dx + \frac{3}{5}\int e^{10x}\cdot dx = \frac{e^{8x}}{20} + \frac{3\cdot e^{10x}}{50} + k_1 \text{ ;}$$

Así mismo, se cumple que:

$$c_2 = \int\left(-\frac{3}{5}\cdot e^{5x} + \frac{3}{5}\cdot e^{3x}\right)\cdot dx = \frac{3}{5}\int (e^{3x} - e^{5x})\cdot dx =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{5x}}{5}\right) + k_2 = \frac{e^{3x}}{5} - \frac{3\cdot e^{5x}}{25} + k_2$$

Substituyendo, ahora, en la solución calculada del sistema homogéneo se obtiene la solución del sistema no homogéneo, con k_1 y k_2 como nuevas constantes arbitrarias del problema.

En efecto:

$$y_1 = \left(\frac{e^{8x}}{20} + \frac{3 \cdot e^{10x}}{50} + k_1\right) \cdot e^{-7x} + \left(\frac{e^{3x}}{5} - \frac{3 \cdot e^{5x}}{25} + k_2\right) \cdot e^{-2x} =$$
$$= \frac{e^x}{20} + \frac{3 \cdot e^{3x}}{50} + k_1 \cdot e^{-7x} + \frac{e^x}{5} - \frac{3 \cdot e^{3x}}{25} + k_2 \cdot e^{-2x} =$$
$$= \frac{e^x}{4} - \frac{3 \cdot e^{3x}}{50} + k_1 \cdot e^{-7x} + k_2 \cdot e^{-2x}$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$y_2 = \left(\frac{e^{8x}}{20} + \frac{3 \cdot e^{10x}}{50} + k_1\right) \cdot e^{-7x} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^{3x}}{5} - \frac{3 \cdot e^{5x}}{25} + k_2\right) \cdot e^{-2x} =$$
$$= \frac{e^x}{20} + \frac{3 \cdot e^{3x}}{50} + k_1 \cdot e^{-7x} - \frac{2 \cdot e^x}{15} + \frac{2 \cdot e^{3x}}{25} - \frac{2k_2 \cdot e^{-2x}}{3} =$$
$$= -\frac{e^x}{12} + \frac{7 \cdot e^{3x}}{50} + k_1 \cdot e^{-7x} - \frac{2k_2 \cdot e^{-2x}}{3},$$

con lo cual, la integral general buscada del sistema planteado será la siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= \frac{e^x}{4} - \frac{3 \cdot e^{3x}}{50} + k_1 \cdot e^{-7x} + k_2 \cdot e^{-2x} \\ y_2 &= -\frac{e^x}{12} + \frac{7 \cdot e^{3x}}{50} + k_1 \cdot e^{-7x} - \frac{2k_2 \cdot e^{-2x}}{3} \end{aligned}}$$

Ejemplo 3

Obtener la solución general del sistema completo de EDO siguiente:

$$\begin{cases} y'_1 = 3x + y_1 + y_2 \\ y'_2 = x - 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

Solución:

Este sistema es reducible a una sola ecuación diferencial por eliminación, lo que se consigue sumando miembro a miembro ambas ecuaciones componentes del sistema, así:

$y'_1 + y'_2 = 4x - y_1$; además: $y''_1 = 3 + y'_1 + y'_2$, con lo que:
$y''_1 + y'_1 = 3 + y'_1 + y'_2 + 4x - y_1 - y'_2$; de donde: $y''_1 + y_1 = 4x + 3$

La integral de la ecuación homogénea, como ya se ha visto, conduce a:

$$y_1^* = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \text{sen } x$$

Ensayando ahora una solución particular de la no homogénea del tipo (porque carece de término en y'_1):

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c \\ y'_p = 2ax + b \\ y''_p = 2a \end{cases}$$

y substituyendo ello en la ecuación inicial: $2a + ax^2 + bx + c = 4x + 3$;

de donde: a = 0 ; b = 4 ; c = 3 ; con lo que se tendrá una integral general:

$$y_1 = y_1{}^* + y_p = \boxed{c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \operatorname{sen} x + 4x + 3} \;;$$

a su vez, se tiene que: $y'_1 = -c_1 \cdot \operatorname{sen} x + c_2 \cdot \cos x + 4$, con lo que substituyendo en la 1ª ecuación se tiene que:

$$y_2 = y'_1 - y_1 - 3x = -c_1 \cdot \operatorname{sen}x + c_2 \cdot \cos x + 4 - c_1 \cdot \cos x - c_2 \cdot \operatorname{sen}x - 4x - 3 - 3x =$$

$$= \boxed{(c_2 - c_1) \cdot \cos x - (c_1 + c_2) \cdot \operatorname{sen} x - 7x + 1} \;,$$

que constituyen ambas la solución general del sistema propuesto.

Ejemplo 4

Sea resolver el sistema de EDO siguiente:

$$\begin{cases} y'_1 = -6y_1 - 3y_2 + 14y_3 \\ y'_2 = 4y_1 + 3y_2 - 8y_3 \\ y'_3 = -2y_1 - y_2 + 5y_3 + \operatorname{sen} x \end{cases}$$

con las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 \\ y_3(0) = 0 \end{cases}$$

Solución:

Primero solucionaremos el sistema homogéneo de matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix};$$ La ecuación característica o secular, será:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+6 & 3 & -14 \\ -4 & \lambda-3 & 8 \\ 2 & 1 & \lambda-5 \end{bmatrix};$$

que pasando de matrices a determinantes ofrece las soluciones:

$$(\lambda + 6)(\lambda - 3)(\lambda - 5) + 48 + 56 + 28\,(\lambda - 3) + 12(\lambda - 5) - 8(\lambda + 6) = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 33\lambda + 194 + 28\lambda - 84 + 12\lambda - 60 - 8\lambda - 48 = 0$$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$; $\lambda_1 = 1$; y operando por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1) & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$; haciendo: $A \cdot X_i = \lambda_i \cdot X_i$; se tiene que:

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} -6x_1 - 3x_2 + 14x_3 = x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = x_2 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = x_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 0 \end{array} \quad ;$$

$$\Rightarrow K \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv K \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = 2}$

$$\begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} -6x_1 - 3x_2 + 14x_3 = 2x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 2x_2 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = 2x_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 5/2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow K \begin{bmatrix} 5/2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv K \begin{bmatrix} 1 \\ -4/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_3 = -1}$

$$\begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l}-6x_1 - 3x_2 + 14x_3 = -x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = -x_2 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = -x_3\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x_1 = -2x_2 \\ x_2 = -2x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow K\begin{bmatrix}4\\-2\\1\end{bmatrix} \equiv K\begin{bmatrix}1\\-1/2\\1/4\end{bmatrix}$$

Con ello, la integral general del sistema homogéneo será:

$$y = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\\1/2\end{bmatrix}\cdot e^x + c_2\begin{bmatrix}1\\-4/5\\2/5\end{bmatrix}\cdot e^{2x} + c_3\begin{bmatrix}1\\-1/2\\1/4\end{bmatrix}\cdot e^{-x}\text{; o sea:}$$

$$\left.\begin{array}{r}y_1{}^* = c_1\cdot e^x + c_2\cdot e^{2x} + c_3\cdot e^{-x} \\ y_2{}^* = -\frac{4}{5}c_2\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}c_3\cdot e^{-x} \\ y_3{}^* = \frac{c_1}{2}\cdot e^x + \frac{2}{5}c_2\cdot e^{2x} + \frac{c_3}{4}\cdot e^{-x}\end{array}\right\}$$

Suponiendo, ahora, que c_1, c_2 y c_3 son funciones, aplicaremos el método de variación de constantes, con lo que:

$$\left.\begin{array}{r}y_1{}^{*\prime} = c'_1\cdot e^x + c_1\cdot e^x + c'_2\cdot e^{2x} + 2c_2\cdot e^{2x} + c'_3\cdot e^{-x} - c_3\cdot e^{-x} \\ y_2{}^{*\prime} = -\frac{4}{5}c'_2\cdot e^{2x} - \frac{8}{5}c_2\cdot e^{2x} - \frac{c'_3}{2}\cdot e^{-x} + \frac{c_3}{2}\cdot e^{-x} \\ y_3{}^{*\prime} = \frac{c'_1}{2}\cdot e^x + \frac{c_1}{2}\cdot e^x + \frac{2c'_2}{5}\cdot e^{2x} + \frac{4}{5}c_2\cdot e^{2x} + \frac{c'_3}{4}\cdot e^{-x} - \frac{c_3}{4}\cdot e^{-x}\end{array}\right\}$$

Substituyendo, ahora, en el sistema original, se tendrá:

$(y^*_1)' + 6y^*_1 + 3y^*_2 - 14y^*_3 = 0$ (primera ecuación) ; o sea:

$$c'_1\cdot e^x + c_1\cdot e^x + c'_2\cdot e^{2x} + 2c_2\cdot e^{2x} + c'_3\cdot e^{-x} - c_3\cdot e^{-x} + 6c_1\cdot e^x + 6c_2\cdot e^{2x} +$$
$$+ 6c_3\cdot e^{-x} - (12/5)c_2\cdot e^{2x} - (3/2)c_3\cdot e^{-x} - 7c_1\cdot e^x - (28/5)c_2\cdot e^{2x} - (7/2)c_3\cdot e^{-x} = 0\ ;$$

o sea: $c'_1\cdot e^x + c'_2\cdot e^{2x} + c'_3\cdot e^{-x} = 0$;

$(y^*_2)' - 4y^*_1 - 3y^*_2 + 8y^*_3 = 0$ (segunda ecuación); obviamente, resultará:

$$-\frac{4}{5}c'_2\cdot e^{2x} - \frac{c'_3}{2}\cdot e^{-x} = 0\ ;$$

$(y^*_3)' + 2y^*_1 + y^*_2 - 5y^*_3 = \text{sen } x$ (tercera ecuación); … y así sucesivamente.

Al final del proceso se obtendrá la integral general del sistema completo, así:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = y_1{*} + y_{1p} = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{-x} + \cos x - 5\operatorname{sen} x \\ y_2 = y_2{*} + y_{2p} = -\dfrac{4}{5} c_2 \cdot e^{2x} - \dfrac{c_3}{2} \cdot e^{-x} + \dfrac{12}{5}\operatorname{sen} x - \dfrac{4}{5}\cos x \\ y_3 = y_3{*} + y_{3p} = \dfrac{c_1}{2} \cdot e^{x} + \dfrac{2}{5} c_2 \cdot e^{2x} + \dfrac{c_3}{4} \cdot e^{-x} - \dfrac{17}{10}\operatorname{sen} x - \dfrac{\cos x}{10} \end{array}}$$

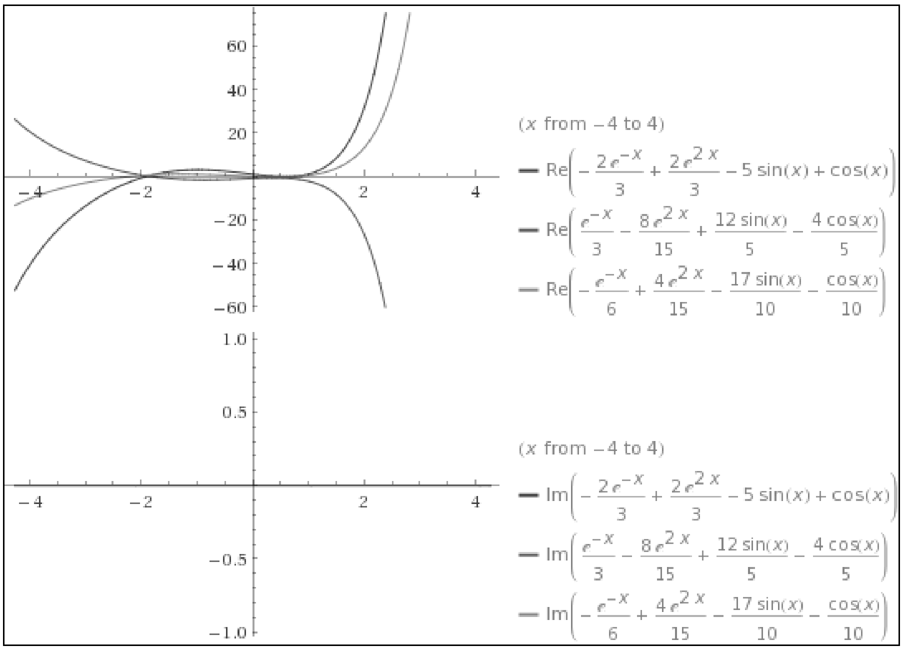
Las soluciones particulares correspondientes a las condiciones iniciales dadas serán:

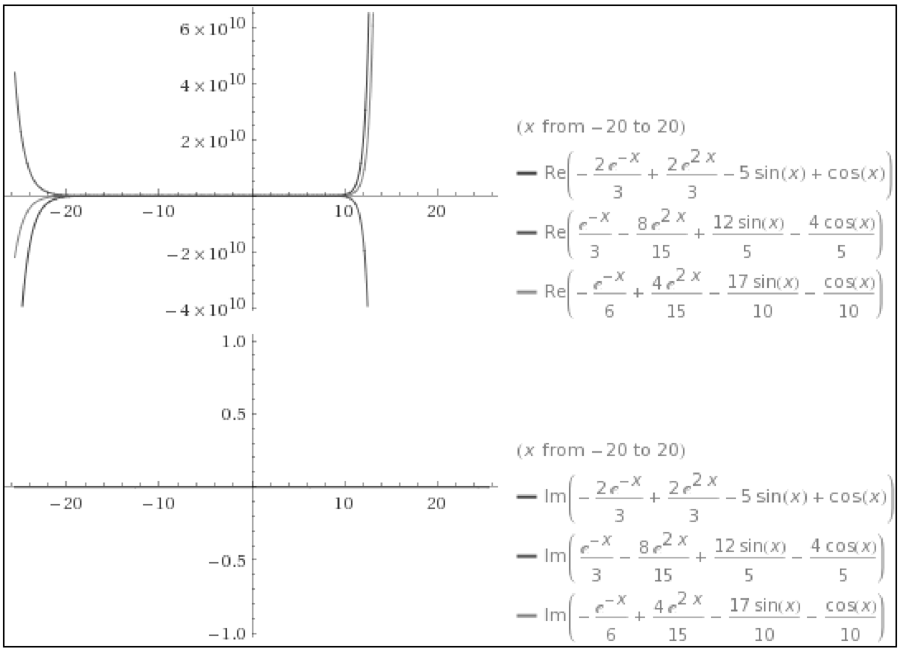
$$\left. \begin{array}{r} y_1(0) = c_1 + c_2 + c_3 + 1 = 1 \\ y_2(0) = -\dfrac{4c_2}{5} - \dfrac{c_3}{2} - \dfrac{4}{5} = -1 \\ y_3(0) = \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{2c_2}{5} + \dfrac{c_3}{4} - \dfrac{1}{10} = 0 \end{array} \right\}$$

del que se deduce que: $\boxed{c_1 = 0}$; $\boxed{c_2 = 2/3}$; $\boxed{c_3 = -2/3}$; y la solución particular (I.P.) del sistema planteado será:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{2e^{2x}}{3} - \dfrac{2e^{-x}}{3} + \cos\ x - 5\operatorname{sen}\ x \\ y_2 = -\dfrac{8}{15} e^{2x} + \dfrac{e^{-x}}{3} + \dfrac{12}{5}\operatorname{sen}\ x - \dfrac{4}{5}\cos\ x \\ y_3 = \dfrac{4}{15} e^{2x} - \dfrac{e^{-x}}{6} - \dfrac{17}{10}\operatorname{sen}\ x - \dfrac{\cos\ x}{10} \end{array}}$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 5

Resolver el siguiente sistema de EDO:

$$\left.\begin{array}{l} y'_1 - 3y_1 + 2y_2 = \text{sen } x \\ -y'_2 + 4y_1 - y_2 = \cos x \end{array}\right\}$$

con los valores iniciales:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{array}\right.$$

Solución:

El sistema homogéneo correspondiente se puede expresar de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} y'_1 = 3y_1 - 2y_2 \\ y'_2 = 4y_1 - y_2 \end{array}\right.$$

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$; La ecuación característica o secular será:

$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -4 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$; o sea, pasando de matrices a determinantes: $(\lambda - 3)\cdot(\lambda+1) + 8 = 0$; de lo que resulta la ecuación:

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$; $\lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 + 2i \\ \lambda_2 = 1 - 2i \end{cases}$; haciendo: $A\cdot X_i = \lambda_i\cdot X_i$;

$\boxed{\lambda_1 = 1 + 2i}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+2i)x_1 \\ (1+2i)x_2 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 = x_1 + 2i \cdot x_1 \\ 4x_1 - x_2 = x_2 + 2i \cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow K\begin{bmatrix} 1+2i \\ 3+i \end{bmatrix} \text{ (vector propio complejo asociado)}$$

$\boxed{\lambda_2 = 1 - 2i}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2i)x_1 \\ (1-2i)x_2 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 = x_1 - 2i \cdot x_1 \\ 4x_1 - x_2 = x_2 - 2i \cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow K\begin{bmatrix} 1-2i \\ 3-i \end{bmatrix} \text{ (vector propio complejo asociado)}$$

luego la integral general del sistema homogéneo será:

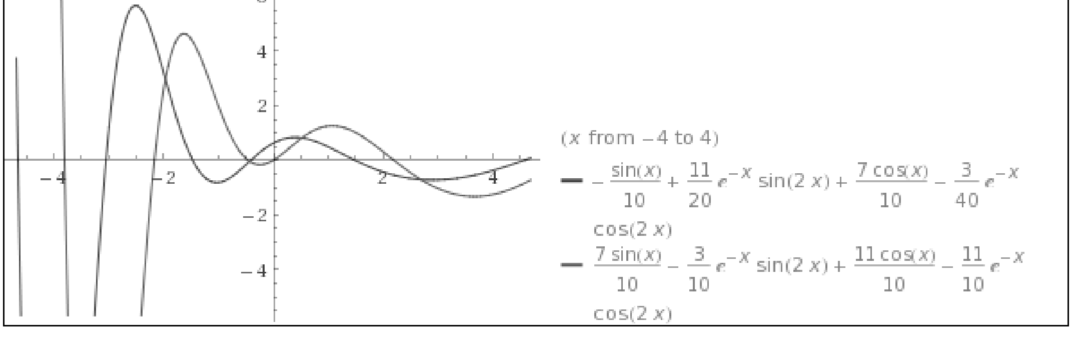
$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1+2i \\ 3+i \end{bmatrix} \cdot e^{(1+2i)x} + c_2\begin{bmatrix} 1-2i \\ 3-i \end{bmatrix} \cdot e^{(1-2i)x}; \text{ o sea:}$$

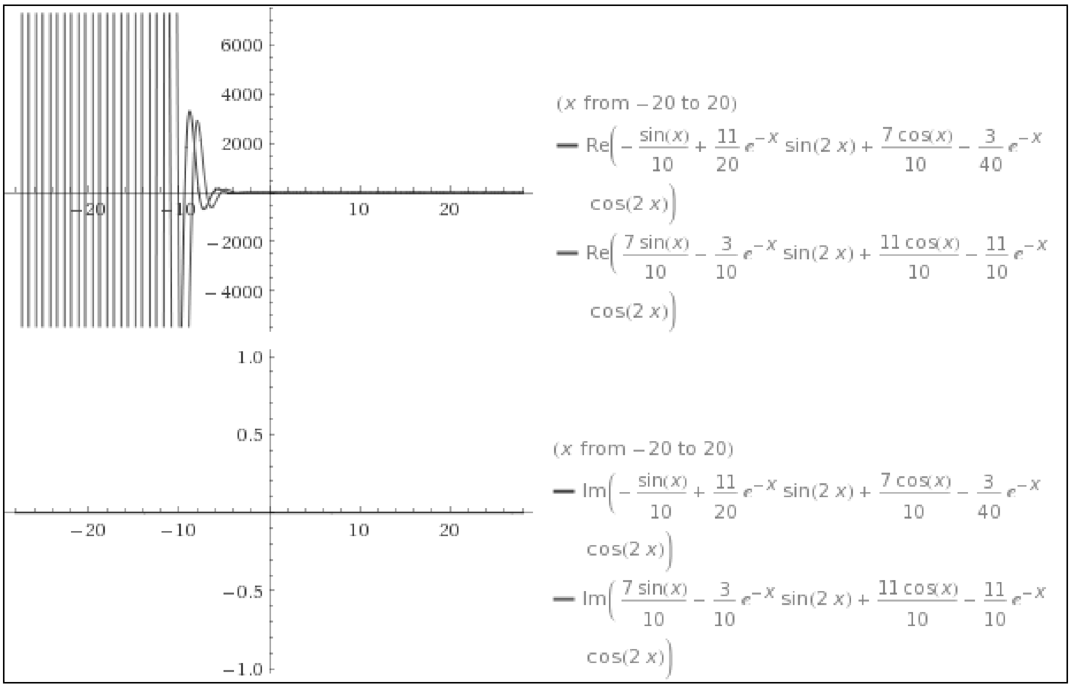
$$\begin{cases} y_1 = (1+2i)c_1 \cdot e^{(1+2i)x} + (1-2i)c_2 \cdot e^{(1-2i)x} \\ y_2 = (3+i)c_1 \cdot e^{(1+2i)x} + (3-i)c_2 \cdot e^{(1-2i)x} \end{cases}$$

y así sucesivamente, de donde la solución particular real final con las condiciones iniciales expresadas ofrece (compruébelo el amable lector) el siguiente resultado:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(x) = -\dfrac{3}{40} \cdot e^{-x} \cdot \cos 2x + \dfrac{11}{20} e^{-x} \cdot \operatorname{sen} 2x - \dfrac{1}{10} \operatorname{sen} x + \dfrac{7}{10} \cos x \\ y_2(x) = -\dfrac{3}{10} \cdot e^{-x} \cdot \operatorname{sen} 2x - \dfrac{11}{10} e^{-x} \cdot \cos 2x + \dfrac{11}{10} \cos x + \dfrac{7}{10} \operatorname{sen} x \end{array}}$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas cartesianas rectangulares):





4. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS OPERADORES A LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

En los casos que siguen, la aplicación del presente método simplifica de modo notable tanto la operatoria como los resultados obtenidos en comparación con otros métodos de resolución de este tipo de sistemas de EDO, tal como ya se anunció al principio del presente capítulo, y ello tanto para sistemas homogéneos como no homogéneos (completos). Veámoslo ahora mediante la resolución de algunos ejemplos representativos, en que pueden aparecer raíces de la ecuación característica reales (simples o múltiples) o también complejas:

Ejemplo 1

Sea resolver el siguiente sistema de EDO: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dT} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dT} = x \end{cases}$.

Solución:

$$\begin{cases} Dx = 2x - y \Rightarrow y = 2x - Dx \Rightarrow Dy = 2Dx - D^2x \\ Dy = x \end{cases}$$

$$Dy = Dy$$
$$2Dx - D^2x = x \Rightarrow D^2x - 2Dx + x = 0 \Rightarrow x\left[D^2 - 2D + 1\right] = 0$$

$x[(D-1)(D-1)] = 0 \Rightarrow D = 1$, que es una raíz de grado de multiplicidad 2, con lo que $\Rightarrow x(T) = C_1e^T + C_2Te^T$.

Del mismo modo, se tendrá que:

$$y = 2x - Dx = 2\left(C_1e^T + C_2Te^T\right) - D\left(C_1e^T + C_2Te^T\right)$$
$$y = 2C_1e^T + 2C_2Te^T - C_1e^T - C_2Te^T - C_2e^T \Rightarrow y(T) = C_1e^T + C_2Te^T - C_2e^T$$

y la solución buscada será:

$$\boxed{\begin{aligned} x(T) &= C_1e^T + C_2Te^T \\ y(T) &= C_1e^T + C_2Te^T - C_2e^T \end{aligned}}$$

y entonces: $x(T) - y(T) = C_2e^T$.

Ejemplo 2

Sea resolver el sistema de EDO: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dT} = 4x + 7y \\ \dfrac{dy}{dT} = x - 2y \end{cases}$.

Solución:

$$\begin{cases} Dx = 4x + 7y \Rightarrow 7y = Dx - 4x \Rightarrow y = \dfrac{Dx}{7} - \dfrac{4x}{7} \Rightarrow Dy = \dfrac{D^2x}{7} - \dfrac{4Dx}{7} \\ Dy = x - 2y \end{cases}$$

$$Dy = Dy$$
$$\frac{D^2x}{7} - \frac{4Dx}{7} = x - 2y = x - 2\left(\frac{Dx}{7} - \frac{4x}{7}\right) = x - \frac{2Dx}{7} + \frac{8x}{7}$$
$$\frac{D^2x}{7} - \frac{4Dx}{7} - x + \frac{2Dx}{7} - \frac{8x}{7} = 0$$
$$\frac{D^2x}{7} - \frac{2Dx}{7} - \frac{15x}{7} = 0$$

$x\left[D^2 - 2D - 15\right] = 0 \Rightarrow x\left[(D-5)(D+3)\right] = 0 \Rightarrow D = 5$, y $D = -3$, con lo que:

$$x(T) = C_1e^{5T} + C_2e^{-3T}$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$y = \frac{D}{7}\left(C_1e^{5T} + C_2e^{-3T}\right) - \frac{4}{7}\left(C_1e^{5T} + C_2e^{-3T}\right)$$
$$y = \frac{1}{7}\left(5C_1e^{5T} - 3C_2e^{-3T}\right) - \frac{4}{7}C_1e^{5T} - \frac{4}{7}C_2e^{-3T}$$
$$y(T) = \frac{1}{7}C_1e^{5T} - C_2e^{-3T}$$

y la solución buscada será:

$$\boxed{\begin{aligned} x(T) &= C_1e^{5T} + C_2e^{-3T} \\ y(T) &= \frac{1}{7}C_1e^{5T} - C_2e^{-3T} \end{aligned}}$$

y entonces, también se cumple que: x(T) + y(T) = $\frac{8}{7}C_1e^{5T} = C_3 \cdot e^{5T}$.

Ejemplo 3

Sea resolver el siguiente sistema de EDO: $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dT^2} + 5x - 2y = 0 \\ -2x + \dfrac{d^2y}{dT^2} + 2y = 0 \end{cases}$.

Solución:

$$\left.\begin{aligned} D^2x + 5x - 2y = 0 \\ -2x + D^2y + 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x(D^2 + 5) - 2y = 0 \\ -2x + y(D^2 + 2) = 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &[x(D^2 + 5) - 2y = 0](D^2 + 2) \\ &[-2x + y(D^2 + 2) = 0](2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &-4x + 2\cancel{(D^2 + 2)y} = 0 \\ &\underline{x(D^2 + 5)(D^2 + 2) - 2\cancel{(D^2 + 2)y = 0}} \\ &x(D^2 + 5)(D^2 + 2) - 4x = 0 \\ &x(D^4 + 2D^2 + 5D^2 + 10 - 4) = 0 \\ &x(D^4 + 7D^2 + 6) = 0 \\ &x[(D^2 + 6)(D^2 + 1)] = 0 \\ &x\begin{Bmatrix} D^2 = -6 \Rightarrow D = \pm\sqrt{6}i \\ D^2 = -1 \Rightarrow D = \pm i \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x(T) = C_1 \cos\sqrt{6}T + C_2 \mathrm{sen}\sqrt{6}T + C_3 \cos T + C_4 \mathrm{sen}T$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$\left.\begin{aligned} &[x(D^2 + 5) - 2y = 0](2) \\ &[-2x + y(D^2 + 2) = 0](D^2 + 5) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &2x(D^2 + 5) - 4y = 0 \\ &\underline{-2x(D^2 + 5) + y(D^2 + 2)(D^2 + 5) = 0} \\ &-4y + y(D^2 + 2)(D^2 + 5) = 0 \\ &y[-4 + (D^2 + 2)(D^2 + 5)] = 0 \\ &y(D^4 + 7D^2 + 6) \Rightarrow \begin{Bmatrix} D = \pm\sqrt{6}i \\ D = \pm i \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(T) = C_1 \cos\sqrt{6}T + C_2 \mathrm{sen}\sqrt{6}T + C_3 \cos T + C_4 \mathrm{sen}T$$

y la solución buscada será:

$$\boxed{\begin{array}{l} x(T)=C_1\cos\sqrt{6}T+C_2\text{sen}\sqrt{6}T+C_3\cos T+C_4\text{sen}\,T \\ y(T)=C_1\cos\sqrt{6}T+C_2\text{sen}\sqrt{6}T+C_3\cos T+C_4\text{sen}\,T \end{array}}$$

y entonces se cumple que: x(T) – y(T) = 0, puesto que: x(T) = y(T).

Ejemplo 4

Sea resolver el siguiente sistema de EDO: $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dT^2}=4y+e^T \\ \dfrac{d^2y}{dT^2}=4x-e^T \end{cases}$.

Solución:

$$\begin{cases} D^2x=4y+e^T \\ D^2y=4x-e^T \end{cases}$$

$$D^2x-e^T=4y\Rightarrow y=\frac{D^2x}{4}-\frac{e^T}{4}\Rightarrow Dy=\frac{D^3x}{4}-\frac{e^T}{4}\Rightarrow D^2y=\frac{D^4x}{4}-\frac{e^T}{4}$$
$$D^2y=D^2y$$

Y nos quedará la ecuación:

$$\frac{D^4x}{4}-\frac{e^T}{4}=4x-e^T\Rightarrow\frac{D^4x}{4}-4x=-\frac{3e^T}{4};x\left[\frac{D^4-16}{4}\right]=-\frac{3e^T}{4}.$$

A continuación, se investigará una solución particular del tipo:

$$x\left[D^4-16\right]=-3e^T\Rightarrow x_p=Ae^T\Rightarrow x'_p=Ae^T\Rightarrow x_p^{(4)}=Ae^T$$
$$Ae^T-16Ae^T=-3e^T\Rightarrow A=\frac{1}{5}\Rightarrow x_p=\frac{1}{5}e^T$$

Por otra parte, la solución de la ecuación homogénea exige que:

$$x^*:D^4-16=0$$
$$\left(D^2-4\right)\left(D^2+4\right)=0\Rightarrow\begin{cases} D=2 \\ D=-2 \\ D=\pm 2i \end{cases}$$
$$x^*=C_1e^{2T}+C_2e^{-2T}+C_3\cos 2T+C_4\text{sen}\,2T$$
$$\Rightarrow x(T)=x^*+x_p=C_1e^{2T}+C_2e^{-2T}+C_3\cos 2T+C_4\text{sen}\,2T+\frac{1}{5}e^T$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$y=\frac{D^2x}{4}-\frac{e^T}{4}=\frac{D^2}{4}\left[C_1e^{2T}+C_2e^{-2T}+C_3\cos 2T+C_4\text{sen }2T+\frac{e^T}{5}\right]-\frac{e^T}{4}$$

$$y=\frac{D}{4}\left[2C_1e^{2T}-2C_2e^{-2T}-2C_3\text{sen }2T+2C_4\cos 2T+\frac{e^T}{5}\right]-\frac{e^T}{4}$$

$$y=\frac{1}{4}\left[4C_1e^{2T}+4C_2e^{-2T}-4C_3\cos 2T-4C_4\text{sen }2T+\frac{e^T}{5}\right]-\frac{e^T}{4}$$

$$y=C_1e^{2T}+C_2e^{-2T}-C_3\cos 2T-C_4\text{sen }2T+\frac{e^T}{20}-\frac{e^T}{4}$$

$$y(T)=C_1e^{2T}+C_2e^{-2T}-C_3\cos 2T-C_4\text{sen }2T-\frac{e^T}{5}$$

y la solución general buscada será:

$$\boxed{\begin{aligned}x(T)&=C_1e^{2T}+C_2e^{-2T}+C_3\cos 2T+C_4\text{sen }2T+\frac{e^T}{5}\\ y(T)&=C_1e^{2T}+C_2e^{-2T}-C_3\cos 2T-C_4\text{sen }2T-\frac{e^T}{5}\end{aligned}}$$

y entonces se cumple que: x(T) + y(T) = $2C_1e^{2T}+2C_2e^{-2T}$.

La resolución de este mismo problema por el sistema tradicional matricial conduciría a la solución (mucho más prolija aunque similar a la obtenida teniendo en cuenta la arbitrariedad de las 4 constantes):

$$x(T)=\frac{1}{8}c_2\,e^{-2T}\left(e^{4T}+2\,e^{2T}\sin(2T)-1\right)+\frac{1}{8}c_4\,e^{-2T}\left(e^{4T}-2\,e^{2T}\sin(2T)-1\right)+\frac{1}{4}c_1\,e^{-2T}\left(e^{4T}+2\,e^{2T}\cos(2T)+1\right)+\frac{1}{4}c_3\,e^{-2T}\left(e^{4T}-2\,e^{2T}\cos(2T)+1\right)+\frac{e^T}{5}$$

Y también:

$$y(T)=\frac{1}{8}c_2\,e^{-2T}\left(e^{4T}-2\,e^{2T}\sin(2T)-1\right)+\frac{1}{8}c_4\,e^{-2T}\left(e^{4T}+2\,e^{2T}\sin(2T)-1\right)+\frac{1}{4}c_1\,e^{-2T}\left(e^{4T}-2\,e^{2T}\cos(2T)+1\right)+\frac{1}{4}c_3\,e^{-2T}\left(e^{4T}+2\,e^{2T}\cos(2T)+1\right)-\frac{e^T}{5}$$

Ejemplo 5

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}+4y_1+3y_2=0\\[2mm] \dfrac{dy_2}{dx}+2y_1+5y_2=0\end{cases}$$

Solución:

Este sistema, que ya ha sido resuelto por el método matricial en el epígrafe 2.1. de este mismo capítulo, se puede expresar también de la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{c}(D + 4)y_1 + 3y_2 = 0\\ 2y_1 + (D + 5)y_2 = 0\end{array}\right\}$$

, que resulta equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{c}(D + 5)(D + 4)y_1 + 3(D + 5)y_2 = 0\\ -6y_1 - 3(D + 5)y_2 = 0\end{array}\right\}$$

, de donde se deduce que: $(D^2 + 4D + 5D + 20)y_1 - 6y_1 = (D^2 + 9D + 14)y_1 = 0$;

, que resulta ser una ecuación lineal, con lo que: $D = \frac{-9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \begin{cases} D_1 = -2 \\ D_2 = -7 \end{cases}$

, a la que corresponde la solución general:

$$\boxed{y_1 = C_1 \cdot e^{-7x} + C_2 \cdot e^{-2x}}$$

y substituyendo en la primera ecuación el valor así obtenido, se tendrá que:

$-7C_1 \cdot e^{-7x} - 2C_2 \cdot e^{-2x} + 4C_1 \cdot e^{-7x} + 4C_2 \cdot e^{-2x} + 3y_2 = 0$, de donde se deduce que:

$$\boxed{y_2 = C_1 \cdot e^{-7x} - (2/3)C_2 \cdot e^{-2x}}$$

valores estos plenamente coincidentes con los obtenidos anteriormente dejando a salvo de la arbitrariedad de las constantes. Se cumple, además, que:

$$y_1 - y_2 = (5/3)C_2 \cdot e^{-2x} = C_3 \cdot e^{-2x}$$

CAPÍTULO 5
LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

1. INTRODUCCIÓN Y DEFINICIONES

La transformada de Laplace (1780), que es un operador lineal como tendremos ocasión de comprobar seguidamente, toma su nombre en honor de aquel gran matemático francés (ver nota correspondiente a pie de página). Constituye una herramienta útil para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, que aparecen de forma natural en diversos campos de la ciencia, la técnica y la economía. La moderna aplicación de las transformadas de Laplace y toda su teoría subyacente surge en realidad en la segunda mitad del siglo XIX. Dicha transformación supone, genéricamente, que y(x) es una función continua en todo el semieje OX positivo, y supongamos ahora que su producto por e^{-px} sea integrable entre 0 e ∞ en un cierto campo de p. En muchos manuales se utiliza la notación *S* (mayúscula) o *s* (minúscula) por la *p*. Aquí las podremos utilizar indistintamente, especialmente en la resolución de problemas y ejercicios de aplicación, como se verá con posterioridad.

Pues bien, la función η del parámetro p (que es una variable real arbitraria) que esta integral define en tal campo:

$$\eta(p) = L[y(x)] = \int_0^{\infty} e^{-px} \cdot y(x) \cdot dx \quad , \forall x / 0 \leq x < \infty ,$$

se denomina *transformada Laplace* de y(x), siendo **L** el llamado *operador de la transformada de Laplace* y siempre y cuando la integral esté definida, mientras que la función **y** se llamará "función generatriz Laplace de η", y escribiremos: η(p) = L[y(x)]; o recíprocamente, la transformada inversa: y(x) = L^{-1}[η(p)]. La técnica más simple para identificar las transformadas inversas de Laplace consiste en reconocerlas, ya sea de memoria o bien mediante una tabla más o menos extensa como la que se adjunta posteriormente. Si no se halla en una forma reconocible, entonces ocasionalmente se puede convertir en tal forma mediante una manipulación algebraica, de tal modo que, como sea que casi todas las transformadas de Laplace son cocientes, el procedimiento más adecuado consiste en convertir primero el denominador a una forma que aparezca en la tabla correspondiente y luego el numerador de la fracción en cuestión.

Ello sucede, en fin, para todos los valores de *p* para los cuales la integral impropia converja. La convergencia ocurre cuando existe el límite:

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^{R} e^{-px} \cdot y(x) \cdot dx$$

Si este límite no existe, la integral impropia diverge y la función y(x) no posee transformada de Laplace. Cuando se evalúa la integral anterior, la variable *p* se trata como una constante, habida cuenta de que la integración lo es con respecto a *x*.

Cuando y(x) no es una función sino una distribución con una singularidad en 0, la definición es la siguiente:

$$\eta(p) = L[y(x)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\infty} e^{-px} \cdot y(x) \cdot dx$$

Ambas transformaciones, directa e inversa, son operaciones lineales, es decir, poseen las siguientes propiedades:

a) Son distributivas en relación a la adición:

$L\,[y_1+y_2] = L[y_1] + L[y_2]$, y por tanto: $L^{-1}[\eta_1+\eta_2] = L^{-1}[\eta_1] + L^{-1}[\eta_2]$

b) Son permutables con un factor independiente de la variable:

$L[ay] = a \cdot L[y]$; $L^{-1}[a\eta] = a \cdot L^{-1}[\eta]$, siendo **a** una constante cualquiera.

Cuando se habla de la transformada de Laplace, generalmente se refiere a la versión unilateral. También existe la transformada de Laplace bilateral, que se define como sigue:

$$\eta_B(p) = L[y(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-px} \cdot y(x) \cdot dx$$

La transformada de Laplace η(p) típicamente existe para todos los números reales *p>a*, donde *a* es una constante que depende del comportamiento de crecimiento de y(x).

En el año 1744, Leonhard Euler ya había investigado un conjunto de integrales de la forma:

$$z = \int e^{ax} \cdot X(x) \cdot dx \ , \text{ y: } z = \int x^{A} \cdot X(x) \cdot dx$$

como soluciones de ecuaciones diferenciales, pero no profundizó en ellas y pronto abandonó su estudio. Joseph Louis Lagrange, admirador de Euler, también investigó este tipo de integrales y las ligó a la teoría de la probabilidad en un trabajo sobre funciones de densidad de probabilidad de la forma:

$$\int e^{-ax} \cdot X(x) \cdot a^{x} \cdot dx$$

que algunos tratadistas interpretan como auténticas transformadas laplacianas.

Este tipo de integrales atrajeron poderosamente la atención de Laplace cuando, en 1782, y siguiendo la idea original de Euler, trató de emplear estas integrales como soluciones de las ecuaciones diferenciales. Parece ser que en 1785 dio un paso más allá, y reenfocó el problema para -en vez de usar las integrales como soluciones- aplicarlas a las ecuaciones dando lugar a las “transformadas de Laplace” tal como hoy en día las conocemos. Para ello, usó una integral de la forma:

$$\int x^s \cdot y(s) \cdot dx$$

análoga a la transformada de Mellin[1], con la que transformó una ecuación diferencial en una ecuación algebraica de la que buscó su solución. Planteó algunas de las principales propiedades de su transformada y, de alguna forma, reconoció que el método de Joseph Fourier para resolver por medio de series la ecuación de difusión podría relacionarse con su transformada integral para un espacio finito con soluciones periódicas.

Pese al logro de tal suerte conseguido, las transformadas de Laplace cayeron pronto en un relativo olvido al haber sido presentadas en el campo de la probabilidad -ajeno a su moderna aplicación en la física y la ingeniería- y ser tratadas, injustamente, como objetos matemáticos puramente teóricos sin aplicación práctica relevante. Por fin, hacia principios del pasado siglo XX, la transformada de Laplace se convirtió en una herramienta común de la teoría de vibraciones y de la teoría de circuitos, dos de los campos donde ha sido aplicada, sin duda, con más éxito. En general, la transformada es adecuada para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales en el origen. Una de sus ventajas más significativas radica en que la integración y derivación se convierten en multiplicación y división. Esto transforma las ecuaciones diferenciales e integrales en ecuaciones polinómicas, que obviamente resultan mucho más fáciles de resolver.

2. TRANSFORMADA DE UNA DERIVADA

Pero quizás la propiedad más interesante para las aplicaciones subsiguientes es que: “Al derivar la función y(x) la transformada Laplace queda multiplicada por su variable p y disminuida en y(0)”. Es decir:

$$\text{Si} \quad L[y(x)] = \eta(p) \quad \text{es} \quad L[y'(x)] = p \cdot L[y] - y(0) = p \cdot \eta(p) - y(0) \qquad (1)$$

Claro es que se supone que y’(x) sigue cumpliendo las condiciones de integrabilidad exigidas a y(x). En este supuesto resulta, en efecto, que:

$$\int_0^\infty e^{-px} \cdot y'(x) \cdot dx = \left[e^{-px} y(x)\right]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px} \cdot y(x) \cdot dx = -y(0) + p \cdot \eta(p)$$

---

[1] The *Mellin transform* is an integral transform that may be regarded as the multiplicative version of the two-sided Laplace transform. This integral transform is closely connected to the theory of Dirichlet series, and is often used in number theory and the theory of asymptotic expansions; it is closely related to the Laplace transform and the Fourier transform, and the theory of the gamma function and allied special functions. The notation implies this is a line integral taken over a vertical line in the complex plane. Conditions under which this inversion is valid are given in the Mellin inversion theorem. The transform is named after the Finnish mathematician Robert Hjalmar Mellin (1854-1933).

pues la integrabilidad de la función subintegral o integrando $e^{-px}\cdot y(x)$, entre los límites 0 e ∞, exige la anulación de esta función para $x \rightarrow \infty$.

La aplicación reiterada de la expresión anterior (1) nos dará:

$$\begin{cases} L[y''(x)] = p \cdot L[y'] - y'(0) = p^2 \cdot \eta(p) - p \cdot y(0) - y'(0) \\ L[y'''(x)] = p \cdot L[y''] - y''(0) = p^3 \cdot \eta(p) - p^2 \cdot y(0) - p \cdot y'(0) - y''(0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Y así sucesivamente. La transformada de la derivada enésima de una función (supuesta existente) es igual al producto de la transformada de esta función por p^n menos un polinomio en p de grado n-1 cuyos coeficientes, ordenados según las potencias decrecientes de p, son los valores iniciales y(0), y'(0), ..., $y^{n-1}(0)$ de la función y de sus n-1 primeras derivadas. Es decir:

$$L[y^{(n)}(x)] = p \cdot L[y^{(n-1)}] - y^{(n-1)}(0) =$$
$$p^n \cdot \eta(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y'(0) - \ldots - p \cdot y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

Si las condiciones iniciales sobre y(x) en x = 0 están dadas por:

$$y(0) = c_0;\ y'(0) = c_1;\ \ldots\ ;\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

entonces, la ecuación anterior se puede volver a escribir como:

$$L[y^{(n)}(x)] = p^n \cdot \eta(p) - c_0 \cdot p^{n-1} - c_1 \cdot p^{n-2} - \ldots - c_{n-2} \cdot p - c_{n-1}$$

Para los casos especiales (de frecuente presentación) en que n = 1 y n = 2, ya contemplados, la ecuación anterior se simplifica, respectivamente, del siguiente modo:

$$L[y'(x)] = p \cdot \eta(p) - c_0\ ;\ L[y''(x)] = p^2 \cdot \eta(p) - c_0 \cdot p - c_1$$

3. APLICACIÓN DEL MÉTODO. CONVOLUCIÓN

Esta transformada integral tiene una serie de propiedades que la pueden hacer útil en el análisis de sistemas lineales. Una de las ventajas más significativas radica en que la integración y la derivación en el Cálculo Infinitesimal clásico se convierten fácilmente en multiplicación y división. Ello transforma las ecuaciones diferenciales e integrales en ecuaciones polinómicas, obviamente mucho más sencillas de resolver.

Otra aplicación importante en los sistemas lineales es el cálculo de la señal de salida. Ésta se puede calcular mediante la convolución de la respuesta impulsiva del sistema con la señal de entrada. La realización de este cálculo en el espacio de Laplace convierte la convolución en una multiplicación, habitualmente de resolución mucho más sencilla. Cuando se habla de la transformada de Laplace, generalmente se refiere a la versión unilateral. También existe, sin embargo, la transformada de Laplace bilateral.

Dos funciones pueden tener la misma transformada de Laplace

Ejemplo:

$$x_1(t)=\begin{cases} e^{\alpha t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$X_1(s)=\int_0^{\infty} e^{\alpha t}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{(\alpha-s)t}dt=$$

$$=\left.\frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s}\right|_0^{\infty}=\boxed{\frac{1}{s-\alpha}\quad \sigma>\alpha}$$

$$x_2(t)=\begin{cases} 0 & t>0 \\ -e^{\alpha t} & t<0 \end{cases}$$

$$X_2(s)=\int_{-\infty}^{0} -e^{\alpha t}e^{-st}dt=-\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-s)t}dt=$$

$$=-\left.\frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s}\right|_{-\infty}^{0}=\boxed{\frac{1}{s-\alpha}\quad \sigma<\alpha}$$

se diferencian solo en la región de convergencia

La transformada de Laplace hállase estrechamente relacionada con la Transformada de Fourier y la Transformada Z (empleada en las ecuaciones en diferencias finitas, como veremos en el capítulo siguiente). La transformada de Laplace es, de hecho, una generalización de la Transformada de Fourier de Tiempo-Continuo. Aunque las transformadas de Laplace rara vez se resuelven mediante integración si no por medio de tablas y el uso de computadoras (por ejemplo *Matlab*) como veremos más adelante. Esto define la transformada de Laplace y su inversa. Nótense las similitudes existentes entre la transformada de Laplace y su inversa. Ello nos ofrecerá, como resultado, muchas de las simetrías encontradas en el análisis de Fourier.

Para resolver las Transformadas de Laplace se pueden emplear diversos métodos, a saber:

a) *Resolviendo la Integral*

Probablemente, el método más difícil y menos usado para encontrar la Transformada de Laplace es resolviendo directamente la integral. Aunque es técnicamente posible hacerlo así, también es extremadamente consumidor de tiempo, dada la facilidad de los siguientes dos métodos para encontrarla. Las integrales están sobretodo para entender conceptualmente la teoría y de dónde se originan los siguientes métodos resolutivos.

b) *Usando una Computadora*

El uso de una computadora con el *software* adecuado para encontrar la transformada de Laplace resulta relativamente sencillo. *Matlab*, por ejemplo, tiene dos funciones, *laplace* e *ilaplace*, y las dos forman parte de las librerías simbólicas, con lo que encontraremos la transformada de Laplace y su inversa, respectivamente. Este método resulta preferido generalmente para funciones más complicadas. Funciones más sencillas e ideales usualmente se resuelven, con mayor rapidez, mediante el empleo de tablas, como los ejemplos que siguen a continuación.

c) *Usando Tablas*

Cuando se aprende por primera vez la transformada de Laplace, las tablas son, sin duda alguna, la forma más común para encontrarla. Con suficiente práctica, no obstante, las tablas se hacen innecesarias. La gran parte del diseño de aplicaciones empieza en el dominio de Laplace y dan como resultado una solución en el dominio del tiempo.

A continuación, se ofrece una tabla suficientemente completa para los casos más usuales que se puedan presentar:

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
K	$\frac{K}{p}\quad (p>0)$	$\mathrm{Sh}\,\omega x$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}\quad (p>\lvert\omega\rvert)$
$x^n (n > -1)$, $(p > 0)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$	$\mathrm{Ch}\,\omega x$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}\quad (p>\lvert\omega\rvert)$
x	$\frac{1}{p^2}\quad (p>0)$	$x\cdot \mathrm{sen}\,\omega x$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}\quad (p>0)$
$K\cdot e^{ax}\quad (p > -a)$	$\frac{K}{p-a}$	$\mathrm{sen}\,\omega x\cdot \mathrm{Sh}\,\omega x$	$\frac{2\omega^2 p}{p^4+4\omega^4}$
$\mathrm{sen}\,Kx$	$\frac{K}{p^2+K^2}\quad (p>0)$	$\cos\omega x\cdot \mathrm{Ch}\,\omega x$	$\frac{p^3}{p^4+4\omega^4}$
$\cos Kx$	$\frac{p}{p^2+K^2}\quad (p>0)$	$x^n e^{ax}$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}\quad (n>-1)\ (p>a)$
$\frac{1}{2}(e^{Kx}-e^{-Kx})$	$\frac{K}{p^2-K^2}$	$\frac{1-e^{-x}}{x}$	$l\left(1+\frac{1}{p}\right)$
$\frac{1}{2}(e^{Kx}+e^{-Kx})$	$\frac{p}{p^2-K^2}$	lx	$\frac{\Gamma'(1)}{p}-\frac{lp}{p}$
$x^n e^{ax}\ (n > -1)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$	$\frac{\cos\alpha\sqrt{x}}{\pi\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$
$e^{ax}\,\mathrm{sen}\,Kx$	$\frac{K}{(p-a)^2+K^2}\quad (p>a)$	$\frac{\mathrm{sen}\alpha\sqrt{x}}{\pi}$	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}p^{3/2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$
$e^{ax}\cos Kx$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+K^2}\quad (p>a)$	$\frac{\mathrm{Ch}\alpha\sqrt{x}}{\pi\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi p}}e^{\frac{\alpha^2}{4p}}$
$\cos(\omega x + K)$	$\frac{p\cdot\cos K-\omega\,\mathrm{sen}K}{p^2+\omega^2}$	$\frac{\mathrm{Sh}\alpha\sqrt{x}}{\pi}$	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}p^{3/2}}e^{\frac{\alpha^2}{4p}}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
$\text{sen}\,(\omega x + K)$	$\frac{p \cdot \text{sen}K + \omega \cdot \cos K}{p^2 + \omega^2}$	$\sqrt[n]{x} \quad (p > 0)$	$p^{-(n+1)/n} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
$\frac{x^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}} \quad (p > 0)$	$\frac{x^q}{\Gamma(q+1)}$	$\frac{1}{p^{q+1}} \quad (p > 0)$
$\frac{x^n}{n!} \cdot e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}} \quad (p > -\alpha)$	$e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{p+\alpha} \quad (p > -\alpha)$
$1 - e^{-\alpha x}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \quad (p > 0)$	$\frac{1}{b-a}(e^{-ax} - e^{-bx})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)} \quad \begin{matrix}(p>-a)\\(p>-b)\end{matrix}$
$\ln \frac{x}{x_0} \quad (p > 0)$	$-\frac{x_0}{p}\left[\ln(x_0 \cdot p) + \gamma\right]$	$\frac{1}{2a^3}(\text{sen}\,at - at \cdot \cos at)$	$\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$
x^{n-1} $(n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{(n-1)!}{p^n} \quad (p > 0)$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}p^{-3/2} \quad (p > 0)$
$1\sqrt{x}$	$\sqrt{\pi}p^{-1/2} \; (p > 0)$	$x^{n-1/2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{(1)(3)(5)\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} p^{-n-1/2}$ $(p > 0)$
$x \cdot \cos ax$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2} \quad (p > 0)$	$x^{n-1}e^{ax}$ $(n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{(n-1)!}{(p-a)^n} \quad (p > a)$
$\text{sen}\,ax - ax \cdot \cos ax$	$\frac{2a^3}{(p^2 + a^2)^2} \quad (p > 0)$	$\frac{1}{a} e^{-x/a}$	$\frac{1}{1 + ap}$
$\frac{1}{a}(e^{ax} - 1)$	$\frac{1}{p(p-a)}$	$1 - e^{-x/a}$	$\frac{1}{p(1+ap)}$
$\frac{1}{a^2}$ x 3 $e^{-x/a}$	$\frac{1}{(1+ap)^2}$	$\frac{e^{ax} - e^{bx}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{e^{-x/a} - e^{-x/b}}{a-b}$	$\frac{1}{(1+ap)(1+bp)}$	$(1 + ax)e^{ax}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$
$\frac{1}{a^3}(a-x)e^{-x/a}$	$\frac{p}{(1+ap)^2}$	$\frac{ae^{ax} - be^{bx}}{a-b}$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{ae^{-x/b} - be^{-x/a}}{ab(a-b)}$	$\frac{p}{(1+ap)(1+bp)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{ax} - 1 - ax)$	$\frac{1}{p^2(p-a)}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
$\mathrm{sen}^2 ax$	$\dfrac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$\mathrm{senh}^2 ax$	$\dfrac{2a^2}{p(p^2-4a^2)}$
$\mathrm{sen}\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\dfrac{ax}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{a^2p}{p^4+a^4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cosh\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\dfrac{ax}{\sqrt{2}}-\mathrm{senh}\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\right)$	$\dfrac{a^3}{p^4+a^4}$
$\cos\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\cosh\dfrac{ax}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{p^3}{p^4+a^4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\dfrac{ax}{\sqrt{2}}+\mathrm{sen}\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\right)$	$\dfrac{ap^2}{p^4+a^4}$
$\dfrac{1}{2}(\mathrm{senh}\,ax-\mathrm{sen}\,ax)$	$\dfrac{a^3}{p^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2}(\cosh ax-\cos ax)$	$\dfrac{a^2p}{p^4-a^4}$
$\dfrac{1}{2}(\mathrm{senh}\,ax+\mathrm{sen}\,ax)$	$\dfrac{as^2}{p^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2}(\cosh ax+\cos ax)$	$\dfrac{p^3}{p^4-a^4}$
$\cos ax\cdot\mathrm{senh}\,ax$	$\dfrac{a(p^2-2a^2)}{p^4+4a^4}$	$\mathrm{sen}\,ax\cdot\cosh ax$	$\dfrac{a(p^2+2a^2)}{p^4+4a^4}$
$\dfrac{1}{2}(\mathrm{sen}\,ax+ax\cos ax)$	$\dfrac{ap^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\cos ax-\dfrac{ax}{2}\mathrm{sen}\,ax$	$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$
$\dfrac{1}{2}(ax\cosh ax-\mathrm{senh}\,ax)$	$\dfrac{a^3}{(p^2-a^2)^2}$	$\dfrac{x}{2}\mathrm{senh}\,ax$	$\dfrac{ap}{(p^2-a^2)^2}$
$\dfrac{1}{2}(\mathrm{senh}\,ax+ax\cosh ax)$	$\dfrac{ap^2}{(p^2-a^2)^2}$	$\cosh ax+\dfrac{ax}{2}\mathrm{sen}ax$	$\dfrac{p^3}{(p^2-a^2)^2}$
$\dfrac{a\cdot\mathrm{sen}\,bx-b\cdot\mathrm{sen}\,ax}{a^2-b^2}$	$\dfrac{ab}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{\cos bx-\cos ax}{a^2-b^2}$	$\dfrac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
$\dfrac{a\cdot\mathrm{sen}\,ax-b\cdot\mathrm{sen}\,bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{a^2\cdot\cos ax-b^2\cdot\cos bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
$\dfrac{b\cdot\mathrm{senh}\,ax-a\cdot\mathrm{senh}\,bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{ab}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$	$\dfrac{\cos ax-\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{p}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
$\dfrac{a\cdot\mathrm{senh}\,ax-b\cdot\mathrm{sen}\,bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{p^2}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$	$\dfrac{a^2\cos ax-b^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{p^3}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
$x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}ax$	$\frac{a^2}{p^2(p^2+a^2)}$	$\frac{1}{a}\operatorname{senh}ax-x$	$\frac{a^2}{p^2(p^2-a^2)}$
$1-\cos ax-\frac{ax}{2}\operatorname{sen}ax$	$\frac{a^4}{p(p^2+a^2)^2}$	$1-\cosh ax+\frac{ax}{2}\operatorname{senh}ax$	$\frac{a^4}{p(p^2-a^2)^2}$
$1+\frac{b^2\cos ax-a^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\frac{a^2b^2}{p(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$1+\frac{b^2\cos ax-a^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\frac{a^2b^2}{p(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
$\frac{x}{8}[\operatorname{sen}ax-ax\cdot\cos ax]$	$\frac{a^3p}{(p^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{8}[(3-a^2x^2)\operatorname{sen}ax-3ax\cdot\cos ax]$	$\frac{a^5}{(p^2+a^2)^3}$
$\frac{x}{8}(ax\cdot\cosh ax-\operatorname{senh}ax)$	$\frac{a^3p}{(p^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{8}[(1+a^2x^2)\operatorname{sen}ax-ax\cdot\cos ax]$	$\frac{a^3p^2}{(p^2+a^2)^3}$
$\frac{1}{n!}(1-e^{-x/a})^n$	$\frac{1}{p(ap+1)(ap+2)...(ap+n)}$	$\frac{1}{8}[(3+a^2x^2)\operatorname{senh}ax-3ax\cdot\cosh ax]$	$\frac{a^5}{(p^2-a^2)^3}$
$\operatorname{sen}(ax+b)$	$\frac{p\cdot\operatorname{sen}b+a\cdot\cos b}{p^2+a^2}$	$\frac{1}{8}[ax\cdot\cosh ax-(1-a^2x^2)\operatorname{senh}ax]$	$\frac{a^3p^2}{(p^2-a^2)^3}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{p\cdot\cos b-a\cdot\operatorname{sen}b}{p^2+a^2}$	$e^{-ax}-e^{ax/2}\left[\cos\frac{ax\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{ax\sqrt{3}}{2}\right]$	$\frac{3a^2}{p^3+a^3}$
$\frac{1+2ax}{\sqrt{\pi x}}$	$\frac{p+a}{p\sqrt{p}}$	$e^{-ax}/\sqrt{\pi x}$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$
$\frac{1}{2x\sqrt{\pi x}}(e^{bx}-e^{ax})$	$\sqrt{p-a}-\sqrt{p-b}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cos 2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-a/p}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cosh 2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{a/p}$	$\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\operatorname{sen}2\sqrt{ax}$	$p^{-3/2}e^{-a/p}$
$\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\operatorname{senh}2\sqrt{ax}$	$p^{-3/2}e^{a/p}$	$J_0(2\sqrt{ax})$	$\frac{1}{p}e^{-a/p}$
$\sqrt{x/a}\cdot J_1(2\sqrt{ax})$	$\frac{1}{p^2}e^{-a/p}$	$(x/a)^{(s-1)/2}\cdot J_{s-1}(2\sqrt{ax})\ (s>0)$	$p^{-s}e^{-a/p}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

Función generatriz y(x)	Transformada L[y(x)]	Función generatriz y(x)	Transformada L[y(x)]
$J_0(x)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	$J_1(x)$	$\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}$
$J_s(x) \quad (s > -1)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^s}{\sqrt{p^2+1}}$	$x^s J_s(ax) \quad \left(s > -\frac{1}{2}\right)$	$\frac{(2a)^s \Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(p^2+a^2)^{s+(1/2)}}$
$\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} \quad (s > 0)$	$\frac{1}{p^s}$	$\frac{4^n n!}{(2n)!\sqrt{\pi}} \cdot x^{n-(1/2)}$	$\frac{1}{p^n\sqrt{s}}$
$\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} e^{-ax} \quad (s > 0)$	$\frac{1}{(p+a)^s}$	$\frac{1-e^{ax}}{x}$	$\ln\frac{p-a}{p}$
$\frac{e^{bx}-e^{ax}}{x}$	$\ln\frac{p-a}{p-b}$	$\frac{2}{x}\operatorname{senh} ax$	$\ln\frac{p+a}{p-a}$
$\frac{2}{x}(1-\cos\cdot ax)$	$\ln\frac{p^2+a^2}{p^2}$	$\frac{2}{x}(\cos bx - \cos ax)$	$\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}$
$\frac{\operatorname{sen} ax}{x}$	$\arctan\frac{a}{p}$	$\frac{2}{x}\operatorname{sen} ax \cdot \cos bx$	$\arctan\frac{2ap}{p^2-a^2+b^2}$
$\operatorname{sen}\lvert ax \rvert$	$\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)\left(\frac{1+e^{-(\pi/a)p}}{1-e^{-(\pi/a)p}}\right)$	---	---
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

NOTAS EXPLICATIVAS DE LA TABLA PRECEDENTE:

1. γ es la constante de Euler-Mascheroni. La **constante de Euler-Mascheroni**, (también conocida *como constante de Euler*), a la que ya nos hemos referido con anterioridad, es una constante matemática que aparece principalmente en la teoría de números, y se denota con la letra griega minúscula γ (Gamma). Se define como el límite de la diferencia entre la serie armónica y el logaritmo natural o neperiano, a saber:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right] = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{\lfloor x\rfloor} - \frac{1}{x}\right)dx$$

Su valor aproximado es:

$$\gamma \approx 0,577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 606\ \ldots$$

Esta constante apareció por primera vez en 1734, en un artículo escrito por Leonhard Euler, denominado *De Progressionibus harmonicis observationes*, calculando los 6 primeros dígitos para la constante y llamándola *C*. En 1781 calcularía otros 10 decimales más. En 1790, Lorenzo Mascheroni calcularía los primeros 19 decimales y la denotaría como *A*. Ya más tarde se denotaría de la forma moderna como γ, debido a su conexión con la función gamma, a la que nos referiremos inmediatamente.

El número γ no se ha probado que sea algebraico o transcendente; de hecho, ni siquiera se conoce si γ es irracional o no. El análisis de fracciones continuas revela que, de ser racional, su denominador debe ser muy elevado (actualmente del orden de 10^{242080}). Debido a que está presente en un gran número de ecuaciones y relaciones, la racionalidad o irracionalidad de γ se halla, sin duda, entre los problemas abiertos más importantes de las matemáticas.

2. $\Gamma(q)$ representa la función gamma o integral euleriana de segunda especie. Integrando por partes en dicha función, se obtiene: $\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx$; $u = x^{q-1}$; $dv = e^{-x} \cdot dx$; $du = (q-1) \cdot x^{q-2} \cdot dx$; $v = -e^{-x}$; con lo que:

$$\Gamma(q) = [-e^{-x} \cdot x^{q-1}]_0^\infty + (q-1)\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-2} \cdot dx = (q-1)\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-2} \cdot dx = (q-1) \cdot \Gamma(q-1)$$

Reiterando el procedimiento, se tendrá que:

$$\Gamma(q) = (q-1)(q-2) \ldots (q-k) \cdot \Gamma(q-k)$$

En el caso particular de que *q* sea un número natural (o sea, entero positivo), la aplicación de la expresión anterior conduce a la siguiente:

$$\Gamma(q) = (q-1)! \quad (\forall q \in N)$$

puesto que: $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot dx = 1$. Una expresión que se presenta con frecuencia, es la que se obtiene mediante el cambio de variable: $x = t^2$. En efecto:

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx = \int_0^\infty e^{-t^2} \cdot t^{2q-2} \cdot 2t = 2\int_0^\infty e^{-t^2} \cdot t^{2p-1} \cdot dt$$

Así mismo, el cambio $x = mt$, conduce análogamente a:

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx = \int_0^\infty e^{-mt} \cdot (mt)^{q-1} \cdot m \cdot dt = m^q \int_0^\infty e^{-mt} \cdot t^{q-1} \cdot dt$$

3. Las funciones de Bessel de primera especie y orden α que aparecen en la tabla anterior son las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel que son finitas en el origen ($x = 0$) para enteros no negativos α y divergen en el límite $x \to 0$ para α negativo no entero. El tipo de solución y la normalización de $J_\alpha(x)$ están definidos por sus propiedades. Es posible definir la función $J_\alpha(x)$ por su expansión en serie de Taylor en torno a $x = 0$. Las **funciones de Bessel**, primero definidas por el matemático Daniel Bernouilli y más tarde generalizadas por Friedrich Bessel, son soluciones canónicas *y(x)* de la ecuación diferencial de Bessel, a saber:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

donde α es un número real o complejo. El caso más común es cuando α es un número entero *n*, aunque la solución para α no entero es similar. El número α se denomina *orden* de las funciones de Bessel asociadas a dicha ecuación. Dado que la ecuación anterior es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y coeficientes variables, tiene dos soluciones linealmente independientes. Aunque α y $-\alpha$ dan como resultado la misma función, es conveniente definir diferentes funciones de Bessel para estos dos parámetros, pues las funciones de Bessel en función del parámetro α son funciones suaves casi doquiera. Las funciones de Bessel se denominan también *funciones cilíndricas*, o bien *armónicos cilíndricos* porque son solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.

Para su aplicación a la resolución de las ecuaciones diferenciales, resulta fundamental la obtención de L[y'(x)] expresada en función de L[y(x)], o sea:

$$L[y'(x)] = \int_0^{\infty} e^{-px} y'(x)dx = y(x)\cdot e^{-px}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-px} y(x)dx =$$
$$= -y(0) + p\cdot L[y(x)] = -y(0) + p\cdot\eta(p)$$

después de integrar por partes.

Análogamente se obtiene:

$$L\left[\int_0^x y(x)dx\right] = \int_0^{\infty} e^{-px}dx\int_0^x y(x)dx = \frac{\int_0^{\infty} e^{-px} y(x)dx}{p} = \frac{L[y(x)]}{p}$$

, que resulta de gran utilidad en la resolución de las ecuaciones integro-diferenciales (ver capítulo 9).

Un teorema de la máxima importancia es el correspondiente al producto de transformadas o de "convolución". Sean, en efecto, dos funciones $y_1(x)$, $y_2(x')$, tales que:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1(p) &= L[y_1(x)] = \int_0^{\infty} e^{-px}\cdot y_1(x)\cdot dx \\ \eta_2(p) &= L[y_2(x')] = \int_0^{\infty} e^{-px'}\cdot y_2(x')\cdot dx' \end{aligned}\right\}$$

El producto de las transformadas será:

$$\eta_1(p)\cdot\eta_2(p) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-p(x+x')} y_1(x)\cdot y_2(x')\cdot dx\cdot dx'$$

Mediante el cambio de variable: u = x, v = x + x', es decir: x = u; x' = v – u; cuyo determinante funcional jacobiano de la transformación es la unidad, puesto que:

$$J = \frac{\partial\,(x\cdot x')}{\partial\,(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x'}{\partial u} & \frac{\partial x'}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \text{ c.s.q.d.}$$

En cuanto al recinto o dominio de integración (cuadrante positivo x>0, x'>0) se transforma en el u>0, v>u (véanse a continuación los recintos de las figuras anexas), que es el ángulo de 45º = $\pi/4$ rayado en la figura correspondiente. A saber:

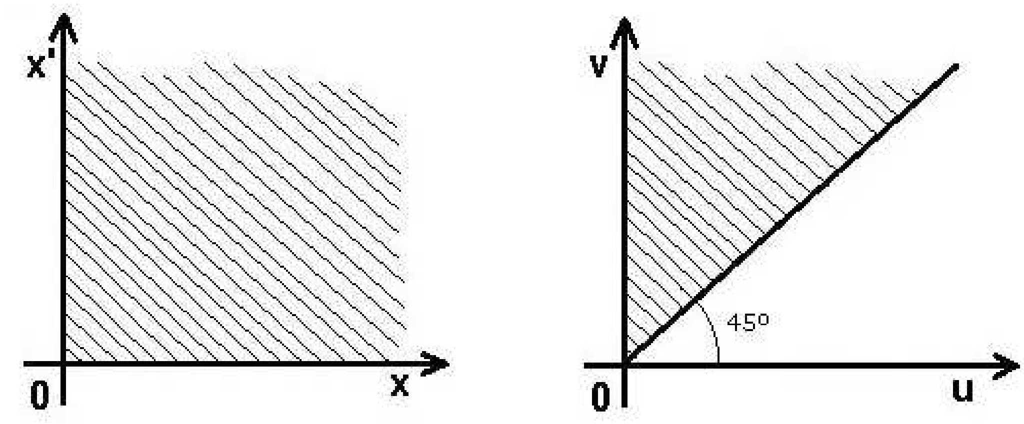


FIG. 5.1. Dominios de integración.

Por lo tanto, se obtiene:

$$\eta_1(p)\cdot\eta_2(p) = \int_0^{\infty} e^{-pv}\left[\int_0^{v} y_1(u)\cdot y_2(v-u)\cdot du\right]\cdot dv$$

A la integral combinada entre ambas funciones, $\int_0^{v} y_1(x)\cdot y_2(v-x)\cdot dx$, se le llama "producto de convolución" (plegamiento o *faltung* en idioma alemán), "convolución" o bien "producto compuesto" de las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ y se representa por $y_1(x)*y_2(x)$, esto es:

$$\eta_1(p)\cdot\eta_2(p) = L[y_1(x)*y_2(x)]$$

de donde:

$$y_1(x)*y_2(x) = L^{-1}[\eta_1(p)\cdot\eta_2(p)] = y_2(x)*y_1(x)$$

Si una de las dos convoluciones en la ecuación anterior es más simple de calcular, entonces se elige esa convolución cuando se determina la transformada inversa de Laplace de un producto. En definitiva, veamos que el "producto de convolución" de sendas funciones es el producto ordinario de sus transformadas. Por lo tanto, la generatriz del producto ordinario de dos funciones es el producto de convolución de sus generatrices.

Como ejemplo de resolución de un ejercicio cualquiera mediante la aplicación de la tabla precedente, valga el siguiente problema:

Ejemplo 1

Se trata de resolver la EDO: $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 5$, con las condiciones iniciales siguientes: $x(0) = -1$, y $x'(0) = 2$.

Solución:

El proceso resolutivo a seguir puede verse sintetizado en el siguiente cuadro:

$$[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + 3[sX(s) - x(0)] + 2X(s) = \frac{5}{s}$$

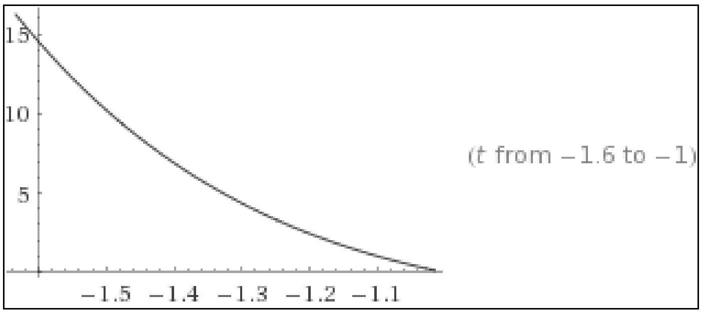
$$[s^2X(s) + s - 2] + 3[sX(s) + 1] + 2X(s) = \frac{5}{s}$$

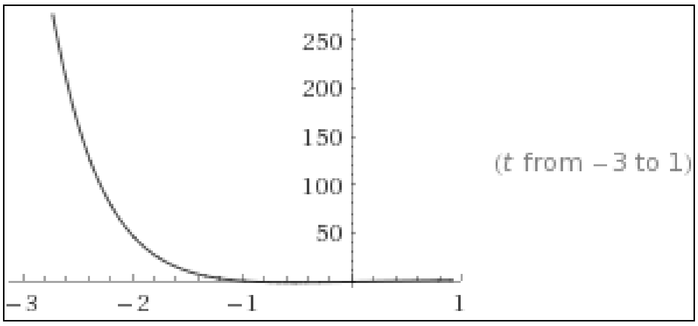
$$(s^2 + 3s + 2)X(s) + (s+1) = \frac{5}{s}$$

$$X(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{5/2}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{3/2}{s+2}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}}$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



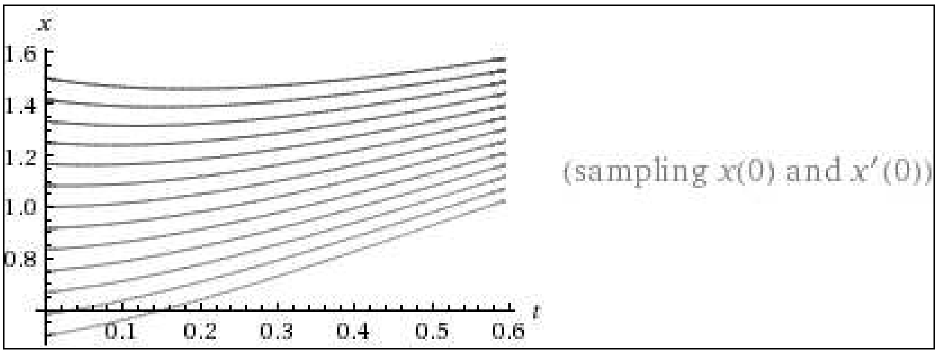


Resolviendo ahora esta EDO por el método clásico, resulta la siguiente I.G.:

$$x(t) = \frac{5}{2} + c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{-2t}$$

que una vez aplicadas las condiciones iniciales dadas ofrecen los valores de las constantes: $c_1 = -5$ y $c_2 = 3/2$, c.s.q.d.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



4. RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS

Ejemplo 1

Hallar: $L^{-1}\left[\dfrac{p^2}{(p^2+4)^2}\right]$.

Solución:

Como: $\dfrac{p^2}{(p^2+4)^2} = \dfrac{p}{p^2+4}\cdot\dfrac{p}{p^2+4}$ y además: $L^{-1}\left[\dfrac{p}{p^2+4}\right] = \cos 2x$

calculamos:

$$(\cos 2x) * (\cos 2x) = \int_0^v \cos 2x\cdot\cos 2(v-x)\cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^v [\cos 4v + \cos(4x-2v)]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\cdot\cos 4x + \frac{\operatorname{sen}(4x-2v)}{4}\right]_0^v = \frac{1}{2}v\cdot\cos 2v + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2v$$

Por lo tanto, la transformada inversa de Laplace pedida será:

$$\boxed{L^{-1}\left[\frac{p^2}{(p^2+4)^2}\right] = \frac{1}{2}x\cdot\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2x}.$$

Ejemplo 2

Como aplicación a la resolución de las ecuaciones diferenciales, sea resolver la EDO: y’’ + y = x, con la condición inicial de que: y(0) = 1, y’(0) = -2.

Solución:

Transformando, mediante el operador L, ambos miembros de esta igualdad, se obtiene: L[y’’] + L[y] = L[x]. Llamando ahora L[y] = η, sabemos que: L[y’] = -y(0) + p·η, y por tanto, también se cumple que:

$$L[y''] = -y'(0) + p\cdot L[y'] = -y'(0) - p\cdot y(0) + p^2\eta = 2 - p + p^2\eta$$

y como $L[x] = \frac{1}{p^2}$, resultará que: $2 - p + p^2\eta + \eta = \frac{1}{p^2}$, de donde:

$$\eta(p^2 + 1) = \frac{1}{p^2} + p - 2, \text{ o sea: } \eta = \frac{1}{p^2(p^2+1)} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{2}{p^2+1},$$

y tomando la transformación inversa, teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1},$$

$$L^{-1}[\eta] = L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+1}\right] - 2L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right]$$

de donde, después de consultar la tabla anterior, se tiene que:

$$\boxed{y(x) = x - 3\cdot \text{sen } x + \cos x}$$

Resolviendo ahora la ecuación diferencial por el sistema tradicional, se tendrá una integral de la ecuación homogénea (ya hallada) de valor: $y^* = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \text{sen } x$. Como dicha ecuación carece de término en y', aumentaremos el grado de la solución particular a ensayar en 1 unidad, con lo que:

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c \\ y'_p = 2ax + b \\ y''_p = 2a \end{cases}$$

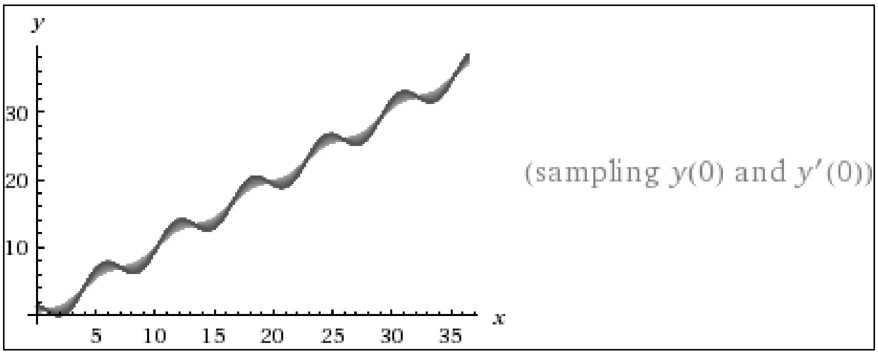
y substituyendo en la ecuación inicial, resultará que:

$2a + ax^2 + bx + c = x$, de donde se deduce fácilmente que:

$\boxed{a = 0}$, $\boxed{b = 1}$ y $\boxed{c = 0}$,

lo que conlleva la integral general: $y = y^* + y_p = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \text{sen } x + x$.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Pero como las condiciones iniciales dadas exigen:

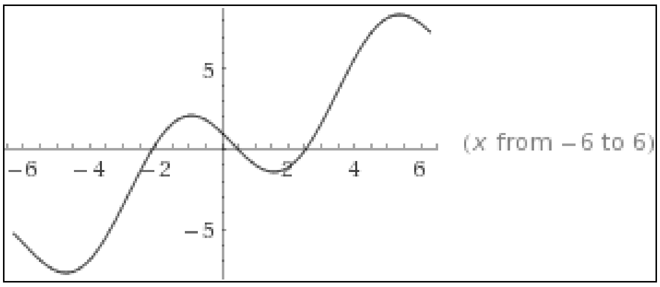
$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 1 \\ y'(x) = -c_1 \cdot \text{sen } x + c_2 \cdot \cos x + 1 \\ y'(0) = c_2 + 1 = -2 \; ; \; c_2 = -3 \; , \end{cases}$$

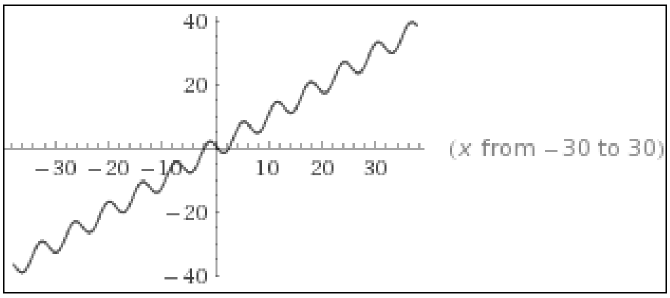
luego se tendrá que, para estas condiciones:

$$\boxed{y(x) = x - 3 \cdot \text{sen } x + \cos x} \; ,$$

, plenamente coincidente con la aplicación anterior del método de las transformadas de Laplace, c.s.q.d.

Por último, la representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 3

Sea resolver: y'' + y' – 2y = x, con las condiciones iniciales siguientes: y(0) = 2, y'(0) = -1.

Solución:

Su transformada deberá verificar que:

$$p^2\eta - 2p + 1 + p\eta - 2 - 2\eta = \frac{1}{p^2} \; ; \; \eta(p^2 + p - 2) = \frac{1}{p^2} + 2p + 1,$$

de donde: $\eta = \dfrac{2p^3 + p^2 + 1}{p^z(p^2 + p - 2)} = -\dfrac{1/2}{p^2} - \dfrac{1/4}{p} + \dfrac{4/3}{p-1} + \dfrac{11/12}{p+2}$, cuya generatriz es:

$\boxed{y(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{4}{3}e^{x} + \frac{11}{12}e^{-2x}}$, función que para x = 0 vale efectivamente:

$-\frac{1}{4} + \frac{4}{3} + \frac{11}{12} = 2$, y cuya derivada $y'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3}e^{x} - \frac{11}{6}e^{-2x}$ para x = 0 vale, en efecto, -1.

Si ahora pretendemos la resolución de este problema por el método clásico y con las mismas condiciones iniciales (PVI), tendremos:

$$y'' + y' - 2y = x \;;$$

veamos primero la solución de la ecuación homogénea: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$;

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

con lo que: $y^* = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-2x}$.

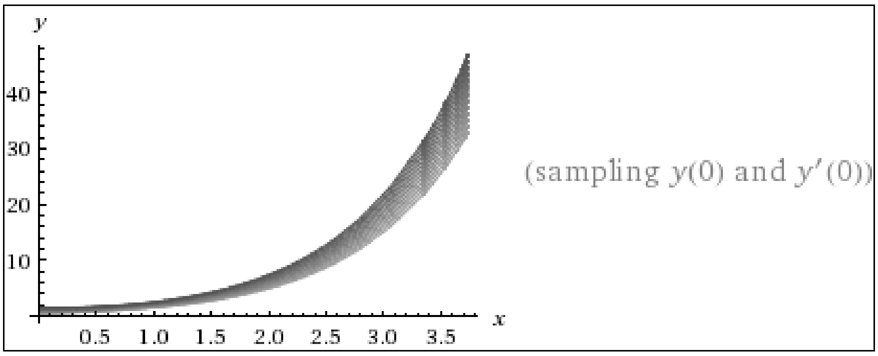
Para la no homogénea o completa, ensayaremos la solución particular:

$$\begin{cases} y_p = ax + b \\ y'_p = a \\ y'' = 0 \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial:

$a - 2ax - 2b = x$; $a = -½$; $b = -¼$; y resultará que:

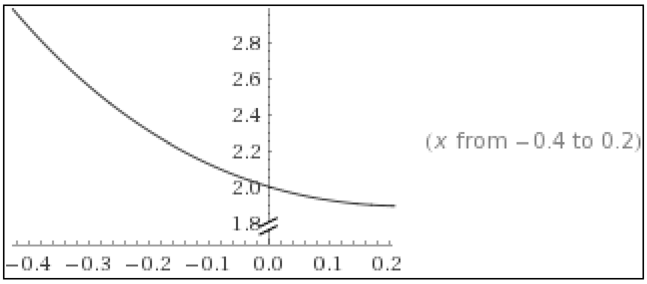
$y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$, y la representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:

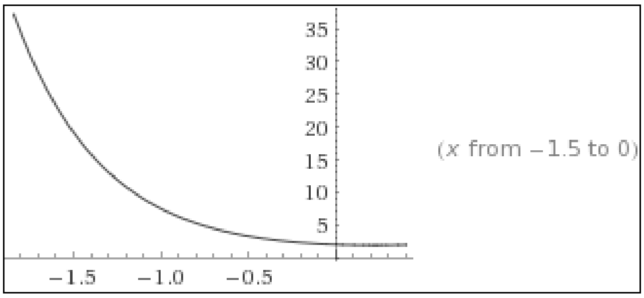


y con las condiciones iniciales se obtiene, en definitiva:

$\boxed{y(x) = \frac{4}{3}e^{x} + \frac{11}{12}e^{-2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}}$, c.s.q.d.

Por último, la representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 4

Resolver el siguiente PVI: $y' - y = 1$, con la condición inicial siguiente: y(0) = 0.

Solución:

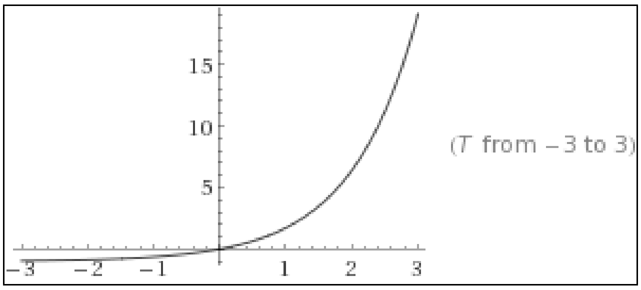
$$Sy_s - y(0) - y_s = \mathcal{L}\{1\} \; ; \quad y_s(S-1) = \frac{1}{S} \Rightarrow y_s = \frac{1}{S(S-1)}$$

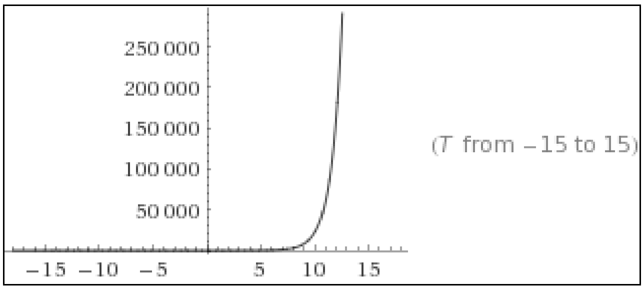
Aplicando el método de los coeficientes indeterminados, se tendrá:

$$\frac{A}{S} + \frac{B}{S-1} = \frac{1}{S(S-1)}$$
$$A(S-1) + BS = 1$$
$$A = -1 \Rightarrow B = 1$$

Y la solución buscada será: $y(T) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S-1}\right\} = -1 + e^{T}$.

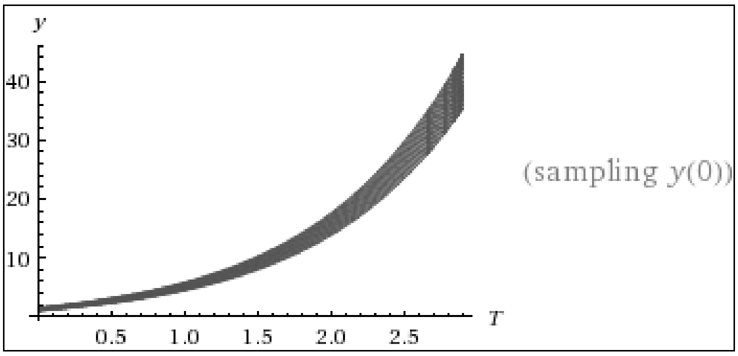
La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Si ahora pretendemos obtener la resolución de este problema por el método clásico y con la misma condición inicial (PVI), tendremos la ecuación característica de la homogénea: $\lambda - 1 = 0$; $\lambda = 1$, lo que ofrece la solución: $y^* = c_1 \cdot e^T$. Ensayaremos, ahora, una solución particular del tipo: $y_p = c$, e $y'_p = 0$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que c = -1, y entonces se tiene la I.G.: $y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^T - 1$.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

$y(T) = c_1 \cdot e^T - 1$; $y(0) = c_1 - 1 = 0$; $c_1 = 1$; con lo que la I.P. buscada es:

$\boxed{y(T) = -1 + e^T}$, c.s.q.d.

Si para una mayor coincidencia con la terminología empleada en la exposición teórica correspondiente, asimilamos las variables T = x, veamos que de hecho se trata de la resolución de una ecuación lineal de primer orden con:

X = -1; $X_1 = -1$, y: $\int X \cdot dx = -\int dx = -x; \int X_1 \cdot e^{\int X \cdot dx} \cdot dx = -\int e^{-x} \cdot dx = e^{-x}$, y aplicando la fórmula correspondiente, tendremos que:

y(x) = $e^x(c - e^{-x}) = c\cdot e^x - 1 = c\cdot e^T - 1 = y(T)$, a la cual habrá que aplicar la condición inicial dada, obteniéndose, en fin, el mismo resultado anterior.

Ejemplo 5

Resolver el siguiente PVI: $y' + 2y = T$, con: $y(0) = -1$.

Solución:

$$Sy_s - y(0) + 2y_s = L\{T\}$$, y desarrollando se tendrá que:

$$Sy_s + 1 + 2y_s = \frac{1}{S^2};\quad y_s(S+2) = \frac{1}{S^2} - 1 \Rightarrow y_s = \frac{1-S^2}{S^2(S+2)}$$

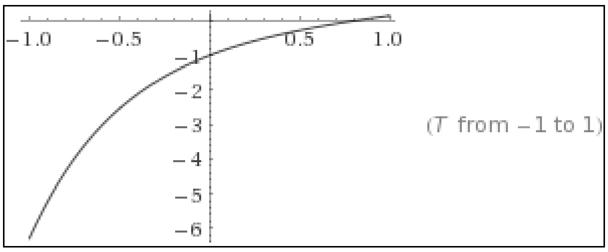
Aplicando el método de los coeficientes indeterminados, se tendrá que:

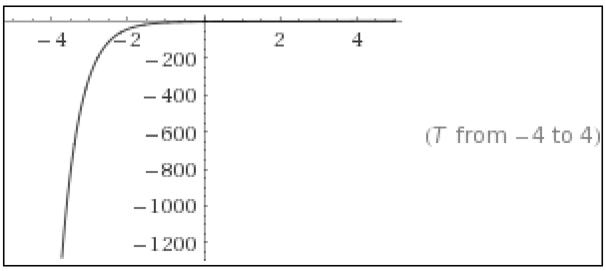
$$\frac{A}{S} + \frac{B}{S^2} + \frac{C}{S+2} = \frac{1-S^2}{S^2(S+2)}$$
$$AS(S+2) + B(S+2) + CS^2 = 1 - S^2$$
$$AS^2 + 2AS + BS + 2B + CS^2 = 1 - S^2$$
$$A + C = -1$$
$$2A + B = 0$$
$$2B = 1 \Rightarrow B = \tfrac{1}{2} \Rightarrow A = -\tfrac{1}{4} \Rightarrow C = -\tfrac{3}{4}$$

Y de aquí se deduce la integral buscada:

$$y(T) = -\tfrac{1}{4}\, L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\} + \tfrac{1}{2}\, L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2}\right\} - \tfrac{3}{4}\, L^{-1}\left\{\frac{1}{S+2}\right\} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2}T - \frac{3}{4}e^{-2T}$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

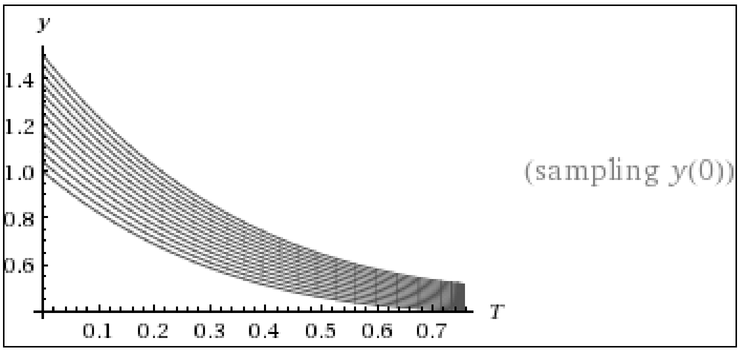




Si, al igual que en el caso anterior, ahora pretendemos obtener la resolución de este problema por el método clásico y con la misma condición inicial (PVI), tendremos la ecuación característica de la homogénea: $\lambda + 2 = 0$; $\lambda = -2$, lo que ofrece la solución: $y^* = c_1 \cdot e^{-2T}$. Ensayaremos, ahora, una solución particular del tipo: $y_p = aT + b$, e $y'_p = a$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que a = ½ y b = -1/4, y entonces la I.G. es:

$$y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{-2T} + T/2 - 1/4.$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Las condiciones iniciales del problema exigen que:

$y(0) = c_1 - 1/4 = -1$; $c_1 = -3/4$; con lo que, en definitiva, se tendrá que la I.P. pedida es:

$$\boxed{y(T) = -\frac{3}{4}e^{-2T} + \frac{T}{2} - \frac{1}{4}} \text{ c.s.q.d.}$$

Al igual que en el caso anterior, si para una mayor coincidencia con la terminología empleada en la exposición teórica correspondiente, asimilamos las variables T = x, veamos que de hecho se trata de la resolución de una ecuación lineal de primer orden con:

$X = 2$; $X_1 = -x$, y: $\int X \cdot dx = \int 2dx = 2x; \int X_1 \cdot e^{\int X \cdot dx} \cdot dx = -\int x \cdot e^{2x} \cdot dx =$

(integrando por partes, con $u = x$, $v = e^{2x}/2$)

$$= -\frac{x \cdot e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{2x} \cdot dx = -\frac{x \cdot e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} = \frac{e^{2x}}{4} - \frac{2x \cdot e^{2x}}{4} = \frac{e^{2x}(1-2x)}{4}, \text{ y entonces:}$$

$y(x) = e^{-2x}\left(c - \dfrac{e^{2x}(1-2x)}{4}\right) = c \cdot e^{-2x} + \dfrac{2x-1}{4} = c \cdot e^{-2x} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}$, a la cual habrá que aplicar la condición inicial dada y se obtendrá el mismo resultado que el hallado por el método de las transformadas de Laplace.

Ejemplo 6

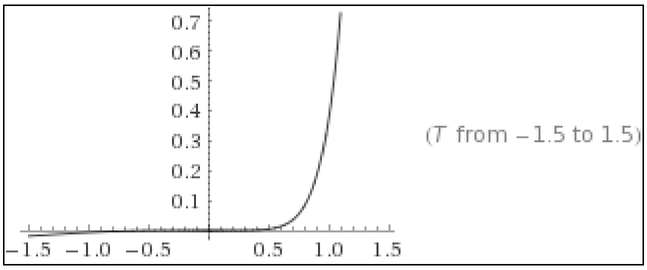
Resolver el siguiente PVI: $y'' - 4y' + 4y = T^3 e^{2T}$, con las condiciones iniciales siguientes: $y(0) = 0$, e $y'(0) = 0$.

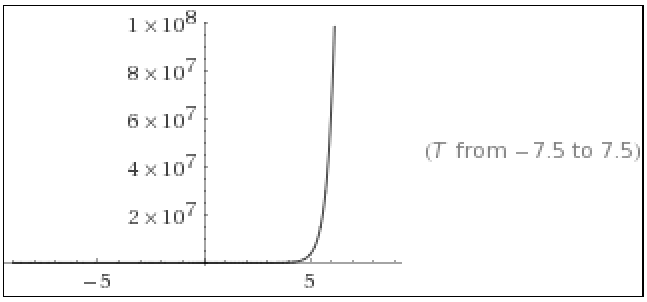
Solución:

$$S^2 y_s - Sy(0) - y'(0) - 4Sy_s - 4y(0) + 4y_s = L\{T^3 e^{2T}\}$$
$$S^2 y_s - 4Sy_s + 4y_s = \frac{6}{(S-2)^4}$$
$$y_s = \frac{6}{(S^2 - 4S + 4)(S-2)^4} = \frac{6}{(S-2)^2 (S-2)^4} = \frac{6}{(S-2)^6}$$

, y se obtiene la siguiente integral: $y(T) = \frac{6}{5!} L^{-1}\left\{\frac{5!}{S^6}\right\}\Big|_{S\to S-2} = \frac{1}{20} T^5 e^{2T}$.

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Probemos, ahora, de resolver este mismo problema por el método tradicional, lo que exige llevar a cabo un procedimiento mucho más laborioso, como tendremos ocasión de comprobar a continuación.

En efecto, la ecuación característica de la homogénea es:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0\ ;\ \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}, \text{ y entonces:}$$

$$y^* = c_1 \cdot e^{2T} + c_2 \cdot T \cdot e^{2T}\ ;$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular del siguiente tipo, puesto que se trata de la combinación lineal de un polinomio y una función exponencial con resonancia, así:

$$y_p = (aT^3 + bT^2 + cT + d)\cdot T^2\cdot e^{2T} = (aT^5 + bT^4 + cT^3 + dT^2)\cdot e^{2T} ;$$

$$y'_p = 2\cdot e^{2T}(aT^5 + bT^4 + cT^3 + dT^2) + e^{2T}(5aT^4 + 4bT^3 + 3cT^2 + 2dT) =$$
$$= e^{2T}(2aT^5 + 2bT^4 + 2cT^3 + 2dT^2 + 5aT^4 + 4bT^3 + 3cT^2 + 2dT) ;$$

$$y''_p = 2e^{2T}(2aT^5 + 2bT^4 + 2cT^3 + 2dT^2 + 5aT^4 + 4bT^3 + 3cT^2 + 2dT) +$$
$$+ e^{2T}(10aT^4 + 8bT^3 + 6cT^2 + 4dT + 20aT^3 + 12bT^2 + 6cT + 2d) =$$
$$= e^{2T}(4aT^5 + 4bT^4 + 4cT^3 + 4dT^2 + 10aT^4 + 8bT^3 + 6cT^2 + 4dT +$$
$$+ 10aT^4 + 8bT^3 + 6cT^2 + 4dT + 20aT^3 + 12bT^2 + 6cT + 2d) =$$
$$= e^{2T}(4aT^5 + 4bT^4 + 4cT^3 + 4dT^2 + 20aT^4 + 16bT^3 + 12cT^2 + 8dT +$$
$$+ 20aT^3 + 12bT^2 + 6cT + 2d).$$

Substituyendo estos valores en la ecuación inicial, se tiene que:

$$e^{2T}(4aT^5 + 4bT^4 + 4cT^3 + 4dT^2 + 20aT^4 + 16bT^3 + 12cT^2 + 8dT +$$
$$+ 20aT^3 + 12bT^2 + 6cT + 2d) - e^{2T}(8aT^5 + 8bT^4 + 8cT^3 + 8dT^2 + 20aT^4 +$$
$$+ 16bT^3 + 12cT^2 + 8dT + e^{2T}(4aT^5 + 4bT^4 + 4cT^3 + 4dT^2) = T^3\cdot e^{2T}$$

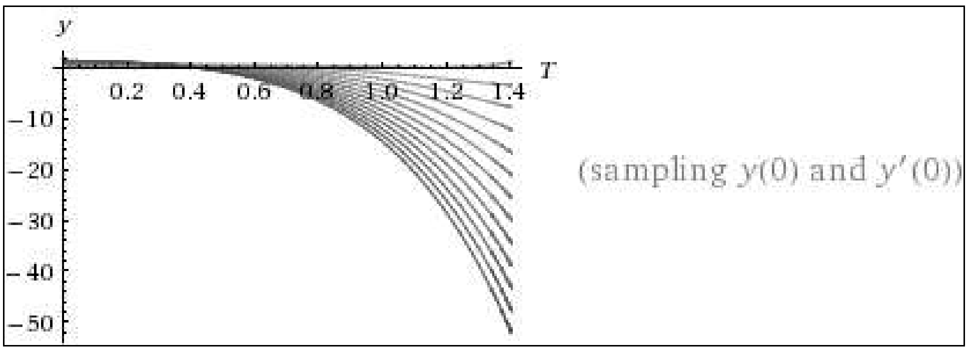
O sea, simplificando se obtiene que:

$$(20aT^3 + 12bT^2 + 6cT + 2d)\cdot e^{2T} = T^3\cdot e^{2T}.$$

De donde se deduce, por el método de los coeficientes indeterminados, que: $20a = 1$; $a = 1/20$; $b = c = d = 0$; y se tiene la integral general:

$$y(T) = y^* + y_p = c_1\cdot e^{2T} + c_2\cdot T\cdot e^{2T} + \frac{T^5}{20}\cdot e^{2T} .$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Las condiciones iniciales dadas del problema planteado exigen que:

$$y(0) = c_1 = 0 ; \quad y'(T) = 2c_1\cdot e^{2T} + c_2\cdot e^{2T} + 2c_2\cdot T\cdot e^{2T} + \frac{T^4}{4}\cdot e^{2T} + \frac{T^5}{10}\cdot e^{2T}$$

$y'(0) = 2c_1 + c_2 = 0$; $c_2 = 0$; de lo que resultará la solución particular buscada, a saber:

$$\boxed{y(T) = \frac{T^5}{20} \cdot e^{2T}}, \text{ c.s.q.d.}$$

Ejemplo 7

Resolver el siguiente PVI: $y' + y = f(T)$, con la condición: $y(0) = 0$, $f(T) = 5u(T-1)$.

Solución:

$$Sy_s - y(0) + y_s = L\,\{5u(T-1)\},\ y_s(S+1) = \frac{5e^{-S}}{S}; y_s = \frac{5e^{-S}}{S(S+1)} = \frac{5}{S(S+1)} e^{-S}$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados, se tendrá:

$$\frac{A}{S} + \frac{B}{S+1} = \frac{5}{S(S+1)} \Rightarrow A = 5, B = -5$$

, de donde se deduce la integral buscada:

$$y(T) = 5\,L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\}e^{-S} - 5\,L^{-1}\left\{\frac{1}{S+1}\right\}e^{-S} = 5u(T-1) - 5e^{-T}u(T-1) =$$

$= 5u(T-1) - 5e^{-(T-1)}u(T-1)$, y la integral general será:

$$\boxed{y(T) = c_1 \cdot e^{-T} + e^{-T}\int_1^T e^{\xi} \cdot f(\xi) \cdot d\xi}$$

Teniendo ahora en cuenta la condición inicial dada, se tendrá que:

$y(0) = c_1 + \int_1^0 e^{\xi} \cdot f(\xi) \cdot d\xi = 0$, de donde: $c_1 = \int_0^1 e^{\xi} \cdot f(\xi) \cdot d\xi$; y entonces, resultará la siguiente I.P.:

$$y(T) = e^{-T}\left(\int_0^1 e^{\xi} \cdot f(\xi) \cdot d\xi + \int_1^T e^{\xi} \cdot f(\xi) \cdot d\xi\right) = \boxed{e^{-T}\int_0^T e^{\xi} \cdot f(\xi) \cdot d\xi}$$

, por la propiedad aditiva del intervalo de integración.

Ejemplo 8

Resolver el siguiente PVI: $y'' + 4y = f(T)$, con: $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $f(T) = 1 - u(T-1)$.

Solución:

$$S^2 y_s - Sy(0) - y'(0) + 4y_s = L\{1 - u(T-1)\}$$

$$S^2 y_s + 1 + 4y_s = \frac{1}{S} - \frac{e^{-S}}{S};\ y_S\left(S^2+4\right) = \frac{1}{S} - \frac{e^{-S}}{S} - 1$$

$$y_S = \frac{1}{S\left(S^2+4\right)} - \frac{e^{-S}}{S\left(S^2+4\right)} - 1;\ \frac{A}{S} + \frac{BS+C}{S^2+4} = \frac{1}{S\left(S^2+4\right)}$$

, de donde se deduce, por coeficientes indeterminados, que:

$A = 1/4$, $B = -1/4$ y $C = 0$, lo que ofrece la integral particular:

$$y(T) = \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\} - \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{S}{S^2+4}\right\} - \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\}e^{-S} - \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{S}{S^2+4}\right\}e^{-S} -$$

$$-\tfrac{1}{2}L^{-}\left\{\frac{2}{S^2+4}\right\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2T - \frac{1}{4}u(T-1) + \frac{1}{4}\cos 2(T-1)\cdot u(T-1) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2T$$

y la integral general será:

$$\boxed{\begin{aligned} y(T) &= c_2 \sin(2\,T) + c_1 \cos(2\,T) + \\ &\sin(2\,T)\left(\int_1^T \frac{1}{2}\cos(2\,\zeta)\, f(\zeta)\, d\,\zeta\right) + \cos(2\,T)\int_1^T -\frac{1}{2}\, f(\zeta)\sin(2\,\zeta)\, d\,\zeta \end{aligned}}$$

Teniendo ahora en cuenta las condiciones iniciales dadas, se tendrá que la solución particular anterior también puede expresarse así:

$$\boxed{\begin{aligned} y(T) = \frac{1}{2}\Bigg(&-2\sin(2\,T)\left(\int_1^0 \frac{1}{2}\cos(2\,\zeta)\, f(\zeta)\, d\,\zeta\right) + 2\sin(2\,T)\left(\int_1^T \frac{1}{2}\cos(2\,\zeta)\, f(\zeta)\, d\,\zeta\right) - \\ &2\cos(2\,T)\int_1^0 -\frac{1}{2}\, f(\zeta)\sin(2\,\zeta)\, d\,\zeta + 2\cos(2\,T)\int_1^T -\frac{1}{2}\, f(\zeta)\sin(2\,\zeta)\, d\,\zeta - \sin(2\,T)\Bigg) \end{aligned}}$$

Ejemplo 9

Resolver el siguiente PVI: $y^{(4)} - y = 0$, con las condiciones iniciales: $y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = 0$.

Solución:

$$S^4 y_s - S^3 y(0) - S^2 y'(0) - Sy''(0) - y'''(0) - y_S = 0$$

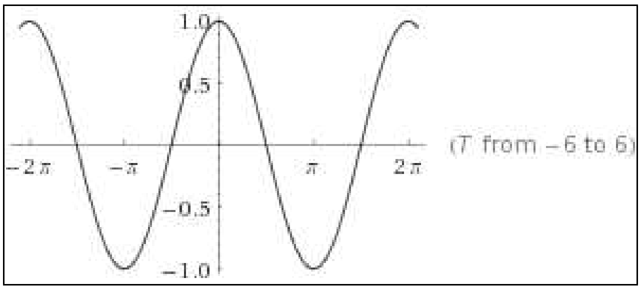
$$S^4 y_s - S^3 + S - y_s = 0$$

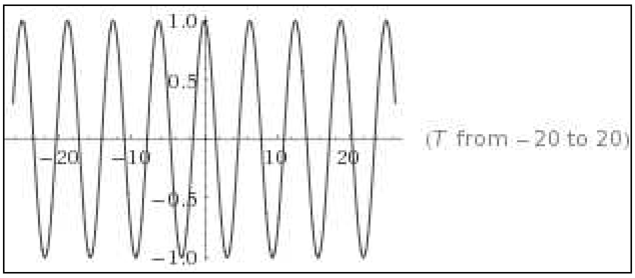
$$y_S\left(S^4 - 1\right) = S^3 - S$$

$$y_S = \frac{S\left(S^2-1\right)}{\left(S^4-1\right)} = \frac{S\left(S^2-1\right)}{\left(S^2+1\right)\left(S^2-1\right)} = \frac{S}{S^2+1}$$

Y se tendrá la integral particular buscada: $y(T) = L^{-1}\left\{\frac{S}{S^2+1}\right\} = \cos T$.

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

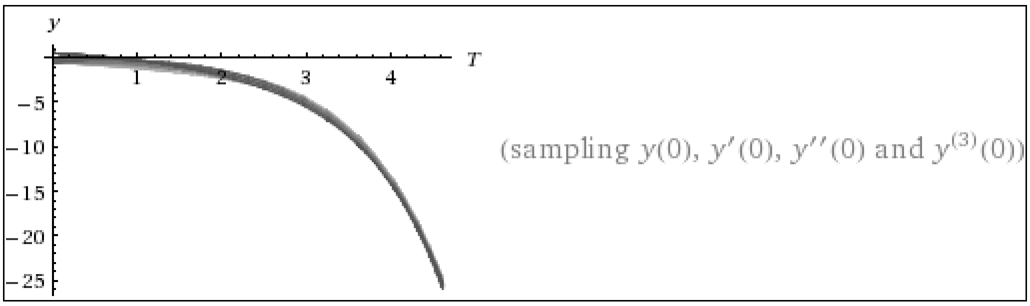




El resultado anteriormente obtenido es obvio si procedemos a efectuar la resolución de este problema directamente, esto es, considerando, como siempre, la ecuación característica o modular: $\lambda^4 - 1 = 0$; con lo que resultan las raíces: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$, y entonces, aplicando las fórmulas correspondientes, se tendrá la integral general:

$$y(T) = c_1 \cdot e^T + c_2 \cdot e^{-T} + c_3 \cdot \cos T + c_4 \cdot \text{sen } T$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Procede ahora aplicar las condiciones iniciales del enunciado, con lo que se obtendrá:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 1\ ; \\ y'(T) = c_1 \cdot e^T - c_2 \cdot e^{-T} - c_3 \cdot \text{sen } T + c_4 \cdot \cos T\ ; \\ y'(0) = c_1 - c_2 + c_4 = 0\ ; \\ y''(T) = c_1 \cdot e^T + c_2 \cdot e^{-T} - c_3 \cdot \cos T - c_4 \cdot \text{sen } T\ ; \\ y''(0) = c_1 + c_2 - c_3 = -1\ ; \\ y'''(T) = c_1 \cdot e^T - c_2 \cdot e^{-T} + c_3 \cdot \text{sen } T - c_4 \cdot \cos T\ ; \\ y'''(0) = c_1 - c_2 - c_4 = 0\ ; \end{cases}$$

, de lo que resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 - c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = -1 \\ c_1 - c_2 - c_4 = 0 \end{cases}$$

con los correspondientes valores de las constantes:

$$c_1 = 0 \; ; \; c_2 = 0 \; ; \; c_3 = 1 \; ; \; c_4 = 0$$

y resultará, efectivamente, una vez substituidos dichos valores en la integral general anteriormente obtenida, la solución particular al PVI buscada:

$$\boxed{y(T) = \cos T}\text{, c.s.q.d.}$$

Obsérvese que, en este caso, la resolución del problema planteado resulta harto más laboriosa empleando este segundo procedimiento en contraposición al método aquí propugnado basado en la aplicación de las transformadas de Laplace. De ahí se pone de manifiesto su utilidad en un elevado número de casos.

Ejemplo 10

Resuelva la EDO: y' – 5y = 0; con la condición inicial: y(0) = 2.

Solución:

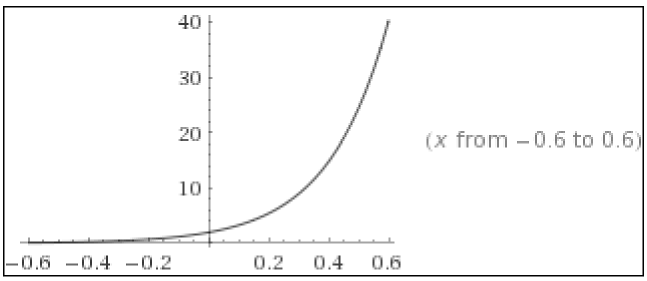
Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de esta ecuación diferencial y usando las propiedades anteriormente explicadas, obtenemos la expresión: L{y'} – 5L{y} = L{0}. Luego, usando la ecuación con $c_0 = 2$, encontramos que:

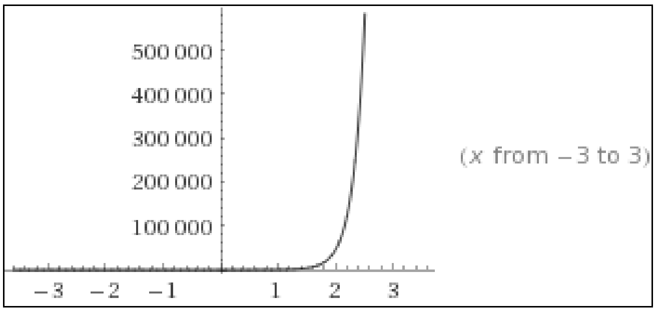
$$[sY(s) - 2] - 5Y(s) = 0, \text{ de lo cual se infiere que: } Y(s) = \frac{2}{s-5}$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de Laplace de Y(s), obtenemos:

$$y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s-5}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = 2e^{5x}$$

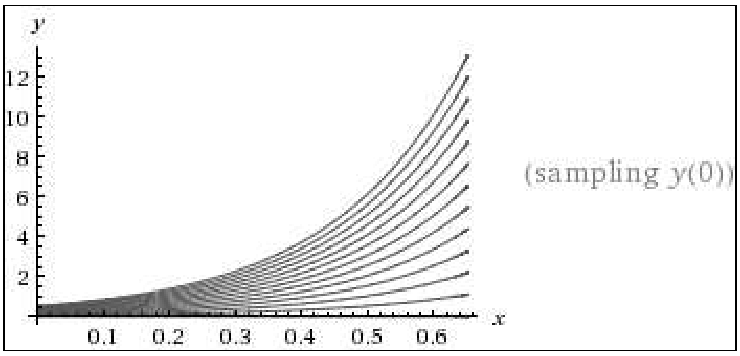
La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





El resultado anteriormente obtenido es obvio si procedemos a efectuar la resolución de este problema directamente, esto es, considerando, como siempre, la ecuación característica o modular:

λ - 5 = 0; con lo que resulta la raíz: $\lambda_1 = 5$, y entonces, aplicando las fórmulas correspondientes, se tendrá la integral general: $y(x) = c_1 \cdot e^{5x}$, cuya representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



La resolución de la I.P. exige que $c_1 = 2$, como podrá comprobar sin mayor dificultad el amable lector.

Ejemplo 11

Resolver la EDO: y'' + y = cos t, junto con las condiciones iniciales siguientes: y(0) = 0; y'(0) = 1, mediante los siguientes procedimientos:
a) Transformada de Laplace, b) Método clásico y c) Producto de convolución.

Solución:

a) Básicamente se trata de aplicar la Transformada de Laplace y sus propiedades a la EDO de manera que, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, nuestro problema se convierte en el problema algebraico siguiente:

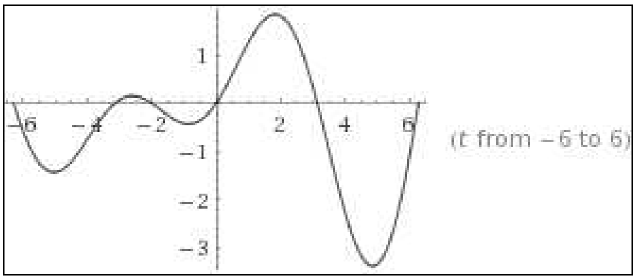
$$z^2L[y](z) - zy(0) - y'(0) + L[y](z) = \frac{z}{z^2+1}$$

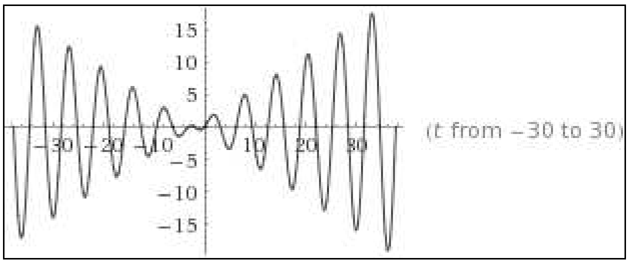
de donde: $L[y](z) = \dfrac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2}$. Una vez obtenida L[y], hemos de usar la Transformada inversa para volver atrás y recuperar la solución del problema *y*.

En este caso, L[y] satisface las condiciones teóricas, por lo que la I.P. buscada será:

$$y(t) = \operatorname{Re} s\left(e^{tz}\frac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2}, i\right) + \operatorname{Re} s\left(e^{tz}\frac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2}, -i\right) = (1 + t/2)\text{sen } t,$$

una vez realizados los cálculos pertinentes. La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





b) Este mismo problema se ha resuelto anteriormente por el método clásico, obteniendo una expresión de la I.G. como la que sigue:

$$y = c_1\cdot\cos t + c_2\cdot\text{sen } t + t/2\cdot\text{sen } t.$$

En efecto, las condiciones iniciales obligan a:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y'(t) = -c_1\cdot\text{sen } t + c_2\cdot\cos t + \dfrac{\text{sen } t}{2} + \dfrac{t}{2}\cdot\cos t \\ y'(0) = c_2 = 1, \text{ con lo que quedará la I.P.:} \end{cases}$$

$$\boxed{y = \text{sen } t + \frac{t}{2}\cdot\text{sen } t = \left(1+\frac{t}{2}\right)\text{sen } t}, \text{ c.s.q.d.}$$

c) Otra forma de abordar el problema anterior, sin necesidad de tener que calcular la Transformada de Laplace de la función coseno es la siguiente. Consideremos los cálculos realizados anteriormente, pero sin obtener: L[f](z) donde f(t) = cos t. Nos quedará entonces la ecuación algebraica:

$$z^2L[y](z) - 1 + L[y](z) = L[f](z), \text{ de donde:}$$

$$L[y](z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{z^2+1} L[f](z)$$. Entonces:

$$y(t) = L^{-1}\left[1/(z^2+1)\right](t) + L^{-1}\left[L[f](z)/(z^2+1)\right](t) =$$
$$= \text{sen } t + (L^{-1}\left[L[f](z)\right] * L^{-1}\left[1/(z^2+1)\right])(t) =$$
$$= \text{sen } t + \int_0^t \text{sen}(t-s)\cos s \cdot ds = \text{sen } t + \left[\frac{1}{4}\cos(2s-t) + 2s\cdot\text{sen } t\right]_0^t =$$
$$= \text{sen } t + \frac{t}{2}\text{sen } t = (1 + t/2)\text{sen } t$$

, que era efectivamente la solución obtenida anteriormente, c.s.q.d.

Así pues, el uso del producto de convolución presenta una vía alternativa para la resolución de este tipo de problemas, aunque a veces el cálculo de las integrales que aparecen en el producto de convolución puede resultar bastante complicado.

Ejemplo 12

Supongamos que el siguiente problema de valor inicial a resolver:

$$\begin{cases} y'' + y = f(t); \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1; \end{cases}$$

viene dado ahora con la función discontinua: $f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \le t \le \pi, \\ \cos(2t), & \text{si } t \ge \pi. \end{cases}$

Se pide: a) Resolverlo como tal, y b) Resolverlo en el supuesto que: f(t) = cos 2t, y la función es continua.

Solución:

Podemos escribir ahora: $(z^2 + 1)L[y](z) = 1 + L[f](z)$. Por otra parte: $f(t) = t[h_0(t) - h_\pi(t)] + h_\pi(t)\cos(2t)$, con lo que:

$L[f](z) = L[th_0(t)](z) + L[th_\pi(t)](z) + L[h_\pi(t)\cos(2t)](z)$, y desarrollando cada sumando por separado, obtenemos:

$$L[th_0(t)](z) = 1/z^2.$$

$$L[th_\pi(t)](z) = L[(t-\pi)h_\pi(t)](z) + \pi\cdot L[h_\pi(t)](z) = \frac{e^{-\pi z}}{z^2} + \pi\frac{e^{-\pi z}}{z}.$$

$$L[th_\pi(t)\cos(2t)](z) = L[h_\pi(t)\cos(2(t-\pi))](z) = e^{-\pi z}\frac{z}{z^2+4}.$$

Combinando estas expresiones tenemos que:

$$(z^2+1)L[f](z)+1=\frac{z^2+1}{z^2}+e^{-\pi z}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{\pi}{z}+\frac{z}{z^2+4}\right).$$ Entonces se cumple que:

$$L[y](z)=\frac{z^2+1}{z^2(z^2+1)}+e^{-\pi z}\left(\frac{1}{z^2(z^2+1)}+\frac{\pi}{z(z^2+1)}+\frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right),$$ y así:

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t)+L^{-1}\left[e^{-\pi z}\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t)+\pi\cdot L^{-1}\left[e^{-\pi z}\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t)+$$
$$+L^{-1}\left[e^{-\pi z}\frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right](t)=t+f_1(t-\pi)\cdot h_\pi(t)+\pi\cdot f_2(t-\pi)\cdot h_\pi(t)+f_3(t-\pi)\cdot h_\pi(t),$$

donde las funciones f_1, f_2 y f_3 se determinan de la siguiente manera:

$$f_1(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t)=L^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t)-L^{-1}\left[\frac{1}{z^2+1}\right](t)=t-\text{sen } t.$$

$$f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t)=L^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t)-L^{-1}\left[\frac{z}{z^2+1}\right](t)=1-\cos t.$$

$$f_3(t)=L^{-1}\left[\frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right](t)=\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{z}{z^2+1}\right](t)-\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{z}{z^2+4}\right](t)=\frac{1}{3}\cos t-\frac{1}{3}\cos(2t).$$

Entonces, resulta que:

$$\begin{aligned}y(t) &= t + h_\pi(t)\cdot[(t-\pi)-\text{sen}(t-\pi)+\pi-\pi\cdot\cos(t-\pi)+\\ &\quad+(1/3)\cos(t-\pi)-(1/3)\cos(2t-2\pi)] =\\ &= (1-h_\pi(t))t+h_\pi(t)\cdot[2t+\text{sen } t+(3\pi-1)/3\cos t-\cos(2t)/3],\end{aligned}$$

o equivalentemente, se llega a la solución:

$$y(t)=\begin{cases} t & ,\text{si } 0\le t<\pi,\\ 2t+\text{sen } t-(3\pi-1)/3\cos t-\cos(2t)/3 & ,\text{si } t\ge\pi.\end{cases}$$

Resolviendo alternativamente el mismo problema por el método clásico, veamos que ya hemos hallado la solución de la ecuación homogénea: $y'' + y = 0$, a saber: $y^* = c_1\cdot\cos t + c_2\cdot\text{sen } t$.

a) En el supuesto de que: $f(t) = t$ (si $0 \le t < \pi$), como la ecuación homogénea carece de término en y', ensayaremos la solución particular del tipo:

$$\begin{cases} y_p = at^2+bt+c\\ y'_p = 2at+b\\ y''_p = 2a\end{cases}$$

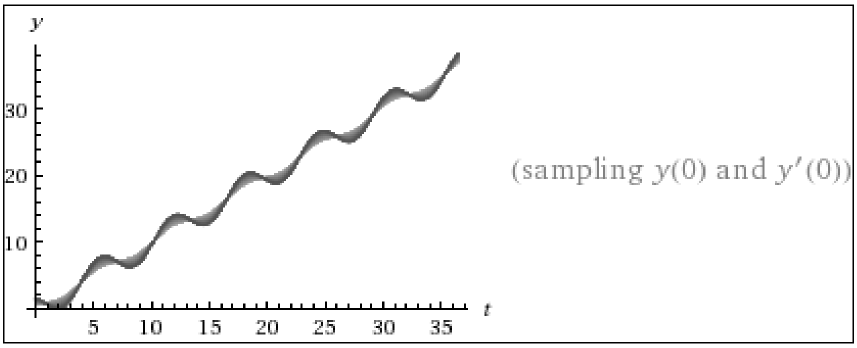
y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

$$2a + at^2 + bt + c = t \text{ ; de donde: } \left.\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 1 \\ 2a + c = 0;\ c = 0 \end{array}\right\}$$

o sea, la I.G. buscada será:

$$y(t) = y^* + y_p = c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \text{sen } t + t \text{ .}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



debiendo cumplirse las condiciones iniciales dadas:

$$\left\{\begin{array}{l} y(0) = c_1 = 0; \\ y'(t) = -c_1 \cdot \text{sen } t + c_2 \cdot \cos t + 1; \\ y'(0) = c_2 + 1 = 1;\ c_2 = 0; \text{ o sea, se tendrá, efectivamente, la I.P.:} \end{array}\right.$$

$\boxed{y(t) = t}$, (si $0 \le t < \pi$). La representación gráfica de esta solución particular es evidentemente una recta paralela al eje de abscisas Ot.

b) Se trata de una función continua a trozos (discontinua), por lo que el procedimiento correcto de resolución es el seguido hasta ahora. No obstante, si suponemos que se trata de una función continua en todo el intervalo de definición, el método a seguir (procedimiento clásico) exigiría ensayar la solución particular:

$$\left\{\begin{array}{l} y_p = h \cdot \cos 2t + k \cdot \text{sen } 2t \\ y'_p = -2h \cdot \text{sen } 2t + 2k \cdot \cos 2t \\ y''_p = -4h \cdot \cos 2t - 4k \cdot \text{sen } 2t \end{array}\right.$$

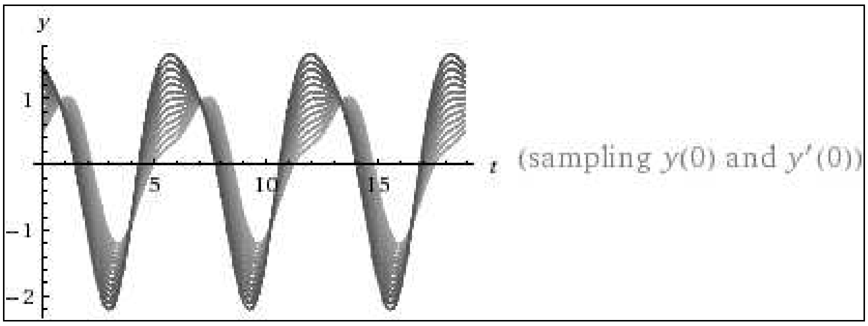
y substituyendo en la ecuación inicial, resulta:

$$-4h \cdot \cos 2t - 4k \cdot \text{sen } 2t + h \cdot \cos 2t + k \cdot \text{sen } 2t = \cos 2t$$

$k = 0$; $-3h \cdot \cos 2t = \cos 2t$; $h = -1/3$;   o sea, se tendrá la I.G.:

$$y(t) = y^* + y_p = c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \text{sen } t - \frac{\cos 2t}{3} \text{ .}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:

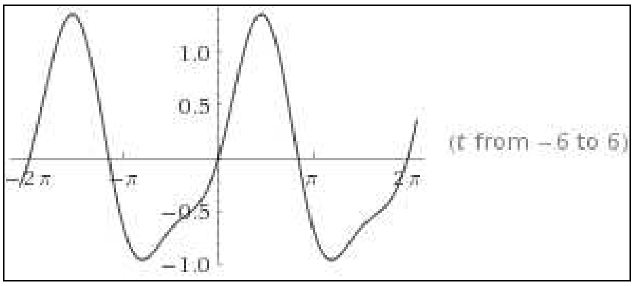


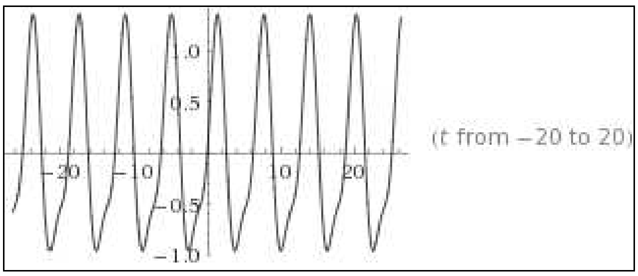
debiendo cumplirse las condiciones iniciales del problema, a saber:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 - 1/3 = 0;\ c_1 = 1/3; \\ y'(t) = -c_1 \cdot \text{sen } t + c_2 \cdot \cos t + \dfrac{2 \cdot \text{sen } 2t}{3}; \\ y'(0) = c_2 = 1;\ \text{o sea:} \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{\cos t}{3} + \text{sent} - \frac{\cos 2t}{3}}\ .$$

La representación gráfica de esta solución particular, que es evidentemente una función trigonométrica, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 13

Resuelva la EDO: $y' - 5y = e^{5x}$; con la condición inicial: $y(0) = 0$.

Solución:

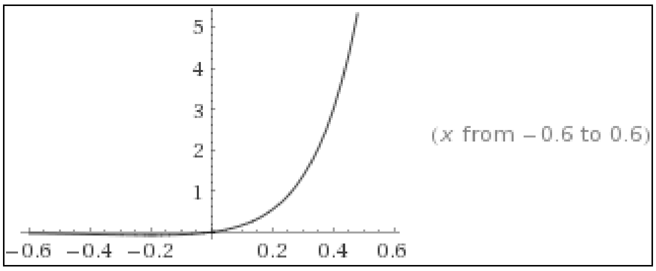
Tomando la transformada inversa de Laplace de ambos lados de esta ecuación diferencial y usando las propiedades correspondientes, encontramos que: L{y'} – 5L{y} = L{e^{5x}}. Luego, usando la tabla de transformadas y la ecuación con c_0 = 0, obtenemos la expresión:

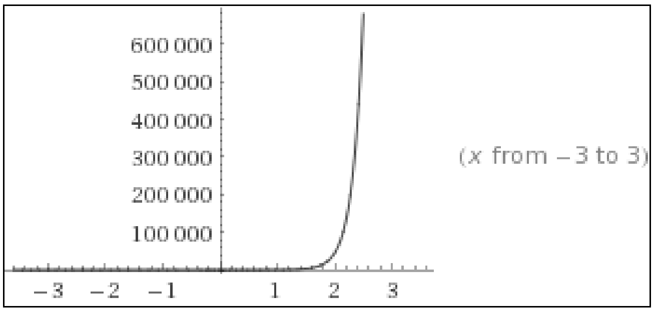
$$[sY(s) - 0] - 5Y(s) = \frac{1}{s-5}, \text{ de lo cual se deduce que: } Y(s) = \frac{1}{(s-5)^2}.$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de Y(s), obtenemos la I.P. buscada así:

$$\boxed{y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)^2}\right\} = x \cdot e^{5x}}$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

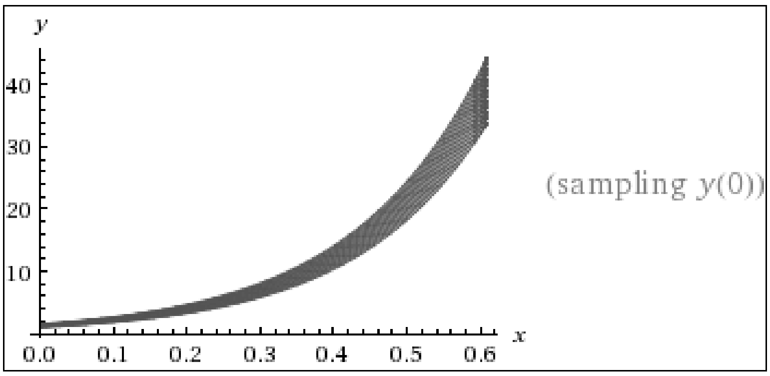




De hecho, la solución general de esta EDO viene dada por:

y(x) = e^{5x}(c + x), y la condición inicial obliga a que c = 0.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 14

Resuelva la EDO: y' + y = sen x; con la condición inicial: y(0) = 1.

Solución:

Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de esta ecuación diferencial obtenemos que:

$$L\{y'\} + L\{y\} = L\{\text{sen } x\}, \text{ o bien } \quad [sY(s) - 1] + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

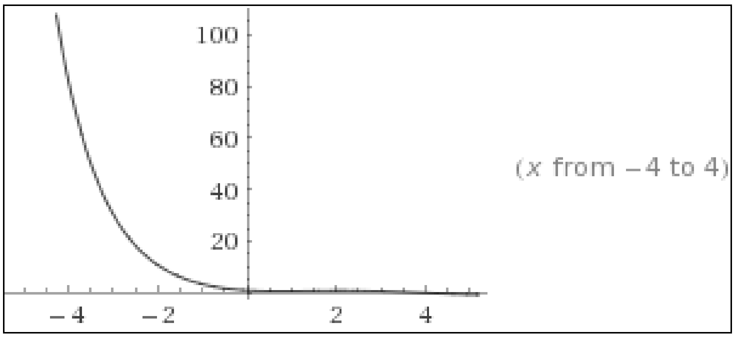
Resolviendo Y(s) encontramos que: $Y(s) = \dfrac{1}{(x+1)(s^2+1)} + \dfrac{1}{s+1}$.

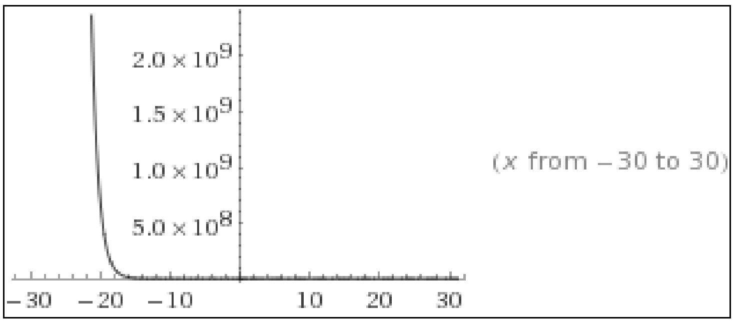
Tomando la transformada inversa de Laplace, obtenemos la expresión que conduce a la integral particular buscada:

$$y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\,\text{sen}\, x\right] + e^{-x} = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\,\text{sen}\, x$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

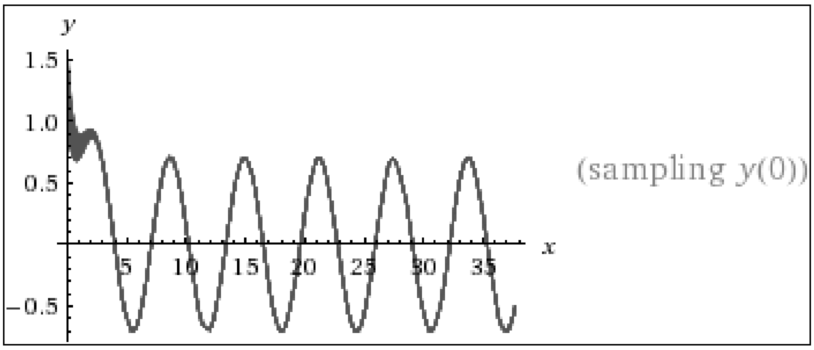




De hecho, la solución general de esta EDO viene dada por:

$$y(x) = c \cdot e^{-x} + (\text{sen } x)/2 - (\cos x)/2, \text{ y en nuestro caso: } c = 3/2.$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente puede verse en la figura siguiente:



Ejemplo 15

Resuelva: y'' + 4y = 0; con las condiciones iniciales: y(0) = 2, y'(0) = 2.

Solución:

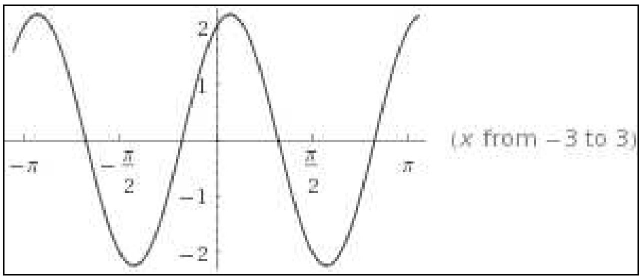
Tomando las transformadas de Laplace tenemos: L{y''} + 4L{y} = L{0}. Luego, usando la ecuación correspondiente, con c_0 = 2 y c_1 = 2, obtenemos:

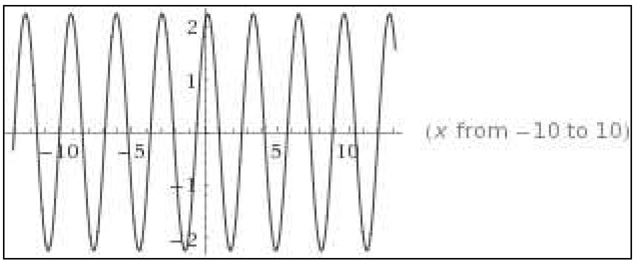
$$[s^2Y(s) - 2s - 2] + 4Y(s) = 0 \text{ , o bien: } Y(s) = \frac{2s+2}{s^2+4} = \frac{2s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de Laplace, obtenemos:

$$\boxed{y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = 2\cos 2x + \text{sen } 2x}.$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

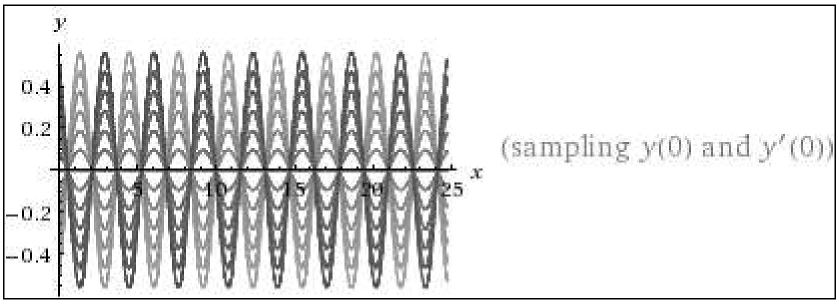




De hecho, la solución general de esta EDO viene dada por la expresión:

$y(x) = c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \operatorname{sen} 2x$, y en nuestro caso: $c_1 = 2$ y $c_2 = 1$.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 16

Resuelva la EDO: y'' – 3y' + 4y = 0; con las condiciones iniciales siguientes: y(0) = 1, y'(0) = 5.

Solución:

Tomando las correspondientes transformadas de Laplace, tenemos que:

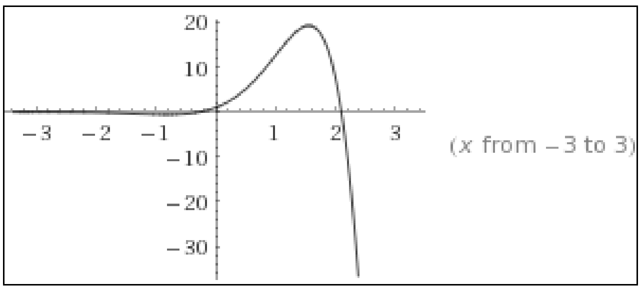
$L\{y''\} - 3L\{y'\} + 4L\{y\} = L\{0\}$. Luego, con $c_0 = 1$ y $c_1 = 5$, se transforma en:

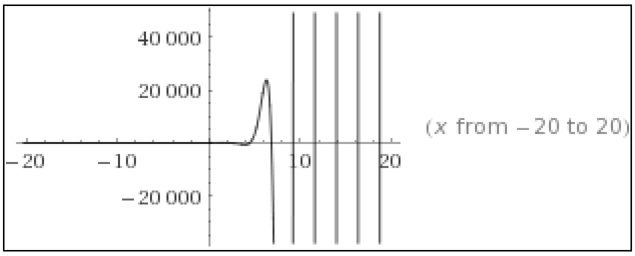
$$[s^2Y(s) - s - 5] - 3[sY(s) - 1] + 4Y(s) = 0 \text{ , o bien: } Y(s) = \frac{s+2}{s^2 - 3s + 4}$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de Laplace, obtenemos que la solución buscada es:

$$\boxed{y(x) = e^{(3/2)x} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + \sqrt{7} e^{(3/2)x} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{7}}{2} x}.$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

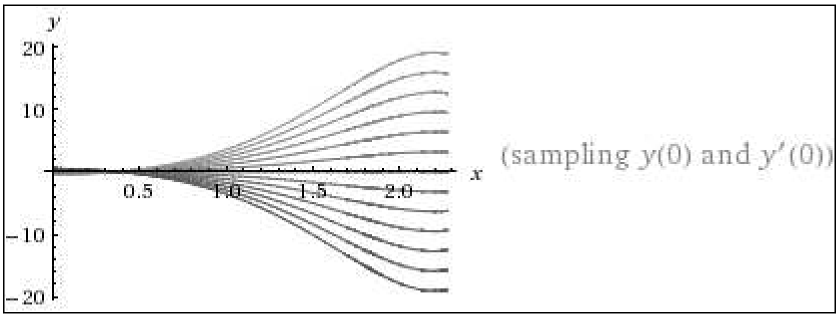




De hecho, la solución general de esta EDO viene dada por:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{3x/2} \cdot sen(\frac{x\sqrt{7}}{2}) + c_2 \cdot e^{3x/2} \cdot cos(\frac{x\sqrt{7}}{2}),$$

y en nuestro caso: $c_1 = \sqrt{7}$ y $c_2 = 1$. La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 17

Resuelva la EDO: $y'' - y' - 2y = 4x^2$; con: $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

Solución:

Tomando las transformadas de Laplace tenemos: $L\{y''\} - L\{y'\} - 2L\{y\} = 4L\{x^2\}$. Luego, usando las ecuaciones correspondientes con $c_0 = 1$ y $c_1 = 4$, tenemos que:

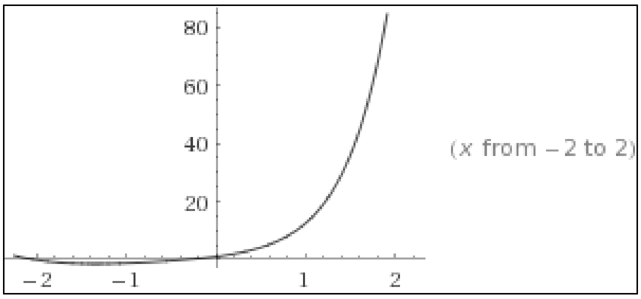
$$[s^2Y(s) - s - 4] - [sY(s) - 1] - 2Y(s) = \frac{8}{s^3},$$

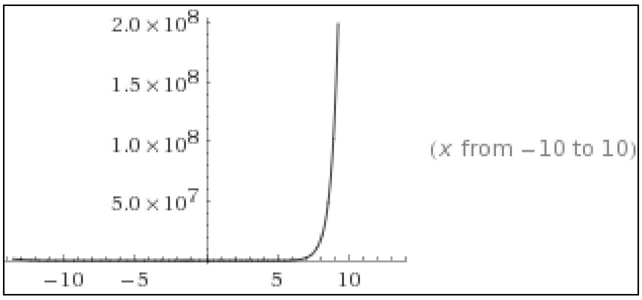
o, resolviendo para Y(s): $Y(s) = \frac{s+3}{s^2 - s - 2} + \frac{8}{s^3(s^2 - s - 2)}$.

Finalmente, tomando la transformada inversa de Laplace, obtenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= \left(\frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x}\right) + \left(-3 + 2x - 2x^2 + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{8}{3}e^{-x}\right) = \\ &= 2e^{2x} + 2e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3 \end{aligned}}$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

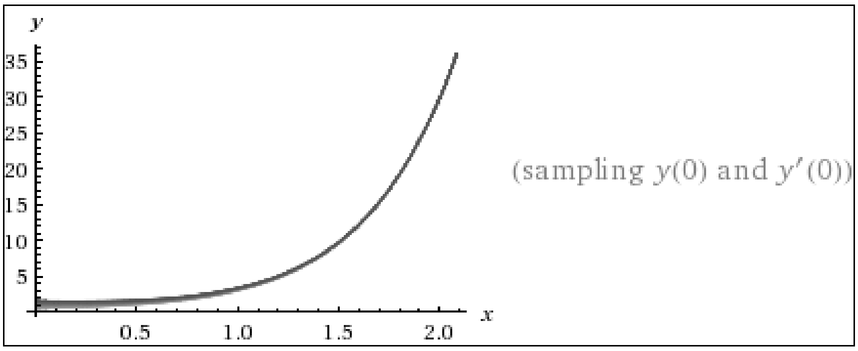




De hecho, la solución general de esta EDO viene dada por:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3,$$

y en nuestro caso: $c_1 = 2$ y $c_2 = 2$. La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 18

Resuelva la EDO: $y'' + 4y' + 8y = \text{sen } x$; con: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Solución:

Tomando las transformadas de Laplace, obtenemos:

$L\{y''\} + 4L\{y'\} + 8L\{y\} = L\{\text{sen } x\}$. Dado que $c_0 = 1$ y $c_1 = 0$, esto se convierte en:

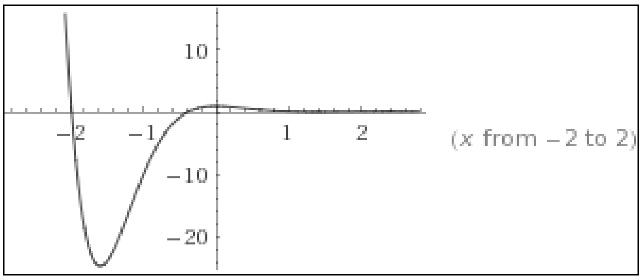
$$[s^2Y(s) - s - 0] + 4[sY(s) - 1] + 8Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

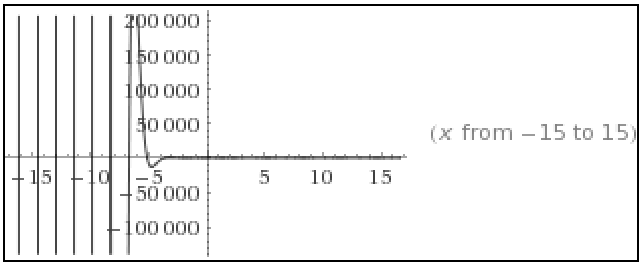
De este modo, $Y(s) = \dfrac{s+4}{s^2+4s+8} + \dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}$.

Finalmente, tomando la transformada inversa de Laplace, obtenemos:

$$y(x) = (e^{-2x}\cos 2x + e^{-2x}\text{sen } 2x) +$$
$$+\left(-\frac{4}{65}\cos x + \frac{7}{65}\text{sen } x + \frac{4}{65}e^{-2x}\cos 2x + \frac{1}{130}e^{-2x}\text{sen } 2x\right) =$$
$$= e^{-2x}\left(\frac{69}{65}\cos 2x + \frac{131}{130}\text{sen } 2x\right) + \frac{7}{65}\text{sen } x - \frac{4}{65}\cos x$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



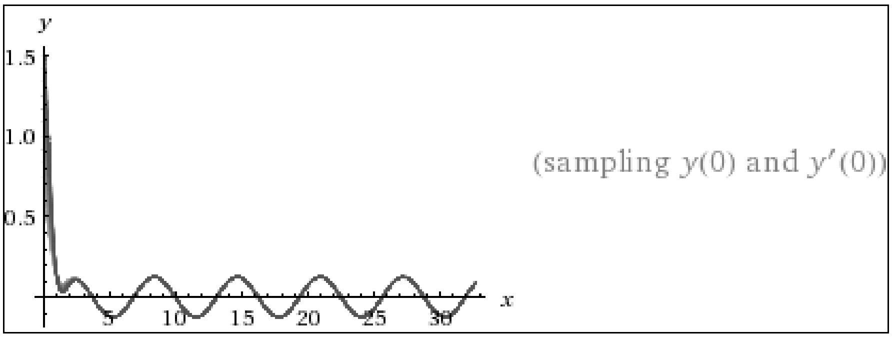


Desde luego, la I.G. viene dada por la expresión:

$$y(x) = c_1\, e^{-2x}\sin(2x) + c_2\, e^{-2x}\cos(2x) + \frac{7\sin(x)}{65} - \frac{4\cos(x)}{65}$$

, en que los valores de las dos constantes en la I.P. hallada son los siguientes: c_1 = 131/130 y c_2 = 69/65.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 19

Resuelva: y'' – 2y' + y = f(x); con: y(0) = 0, y'(0) = 0.

Solución:

En esta ecuación f(x) no está especificada. Tomando las transformadas de Laplace y designando L{f(x)} por F(s), obtenemos la expresión:

$$[s^2Y(s) – (0)s – 0] – 2[sY(s) – 0] + Y(s) = F(s) \text{ , o bien: } Y(s) = \frac{F(s)}{(s-1)^2}$$

De la tabla correspondiente, se deduce que: $L^{-1}\{1/(s – 1)^2\} = x\cdot e^x$. De este modo, tomando la transformada inversa de Y(s) y usando convoluciones, concluimos que:

$$\boxed{y(x) = x{\cdot}e^x * f(x) = \int_0^x t{\cdot}e^t f(x-t){\cdot}dt}$$

Ejemplo 20

Resuelva: y'' + y = f(x); con: y(0) = 0, y'(0) = 0, si $f(x) = \begin{cases} 0, & \forall\, x < 1 \\ 2, & \forall x \geq 1 \end{cases}$.

Solución:

Obsérvese que: f(x) = 2u(x – 1). Tomando las transformadas de Laplace obtenemos que:

$$[s^2Y(s) – (0)s – 0] + Y(s) = L\{f(x)\} = 2L\{u(x – 1)\} = 2e^{-s}/s, \text{ o bien:}$$

$$Y(s) = e^{-s}\frac{2}{s(s^2+1)}$$

Dado que: $L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+1)}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = 2 - 2\cos x$

Del teorema correspondiente, se desprende que la solución es:

$$\boxed{y(x) = L^{-1}\left\{e^{-s}\frac{2}{s(s^2+1)}\right\} = [2 - 2\cos(x-1)]u(x-1)}$$

Ejemplo 21

Resuelva la EDO: y''' + y' = e^x; con: y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.

Solución:

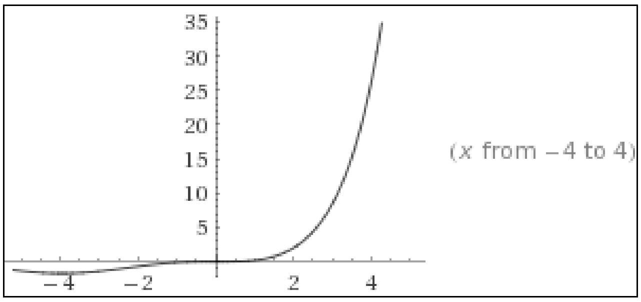
Tomando las transformadas de Laplace, obtenemos: L{y'''} + L{y'} = L{e^x}. Luego, usando la ecuación correspondiente con n = 3, tenemos:

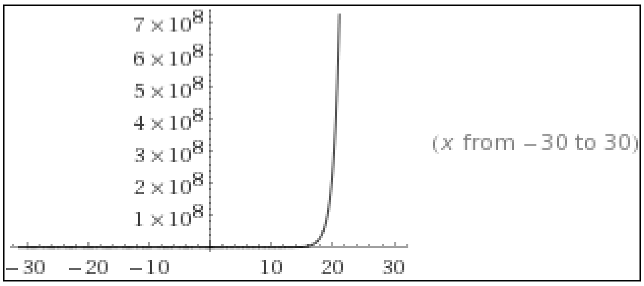
$$[s^3Y(s) - (0)s^2 - (0)s - 0] + [sY(s) - 0] = \frac{1}{s-1}\text{ , o bien: } Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^3+s)}.$$

Finalmente, usando el método de fracciones parciales y tomando la transformada inversa, obtenemos la I.P. buscada, así:

$$y(x) = L^{-1}\left\{-\frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}}{s^2+1}\right\} = -1 + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

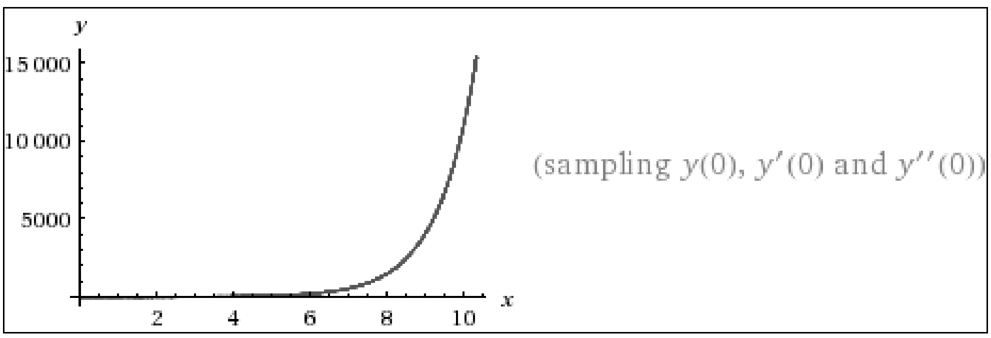




Desde luego, la I.G. viene dada por la expresión:

$$y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) + c_3 + \frac{e^x}{2}$$

, que en el caso de la I.P. buscada ofrece los valores: c_1 = -1/2, c_2 = ½, y c_3 = -1. La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 22

Resuelva: $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$.

Solución:

No existen aquí condiciones iniciales. Al tomar transformadas de Laplace, tenemos: $L\{y''\} - 3L\{y'\} + 2L\{y\} = L\{e^{-x}\}$, o bien:

$$[s^2Y(s) - sc_0 - c_1] - 3[sY(s) - c_0] + 2[Y(s)] = \frac{1}{(s+1)}$$

Aquí c_0 y c_1 deben seguir siendo arbitrarias, dado que representan y(0) e y'(0), respectivamente, las cuales son desconocidas. De este modo:

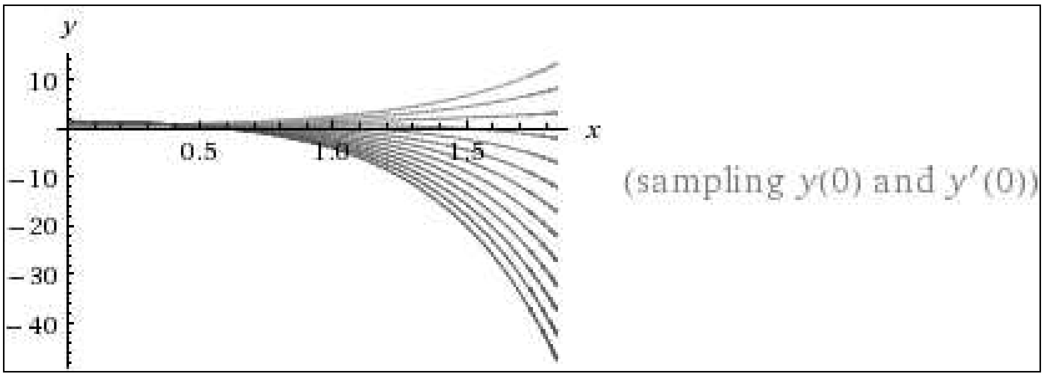
$$Y(s) = c_0\frac{s-3}{s^2-3s+2} + c_1\frac{1}{s^2-3s+2} + \frac{1}{(s+1)(s^2-3s+2)}$$

Usando el método de fracciones parciales y observando que:
$s^2 - 3s + 2 = (s-1)(s-2)$, obtenemos la I.G. buscada así:

$$y(x) = c_0L^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{-1}{s-2}\right\} + c_1L^{-1}\left\{\frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1/6}{s+1} + \frac{-1/2}{s-1} + \frac{1/3}{s-2}\right\} =$$
$$= c_0(2e^x - e^{2x}) + c_1(-e^x + e^{2x}) + \left(\frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{3}e^{2x}\right) =$$
$$= \left(2c_0 - c_1 - \frac{1}{2}\right)e^x + \left(-c_0 + c_1 + \frac{1}{3}\right)e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x} = d_0e^x + d_1e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x}$$

, donde se ha hecho: $d_0 = 2c_0 - c_1 - ½$, y $d_1 = -c_0 + c_1 + 1/3$.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Su resolución alternativa por el método tradicional conduce al mismo resultado, como puede comprobar el amable lector.

Ejemplo 23

Resuelva la EDO: y'' – 3y' + 2y = e^{-x}; con: y(1) = 0, y'(1) = 0.

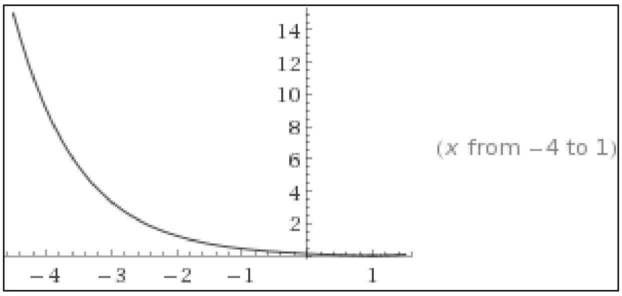
Solución:

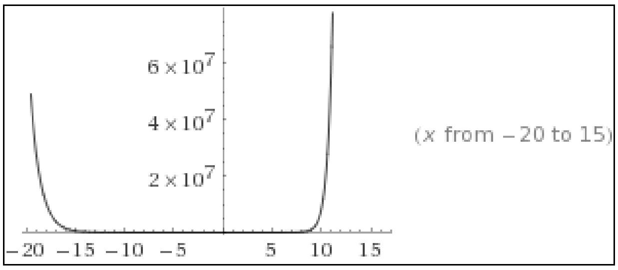
Las condiciones iniciales aquí están dadas en x = 1, no en x = 0. Usando los resultados del problema anterior, en que ya hemos obtenido la integral general, estudiaremos la solución particular buscada para esta ecuación diferencial. La I.G. es: $y(x) = d_0e^x + d_1e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x}$.

Aplicando las condiciones iniciales a esta última ecuación, encontramos que: $d_0 = -\frac{1}{2}e^{-2}$ y $d_1 = \frac{1}{3}e^{-3}$; de aquí se deduce que:

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{2}e^{x-2} + \frac{1}{3}e^{2x-3} + \frac{1}{6}e^{-x}}.$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 24

Resuelva la EDO: $\frac{dN}{dt} = 0'05 \cdot N$; con la condición inicial: N(0) = 20.000.

Solución:

Esta es una ecuación diferencial para la función desconocida N(t) en la variable independiente t. Establecemos N(s) = L{N(t)}. Tomando las transformadas de Laplace de la ecuación diferencial dada, tenemos que:

[sN(s) – N(0)] = 0'05 N(s) ; [sN(s) – 20.000] = 0'05 N(s), o resolviendo para N(s): $N(s) = \dfrac{20.000}{s - 0'05}$. Luego, de la tabla de transformadas que se acompaña en este tema, con a = 0'05 y t reemplazando a x, obtenemos:

$$N(t) = L^{-1}\{N(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{20.000}{s - 0'05}\right\} = 20.000\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s - 0'05}\right\} = 20.000 \cdot e^{0'05t}$$

Ejemplo 25

Resuelva la EDO siguiente: $\dfrac{dI}{dt} + 50 \cdot I = 5$; con la condición inicial: I(0) = 0.

Solución:

Esta es una ecuación diferencial para la función desconocida I(t) en la variable independiente t. Establecemos I(s) = L{I(t)}. Tomando las transformadas de Laplace de la ecuación diferencial dada y usando la ecuación correspondiente con I reemplazando a y, tenemos que:

$$[sI(s) – I(0)] + 50I(s) = 5\left(\frac{1}{s}\right);\ [sI(s) – 0] + 50I(s) = 5\left(\frac{1}{s}\right),$$

o bien resolviendo I(s): $I(s) = \dfrac{5}{s(s+50)}$. Luego, usando el método de fracciones parciales y la tabla de transformadas que se acompaña, con t reemplazando a x, obtenemos la expresión:

$$I(t) = L^{-1}\{I(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{5}{s(s+50)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1/10}{s} - \frac{1/10}{s+50}\right\} =$$

$$= \frac{1}{10}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{10}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+50}\right\} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-50t} = \frac{1 - e^{-50t}}{10}$$

Ejemplo 26

Resuelva la EDO: x'' + 16x = 2sen 4t; con: x(0) = -½ , x'(0) = 0.

Solución:

Esta es una ecuación diferencial para la función desconocida x(t) en la variable independiente t. Establecemos X(s) = L{x(t)}. Tomando las transformadas de Laplace de la ecuación diferencial dada y usando la ecuación correspondiente con *x* reemplazando a *y*, tenemos que:

$$[s^2X(s) – sx(0) – x'(0)] + 16X(s) = 2\left(\frac{4}{s^2+16}\right)$$

$$[s^2X(s) – s(-½) – 0] + 16X(s) = \frac{8}{s^2+16};\ (s^2 + 16)X(s) = \frac{8}{s^2+16} - \frac{s}{2},$$

o bien: $X(s)=\dfrac{8}{(s^2+16)^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s}{s^2+16}\right)$

Luego, usando las entradas correspondientes de la tabla del epígrafe anterior, con a = 4 y *t* reemplazando a *x*, obtenemos la integral particular buscada:

$$x(t)=L^{-1}\{X(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{8}{(s^2+16)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+16}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{16}L^{-1}\left\{\frac{128}{(s^2+16)^2}\right\}-\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}=\frac{1}{16}(\text{sen } 4t-4t\cdot\cos 4t)-\frac{1}{2}\cos 4t$$

Ejemplo 27

Obtenga la ecuación que es solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria por el método de la Transformada de Laplace, haciendo uso de tablas y propiedades.

$\dfrac{d^2g(t)}{dt^2}+4g(t)=\text{sen } 4t$, con las condiciones iniciales: g(0) = 0 y g’(0) = 1/5.

Solución:

Se trata, evidentemente, de un problema de valor inicial.

Aplicando la transformada directa de Laplace, se obtiene que:

$$L\left[D^2g(t)+4g(t)\right]=L[\text{sen}(4t)];\quad L\left[D^2g(t)\right]+4L[g(t)]=L[\text{sen}(4t)];$$

$$\left[S^2G(s)-Sg(0)-g'(0)\right]+4[G(s)]=\left[\frac{4}{(S^2+4^2)}\right];$$

$$S^2G(s)-0-\frac{1}{5}+4G(s)=\frac{4}{(S^2+4^2)};\quad G(s)(S^2+4)-\frac{1}{5}=\frac{4}{(S^2+4^2)};$$

$$G(s)(S^2+4)=\frac{4}{(S^2+4^2)}+\frac{1}{5}=\frac{20+(S^2+4^2)}{5(S^2+4^2)}=\frac{S^2+36}{5(S^2+4^2)};$$

$$G(s)=\frac{(S^2+6^2)}{5(S^2+2^2)(S^2+4^2)}\Rightarrow G(s)=\frac{\frac{1}{5}(S^2+6^2)}{(S^2+2^2)(S^2+4^2)}$$

Aplicando ahora, como siempre, la transformada inversa de Laplace, resultará que:

$$L^{-1}\{G(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{5}(S^2+6^2)}{(S^2+2^2)(S^2+4^2)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{5}\left[(S+0)^2+6^2\right]}{\left[(S+0)^2+2^2\right]\left[(S+0)^2+4^2\right]}\right\};$$

$$L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{M_1\angle\varphi_1}{\left[(S+0)^2+2^2\right]} + \frac{M_2\angle\varphi_2}{\left[(S+0)^2+4^2\right]}\right\};$$

$$L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{M_1\angle\varphi_1}{\left[(S+\sigma_1)^2+\omega_1^2\right]}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{M_2\angle\varphi_2}{\left[(S+\sigma_2)^2+\omega_2^2\right]}\right\};$$

$$\boxed{L^{-1}\{G(s)\} = \frac{M_1}{\omega_1}e^{-\sigma_1\cdot t}\cdot sen(\omega_1\cdot t+\varphi_1) + \frac{M_2}{\omega_2}e^{-\sigma_2\cdot t}\cdot sen(\omega_2\cdot t+\varphi_2)},$$

que es la forma de la respuesta. Hallando los coeficientes:

$$M_1\angle\varphi_1 = \left\{G(s)\cdot\left[(S+\sigma_1)^2+\omega_1^2\right]\right\}_{S=-\sigma_1+i\omega_1} = \left.\frac{\frac{1}{5}(S^2+36)}{(S^2+16)}\right|_{S=0+2i} =$$

$$\boxed{=\frac{8}{15}=0'5333\angle 0 = M_1\angle\varphi_1}$$

$$M_2\angle\varphi_2 = \left\{G(s)\cdot\left[(S+\sigma_2)^2+\omega_2^2\right]\right\}_{S=-\sigma_2+i\omega_2} = \left.\frac{\frac{1}{5}(S^2+36)}{(S^2+4)}\right|_{S=0+4i} =$$

$$\boxed{=-\frac{1}{3}=-0'3333\angle\pi = M_2\angle\varphi_2}$$

Substituyendo en la forma de la respuesta, se tiene que:

$$L^{-1}\{G(s)\} = g(t) = \frac{0'5333}{2}e^{0\cdot t}\cdot sen(2t+0) + \frac{(-0'3333)}{4}e^{0\cdot t}\cdot sen(4t+\pi)$$

$$\boxed{L^{-1}\{G(s)\} = g(t) = 0'2667\cdot sen(2t) - 0'0834\cdot sen(4t+\pi)}$$

Si resolvemos el presente ejercicio por el método clásico, veamos que la I.G. de la ecuación homogénea ya fue resuelta en otro ejercicio, ofreciendo como resultado:

$$g^* = C_1\cdot\cos 2t + C_2\cdot sen\ 2t$$

Ensayemos, ahora, una solución particular de la no homogénea, del tipo:

$$\begin{cases} g_p = h\cdot\cos 4t + k\cdot sen\ 4t \\ g'_p = -4h\cdot sen\ 4t + 4k\cdot\cos 4t \\ g''_p = -16h\cdot\cos 4t - 16k\cdot sen\ 4t \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

$$-16h\cdot\cos 4t - 16k\cdot sen\ 4t + 4h\cdot\cos 4t + 4k\cdot sen\ 4t = sen\ 4t\ ;$$

h = 0 ; -12k·sen 4t = sen 4t ; $k = -\frac{1}{12}$. Con ello se tendrá una I.G. de:

$$g(t) = g^* + g_p = C_1\cdot\cos 2t + C_2\cdot\text{sen } 2t - \frac{\text{sen } 4t}{12} \ ;$$

que con las condiciones iniciales dadas se traduce en:

$$\begin{cases} g(0) = C_1 = 0 \ ; \\ g'(t) = -2C_1\cdot\text{sen } 2t + 2C_2\cdot\cos 2t - \dfrac{\cos 4t}{3} \ ; \\ g'(0) = 2C_2 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{5} ; \quad C_2 = \dfrac{4}{15} \ ; \ \text{con lo que la I.P. buscada será:} \end{cases}$$

$$g(t) = \frac{4}{15}\cdot\text{sen } 2t - \frac{\text{sen } 4t}{12} = 0'2667\cdot\text{sen } 2t - 0'0834\cdot\text{sen } 4t \text{ , c.s.q.d.}$$

Ejemplo 28

Obtenga la ecuación que es solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria por el método de la Transformada de Laplace, haciendo uso de tablas y propiedades, y posterior comprobación por el método clásico.

$$D^2h(t) - 2Dh(t) + 10h(t) = e^{-2\cdot t} \text{ , con: } h(0) = 0 \text{ y } h'(0) = ½.$$

Solución:

Se trata, evidentemente, de un problema de valor inicial. Aplicando la transformada directa de Laplace, se obtiene que:

$$L[D''h(t)] - 2L[D'h(t)] + 10L[h(t)] = L[e^{-2\cdot t}];$$

$$[S^2H(s) - Sh(0) - h'(0)] - 2[SH(s) - h(0)] + 10[H(s)] = \left[\frac{1}{(S+2)}\right];$$

$$S^2H(s) - \frac{1}{2} - 2SH(s) + 10H(s) = \frac{1}{(S+2)}; \quad H(s)[S^2 - 2S + 10] - \frac{1}{2} = \frac{1}{(S+2)};$$

$$H(s)[S^2 - 2S + 10] = \frac{1}{(S+2)} + \frac{1}{2} = \frac{2 + (S+2)}{2(S+2)} = \frac{S+4}{2(S+2)};$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{2}(S+4)}{(S+2)(S^2 - 2S + 10)}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, se obtiene que:

$$L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}(S+4)}{(S+2)(S^2-2S+10)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}(S+4)}{(S+2)(S-1+3i)(S-1-3i)}\right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}(S+4)}{(S+2)\left[(S-1)^2+3^2\right]}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k1}{(s+2)}+\frac{M\angle\varphi}{\left[(S-1)^2+3^2\right]}\right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{k1}{(S+\sigma_1)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{M\angle\varphi}{\left[(S+\sigma_2)^2+\omega_2^2\right]}\right\}; \text{de lo que se deduce que :}$$

$$\boxed{L^{-1}\{H(s)\} = k1 \cdot e^{-\sigma_1 \cdot t} + \frac{M}{\omega_2} e^{-\sigma_2 \cdot t} \cdot \operatorname{sen}(\omega_2 \cdot t + \varphi)}\ ,$$

que es la forma de la respuesta. Hallando los coeficientes:

$$k_1 = \left[H(s)\cdot(S+\sigma_1)\right]_{S=-\sigma_1} = \left[\frac{\frac{1}{2}(S+4)}{(S^2-2S+10)}\right]_{S=-2} = \left[\frac{\frac{1}{2}(-2+4)}{((-2)^2-2(-2)+10)}\right] =$$

$$\boxed{=\frac{1}{18} = 0'0556 = k_1}$$

$$M\angle\varphi = \left\{H(s)\cdot\left[(S+\sigma_2)^2+\omega_2^2\right]\right\}_{S=-\sigma_2+i\omega_2} = \left[\frac{\frac{1}{2}(S+4)}{(S+2)}\right]_{S=1+3i} = \left[\frac{\frac{1}{2}(1+3i+4)}{(1+3i+2)}\right] =$$

$$= \frac{2'5+1'5i}{3+3i} = 0'667 - 0'1667\,i\ ; \quad \boxed{M\angle\varphi = 0'6872\angle -0'245}$$

substituyendo en la forma de la respuesta:

$$L^{-1}\{H(s)\} = h(t) = \frac{1}{18}e^{-2\cdot t} + \frac{0'6872}{3}e^{t}\cdot\operatorname{sen}(3\cdot t - 0'245)$$

se obtiene, en definitiva, la solución buscada, a saber:

$$\boxed{h(t) = 0'0556\cdot e^{-2\cdot t} + 0'2291\cdot e^{t}\cdot\operatorname{sen}(3\cdot t - 0'245)}$$

Si resolvemos ahora el presente ejercicio por el método clásico, veamos que la ecuación característica de la homogénea será (h'' – 2h' + 10h = 0):

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0\ ; \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1+3i \\ \lambda_2 = 1-3i \end{cases}$$

con lo que: $h^* = e^t(C_1\cdot\cos 3t + C_2\cdot\operatorname{sen} 3t)$. Ensayemos, ahora, una solución particular de la no homogénea, del tipo:

$$\begin{cases} h_p = A \cdot e^{-2t} \\ h'_p = -2A \cdot e^{-2t} \\ h''_p = 4A \cdot e^{-2t} \end{cases}$$

Substituyendo en la ecuación inicial se tendrá la expresión:

$$4 \cdot A \cdot e^{-2t} + 4 \cdot A \cdot e^{-2t} + 10 \cdot A \cdot e^{-2t} = e^{-2t}\ ; \quad 18 \cdot A \cdot e^{-2t} = e^{-2t}\ ; \quad A = \frac{1}{18}\ ;$$

con lo que la I.G. será: $h(t) = h^* + h_p = e^t(C_1 \cdot \cos 3t + C_2 \cdot \operatorname{sen} 3t) + \dfrac{e^{-2t}}{18}$;

y con las condiciones iniciales dadas, resultará que:

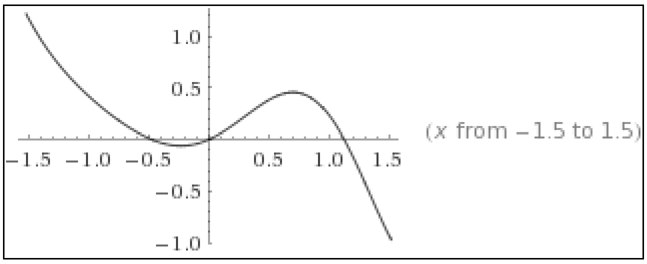
$$\begin{cases} h(0) = C_1 + \dfrac{1}{18} = 0\ ; \quad C_1 = -\dfrac{1}{18}\ ; \\ h'(t) = e^t(C_1 \cdot \cos 3t + C_2 \cdot \operatorname{sen} 3t) + e^t(-3C_1 \cdot \operatorname{sen} 3t + 3C_2 \cdot \cos 3t) - \dfrac{e^{-2t}}{9}\ ; \\ h'(0) = C_1 + 3C_2 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{2}\ ; \quad C_2 = \dfrac{2}{9}\ ; \text{ esto es, se tiene la I.P.:} \end{cases}$$

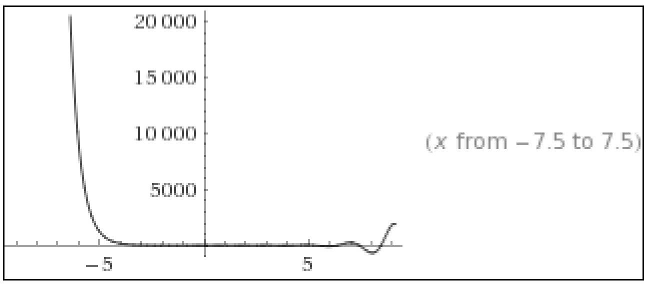
$$\boxed{h(t) = e^t\left(-\frac{1}{18} \cdot \cos 3t + \frac{2}{9} \cdot \operatorname{sen} 3t\right) + \frac{e^{-2t}}{18}}$$

Este resultado es coincidente con el hallado anteriormente, como puede comprobar con facilidad el amable lector, teniendo en cuenta el desarrollo trigonométrico siguiente:

$$\operatorname{sen}(3t - 0'245) = \operatorname{sen} 3t \cdot \cos 0'245 - \operatorname{sen} 0'245 \cdot \cos 3t =$$
$$= 0'97014 \cdot \operatorname{sen} 3t - 0'24256 \cdot \cos 3t.$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 29

Solve the following initial valued problems by Laplace Transform and by the classic method.

a) $y'' + k^2y = 2\cdot\sin \omega t$, with $y(0) = 0$;
b) $y'' + 4y' + 5y = 100\cdot e^{-2t}$, with $y(0) = -1$ and $y'(0) = 0$.

Solution:

a) We transform the differential equation to obtain: $(s^2+k^2)Y(s) = \dfrac{2\omega}{s^2+\omega^2}$, from which it follows that $Y(s) = \dfrac{2\omega}{(s^2+\omega^2)(s^2+k^2)}$. There are two cases to consider:

1.- If $\omega = k$, then $y(t) = L^{-1}\left\{\dfrac{2\omega}{(s^2+\omega^2)^2}\right\} = \dfrac{\sin\omega t - \omega t\cdot\cos\omega t}{\omega^2}$.

2.- If $\omega \neq k$, then $y(t) = \dfrac{2\omega}{k^2-\omega^2} = \left(\dfrac{\sin\omega t}{\omega} - \dfrac{\sin kt}{k}\right)$.

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation:

$$y(t) = C_1\cdot\sin kt + C_2\cdot\cos kt + \frac{2\sin\omega t}{k^2-\omega^2}.$$

The required initial conditions are:

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = 0\ ; \\ y'(t) = k\cdot C_1\cdot\cos kt - k\cdot C_2\cdot\sin kt + \dfrac{2\omega\cdot\cos\ \omega t}{k^2-\omega^2}\ ; \\ y'(0) = k\cdot C_1 + \dfrac{2\omega}{k^2-\omega^2} = 0\ ; \quad C_1 = -\dfrac{2\omega}{k(k^2-\omega^2)}\ ; \end{cases}$$

The particular solution sought is, ultimately:

$$\boxed{y(t) = \frac{2\sin\omega t}{k^2-\omega^2} - \frac{2\omega\cdot\sin kt}{k(k^2-\omega^2)} = \frac{2(k\cdot\sin\omega t - \omega\cdot\sin kt)}{k(k^2-\omega^2)}} \text{ (if } \omega \neq k).$$

In addition, if $\omega = k$, the original equation is:

$$y'' + \omega^2\cdot y = 2\cdot\sin\omega t\ ;$$

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation:

$$\begin{cases} y(t) = C_1\cdot\sin\omega t + C_2\cdot\cos\omega t - \dfrac{t\cdot\cos\omega t}{\omega}; \\ y(0) = C_2 = 0 ; \\ y'(t) = \omega\cdot C_1\cdot\cos\omega t - \omega\cdot C_2\cdot\sin\omega t - \dfrac{\cos\omega t - t\cdot\omega\cdot\sin\omega t}{\omega}; \\ y'(0) = \omega\cdot C_1 - \dfrac{1}{\omega} = 0 ; \quad C_1 = \dfrac{1}{\omega^2}; \end{cases}$$

The particular solution sought is, ultimately:

$$\boxed{y(t) = \frac{\sin\omega t}{\omega^2} - \frac{\omega\cdot t\cdot\cos\omega t}{\omega^2} = \frac{\sin\omega t - \omega\cdot t\cdot\cos\omega t)}{\omega^2}}.$$

b) We apply Laplace Transform to the equation to obtain:

$$(s^2 + 4s + 5)Y(s) + s + 4 = \frac{100}{s+2}.$$

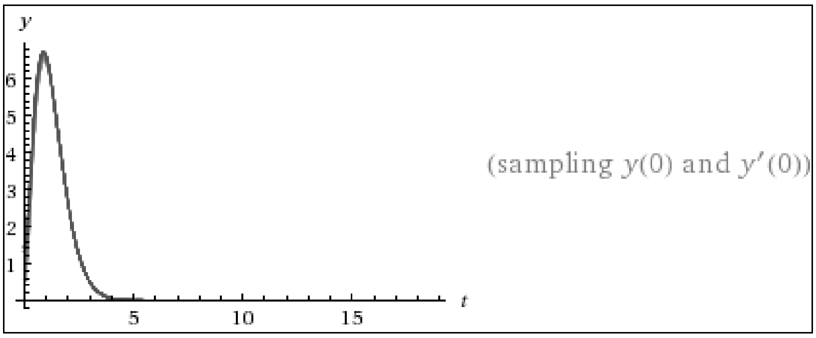
Hence $Y(s) = -\dfrac{s}{s^2+4s+5} - \dfrac{4}{s^2+4s+5} + \dfrac{100}{(s+2)(s^2+4s+5)}$. Using the fact that $\dfrac{100}{(s+2)(s^2+4s+5)} = \dfrac{100}{s+2} - \dfrac{100s}{s^2+4s+5} - \dfrac{200}{s^2+4s+5}$, one obtains

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}\left\{-\frac{s}{s^2+4s+5} - \frac{4}{s^2+4s+5} + \frac{100}{(s+2)(s^2+4s+5)}\right\} = \\ &= L^{-1}\left\{-\frac{s}{(s+2)^2+1} - \frac{4}{(s+2)^2+1} + \frac{100}{(s+2)\left[(s+2)^2+1\right]}\right\} = \\ &= 100e^{-2t} - 101e^{-2t}(\cos t - 2\cdot\sin t) - 204e^{-2t}\sin t = \\ &= 100\cdot e^{-2t} - 2\cdot e^{-2t}\cdot\sin t - 101\cdot e^{-2t}\cdot\cos t \end{aligned}$$

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation:

$$y(t) = C_1\cdot e^{-2t}\cdot\sin t + C_2\cdot e^{-2t}\cdot\cos t + 100\cdot e^{-2t}.$$

The graphical representation of the sample solution family is:



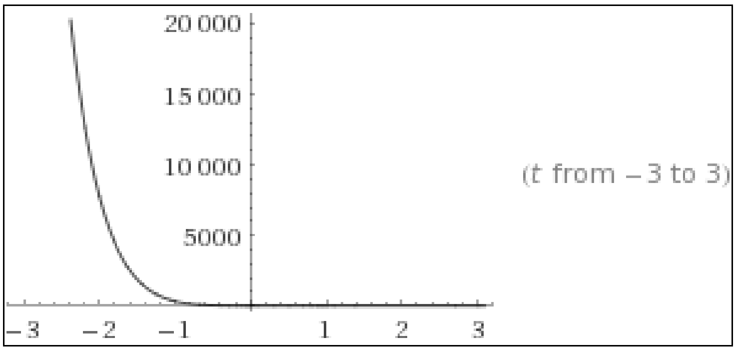
The required initial conditions of the problem are:

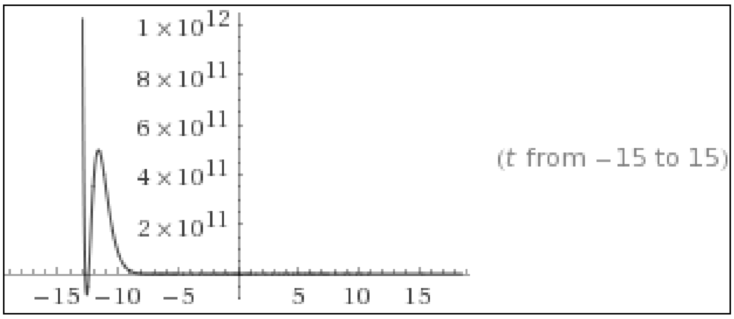
$$\begin{cases} y(0) = C_2 + 100 = -1\ ;\quad C_2 = -101\ ; \\ y'(t) = -2C_1\cdot e^{-2t}\cdot \sin t + C_1\cdot e^{-2t}\cdot \cos t - 2C_2\cdot e^{-2t}\cdot \cos t - \\ \qquad - C_2\cdot e^{-2t}\cdot \sin t - 200\cdot e^{-2t}\ ; \\ y'(0) = C_1 - 2C_2 - 200 = 0\ ;\quad C_1 = 2C_2 + 200 = -2\ ; \end{cases}$$

The particular solution sought is, ultimately:

$$\boxed{y(t) = -2\cdot e^{-2t}\cdot \sin t - 101\cdot e^{-2t}\cdot \cos t + 100\cdot e^{-2t}}$$

The graphical representations of this particular integral are:





Ejemplo 30

Solve the following initial-value problem using Laplace transforms and by the classic method: $y' + 4y = e^t$, with $y(0) = 2$.

Solution:

Take the Laplace transform on both sides of the differential equation, $L\{y'(t)\} + 4L\{y(t)\} = L\{e^t\}$. Since $y(0) = 2$, we get: $(sY(s) - 2) + 4Y(s) = \dfrac{1}{s-1}$.

Solving for Y(s) gives: $Y(s) = \dfrac{2}{s+4} + \dfrac{1}{(s+4)(s-1)} = \dfrac{2s-1}{(s+4)(s-1)}$.

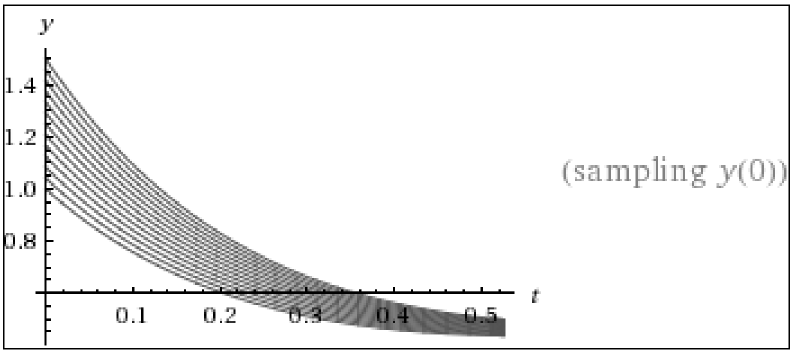
Using partial fractions, we obtain: $Y(s) = \dfrac{9}{5}\left(\dfrac{1}{s+4}\right) + \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{s-1}\right)$.

Taking the inverse Laplace transform gives the answer:

$$\boxed{y(t) = \frac{9}{5}e^{-4t} + \frac{1}{5}e^{t}}$$

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation:

$y(t) = C \cdot e^{-4t} + \dfrac{e^t}{5}$, and your graphical representation of the sample solution family is:

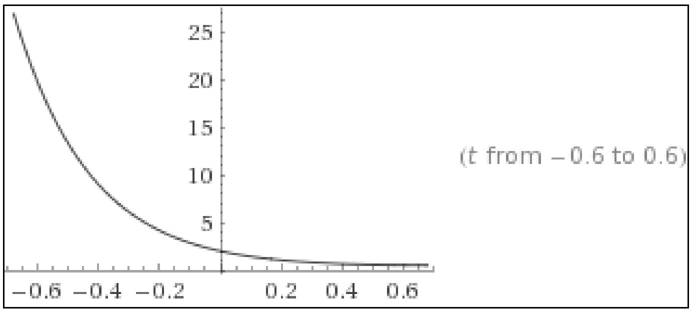


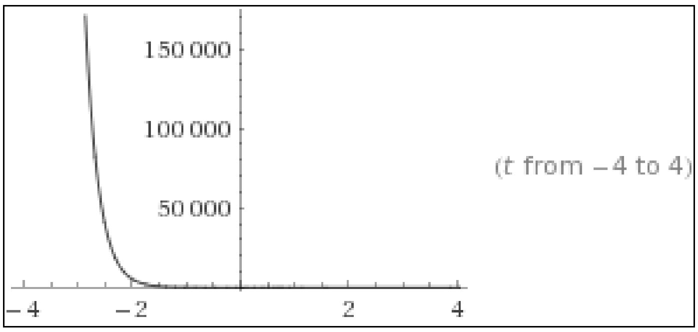
The required initial condition of the problem is:

$y(0) = C + \dfrac{1}{5} = 2$; $C = 2 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{9}{5}$.

The particular solution sought is, ultimately: $\boxed{y(t) = \dfrac{9}{5} \cdot e^{-4t} + \dfrac{e^t}{5}}$.

The graphical representations of this particular integral are:





Ejemplo 31

Solve the following initial-value problem using Laplace transforms and by the classic method: y' – y = sin t, with y(0) = 1.

Solution:

Take the Laplace transform on both sides of the differential equation: L{y'(t)} – L{y(t)} = L{sin t}. Since y(0) = 1, we get: (sY(s) – 1) – Y(s) = $\frac{1}{s^2+1}$.

Solving for Y(s) gives: $Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{s^2+2}{(s-1)(s^2+1)}$

Using partial fractions, we obtain:

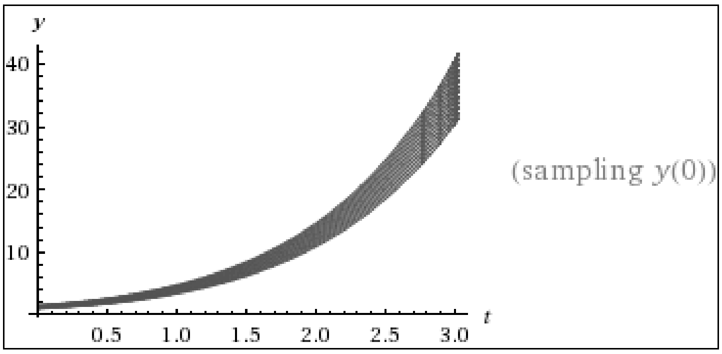
$$Y(s) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right).$$

Taking the inverse Laplace transform gives the answer:

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t}$$

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation:

$y(t) = C \cdot e^t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$, and your graphical representation of the sample solution family is:



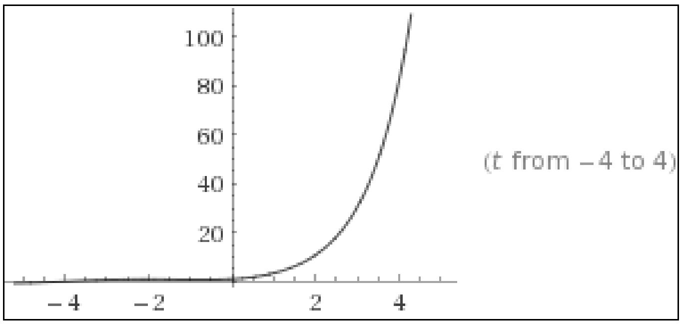
The required initial condition of the problem is:

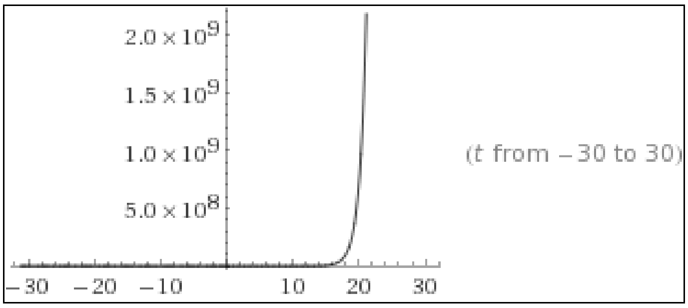
$y(0) = C - \frac{1}{2} = 1$; $C = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

The particular solution sought is, ultimately:

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{2} \cdot e^t - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)}.$$

The graphical representations of this particular integral are:





Ejemplo 32

Solve the following initial-value problem using Laplace transforms and by the classic method: y'' + 3y' + 2y = t + 1, with y(0) = 1, y'(0) = 0.

Solution:

Take the Laplace transform on both sides of the differential equation: L{y''(t)} + 3L{y'(t)} + 2L{y(t)} = L{t} + L{1}.

Since y(0) = 1 and y'(0) = 0, we get:

$$(s^2Y(s) - s - 0) + 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

Solving for Y(s) and simplifying gives:

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} + \frac{1}{s^2(s^2+3s+2)} + \frac{1}{s^2(s^2+3s+2)} = \frac{s^3+3s^2+s+1}{s^2(s+1)(s+2)}$$

Using partial fractions, we obtain:

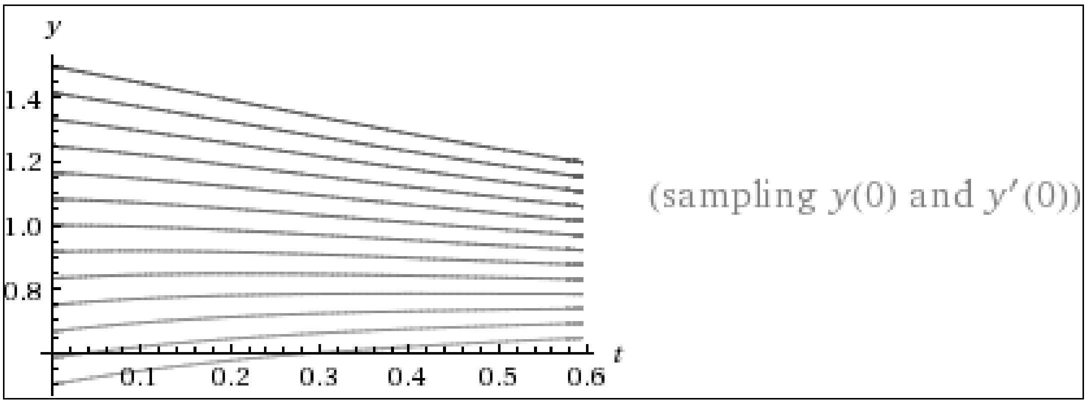
$$Y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s}\right) + 2\left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{s+2}\right).$$

Taking the inverse Laplace transform gives the answer:

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}+2e^{-t}-\frac{3}{4}e^{-2t}}$$

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation:

$y(t)=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+C_1 \cdot e^{-t}+C_2 e^{-2t}$, and your graphical representation of the sample solution family is:



The required initial conditions of the problem are:

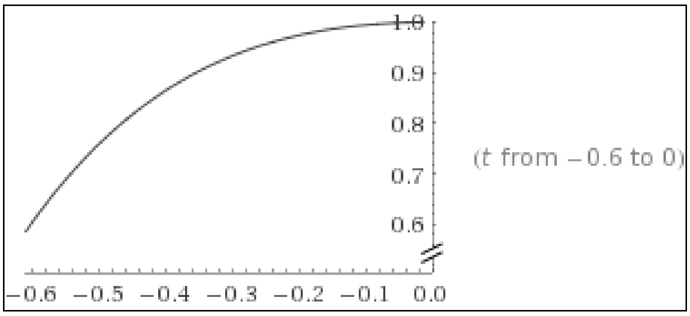
$$\begin{cases} y(0)=-\frac{1}{4}+C_1+C_2=1;\ \ C_1=1-C_2+\frac{1}{4}; \\ y'(t)=\frac{1}{2}-C_1 \cdot e^{-t}-2C_2 \cdot e^{-2t}; \\ y'(0)=\frac{1}{2}-C_1-2C_2=0; \end{cases}$$

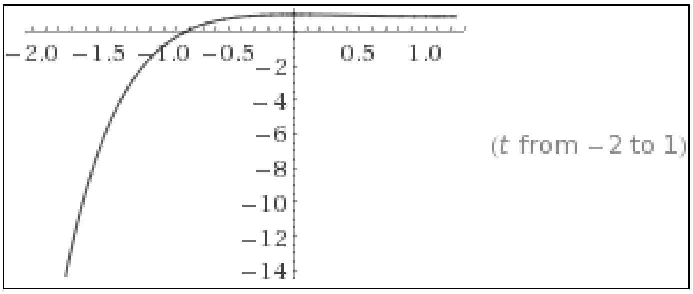
$$\frac{1}{2}-1+C_2-\frac{1}{4}-2C_2=0;\ \ C_1=2;\ \ C_2=-\frac{3}{4}.$$

The particular solution sought is, ultimately:

$$\boxed{y(t)=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+2 \cdot e^{-t}-\frac{3}{4}e^{-2t}}.$$

The graphical representations of this particular integral are:





Ejemplo 33

Solve the following initial-value problem using Laplace transforms and by the classic method: y'' + 4y' + 13y = 0, with y(0) = 1, y'(0) = 2.

Solution:

Take the Laplace transform on both sides of the differential equation:

L{y''(t)} + 4L{y'(t)} + 13L{y(t)} = 0. Since y(0) = 1 and y'(0) = 2, we get:

$$(s^2Y(s) - s - 2) + 4(sY(s) - 1) + 13Y(s) = 0.$$

Solving for Y(s) and simplifying gives: $Y(s) = \dfrac{s+6}{s^2+4s+13}$.

By completing the square of the denominator, we get:

$$s^2 + 4s + 13 = (s + 2)^2 + 9$$

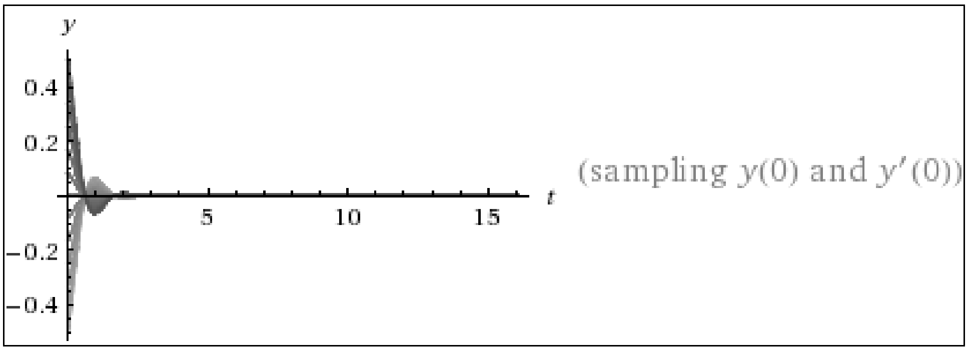
Therefore, $Y(s) = \dfrac{(s+2)+4}{(s+2)^2+9} = \dfrac{s+2}{(s+2)^2+9} + \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{3}{(s+2)^2+9}\right)$.

Taking the inverse Laplace transform gives the answer:

$$\boxed{y(t) = e^{-2t}\cos 3t + \frac{4}{3}e^{-2t}\sin 3t}$$

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation:

$y(t) = C_1 \cdot e^{-2t} \cdot \cos 3t + C_2 \cdot e^{-2t} \cdot \sin 3t = e^{-2t}(C_1 \cdot \cos 3t + C_2 \cdot \sin 3t)$, and your graphical representation of the sample solution family is:



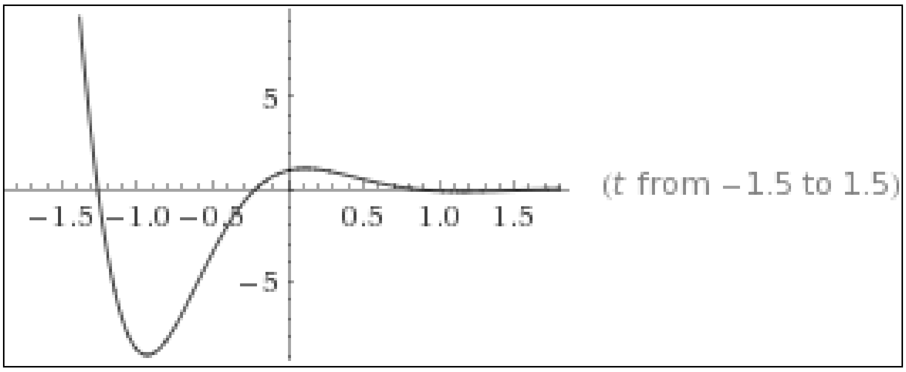
The required initial conditions of the problem are:

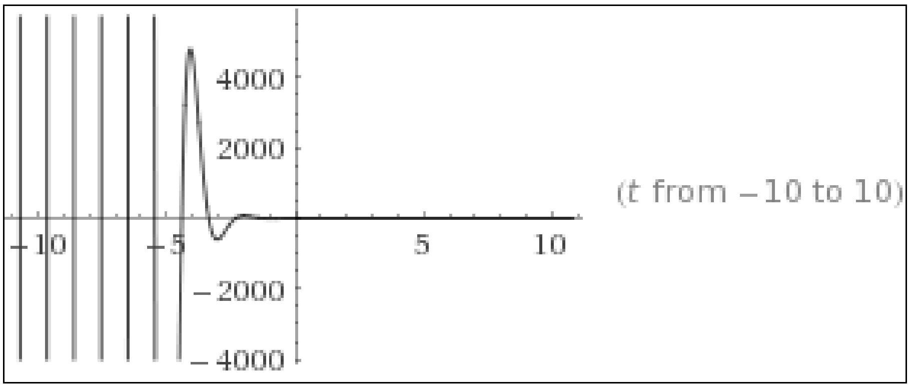
$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 1; \\ y'(t) = -2C_1 \cdot e^{-2t} \cdot \cos 3t - 3C_1 \cdot e^{-2t} \cdot \sin 3t - 2C_2 \cdot e^{-2t} \cdot \sin 3t + 3C_2 \cdot e^{-2t} \cdot \cos 3t; \\ y'(0) = -2C_1 + 3C_2 = 2; \;\; C_2 = \dfrac{2 + 2C_1}{3} = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

The particular solution sought is, ultimately:

$$\boxed{y(t) = e^{-2t} \cdot \cos 3t + \frac{4}{3} \cdot e^{-2t} \cdot \sin 3t = e^{-2t}\left(\cos 3t + \frac{4}{3} \cdot \sin 3t\right)}.$$

The graphical representations of this particular integral are:





Ejemplo 34

Solve the following initial-value problem using Laplace transforms and by the classic method: y'' + 4y = 4t + 8, with y(0) = 4, y'(0) = -1.

Solution:

Take the Laplace transform on both sides of the differential equation:

L{y''(t)} + 4L{y(t)} = 4L{t} + L{8}. Since y(0) = 4 and y'(0) = -1, we get:

$$(s^2Y(s) - 4s + 1) + 4Y(s) = \frac{4}{s^2} + \frac{8}{s}.$$

Solving for Y(s) and simplifying gives:

$$Y(s) = \frac{4s-1}{s^2+4} + \frac{4}{s^2(s^2+4)} + \frac{8}{s(s^2+4)} = \frac{4s^3 - s^2 + 8s + 4}{s^2(s^2+4)}$$

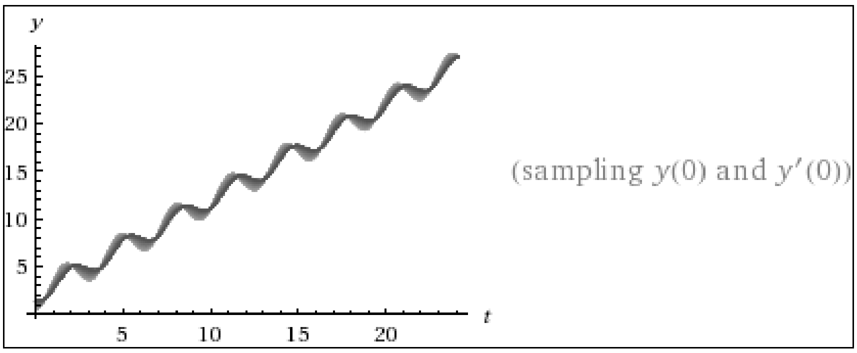
Using partial fractions, we obtain:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + 2\left(\frac{1}{s}\right) + 2\left(\frac{s}{s^2+4}\right) - \frac{2}{s^2+4}.$$

Taking the inverse Laplace transform gives the answer:

$$\boxed{y(t) = t + 2 + 2\cdot\cos 2t - \sin 2t}$$

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation: $y(t) = t + 2 + C_1\cdot\cos 2t + C_2\cdot\sin 2t$, and your graphical representation of the sample solution family is:



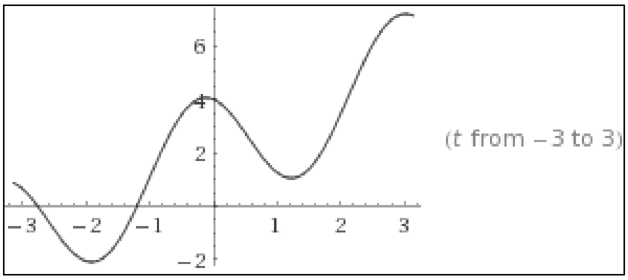
The required initial conditions of the problem are:

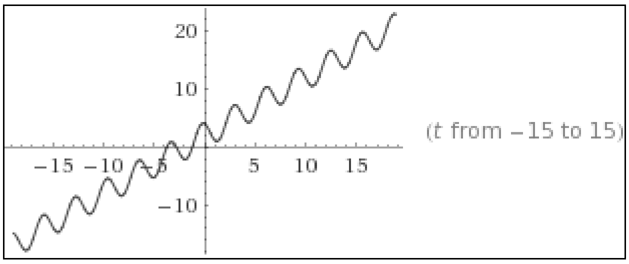
$$\begin{cases} y(0) = 2 + C_1 = 4;\; C_1 = 4 - 2 = 2; \\ y'(t) = 1 - 2C_1\cdot\sin 2t + 2C_2\cdot\cos 2t; \\ y'(0) = 1 + 2C_2 = -1;\; C_2 = -1. \end{cases}$$

The particular solution sought is, ultimately:

$$\boxed{y(t) = t + 2 + 2\cdot\cos 2t - \sin 2t}.$$

The graphical representations of this particular integral are:





Ejemplo 35

Solve the following initial-value problem using Laplace transforms and by the classic method: $y'' + y' - 2y = 5\cdot e^{3t}$, with $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$.

Solution:

Take the Laplace transform on both sides of the differential equation: $L\{y''(t)\} + L\{y'(t)\} - 2L\{y(t)\} = 5L\{e^{3t}\}$. Since $y(0) = 1$ and $y'(0) = -4$, we get:

$$(s^2Y(s) - s + 4) + (sY(s) - 1) - 2Y(s) = \frac{5}{s-3}.$$

Solving for Y(s) and simplifying gives:

$$Y(s) = \frac{s-3}{s^2+s-2} + \frac{5}{(s^2+s-2)(s-3)} = \frac{(s-3)^2+5}{(s^2+s-2)(s-3)} = \frac{s^2-6s+14}{(s+2)(s-1)(s-3)}$$

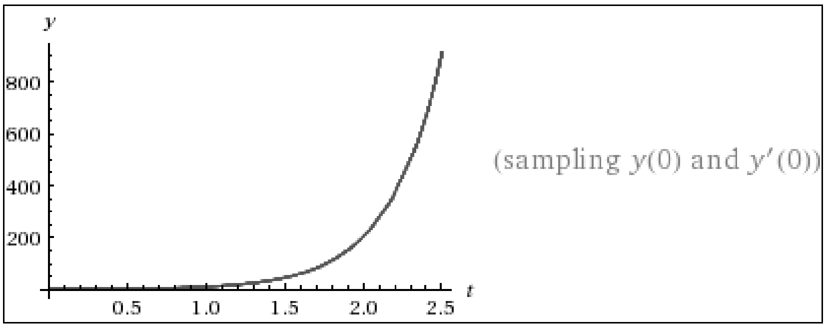
Using partial fractions, we obtain:

$$Y(s) = 2\left(\frac{1}{s+2}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-3}\right).$$

Taking the inverse Laplace transform gives the answer:

$$\boxed{y(t) = 2e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{3t}}$$

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation: $y(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 e^{t} + \frac{e^{3t}}{2}$, and your graphical representation of the sample solution family is:



The required initial conditions of the problem are:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 1;\ \ C_2 = 1 - \frac{1}{2} - C_1; \\ y'(t) = -2 C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{t} + \frac{3 e^{3t}}{2}; \\ y'(0) = -2C_1 + C_2 + \frac{3}{2} = -4; \end{cases}$$

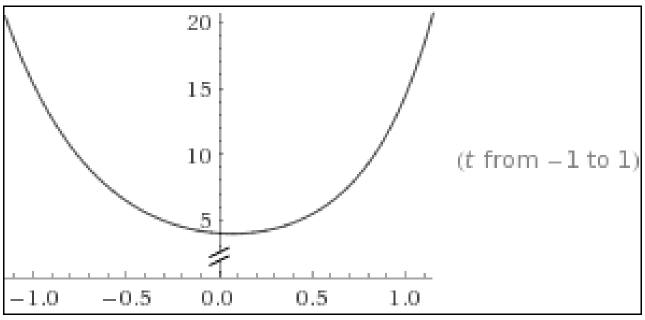
$$-2C_1 + 1 - \frac{1}{2} - C_1 + \frac{3}{2} = -4;$$

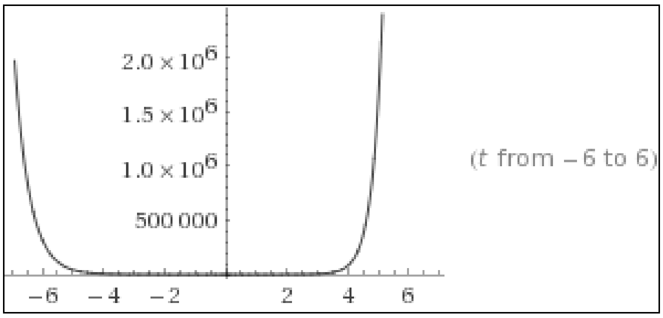
$$-3C_1 = -4 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -5 - 1 = -6;\ \ C_1 = 2;\ C_2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}.$$

The particular solution sought is, ultimately:

$$\boxed{y(t) = 2 \cdot e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{t} + \frac{e^{3t}}{2}}.$$

The graphical representations of this particular integral are:





Ejemplo 36

Solve the following initial-value problem using Laplace transforms and by the classic method: y'' + y' – 2y = e^t, with y(0) = 2, y'(0) = 3.

Solution:

Take the Laplace transform on both sides of the differential equation: L{y''(t)} + L{y'(t)} – 2L{y(t)} = L{e^t}. Since y(0) = 2 and y'(0) = 3, we get:

$$(s^2Y(s) - 2s - 3) + (sY(s) - 2) - 2Y(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Solving for Y(s) and simplifying gives:

$$Y(s) = \frac{2s+5}{s^2+s-2} + \frac{1}{(s^2+s-2)(s-1)} = \frac{(2s+5)(s-1)+1}{(s^2+s-2)(s-1)} = \frac{2s^2+3s-4}{(s+2)(s-1)^2}$$

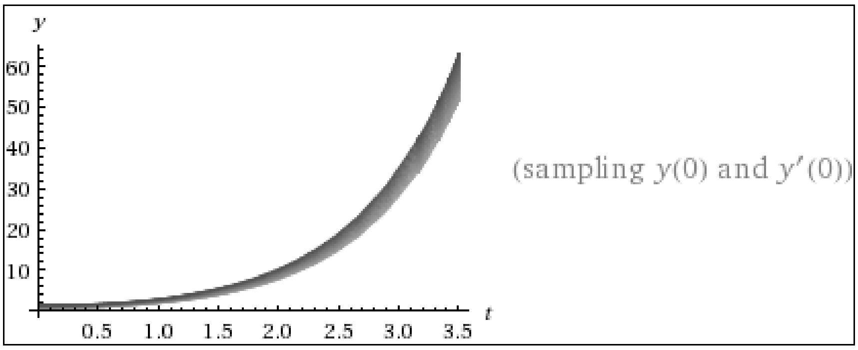
Using partial fractions, we obtain:

$$Y(s) = -\frac{2}{9}\left(\frac{1}{s+2}\right) + \frac{20}{9}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right).$$

Taking the inverse Laplace transform gives the answer:

$$\boxed{y(t) = -\frac{2}{9}e^{-2t} + \frac{20}{9}e^t + \frac{1}{3}te^t}$$

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation: $y(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 e^t + \frac{t \cdot e^t}{3}$, and your graphical representation of the sample solution family is:



The required initial conditions of this problem are:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 2; \;\; C_2 = 2 - C_1; \\ y'(t) = -2C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{t} + \dfrac{e^t + t \cdot e^t}{3}; \\ y'(0) = -2C_1 + C_2 + \dfrac{1}{3} = 3; \end{cases}$$

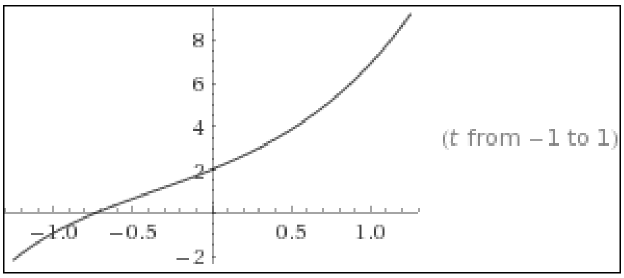
$$-2C_1 + 2 - C_1 + \frac{1}{3} = 3;$$

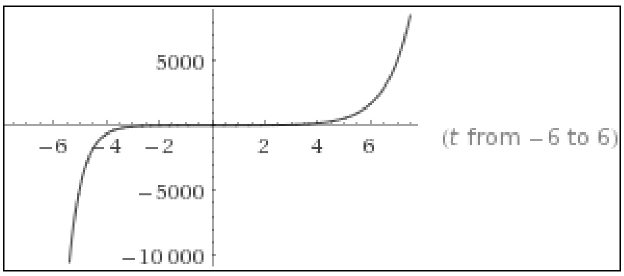
$$-3C_1 = 3 - 2 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}; \;\; C_1 = -\frac{2}{9}; \;\; C_2 = \frac{18}{9} + \frac{2}{9} = \frac{20}{9}.$$

The particular solution sought is, ultimately:

$$\boxed{y(t) = -\frac{2}{9} \cdot e^{-2t} + \frac{20}{9} \cdot e^{t} + \frac{t \cdot e^t}{3}}.$$

The graphical representations of this particular integral are:





Ejemplo 37

Solve the following initial-value problem using Laplace transforms and by the classic method: $y'' - 2y' + y = e^t$, with $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$.

Take the Laplace transform on both sides of the differential equation: $L\{y''(t)\} - 2L\{y'(t)\} + L\{y(t)\} = L\{e^t\}$. Since $y(0) = 3$ and $y'(0) = 4$, we get:

$$(s^2Y(s) - 3s - 4) - 2(sY(s) - 3) + Y(s) = \frac{1}{s-1}.$$

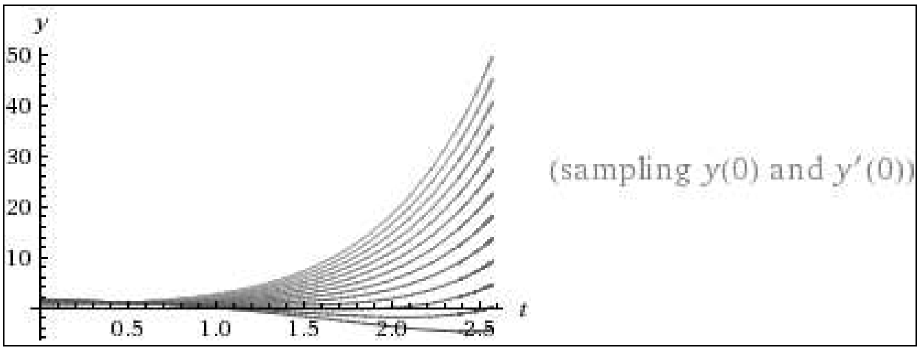
Solving for Y(s) and simplifying gives:

$$Y(s) = \frac{3s-2}{s^2-2s+1} + \frac{1}{(s^2-2s+1)(s-1)} = \frac{3(s-1)+1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3} =$$
$$= 3\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{2!}{(s-1)^3}\right).$$

Taking the inverse Laplace transform gives the answer:

$$\boxed{y(t) = 3e^t + te^t + \frac{1}{2}t^2e^t}$$

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation: $y(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot t \cdot e^t + \frac{t^2 \cdot e^t}{2}$, and your graphical representation of the sample solution family is:



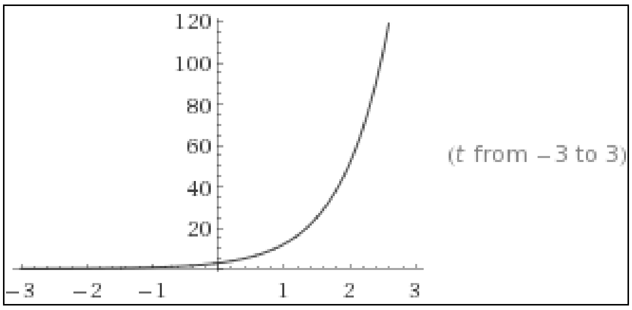
The required initial conditions of the problem are:

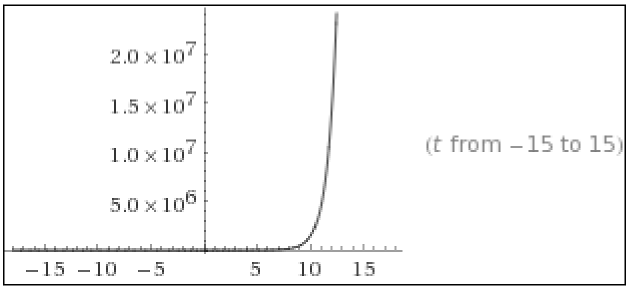
$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 3; \\ y'(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^t + C_2 \cdot t \cdot e^t + \dfrac{2t \cdot e^t + t^2 \cdot e^t}{2}; \\ y'(0) = C_1 + C_2 = 4; \quad C_2 = 1. \end{cases}$$

The particular solution sought is, ultimately:

$$\boxed{y(t) = 3 \cdot e^t + t \cdot e^t + \frac{t^2 \cdot e^t}{2}}.$$

The graphical representations of this particular integral are:





Ejemplo 38

Solve the following initial-value problem using Laplace transforms and by the classic method: $y'' + 2y' + 2y = \cos 2t$, with $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Solution:

Take the Laplace transform on both sides of the differential equation: $L\{y''(t)\} + 2L\{y'(t)\} + 2L\{y(t)\} = L\{\cos 2t\}$. Since $y(0) = 0$ and $y'(0) = 1$, we get:

$$(s^2Y(s) - 1) + 2sY(s) + 2Y(s) = \frac{s}{s^2+4}.$$

Solving for Y(s) and simplifying gives:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+2s+2} + \frac{s}{(s^2+2s+2)(s^2+4)} = \frac{s^2+s+4}{(s^2+2s+2)(s^2+4)}$$

By completing the square of the denominator, we get:

$$s^2 + 2s + 2 = (s + 1)^2 + 1.$$

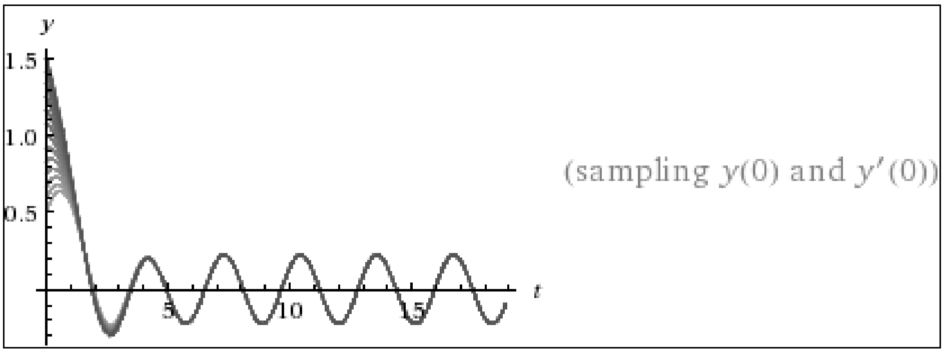
Therefore,

$$Y(s) = \frac{1}{10}\left(\frac{(s+1)+7}{(s+1)^2+1}\right) - \frac{1}{10}\left(\frac{s-4}{s^2+4}\right) =$$
$$= \frac{1}{10}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right) + \frac{7}{10}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right) - \frac{1}{10}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + \frac{4}{20}\left(\frac{2}{s^2+4}\right).$$

Taking the inverse Laplace transform gives the answer:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{10}e^{-t}\cdot\cos t + \frac{7}{10}\cdot e^{-t}\cdot\sin t - \frac{1}{10}\cdot\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t}$$

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation: $y(t) = C_1\cdot e^{-t}\cdot\cos t + C_2\cdot e^{-t}\cdot\sin t - \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t$, and your graphical representation of the sample solution family is:



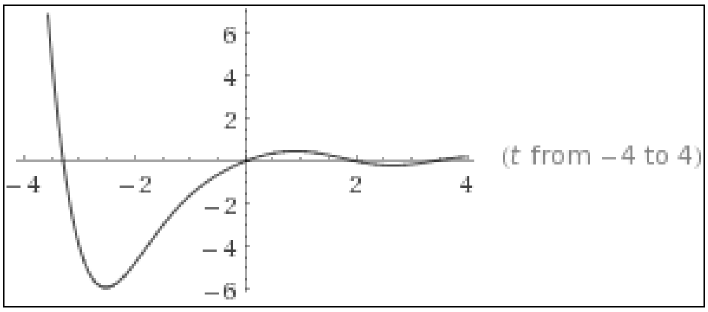
The required initial conditions of the problem are:

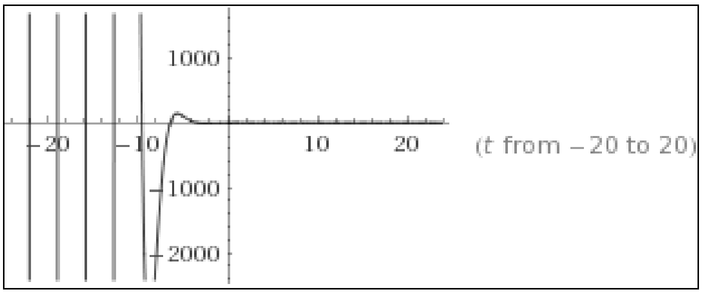
$$\begin{cases} y(0) = C_1 - \frac{1}{10} = 0; \;\; C_1 = \frac{1}{10}; \\ y'(t) = -C_1\cdot e^{-t}\cdot\cos t - C_1\cdot e^{-t}\cdot\sin t - C_2\cdot e^{-t}\cdot\sin t + C_2\cdot e^{-t}\cdot\cos t + \frac{1}{5}\cdot\sin 2t + \frac{2}{5}\cdot\cos 2t \\ y'(0) = -C_1 + C_2 + \frac{2}{5} = 1; \;\; C_2 = 1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}. \end{cases}$$

The particular solution sought is, ultimately:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{10}\cdot e^{-t}\cdot\cos t + \frac{7}{10}\cdot e^{-t}\cdot\sin t - \frac{1}{10}\cdot\cos 2t + \frac{1}{5}\cdot\sin 2t}.$$

The graphical representations of this particular integral are:





Ejemplo 39

Solve the following initial-value problem using Laplace transforms and by the classic method: y'' + 4y = sin 3t, with y(0) = 2, y'(0) = 1.

Solution:

Take the Laplace transform on both sides of the differential equation: L{y''(t)} + 4L{y(t)} = L{sin 3t}. Since y(0) = 2 and y'(0) = 1, we get:

$$(s^2Y(s) - 2s - 1) + 4Y(s) = \frac{3}{s^2+9}.$$

Solving for Y(s) gives: $Y(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+4} + \dfrac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$.

Using partial fractions, we obtain:

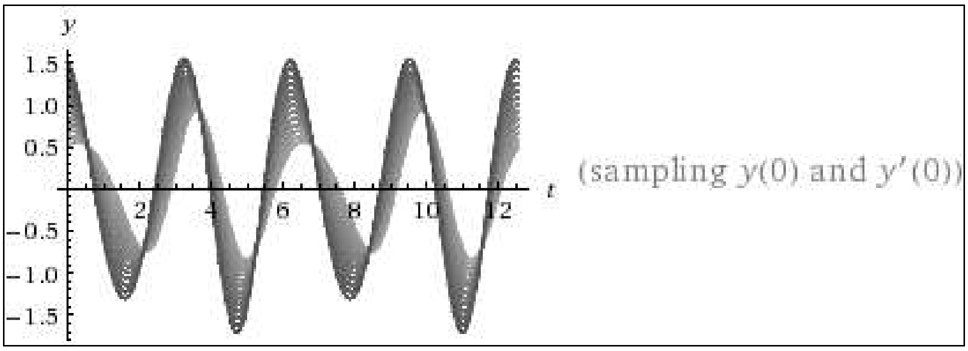
$$\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{3}{5(s^2+4)} - \frac{3}{5(s^2+9)}. \text{ Therefore,}$$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+4} + \frac{3}{5(s^2+4)} - \frac{3}{5(s^2+9)} = 2\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{2}{(s^2+4)}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{3}{s^2+9}\right).$$

Taking the inverse Laplace transform gives the answer:

$$\boxed{y(t) = 2\cdot\cos 2t + \frac{4}{5}\cdot\sin 2t - \frac{1}{5}\sin 3t}$$

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation: $y(t) = C_1 \cdot \cos 2t + C_2 \cdot \sin 2t - \frac{1}{5}\sin 3t$, and your graphical representation of the sample solution family is:



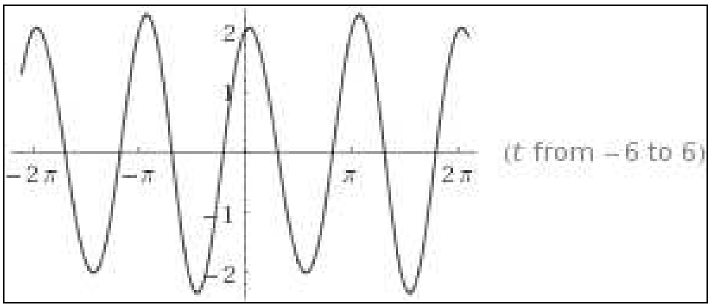
The required initial conditions of the problem are:

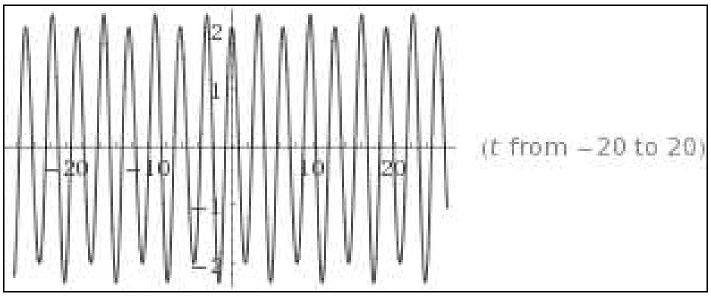
$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 2; \\ y'(t) = -2C_1 \cdot \sin 2t + 2C_2 \cdot \cos 2t - \frac{3}{5} \cdot \cos 3t \\ y'(0) = 2C_2 - \frac{3}{5} = 1; \;\; 2C_2 = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}; \;\; C_2 = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

The particular solution sought is, ultimately:

$$\boxed{y(t) = 2 \cdot \cos 2t + \frac{4}{5} \cdot \sin 2t - \frac{1}{5} \cdot \sin 3t}.$$

The graphical representations of this particular integral are:





Ejemplo 40

Solve the following initial-value problem using Laplace transforms and by the classic method: $y'' + \omega^2 y = \cos \omega t$, with $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Take the Laplace transform on both sides of the differential equation: $L\{y''(t)\} + \omega^2 L\{y(t)\} = L\{\cos \omega t\}$. Since $y(0) = 0$ and $y'(0) = 0$, we get:

$$(s^2Y(s) + \omega^2 Y(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Solving for Y(s) gives: $Y(s) = \dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2} = \dfrac{1}{2\omega}\left(\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\right)$.

Taking the inverse Laplace transform gives the answer:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2\omega}\cdot t\cdot \sin \omega t}$$

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation: $y(t) = C_1\cdot \sin \omega t + C_2 \cdot \cos \omega t + \dfrac{t\cdot \sin \omega t}{2\omega}$. Then, the required initial conditions of the problem are:

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = 0; \\ y'(t) = C_1\cdot\omega\cdot \cos \omega t - C_2\cdot\omega\cdot \sin \omega t + \dfrac{\sin \omega t + \omega\cdot t\cdot \cos \omega t}{2\omega} \\ y'(0) = C_1\cdot\omega = 0;\ \ C_1 = 0; \end{cases}$$

The particular solution sought is, ultimately:

$$\boxed{y(t) = \frac{t\cdot \sin \omega t}{2\omega}}.$$

Ejemplo 41

Solve the following initial-value problem using Laplace transforms and by the classic method: $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-t}\cdot \cos 2t$, with $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Solution:

Take the Laplace transform on both sides of the differential equation: $L\{y''(t)\} + 2L\{y'(t)\} + 5L\{y(t)\} = 3L\{e^{-t}\cdot \cos 2t\}$. Since $y(0) = 1$ and $y'(0) = 2$, we get:

$$(s^2Y(s) - s - 2) + 2(sY(s) - 1) + 5Y(s) = \frac{3(s+1)}{(s+1)^2+4}.$$

Solving for Y(s) gives:

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+2s+5} + \frac{3(s+1)}{(s^2+2s+5)((s+1)^2+4)}.$$

Since $s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 4$, we obtain:

$$Y(s) = \frac{(s+1)+3}{(s+1)^2+4} + \frac{3(s+1)}{[(s+1)^2+4)]^2} =$$
$$= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{(s+1)^2+4}\right) + \frac{3(s+1)}{[(s+1)^2+4)]^2}.$$

Taking the inverse Laplace transform and using frequency shift property: $L^{-1}\{F(s – a)\} = e^{at}\cdot L^{-1}\{F(s)\}$, we get:

$$y(t) = e^{-t}\cdot\cos(2t) + \frac{3}{2}e^{-t}\cdot\sin(2t) + L^{-1}\left\{\frac{3(s+1)}{[(s+1)^2+4)]^2}\right\} =$$
$$= e^{-t}\cdot\cos(2t) + \frac{3}{2}e^{-t}\cdot\sin(2t) + e^{-t}\cdot L^{-1}\left\{\frac{3s}{(s^2+4)^2}\right\} =$$
$$= e^{-t}\cdot\cos(2t) + \frac{3}{2}e^{-t}\cdot\sin(2t) + \frac{3}{4}e^{-t}\cdot L^{-1}\left\{\frac{4s}{(s^2+4)^2}\right\}.$$

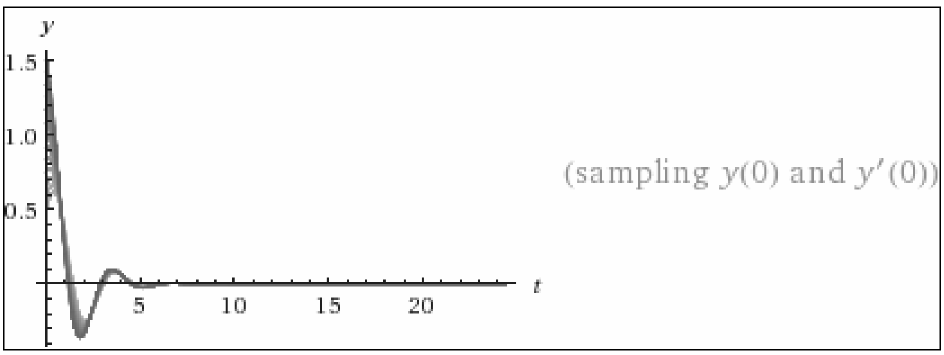
Taking the inverse Laplace transform gives the answer:

$$\boxed{y(t) = e^{-t}\cdot\cos(2t) + \frac{3}{2}\cdot e^{-t}\cdot\sin(2t) + \frac{3}{4}te^{-t}\cdot\sin(2t)}$$

Moreover, operated by the classic method is obtained the general integral of the equation:

$$y(t) = C_1\cdot e^{-t}\cdot\sin 2t + C_2\cdot e^{-t}\cdot\cos 2t + \frac{3\cdot e^{-t}}{16}(4t\cdot\sin 2t + \cos 2t),$$

and your graphical representation of the sample solution family is:



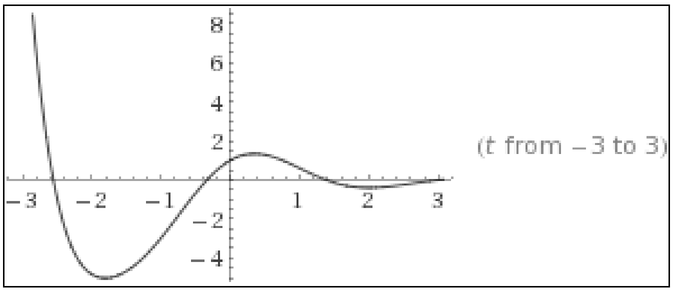
The required initial conditions of the problem are:

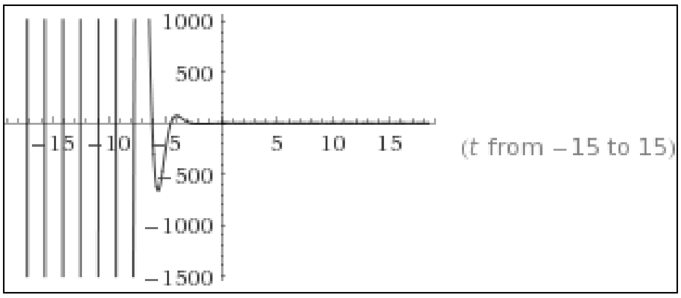
$$
\begin{cases}
y(0) = C_2 + \dfrac{3}{16} = 1; \quad C_2 = 1 - \dfrac{3}{16} = \dfrac{13}{16}; \\
y'(t) = -C_1 \cdot e^{-t} \cdot \sin 2t + 2C_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos 2t - C_2 \cdot e^{-t} \cdot \cos 2t - 2C_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin 2t - \\
\qquad - \dfrac{3 \cdot e^{-t}}{16}(4t \cdot \sin 2t + \cos 2t) + \dfrac{3 \cdot e^{-t}}{16}(4 \sin 2t + 8t \cdot \cos 2t - 2 \cdot \sin 2t) \\
y'(0) = 2C_1 - C_2 - \dfrac{3}{16} = 2; \quad 2C_1 = 2 + \dfrac{13}{16} + \dfrac{3}{16} = 3; \quad C_1 = \dfrac{3}{2};
\end{cases}
$$

The particular solution sought is, ultimately:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{3}{2} \cdot e^{-t} \cdot \sin 2t + \frac{13}{16} \cdot e^{-t} \cdot \cos 2t + \frac{3}{4} \cdot t \cdot e^{-t} \cdot \sin 2t + \frac{3}{16} \cdot e^{-t} \cdot \cos 2t = \\
&= e^{-t} \cdot \cos 2t + \frac{3}{2} \cdot e^{-t} \cdot \sin 2t + \frac{3}{4} \cdot t \cdot e^{-t} \cdot \sin 2t
\end{aligned}
}
$$

The graphical representations of this particular integral are:





Ejemplo 42

Resolver la EDO: $y' - y = 1$, con: $y(0) = 0$.

Solución:

[Problema ya resuelto anteriormente para la función y(T)]

$$Sy_S - y(0) - y_S = L(1); \quad y_S(S-1) = \frac{1}{S} \Rightarrow y_S = \frac{1}{S(S-1)}$$

$$\frac{A}{S} + \frac{B}{S-1} = \frac{1}{S(S-1)}, \quad A(S-1) + BS = 1, \; A = -1 \Rightarrow B = 1,$$

$$y(x) = -L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{S-1}\right\} = -1 + e^x .$$

Por aplicación del método clásico, se tendrá que la ecuación característica de la homogénea o incompleta, será la siguiente:

$\lambda - 1 = 0$; $\lambda = 1$; con lo que: $y^* = c \cdot e^x$; ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$\begin{cases} y_p = a \\ y'_p = 0 \end{cases}$; y substituimos en la ecuación inicial:

-a = 1 ; a = -1 ; con lo que se tendrá la solución general:

$y(x) = y^* + y_p = c \cdot e^x - 1$; y aplicando la condición inicial, se tiene que:

$y(0) = c - 1 = 0$; $c = 1$, y nos quedará la I.P. buscada:

$$\boxed{y(x) = e^x - 1} \quad \text{c. s. q. d.}$$

De hecho se tata de una ecuación lineal de primer orden, con:

$X = -1$; $X_1 = -1$, y: $\int X \cdot dx = -\int dx = -x$;

$\int X_1 \cdot e^{\int X \cdot dx} \cdot dx = -\int e^{-x} \cdot dx = e^{-x}$; y aplicando la fórmula pertinente:

$y(x) = e^x(c - e^{-x}) = c \cdot e^x - 1$, que es la I.G. a la cual habrá que aplicar la condición inicial para obtener la I.P. buscada (es evidente que con c = 1).

Ejemplo 43

Resolver la EDO: $y' + 2y = x$; con: $y(0) = -1$.

Solución:

[Problema resuelto anteriormente para la función y(T)]

$Sy_S - y(0) + 2y_S = L(x)$; $Sy_S + 1 + 2y_S = \frac{1}{S^2}$;

$y_S(S+2) = \frac{1}{S^2} - 1 \Rightarrow y_S = \frac{1-S^2}{S^2(S+2)}$; $\frac{A}{S} + \frac{B}{S^2} + \frac{C}{S+2} = \frac{1-S^2}{S^2(S+2)}$;

$AS(S + 2) + B(S + 2) + CS^2 = 1 - S^2$

$AS^2 + 2AS + BS + 2B + CS^2 = 1 - S^2$; $A + C = -1$; $2A + B = 0$;

$2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{4} \Rightarrow C = -\frac{3}{4}$, y resultará la integral particular:

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2}\right\} - \frac{3}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{S+2}\right\} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}e^{-2x}}$$

Por aplicación del método clásico, se tendrá que la ecuación característica de la homogénea, será:

$\lambda + 2 = 0$; $\lambda = -2$; con lo que la solución será:

$y^* = C\cdot e^{-2x}$; ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea o completa, del tipo:

$\begin{cases} y_p = ax + b \\ y'_p = a \end{cases}$, y substituyendo en la ecuación inicial, tenemos:

$a + 2ax + 2b = x$; $a = \frac{1}{2}$; $a + 2b = 0$; $b = -\frac{1}{4}$; y la I.G. será:

$y(x) = C\cdot e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$. Aplicando ahora la condición inicial, se obtiene que:

$y(0) = C - \frac{1}{4} = -1$; $C = -\frac{3}{4}$, y nos quedará la I.P. buscada:

$$\boxed{y(x) = -\frac{3}{4}\cdot e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}} \quad \text{c. s. q. d.}$$

Al igual que en el caso anterior, se trata de una E.D. lineal de primer orden, con X = 2 ; $X_1 = -x$, y, por lo que podemos resolverla como tal por aplicación de la fórmula directa (o bien por el método de variación de constantes), con lo que:

$\int X\cdot dx = 2x$; $\int X_1\cdot e^{\int X\cdot dx}\cdot dx = -\int \overset{u}{x}\cdot \overset{dv}{e^{2x}\cdot dx}$ = (integrando por partes) =

$$= \boxed{\begin{matrix} u = x \\ v = e^{2x}/2 \end{matrix}} = -\frac{x\cdot e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot dx = -\frac{x\cdot e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} =$$

$= \frac{e^{2x}}{4} - \frac{2x\cdot e^{2x}}{4} = \frac{e^{2x}(1-2x)}{4}$; y entonces se obtiene la integral general:

$$y(x) = e^{-2x}\left(c - \frac{e^{2x}(1-2x)}{4}\right) = c\cdot e^{-2x} + \frac{2x-1}{4} = c\cdot e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4},$$

a la cual habrá que aplicar la condición inicial para obtener la I.P. buscada (es evidente que con c = -3/4 si nos atenemos al resultado obtenido con anterioridad).

Ejemplo 44

Resolver la EDO: $y'' - 4y' + 4y = x^3e^{2x}$; con: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Solución:

$$S^2y_S - Sy(0) - y'(0) - 4Sy_S - 4y(0) + 4y_S = \{L(x^3e^{2x}\};$$

$$S^2y_S - 4Sy_S + 4y_S = \frac{6}{(S-2)^4}$$

$$y_s = \frac{6}{(S^2-4S+4)(S-2)^4} = \frac{6}{(S-2)^2(S-2)^4} = \frac{6}{(S-2)^6}$$

Y se obtiene la I.G.: $\boxed{y(x) = \frac{6}{5!}L^{-1}\left\{\frac{5!}{S^6}\right\}_{S\to S-2} = \frac{1}{20}x^5e^{2x}}$

Por aplicación del método clásico, se tendrá que la ecuación característica de la homogénea, será:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \ ; \qquad \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

con lo que la solución de la homogénea será: $y^* = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x}$.

Ensayaremos, ahora, una solución particular del tipo:

$$\left\{\begin{aligned}
&y_p = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\cdot x^2 \cdot e^{2x} = (ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2)\cdot e^{2x}; \\
&y'_p = (5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx)\cdot e^{2x} + 2(ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2)\cdot e^{2x} = \\
&\qquad = e^{2x}(2ax^5 + 5ax^4 + 2bx^4 + 4bx^3 + 2cx^3 + 3cx^2 + 2dx^2 + 2dx)\,; \\
&y''_p = 2\cdot e^{2x}(2ax^5 + 5ax^4 + 2bx^4 + 4bx^3 + 2cx^3 + 3cx^2 + 2dx^2 + 2dx) + \\
&+ e^{2x}(10ax^4 + 20ax^3 + 8bx^3 + 12bx^2 + 6cx^2 + 6cx + 4dx + 2d) = \\
&= e^{2x}(4ax^5 + 20ax^4 + 4bx^4 + 20ax^3 + 16bx^3 + 4cx^3 + 12bx^2 + 12cx^2 + 2dx^2 + 6cx + 8dx + 2d)
\end{aligned}\right.$$

Substituyendo, ahora, en la ecuación inicial, queda:

$$e^{2x}(4ax^5 + 20ax^4 + 4bx^4 + 20ax^3 + 16bx^3 + 4cx^3 + 12bx^2 + 12cx^2 + 2dx^2 + 6cx + 8dx + 2d) -$$

$$- e^{2x}(8ax^5 + 20ax^4 + 8bx^4 + 16bx^3 + 8cx^3 + 12cx^2 + 8dx^2 + 8dx) +$$

$$+ e^{2x}(4ax^5 + 4bx^4 + 4cx^3 + 4dx^2) = x^3 \cdot e^{2x}\,;$$

$$e^{2x}(20ax^3 + 12bx^2 - 2dx^2 + 6cx + 2d) = e^{2x} \cdot x^3;$$

20a = 1; $a = \frac{1}{20}$; b = 0; c = 0; d = 0; con lo que la solución particular será:

$y_p = \frac{x^3}{20} \times x^2 \times e^{2x} = \frac{x^5}{20} \times e^{2x}$; y la solución general de la EDO será:

$$y(x) = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} + \frac{x^5}{20} \times e^{2x};$$

Por aplicación, ahora, de las condiciones iniciales, se tendrá que:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 0; \\ y'(x) = 2c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{2x} + 2c_2 x \cdot e^{2x} + \frac{x^4}{4} \times e^{2x} + \frac{x^5}{10} \times e^{2x}; \\ y'(0) = 2c_1 + c_2 = 0\ ; \quad c_2 = 0; \end{cases}$$

y la solución particular buscada será: $\boxed{y = \frac{x^5}{20} \times e^{2x}}$, c. s. q. d.

Ejemplo 45

Resolver la EDO: $y^{(4)} - y = 0$; con: $y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = 0.$

Solución:

[Problema ya resuelto anteriormente para la función y(T)]

$$S^4 y_S - S^3 y(0) - S^2 y'(0) - Sy''(0) - y'''(0) - y_S = 0;\ S^4 y_S - S^3 + S - y_S = 0;$$

$y_S(S^4 - 1) = S^3 - S$; $y_s = \frac{S(S^2-1)}{(S^4-1)} = \frac{S(S^2-1)}{(S^2+1)(S^2-1)} = \frac{S}{S^2+1}$; y, en definitiva,

resulta la I.P. buscada: $\boxed{y(x) = L^{-1}\left\{\frac{S}{S^2+1}\right\} = \cos x}$

Por aplicación alternativa del método clásico, se tendrá la siguiente ecuación característica de la homogénea: $\lambda^4 - 1 = 0$; que tiene las 4 raíces: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = i$; $\lambda_4 = -i$, con lo que la I.G. será:

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + A \cdot \cos x + B \cdot \text{sen } x,$$

y aplicando las condiciones iniciales dadas, se tendrá que:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + A = 1; \\ y'(x) = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} - A \cdot \text{sen } x + B \cdot \cos x \\ y'(0) = c_1 - c_2 + B = 0; \\ y''(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} - A \cdot \cos x - B \cdot \text{sen } x \\ y''(0) = c_1 + c_2 - A = -1; \\ y'''(x) = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} + A \cdot \text{sen } x - B \cdot \cos x \\ y'''(0) = c_1 - c_2 - B = 0; \end{cases}$$

con lo que tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + A = 1 \\ c_1 - c_2 + B = 0 \\ c_1 + c_2 - A = -1 \\ c_1 - c_2 - B = 0 \end{cases}$$, del que se deduce que:

$c_1 = c_2 = B = 0$; $A = 1$, con lo que la solución particular buscada será, efectivamente:

$$\boxed{y(x) = \cos x} \quad \text{c. s. q. d.}$$

Obsérvese la mayor prolijidad del sistema de resolución empleado en segundo lugar, lo que pone de manifiesto la utilidad del empleo de la Transformada de Laplace (en la mayoría de los casos) para la resolución de este tipo de problemas.

5. TRANSFORMADA DE UNA INTEGRAL

Esta propiedad, de gran utilidad en el cálculo y resolución de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales (ver Capítulo 9), establece que:

$$\text{Si } f(t) \leftrightarrow F(S), \text{ entonces } \int_0^t f(u) \cdot du \leftrightarrow \frac{F(S)}{S}$$

Si definimos la función: $g(t) = \int_0^t f(u) \cdot du$, entonces, por el teorema fundamental del Cálculo, se tendrá que:

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(u) \cdot du = f(t) \quad \text{y} \quad g(0) = \int_0^0 f(u) \cdot du = 0$$

Por lo tanto: $F(S) = L\{f(t)\} = L\{g'(t)\} = SG(S) - g(0)$.

De donde también: $F(S) = SG(S)$, y de aquí:

$$G(S) = L\{g(t)\} = L\left\{ \int_0^t f(u)\cdot du \right\} = \frac{F(S)}{S} \ .$$

Así pues, resulta que la transformada de la integral indefinida de una función (supuesta existente) es el cociente de la transformada de la función por su variable S.

A continuación, pueden verse algunos ejemplos representativos de lo aquí expuesto.

Ejemplo 1

Calcular: $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{S^3 + 4S} \right\}$

Solución:

Observamos que: $\dfrac{1}{S^3 + 4S} = \dfrac{1}{S(S^2 + 4)} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{S^2 + 4} \right)}{S} = \dfrac{F(S)}{S}$

Por lo tanto: $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{S^3 + 4S} \right\} = \int_0^t f(u)\cdot du$, donde:

$$F(S) = \frac{1}{S^2 + 4} \quad y \quad f(t) = L^{-1}\{F(S)\} = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{ \frac{2}{S^2 + 4} \right\} = \frac{1}{2}\text{sen}\,2t = \text{sen } t \cdot \cos t.$$

De esta manera se tendrá que:

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{S^3 + 4S} \right\} = \int_0^t \frac{1}{2}\text{sen } 2u \cdot du = -\left(\frac{1}{2} \right)\left(\frac{1}{2} \right)\cos 2u\Big|_0^t \boxed{= \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)}.$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación integro-diferencial: $f(t) + \int_0^t f(u)\cdot du = 1$.

Solución:

Aplicamos la Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de esta ecuación, con lo que:

$$L\left\{ f(t) + \int_0^t f(u)\cdot du \right\} = L\{1\} \Rightarrow L\{f(t)\} + L\left\{ \int_0^t f(u)\cdot du \right\} = L\{1\} \Rightarrow F(S) + \frac{F(S)}{S} = \frac{1}{S},$$

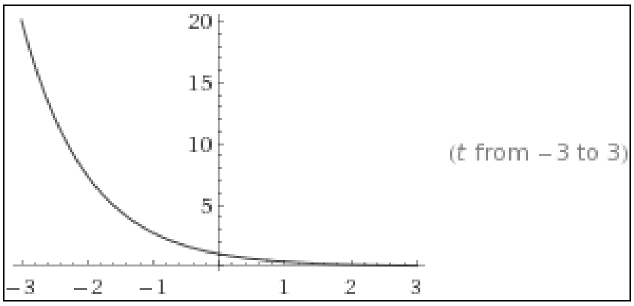
donde: $f(t) \leftrightarrow F(S)$. De aquí se deduce que:

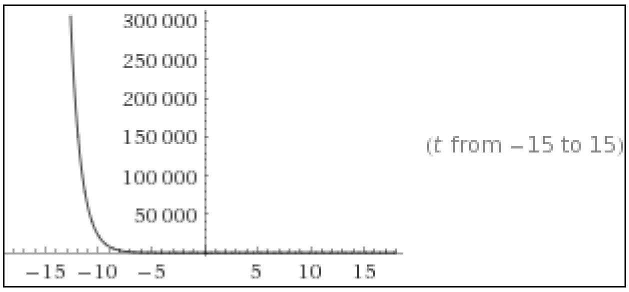
$$SF(S) + F(S) = 1 \Rightarrow F(S)(S+1) = 1 \Rightarrow F(S) = \frac{1}{S+1}.$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado, a saber:

$$\boxed{f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{S+1}\right\} = e^{-t}} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica de esta solución particular, que es evidentemente una función exponencial inversa, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





6. APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

6.1. CONCEPTO

También en la resolución de los sistemas de EDO que hemos visto en el anterior capítulo de nuestro libro (es decir, conjuntos de dos o más ecuaciones diferenciales con un número igual de funciones desconocidas), el método de las transformadas de Laplace reviste singular utilidad. Si todos los coeficientes son constantes, entonces el método de solución es la generalización directa.

Las transformadas de Laplace se toman de cada ecuación diferencial en el sistema; las transformadas de las funciones desconocidas se determinan algebraicamente a partir del conjunto resultante de ecuaciones simultáneas; por último, las transformadas inversas para las funciones desconocidas se calculan con la ayuda de la tabla correspondiente que adjuntamos en el presente capítulo de nuestro libro.

Supongamos, en fin, que tenemos un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t) \qquad (1)$$

donde **A** es una matriz cuadrada de *n* filas por *n* columnas con los coeficientes reales, **f** = (f_1, f_2, …, f_n)^t , donde las f_i son funciones dadas e **y** = (y_1, y_2, …, y_n)^t es la función vectorial incógnita. Supongamos además las condiciones iniciales:

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \qquad (2)$$

donde: $\mathbf{y}_0 = (y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)^t$ con y_i^0 números reales para 1 ≤ i ≤ n.

Sea: L[**y**](z) = (L[y_1](z), L[y_2](z), …, L[y_n](z))^t.

Entonces, tomando la Transformada de Laplace en (1) y teniendo en cuenta (2) obtenemos que: zL[**y**](z) – $\mathbf{y}_0$ = **A**·L[**y**](z) + L[**f**](z), de donde, si $\mathbf{I}_n$, denota la matriz identidad de orden n, se tendrá que:

$$(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\cdot L[\mathbf{y}](z) = \mathbf{y}_0 + L[\mathbf{f}](z),$$

y de aquí se deduce que: $L[\mathbf{y}](z) = (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\cdot(\mathbf{y}_0 + L[\mathbf{f}](z))$. (3)

Una vez calculada de este modo L[**y**](z) obtendremos **y** tomando la Transformada inversa con la ayuda de la tabla correspondiente.

6.2. EJEMPLOS

Ello lo podemos comprobar en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Sea resolver el siguiente sistema de EDO:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

junto con las condiciones iniciales: $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Solución:

El sistema anterior también se puede escribir así:

$$\left.\begin{array}{l} y'_1 = 2y_1 - 3y_2 + 1 \\ y'_2 = 3y_1 + 2y_2 \end{array}\right\}$$

De la expresión anterior (3) explicada en la introducción teórica, se deduce que:

$$\begin{pmatrix} L[y_1](z) \\ L[y_2](z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-2 & 3 \\ -3 & z-2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2+\frac{1}{z} \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{z^2-4z+13} \begin{pmatrix} z-2 & -3 \\ 3 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2z+1}{z} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2z^2-2}{z(z^2-4z+13)} \\ \dfrac{-z^2+8z+3}{z(z^2-4z+13)} \end{pmatrix}$$

Entonces, la solución del presente problema viene dada por:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{-1}\left[\dfrac{2z^2-2}{z(z^2-4z+13)}\right](t) \\ L^{-1}\left[\dfrac{-z^2+8z+3}{z(z^2-4z+13)}\right](t) \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 28e^{2t}\cos(3t)+16e^{2t}\text{sen}(3t)-2 \\ 28e^{2t}\text{sen}(3t)-16e^{2t}\cos(3t)+3 \end{pmatrix},$$

esto es:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{28}{13}e^{2t}\cos 3t + \frac{16}{13}e^{2t}\text{sen}\,3t - \frac{2}{13} \\ y_2(t) &= \frac{28}{13}e^{2t}\text{sen}\,3t - \frac{16}{13}e^{2t}\cos 3t + \frac{3}{13} \end{aligned}}$$

Ejemplo 2

Sea resolver el siguiente sistema de EDO: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dT} = -x+y \\ \dfrac{dy}{dT} = 2x \end{cases}$, con las condiciones iniciales siguientes: $\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$.

Solución:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x+y \\ y' &= 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &Sx_s - x(0) + x_s - y_s = 0 \\ &Sy_s - y(0) - 2x_s = 0 \end{aligned}$$

$$Sx_s + x_s - y_s = 0 \Rightarrow y_s = Sx_s + x_s$$

$$Sy_s - 1 - 2x_s = 0 \Rightarrow S(Sx_s + x_s) - 1 - 2x_s = 0 = S^2x_s + Sx_s - 1 - 2x_s$$

$$x_s(S^2+S-2) = 1 \Rightarrow x_s = \frac{1}{(S^2+S-2)} = \frac{1}{S^2+S-2+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}} = \frac{1}{(S+1/2)^2 - 9/4}$$

$$x(T) = \frac{2}{3}\left\{\frac{3/2}{S^2 - 9/4}\right\}\Bigg|_{S\to S+1/2} = \frac{2}{3}e^{-1/2\,T}\cdot\text{senh}\frac{3}{2}T$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$y_s = Sx_x + x_s = S\left(\frac{1}{(S+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}\right) + \frac{1}{(S+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}$$

$$y_s = \frac{S+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{(S+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}} + \frac{1}{(S+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}} = \frac{S+\frac{1}{2}}{(S+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}} - \frac{\frac{1}{2}}{(S+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}\frac{1}{(S+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}$$

$$y(T) = e^{-\frac{1}{2}T}\cdot\cosh\frac{3}{2}T - \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}T}\cdot\text{senh}\frac{3}{2}T + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}T}\cdot\text{senh}\frac{3}{2}T$$

y la solución buscada será la siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{c} x(T) = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}T}\cdot\text{senh}\frac{3}{2}T \\ y(T) = e^{-\frac{1}{2}T}\cdot\cosh\frac{3}{2}T - \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}T}\cdot\text{senh}\frac{3}{2}T + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}T}\cdot\text{senh}\frac{3}{2}T \end{array}}$$

, y entonces se cumple que: y(T) - x(T) = $e^{-\frac{1}{2}T}(\cosh\frac{3}{2}T - \frac{3}{4}\text{senh}\frac{3}{2}T)$.

En cualquier caso, la solución general del sistema viene dada por:

$$\begin{cases} x(T) = \frac{c_1}{3}e^{-2T}(e^{3T}+2) + \frac{c_2}{3}e^{-2T}(e^{3T}-1) \\ y(T) = \frac{2c_1}{3}e^{-2T}(e^{3T}-1) + \frac{c_2}{3}e^{-2T}(2e^{3T}+1) \end{cases}$$

que con las condiciones de contorno dadas exige que:

$x(0) = c_1 = 0$; $y(0) = c_2 = 1$; consecuentemente, se tendrá que:

$$\begin{cases} x(T) = \frac{e^{-2T}}{3}(e^{3T}-1) = \frac{1}{3}(e^{T}-e^{-2T}) \\ y(T) = \frac{e^{-2T}}{3}(2e^{3T}+1) = \frac{1}{3}(2e^{T}+e^{-2T}) \end{cases}$$

, y entonces se cumple también que: $x(T) + y(T) = e^T$.

Desde luego, puede demostrarse que, habiendo empleado anteriormente funciones hiperbólicas, el resultado es coincidente con el posteriormente obtenido, dado que, por la propia conceptualización de dichas funciones, se tendría que:

$$x(T) = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}T}\cdot\text{senh}\frac{3}{2}T = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}T}\cdot\frac{e^{\frac{3T}{2}} - e^{\frac{-3T}{2}}}{2} = \frac{1}{3}(e^{T}-e^{-2T}), \text{ c.s.q.d.}$$

, y a la misma conclusión llegaríamos a partir del cálculo de la y(T), como podrá comprobar el amable lector a título de ejercicio recapitulatorio de los conceptos ya expresados.

Ejemplo 3

Sea resolver el siguiente sistema de EDO: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dT} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dT} = 5x - y \end{cases}$, con las condiciones iniciales siguientes: $\begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x' = x - 2y \\ y' = 5x - y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Sx_s - x(0) = x_s - 2y_s \\ Sy_s - y(0) = 5x_s - y_s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Sx_s + 1 = x_s - 2y_s \\ Sy_s - 2 = 5x_s - y_s \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Sx_s - x_s + 2y_s = -1 \\ Sy_s + y_s - 5x_s = 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} [x_s(S-1) + 2y_s = -1](5) \\ [-5x_s + y_s(S+1) = 2](S-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cancel{5x_s(S-1)} + 10y_s = -5 \\ \underline{\cancel{-5x_s(S-1)} + y_s(S+1)(S-1) = 2(S-1)} \\ 10y_s + y_s(S+1)(S-1) = -5 + 2S - 2 \\ y_s(10 + S^2 - 1) = 2S - 7 \\ y_s(S^2 + 9) = 2S - 7 \\ y_s = \dfrac{2S}{S^2+9} - \dfrac{7}{S^2+9} \Rightarrow y(T) = 2\cos 3T - \dfrac{7}{3}\operatorname{sen} 3T \end{array}$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{l} [x_s(S-1) + 2y_s = -1](S+1) \\ [-5x_s + y_s(S+1) = 2](-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 10x_s - \cancel{2y_s(S+1)} = -4 \\ \underline{x_s(S-1)(S+1) + \cancel{2y_s(S+1)} = -1(S+1)} \\ x_s(S-1)(S+1) + 10x_s = -1(S+1) - 4 \\ x_s(S^2 - 1 + 10) = -S - 5 \\ x_s = \dfrac{-S}{S^2+9} - \dfrac{5}{S^2+9} \Rightarrow x(T) = -\cos 3T - \dfrac{5}{3}\operatorname{sen} 3T \end{array}$$

y la solución buscada será la siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{l} y(T) = 2\cos 3T - \dfrac{7}{3}\operatorname{sen} 3T \\ x(T) = -\cos 3T - \dfrac{5}{3}\operatorname{sen} 3T \end{array}}$$

, y entonces también se cumple que: x(T) + y(T) = cos 3T – 4·sen 3T.

En cualquier caso, la solución general del sistema planteado viene dada por:

$$\begin{cases} x(T) = \dfrac{c_1}{3}(\text{sen}\,3T + 3\cos 3T) - \dfrac{2c_2}{3}\text{sen}\,3T \\ y(T) = \dfrac{5c_1}{3}\text{sen}\,3T + \dfrac{c_2}{3}(3\cos 3T - \text{sen}\,3T) \end{cases}$$

que con las condiciones de contorno dadas exige:

$x(0) = c_1 = -1$; $y(0) = c_2 = 2$; consecuentemente, se tendrá que:

$$\begin{cases} x(T) = -\dfrac{\text{sen}\,3T}{3} - \cos 3T - \dfrac{4}{3}\text{sen}\,3T = -\cos 3T - \dfrac{5}{3}\text{sen}\,3T \text{ , y también:} \\ y(T) = -\dfrac{5\text{sen}\,3T}{3} + 2\cos 3T - \dfrac{2}{3}\text{sen}\,3T = 2\cos 3T - \dfrac{7}{3}\text{sen}\,3T \text{ , c.s.q.d.} \end{cases}$$

Ejemplo 4

Sea resolver el sistema de EDO: $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dT} + \dfrac{dy}{dT} - 2x = 1 \\ \dfrac{dx}{dT} + \dfrac{dy}{dT} - 3x - 3y = 2 \end{cases}$, con las condiciones iniciales siguientes: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Solución:

$$\left.\begin{aligned} 2x' + y' - 2x &= 1 \\ x' + y' - 3x - 3y &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &2[Sx_x - x(0)] + Sy_s - y(0) - 2x_s = \frac{1}{S} \\ &Sx_s - x(0) + Sy_s - y(0) - 3x_s - 3y_s = \frac{2}{S} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[2x_s(S-1) + Sy_s = \frac{1}{S}\right][S-3] \\ &\left[x_s(S-3) + y_s(S-3) = \frac{2}{S}\right][-S] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &2x_s(S-1)(S\cancel{-3)+S}(S-3)y_s = \frac{S-3}{S} \\ &\underline{-x_s(S-3)\cancel{S-S}(S-3)y_s = \frac{-2S}{S}} \\ &x_s[2(S-1)(S-3) - S(S-3)] = \frac{S-3}{S} - 2 \\ &x_s\left[2\left(S^2 - 4S + 3\right) - S^2 + 3S\right] = \frac{S-3-2S}{S} \\ &x_s\left[S^2 - 5S + 6\right] = \frac{-S-3}{S} \\ &x_s = \frac{-S-3}{S(S-3)(S-2)} \end{aligned}$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados, se tendrá que:

$$\frac{A}{S}+\frac{B}{S-3}+\frac{C}{S-2}=\frac{-S-3}{S(S-3)(S-2)}$$

$$A(S-3)(S-2)+BS(S-2)+CS(S-3)=-S-3$$

$$AS^2-5AS+6A+BS^2-2BS+CS^2-3CS=-S-3$$

$$A={}^{-1}\!/_2,B=-2,C={}^{5}\!/_2$$

$$x_s=\frac{{}^{-1}\!/_2}{S}-\frac{2}{S-3}+\frac{{}^{5}\!/_2}{S-2}\Rightarrow x(T)=-\frac{1}{2}-2e^{3T}+\frac{5}{2}e^{2T}$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{l}\left[2x_s(S-1)+Sy_s=\dfrac{1}{S}\right][S-3]\\[2ex]\left[x_s(S-3)+y_s(S-3)=\dfrac{2}{S}\right][-2(S-1)]\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$2x_s\cancel{(S-1)(S-3)}+S(S-3)y_s=\frac{S-3}{S}$$

$$-2x_s\cancel{(S-1)(S-3)}-2(S-1)(S-3)y_s=\frac{-4(S-1)}{S}$$

$$Sy_s(S-3)-2(S-1)(S-3)y_s=\frac{S-3}{S}-\frac{4(S-1)}{S}$$

$$y_s\left[S^2-3S-2\left(S^2-4S+3\right)\right]=\frac{S-3}{S}-\frac{4(S-1)}{S}$$

$$y_s\left[-S^2+5S-6\right]=\frac{S-3}{S}-\frac{4(S-1)}{S}$$

$$-y_s[(S-3)(S-2)]=\frac{S-3}{S}-\frac{4(S-1)}{S}$$

$$y_s=\frac{4(S-1)}{S(S-3)(S-2)}-\frac{1}{S(S-2)}=\frac{-3S+1}{S(S-3)(S-2)}$$

Aplicando nuevamente el método de los coeficientes indeterminados, se tendrá que:

$$\frac{A}{S}+\frac{B}{S-3}+\frac{C}{S-2}=\frac{-3S+1}{S(S-3)(S-2)}$$

$$A(S-3)(S-2)+BS(S-2)+CS(S-3)=-3S+1$$

$$AS^2-5AS+6A+BS^2-2BS+CS^2-3CS=-3S+1$$

$$A={}^{-1}\!/_6,B={}^{-5}\!/_2,C={}^{8}\!/_3$$

$$y_s=\frac{{}^{-1}\!/_6}{S}-\frac{{}^{5}\!/_2}{S-3}+\frac{{}^{8}\!/_3}{S-2}\Rightarrow y(T)=-\frac{1}{6}-\frac{5}{2}e^{3T}+\frac{8}{3}e^{2T}$$

y la solución buscada será la siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{c}y(T)=-\dfrac{1}{6}-\dfrac{5}{2}e^{3T}+\dfrac{8}{3}e^{2T}\\[2ex]x(T)=-\dfrac{1}{2}-2e^{3T}+\dfrac{5}{2}e^{2T}\end{array}}$$

En cualquier caso, la integral general del sistema planteado viene dada por:

$$\begin{cases} x(T) = c_1(-e^{2T})\cdot(3e^T-4) - 3c_2\cdot e^{2T}(e^T-1) - \frac{1}{2} \\ y(T) = 4c_1\cdot e^{2T}\cdot(e^T-1) + c_2\cdot e^{2T}(4e^T-3) - \frac{1}{6} \end{cases}$$

que, con las condiciones de contorno dadas, exige:
$x(0) = c_1 - \frac{1}{2} = 0$; de donde: $c_1 = \frac{1}{2}$; del mismo modo:
$y(0) = c_2 - \frac{1}{6} = 0$; de donde: $c_2 = \frac{1}{6}$; consecuentemente, se obtendrá el resultado ya enunciado, como podrá comprobar el amable lector.

Ejemplo 5

Resuelva el siguiente sistema de EDO para las funciones desconocidas u(x) y v(x):

$$\begin{cases} u' + u - v = 0 \\ v' - u + v = 2, \text{ con las condiciones iniciales: } u(0) = 1,\ v(0) = 2. \end{cases}$$

Solución:

Indicaremos L{u(x)} y L{v(x)} por U(s) y V(s), respectivamente. Tomando las transformadas de Laplace en ambas ecuaciones diferenciales, obtenemos:

$$\begin{cases} [sU(s) - 1] + U(s) - V(s) = 0\ ;\quad [sV(s) - 2] - U(s) + V(s) = 2/s \\ (s + 1)U(s) - V(s) = 1, \text{ o bien: } -U(s) + (s + 1)V(s) = \frac{2(s+1)}{s} \end{cases}$$

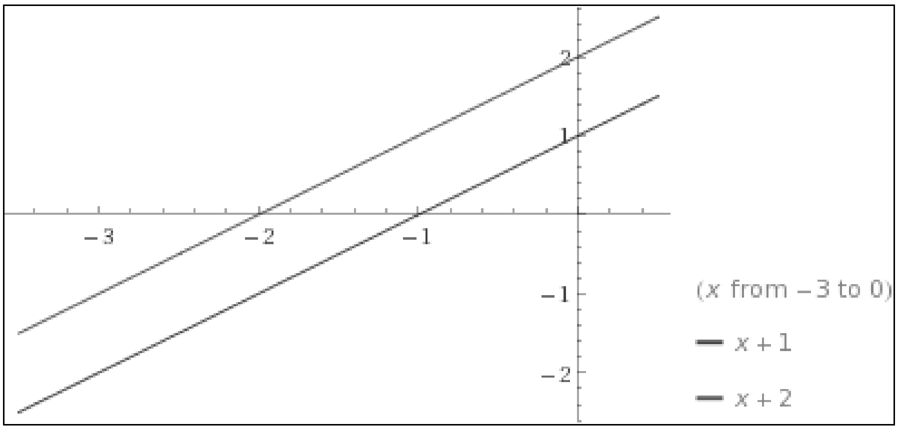
La solución de este último conjunto de ecuaciones lineales simultáneas es:

$$U(s) = \frac{s+1}{s^2}\ , \text{y} \quad V(s) = \frac{2s+1}{s^2}$$

Tomando ahora las transformadas inversas, obtenemos:

$$\begin{cases} u(x) = L^{-1}\{U(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right\} = 1 + x \\ v(x) = L^{-1}\{V(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right\} = 2 + x \end{cases}$$

La representación gráfica de las dos funciones anteriores en el entorno del origen de coordenadas es la siguiente:



Ejemplo 6

Resuelva el siguiente sistema de EDO:

$$\begin{cases} y' + z = x \\ z' + 4y = 0, \text{ con las condiciones iniciales: } y(0) = 1,\ z(0) = -1. \end{cases}$$

Solución:

Indicaremos L{y(x)} y L{z(x)} por Y(s) y Z(s), respectivamente. Luego, tomando las transformadas de Laplace en ambas ecuaciones diferenciales, obtenemos:

$$\begin{cases} [sY(s) - 1] + Z(s) = \dfrac{1}{s^2}\ ; \quad sY(s) + Z(s) = \dfrac{s^2+1}{s^2} \\ [sZ(s) + 1] + 4Y(s) = 0\ ; \quad \text{o bien: } 4Y(s) + sZ(s) = -1 \end{cases}$$

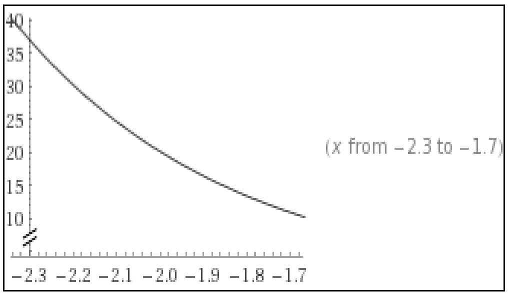
La solución para este último conjunto de ecuaciones lineales simultáneas es:

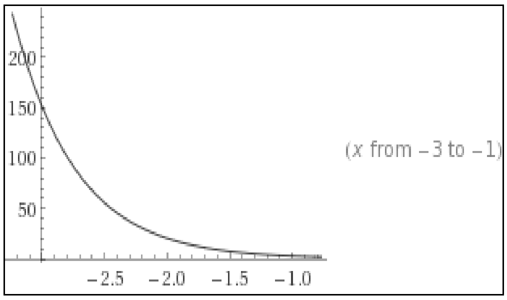
$$Y(s) = \frac{s^2+s+1}{s(s^2-4)} \qquad Z(s) = -\frac{s^3+4s^2+4}{s^2(s^2-4)}$$

Finalmente, usando el método de fracciones parciales y tomando las transformadas inversas correspondientes, obtenemos la solución del sistema planteado, a saber:

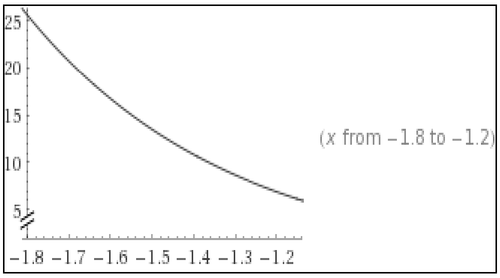
$$\begin{cases} y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{-\dfrac{1/4}{s} + \dfrac{7/8}{s-2} + \dfrac{3/8}{s+2}\right\} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{8}e^{2x} + \dfrac{3}{8}e^{-2x} \\ z(x) = L^{-1}\{Z(s)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{7/4}{s-2} + \dfrac{3/4}{s+2}\right\} = x - \dfrac{7}{4}e^{2x} + \dfrac{3}{4}e^{-2x} \end{cases}$$

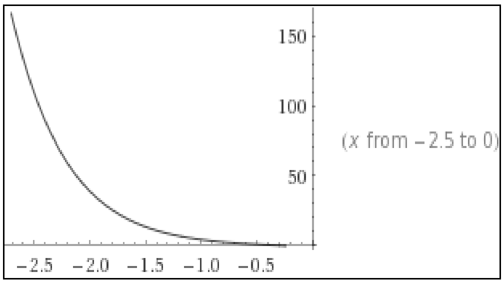
La representación gráfica de la función y(x) será la siguiente:





Así mismo, la representación gráfica de la función z(x) será:





Ejemplo 7

Resuelva el siguiente sistema de EDO:

$$\begin{cases} w' + y = \operatorname{sen} x \\ y' - z = e^x \\ z' + w + y = 1, \text{ con las condiciones iniciales: } w(0) = 0,\ y(0) = 1,\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Solución:

Indicaremos L{w(x)}, L{y(x)} y L{z(x)} por W(s), Y(s) y Z(s), respectivamente. Luego, tomando las transformadas de Laplace de las tres ecuaciones diferenciales anteriores, obtenemos:

$$\begin{cases} [sW(s) - 0] + Y(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \text{ ; o bien: } sW(s) + Y(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \\ [sY(s) - 1] - Z(s) = \dfrac{1}{s-1} \text{ ; o bien: } sY(s) - Z(s) = \dfrac{s}{s-1} \\ [sZ(s) - 1] + W(s) + Y(s) = \dfrac{1}{s} \text{ ; } W(s) + Y(s) + sZ(s) = \dfrac{s+1}{s} \end{cases}$$

La solución para este último sistema de ecuaciones lineales simultáneas es:

$$W(s) = \frac{-1}{s(s-1)} \text{ ; } Y(s) = \frac{s^2+s}{(s-1)(s^2+1)} \text{ ; } Z(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

Usando el método de fracciones parciales y luego tomando las transformadas inversas, obtenemos:

$$\begin{cases} w(x) = L^{-1}\{W(s)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s-1}\right\} = 1 - e^{x} \\ y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{s^2+1}\right\} = e^{x} + \operatorname{sen} x \\ z(x) = L^{-1}\{Z(s)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\} = \cos x \end{cases}$$

Ejemplo 8

Resuelva el siguiente sistema de EDO:

$$\begin{cases} z'' + y' = \cos x \\ y'' - z = \operatorname{sen} x, \text{ con: } z(0) = -1,\ z'(0) = -1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solución:

Tomando las transformadas de Laplace en ambas ecuaciones diferenciales, obtenemos que:

$$\begin{cases} [s^2Z(s) + s + 1] + [sY(s) - 1] = \dfrac{s}{s^2+1}\ ;\quad s^2Z(s) + sY(s) = -\dfrac{s^3}{s^2+1} \\ [s^2Y(s) - s - 0] - Z(s) = \dfrac{1}{s^2+1}\ ;\quad \text{o bien: } -Z(s) + s^2Y(s) = \dfrac{s^3+s+1}{s^2+1} \end{cases}$$

Resolviendo este último sistema para Z(s) e Y(s) encontramos que:

$$Z(s) = \frac{s+1}{s^2+1}\ ;\ Y(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

Finalmente, tomando las transformadas inversas, obtenemos que:

$$\boxed{z(x) = -\cos x - \operatorname{sen} x\ ;\quad y(x) = \cos x}.$$

Ejemplo 9

Resuelva el siguiente sistema de EDO:

$$\begin{cases} w'' - y + 2z = 3e^{-x} \\ -2w' + 2y' + z = 0 \\ 2w' - 2y + z' + 2z'' = 0\ ; \end{cases}$$

, con las condiciones iniciales: w(0) = 1, w'(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 2, z'(0) = -2.

Solución:

Tomando las transformadas de Laplace de las tres ecuaciones diferenciales anteriores, obtenemos que:

$$[s^2W(s) - s - 1] - Y(s) + 2Z(s) = \frac{3}{s+1}; \quad -2[sW(s) - 1] + 2[sY(s) - 2] + Z(s) = 0;$$

$$2[sW(s) - 1] - 2Y(s) + [sZ(s) - 2] + 2[s^2Z(s) - 2s + 2] = 0;$$

$$s^2W(s) - Y(s) + 2Z(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s+1};$$

$$-2sW(s) + 2sY(s) + Z(s) = 2; \quad 2sW(s) - 2Y(s) + (2s^2 + s)Z(s) = 4s;$$

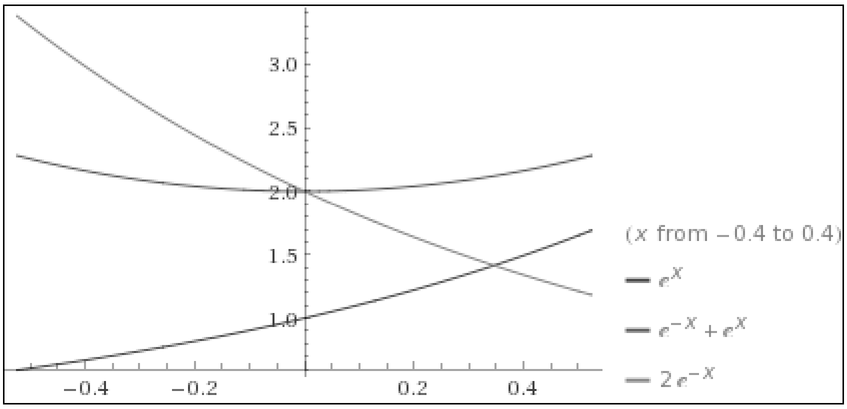
La solución para este sistema de EDO es:

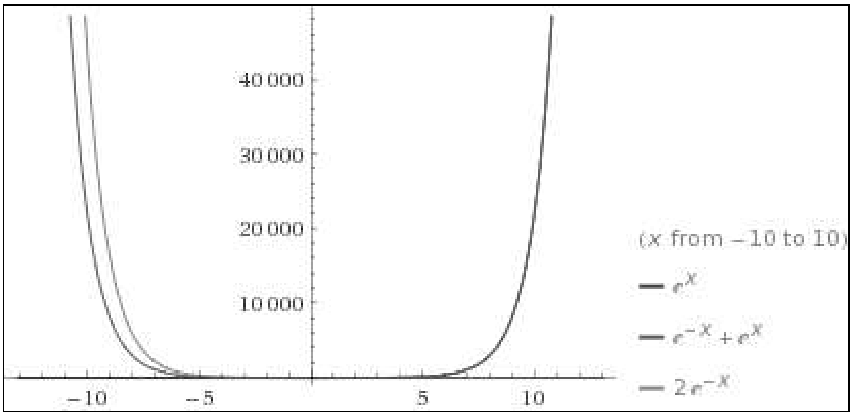
$$W(s) = \frac{1}{s-1} \;;\quad Y(s) = \frac{2s}{(s-1)(s+1)} \;;\quad Z(s) = \frac{2}{s+1}$$

De aquí se deduce, en definitiva, que:

$$\boxed{w(x) = e^x \;;\quad y(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right\} = e^x + e^{-x} \;;\quad z(x) = 2e^{-x}}$$

La representación gráfica de las tres funciones anteriores será (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 10

Resuelva el siguiente sistema de EDO:

$$\begin{cases} y'' + z + y = 0 \\ z' + y' = 0\ ; \end{cases}$$

, con las condiciones iniciales: y(0) = 0, y'(0) = 0, z(0) = 1.

Solución:

Tomando las transformadas de Laplace de ambas ecuaciones diferenciales, obtenemos que:

$$[s^2Y(s) - (0)s - (0)] + Z(s) + Y(s) = 0;\ \ (s^2 + 1)Y(s) + Z(s) = 0;$$

$$[sZ(s) - 1] + [sY(s) - 0]\text{ , o bien: } Y(s) + Z(s) = \frac{1}{s}$$

Resolviendo este último sistema para Y(s) y Z(s), encontramos que:

$$Y(s) = -\frac{1}{s^3} \qquad Z(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}$$

De este modo, tomando las transformadas inversas, concluimos que:

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{2}x^2\ \ ;\ \ z(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{2 + x^2}{2}}$$

CAPÍTULO 6
ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

1. INTRODUCCIÓN

1.1. DEFINICIONES

Es normal que desde los primeros inicios en el estudio de las matemáticas se aborden los diversos temas desde las funciones continuas, ya sea por facilitar su comprensión o bien simplemente porque es costumbre inveterada hacerlo así. Esto ocasiona en los estudiantes, con frecuencia, una inclinación primigenia hacia la continuidad, en contraposición con la mayoría de los fenómenos físicos o económicos que, finalmente, son modelados por funciones discontinuas o discretas. Realmente, es en asignaturas como Física, Estadística, Biología, Sociología, Microeconomía y Econometría donde empieza a notarse esta inclinación, que conlleva a no pocas dificultades en el manejo matemático de estas áreas. Igual ocurre al momento de resolver una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales, o una ecuación integral, donde las técnicas de solución en forma exacta parecieran indicar que esto siempre es posible, en tanto que la realidad muestra que las soluciones de ecuaciones diferenciales en términos de funciones elementales son muy pocas y que los métodos de solución aproximada resultan cada vez son más usados y responden adecuadamente a la realidad de los hechos.

La teoría de *ecuaciones diferenciales*, como hemos visto, se basa en modelos continuos, donde la variable independiente o explicativa de referencia suele ser el tiempo. Pero el tiempo también se puede considerar como una variable discreta ya que, para controlar su transcurso en una experiencia cualquiera, exige la toma de medidas en determinados instantes, y en intervalos determinados por los instrumentos de medida, que constituyen un conjunto finito, o infinito numerable, de valores de la variable independiente o explicativa.

Los modelos determinísticos discretos, constituidos por las *ecuaciones en diferencias finitas*, están referidos normalmente a la variable tiempo pero bajo una óptica discreta. Esto es:

MODELO CONTINUO		**MODELO DISCRETO**
"t" como variable continua	⟷	"t" como variable discreta
Ecuaciones diferenciales		**Ecuaciones en diferencias finitas o recurrentes**

FIG. 6.1. Modelos continuos y discretos.

Las ecuaciones recurrentes aparecen, pues, ligadas a la descripción matemática de fenómenos dinámicos, es decir, que varían con el tiempo. No es de extrañar, por tanto, que dichas ecuaciones, junto con otras herramientas matemáticas (como las ecuaciones integro-diferenciales o las cadenas de Markov) constituyan uno de los tópicos fundamentales de la matemática que se aplica al estudio de los fenómenos de evolución en el tiempo. En términos generales, hablamos de *recurrencia* cuando cada estado de un fenómeno determinado puede explicarse en términos de algún o algunos estados anteriores. Las ecuaciones recurrentes son, entonces, las expresiones matemáticas de esta explicación de cada estado del sistema en función de otros anteriores.

Si la variable independiente toma los valores naturales (enteros positivos) siguientes: **t** = 0, 1, 2, 3, …, n, …, para la variable dependiente ***x*** o funcional tendremos los valores: $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$, $x(2) = x_2$, …, $x(n) = x_n$, …, es decir:

t	1	2	3	…	n	…
x	x_1	x_2	x_3	…	x_n	…

Una ecuación en diferencias finitas es, pues, una expresión algebraica que relaciona los valores que toma una variable dependiente ***x***, a través de una función, en determinados puntos de un dominio discreto. Resolver una ecuación en diferencias es hallar una expresión genérica para $\boldsymbol{x_n}$ en términos de n, sin que aparezcan otros términos en x.

El presente capítulo de nuestro libro ya muestra la estrecha relación existente entre la ecuación diferencial y la ecuación en diferencias finitas, siendo también estas últimas un recurso útil en la resolución de las primeras. En la solución de las ecuaciones en diferencias finitas que expondremos aquí, además de detallar por completo su solución en el caso de las de primer y segundo orden, también se mostrará como la transformada Z (TZ o “transformada zeta”) de una función, resulta ser un instrumento sumamente útil para solucionar ecuaciones como la de Fibonacci[1] y, en general, ecuaciones de la forma: $a_{n+1} - a_{n-1} = f(n)$ y $a_{n+1} + a_{n-1} = f(n)$. Desde luego, aplicaciones frecuentes de las ecuaciones diferenciales y de las ecuaciones en diferencias se encuentran en todas las ciencias; en particular, en Economía hay una

[1] Leonardo Fibonacci (1170-1250), or Leonardo of Pisa, most commonly, simply Fibonacci, was an Italian mathematician, considered by some "the most talented western mathematician of the Middle Ages." Fibonacci is best known to the modern world for the spreading of the Hindu–Arabic numeral system in Europe, primarily through the publication in 1202 of his *Liber Abaci* (*Book of Calculation*), and for a number sequence named the Fibonacci numbers after him, which he did not discover but used as an example in the *Liber Abaci*. *Liber Abaci* also posed, and solved, a problem involving the growth of a population of rabbits based on idealized assumptions. The solution, generation by generation, was a sequence of numbers later known as Fibonacci numbers. The number sequence was known to Indian mathematicians as early as the 6th century, but it was Fibonacci's *Liber Abaci* that introduced it to the West. In the Fibonacci sequence of numbers, each number is the sum of the previous two numbers, starting with 0 and 1. This sequence begins: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987 ... The higher up in the sequence, the closer two consecutive "Fibonacci numbers" of the sequence divided by each other will approach the golden ratio (approximately 1 : 1.618 or 0.618 : 1).

interesante aplicación en inventarios, que es el conocido modelo de inventarios de Metzler[2], que viene expresado por una *ecuación en diferencias finitas de segundo orden.*

En general, una ecuación en diferencias finitas o ecuación recurrente es una expresión de la forma:

$$F[x, f(x), f(x+1), f(x+2), \dots , f(x+k)] = 0,$$

, siendo f(x) una función desconocida de variable entera. Si hacemos como *variable independiente* o *argumento* x = n, se suele emplear las notaciones en subíndices: $f(n) = y_n = u_n = v_n = a_n$, con lo que:

$$F(n, y_n, y_{n+1}, ..., y_{n+k}) = 0,$$

siendo *y* la *variable dependiente*, donde $F : \Omega \subseteq \Re^{k+2} \to \Re$ es una función definida sobre un subconjunto Ω de $\Re^{k+1}$. El número k recibe el nombre de “orden” de la ecuación, y es la diferencia entre el mayor y el menor de los subíndices (argumentos) que aparecen en la ecuación, o sea: (n + k) – n = k. Por ejemplo, las ecuaciones:

$$y_{n+2} - y_n = 0,$$
$$n \cdot y_{n+3} - e^{y_{n+3}} \cdot y_n = y_{n+1},$$

son de órdenes 2 y 3, respectivamente. Aparte del orden mencionado, existe una gran diferencia entre las ecuaciones anteriores. En la primera se puede despejar el término y_{n+2}, quedando la ecuación: $y_{n+2} = y_n$, mientras que en la segunda ecuación tal operación no puede realizarse, es decir, no se va a poder despejar explícitamente el término y_{n+3}, que también se halla en el exponente.

Nosotros vamos a centrarnos en el primer tipo de ecuaciones, que llamaremos *resueltas* respecto del mayor término de la sucesión y_n. A partir de este momento, consideraremos ecuaciones en diferencias de la forma:

$$y_{n+k} = f(n, y_n, y_{n+1}, ..., y_{n+k-1}), \quad (1)$$

siendo $f : \Lambda \subseteq \Re^k \to \Re$ una función. Por una solución de la ecuación (1) entenderemos una sucesión x_n de números reales de manera tal que verifique:

$$x_{n+k} = f(n, x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k-1}).$$

Una solución de una ecuación en diferencias finitas es una función que verifica dicha ecuación. La solución general y_n de una ecuación de orden k es una solución que contiene k constantes arbitrarias. Si en la solución general se particularizan las k constantes mencionadas se obtiene una solución particular y_p.

---

[2] Lloyd A. Metzler (1913-1980) fue pionero en investigar formalmente las consecuencias de los esfuerzos empresariales para mantener sus niveles de existencias, a través de variaciones apropiadas en los niveles de producción. Sus primeros trabajos sobre la materia datan del año 1941 (“The Nature and Stability of Inventory Cycles”. Rev. Econ. Statist., vol, 23).

Así, por ejemplo la sucesión constante $x_n = 1$ es solución de la ecuación: $y_{n+2} = y_n$. También lo es la sucesión $x_n = (-1)^n$. Como vemos, una ecuación puede tener distintas soluciones, pero ésta es única si imponemos una serie de k condiciones iniciales. Así, $x_n = (-1)^n$ es la única solución de la ecuación: $y_{n+2} = y_n$, con: $y_1 = -1$, $y_2 = 1$.

Llamaremos a estos problemas "de condiciones iniciales", por su analogía con las ecuaciones diferenciales ordinarias que hemos estudiado en los capítulos anteriores. Generalmente, las k constantes arbitrarias se determinan mediante k condiciones complementarias denominadas también "condiciones de contorno".

Dentro de las ecuaciones en diferencias, tienen un especial interés las llamadas "ecuaciones lineales", que poseen la configuración analítica:

$$y_{n+k} + a^1{}_n y_{n+k-1} + ... + a^k{}_n y_n = b_n,$$

en las que todas las formas de *y* son lineales sin importar lo que puedan ser los argumentos (de otro modo se les clasifica como "no lineales"), y donde $a^1{}_n, ..., a^k{}_n, b_n$ son sucesiones de números reales.

En el caso de que las sucesiones $a^1{}_n, ..., a^k{}_n$ sean constantes, esto es, si: $a^i{}_n = a_i$ para todo $n \geq 0$ y para todo $i \in \{1, ... , k\}$, la ecuación lineal se dirá "de coeficientes constantes". En general, también distinguiremos entre *ecuaciones homogéneas* si $b_n = 0$ para todo $n \geq 0$, y *no homogéneas o completas* en caso contrario, como ocurría con las EDO. Así, las ecuaciones:

$$y_{n+3} + n \cdot y_{n+1} - y_n = 1 + n^3,$$
$$y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0,$$

son ecuaciones en diferencias lineales, siendo la primera no homogénea y de coeficientes variables y la segunda homogénea y con coeficientes constantes.

1.2. EQUILIBRIO

Las ecuaciones *autónomas o estacionarias* son aquellas que no dependen de *n*, y constituyen un caso particular de las ecuaciones recurrentes. Si reparamos ahora en la ecuación de orden uno autónoma, o sea:

$$u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbf{N}$$

donde f es una función que toma valores reales, estudiemos algunos aspectos del comportamiento de sus soluciones centrándonos en los denominados "puntos de equilibrio".

Un punto de equilibrio de la ecuación anterior es toda solución de la ecuación: $x = f(x)$, o sea: $u_{n+1} = u_n = x$. Su representación gráfica, pues, comenzará por hallar los puntos de corte o intersección entre la gráfica de $y = f(x)$ y la gráfica de $y = x$ (bisectriz del primer cuadrante del círculo), esto es:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

Por otra parte, la noción de estabilidad de un punto de equilibrio, de provechosas aplicaciones en el campo de la Teoría microeconómica, está relacionada con el comportamiento de las soluciones de una ecuación recurrente que comienzan cerca de los puntos de equilibrio. En particular, interesa saber si las soluciones convergen o no a los puntos de equilibrio cerca de los cuales han empezado. Tendremos ocasión de analizar todo ello en algunas aplicaciones prácticas del capítulo 8 de este mismo libro.

Veamos ahora algunos ejemplos representativos de lo hasta aquí expuesto:

Ejemplo 1

Calcular los puntos de equilibrio de la ecuación recurrente:

$$u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n - 3,\ \forall n \in \mathbf{N}$$

Solución:

Hacemos: $x = x^2 + 3x - 3$; $x^2 + 2x - 3 = 0$, ecuación que resuelta ofrece las raíces: $\boxed{u_1^* = 1 \text{ y } u_2^* = -3}$, que son así los dos únicos puntos de equilibrio de la ecuación, es decir, que las sucesiones:

$$1, 1, 1, \ldots \text{ y } -3, -3, -3, \ldots$$

son soluciones de la ecuación recurrente propuesta.

Ejemplo 2

Calcular el punto de equilibrio de la ecuación en diferencias finitas utilizada en el campo de la Genética para determinar la frecuencia de aparición de ciertas enfermedades congénitas:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n},\ \forall n \in \mathbf{N},$$

así como la solución particular que verifica que: $u_0 = 1$.

Solución:

Como siempre, planteamos la ecuación: $x = f(x) = \frac{x}{1+x}$, cuya única solución es $x = 0$, por lo que: $\boxed{u^* = 0}$ es un punto de equilibrio de la ecuación propuesta.

Estudiemos ahora la solución particular de la ecuación antedicha que verifica que: $u_0 = 1$, esto es:

$u_1 = \frac{u_0}{1+u_0}$; si hacemos $u_0 = 1$, se tendrá que:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \text{ y sucesivamente:} \\ u_2 = \frac{1/2}{1+1/2} = \frac{1}{3}, \\ u_2 = \frac{1/3}{1+1/3} = \frac{1}{4}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

de lo que se deduce un término general del tipo: $\boxed{u_n = \frac{1}{n+1}}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Ello también puede demostrarse mediante un proceso de inducción. Para ello, debemos comprobar sendas condiciones, a saber: a) que la fórmula anterior sirve para n = 0, y b) que si la fórmula es cierta para u_{n-1}, entonces también lo es para u_n ($n \geq 1$). Separadamente:

a) Efectivamente, si n = 0, entonces: $u_0 = \frac{1}{0+1} = 1$, que es cierto.

b) Si ahora suponemos cierto que: $u_{n-1} = \frac{1}{n-1+1} = \frac{1}{n}$, entonces:

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}} = \frac{1/n}{1+1/n} = \frac{1}{n+1}, \text{ tal como se quería demostrar.}$$

Por otra parte, esta solución converge al punto de equilibrio, puesto que resulta evidente que: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\infty} = 0$, que constituye precisamente el punto de equilibrio u* = 0 anteriormente hallado.

Ejemplo 3

Calcular los puntos de equilibrio de la ecuación recurrente:

$$u_{n+1} = u_n, \ \forall n \in \mathbf{N}$$

Solución:

Resultaría una expresión (identidad) del tipo: x = x, por lo que es obvio que todo número real es un punto de equilibrio de esta ecuación, y que sus soluciones son todas las sucesiones constantes.

2. ECUACIONES LINEALES

2.1. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Son ecuaciones tales que estén definidas en cierto dominio de una variable y que relacionen una función incógnita de la variable *n* con la función de la variable *n* + 1, que difiere en 1 de la primera, o sea, u_n y u_{n+1}, y se llaman *ecuaciones en diferencias finitas de primer orden.*

Son ecuaciones de la forma: $x_{n+1} = p(n)x_n + q(n)$, siendo *p(n)* y *q(n)* funciones de la variable *n*, o simplemente constantes. En ellas, cada término con subíndice de la relación de recurrencia aparece elevado a la primera potencia (linealidad).

Cuando *q(n) = 0*, la ecuación se llama *homogénea*, y entonces se cumple que: $x_{n+1} = p(n)x_n$, $\forall n \geq 0$. Vamos a ver ahora que las ecuaciones homogéneas, en realidad, son fórmulas de recurrencia en las que, conocidas las condiciones iniciales, es decir, x_0, es posible calcular todos los términos de la sucesión:

$$x_1 = p(0)x_0 \quad x_2 = p(1)x_1 = p(1)p(0)x_0 \quad x_3 = p(2)x_2 = p(2)p(1)p(0)x_0 \quad \ldots$$
$$x_n = p(n-1)\,p(n-2)\ldots\ldots p(1)\,p(0)\,x_0$$

Entonces, si la ecuación en diferencias es homogénea, en cualquier forma que se presente, puede ser reducida a la expresión:

$$a_{n+1} - \alpha \cdot a_n = 0$$

y se prueba fácilmente que la solución general de esta ecuación es de la forma: $a_n = C \cdot \alpha^n$, siendo C una constante arbitraria. Esta última ecuación es una función discreta cuyo dominio es el conjunto **N** de los enteros no negativos o naturales.

Veamos, a continuación, algunos sencillos ejemplos de ecuaciones en diferencias finitas homogéneas de primer orden, y su resolución inmediata.

Ejemplo 1

Resuélvase la siguiente ecuación recurrente: $3a_{n+1} - 2a_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Solución:

La diferencia entre el mayor y el menor de los subíndices es 1, luego efectivamente es una ecuación de primer orden y homogénea.

Despejando a_{n+1}, queda: $a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n$, y la solución general es: $\boxed{a_n = C\left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

Ejemplo 2

Resuélvase la siguiente ecuación recurrente: $a_{n+3} + a_{n+2} = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Solución:

Esta ecuación también es susceptible de rebajamiento a primer orden; en efecto, despejando a_{n+1}, queda: $a_{n+1} = -a_n$, y la solución general buscada es:

$$\boxed{a_n = C(-1)^n}.$$

Ejemplo 3

Resuélvase la siguiente ecuación recurrente: $a_{n+1} + 2a_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Solución:

Esta otra ecuación es de primer orden y, procediendo como en los ejercicios anteriores, queda: $a_{n+1} = -2a_n$, y la solución general es:

$$\boxed{a_n = C(-2)^n}.$$

Ejemplo 4

Resuélvase la siguiente ecuación recurrente: $2a_{n+1} + 3a_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, con la condición: $a_2 = 2$.

Solución:

Primero se calcula la solución general como en los ejercicios anteriores, con lo que: $a_{n+1} = -\frac{3}{2} a_n$, y al ser de primer orden la solución general es:

$$a_n = C\left(-\frac{3}{2}\right)^n.$$

Para hallar la solución particular se substituyen los valores de la condición dada en la ecuación general, de tal forma que:

$$a_2 = C\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 2\,;$$

se despeja C, de donde $C = \frac{8}{9}$, y la solución particular buscada será, por tanto:

$$\boxed{a_p = \frac{8}{9}\left(-\frac{3}{2}\right)^n = f(n)}.$$

Ejemplo 5

Resuélvase la siguiente ecuación recurrente: $2a_{n+3} + a_{n+2} = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, con la condición: $a_4 = 1$.

Solución:

Al ser una ecuación de primer orden, se calcula la solución general como en los ejercicios anteriores, pasando primero a la ecuación equivalente siguiente: $2a_{n+1} + a_n = 0$, de donde:

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n \text{ ; luego la solución general es: } a_n = C\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Para hallar la solución particular se procede de forma análoga al problema anterior, esto es:

$$a_4 = C\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 1,$$

se despeja C, de donde C = 16 y, por tanto, la solución particular resulta ser:

$$\boxed{a_p = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^n = f(n)}.$$

Ejemplo 6

Resuélvase la siguiente ecuación recurrente: $u_{n+1} = -3 \cdot u_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, con la condición inicial: $u_0 = 2$.

Solución:

Al ser una ecuación de primer orden, se calcula la solución general como en los ejercicios anteriores, por lo que:

$$u_n = C(-3)^n.$$

Por otra parte, la solución particular buscada se cumple para:

$u_0 = C = 2$, por lo que dicha solución será: $\boxed{u_p = 2(-3)^n = f(n)}$.

Ejemplo 7

Resuélvase la siguiente ecuación recurrente no homogénea:

$$u_{n+1} - 3 \cdot u_n = n + 2, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación homogénea asociada tiene por solución: $u_n^* = \alpha \cdot 3^n$.

Como veremos con mayor especificidad en epígrafes posteriores referentes a las ecuaciones de orden superior, para hallar una solución particular, ensayaremos una del tipo genérico (puesto que el segundo miembro es un polinomio de primer grado): $u_p = an + b$.

Substituyendo en la ecuación inicial, agrupando términos e igualando coeficientes indeterminados, llegamos al sistema:

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ a - 2b = 2 \end{cases}$$

de donde se deduce que: $a = -½$ y $b = -5/4$.

Entonces, la solución general de la ecuación pedida será:

$$\boxed{u_n = u_n{*} + u_p = \alpha \cdot 3^n - \frac{1}{2}n - \frac{5}{4} = f(n)}$$

Ejemplo 8

Resuélvase la siguiente ecuación recurrente no homogénea, según los distintos valores de *a*:

$$u_{n+1} - 2 \cdot u_n = a^n,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación homogénea asociada tiene por solución: $u_n{*} = \alpha \cdot 2^n$.

Para hallar una solución particular de la completa, debemos considerar dos posibilidades: $a = 2$ y $a \neq 2$. En cualquier caso, el segundo miembro de esta ecuación es de forma exponencial y las soluciones particulares a ensayar serán mayormente especificadas en epígrafes posteriores. Esto es:

- Si $a = 2$, entonces la solución particular que debemos ensayar es de la forma: $u_p = A \cdot n \cdot 2^n$. Tras operar adecuadamente, se tiene que: $A(n+1) \cdot 2^{n+1} - 2An \cdot 2^n = An \cdot 2^{n+1} + A \cdot 2^{n+1} - 2An \cdot 2^n = 2A \cdot 2^n = a^n = 2^n$, y llegamos a la conclusión de que $A = 1/2$, con lo que la solución general será:

$$\boxed{u_n = u_n{*} + u_p = \alpha \cdot 2^n + (½) \cdot n \cdot 2^n = (\alpha + n/2) \cdot 2^n}$$

- Si $a \neq 2$, entonces debemos ensayar una solución particular del tipo: $u_p = A \cdot a^n$. Tras operar, llegamos a la conclusión de que $A = \frac{1}{a-2}$, con lo que la solución general buscada será:

$$\boxed{u_n = u_n{*} + u_p = \alpha \cdot 2^n + \frac{1}{a-2} \cdot a^n}$$

2.2. ECUACIÓN LINEAL HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES Y ORDEN K

2.2.1. Introducción

Una ecuación en diferencias finitas de orden k es una ecuación que liga los términos de una sucesión relacionando cada término con los k anteriores. El estudio de estas ecuaciones puede resultar muy complicado, aunque aquí se estudiará básicamente el caso concreto de las ecuaciones lineales, que poseen una gran variedad de aplicaciones en la física, la técnica, la economía y otras ciencias aplicadas.

Uno de los tipos de ecuaciones en diferencias que con mayor frecuencia se presentan son, pues, las llamadas "ecuaciones lineales", que son de la forma siguiente, usando una notación más generalizada:

$$\varphi_0(n)\cdot u_{n+k} + \varphi_1(n)\cdot u_{n+k-1} + \varphi_2(n)\cdot u_{n+k-2} + \ldots + \varphi_{k-1}(n)\cdot u_{n+1} + \varphi_k(n)\cdot u_n =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \varphi_i(n)\cdot u_{n+k-i} = b_n$$

donde los $\varphi_i(n)$ y b_n son funciones de la variable entera *n*.

Así pues, cuando algún término con subíndice de la relación de recurrencia está multiplicado por un valor variable, como por ejemplo:

$$u_{n+1} - u_n = n\cdot u_{n-1},\text{ con la condición: } u_0 = 1,\ \forall n \geq 1$$

se dice que estamos en presencia de una "ecuación de coeficientes variables".

Por el contrario, si los $\varphi_i(n) = a_i$ son constantes, como sucederá en la mayoría de los casos que contemplaremos aquí, la ecuación en cuestión recibe el nombre de *ecuación lineal de coeficientes constantes*. Si además $b_n = 0$, la ecuación se denomina "homogénea" y, en caso contrario, "no homogénea o completa", como también sucedía con las ecuaciones diferenciales.

Si la ecuación homogénea en diferencias finitas de orden k siguiente:

$$a_0\cdot f(x+k) + a_1\cdot f(x+k-1) + a_2\cdot f(x+k-2) + \ldots + a_{k-1}\cdot f(x+1) + a_k\cdot f(x) = 0;$$

o bien, expresada en notación de subíndices:

$$a_0\cdot u_{n+k} + a_1\cdot u_{n+k-1} + a_2\cdot u_{n+k-2} + \ldots + a_{k-1}\cdot u_{n+1} + a_k\cdot u_n = \sum_{i=0}^{k} a_i\cdot u_{n+k-i} = 0,$$

admite, como ya hemos dicho, k soluciones particulares linealmente independientes: $f_1(n), f_2(n), f_3(n), \ldots, f_k(n)$, resulta inmediato comprobar que:

$$u_n = c_1\cdot f_1(n) + c_2\cdot f_2(n) + c_3\cdot f_3(n) + \ldots + c_k\cdot f_k(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i\cdot f_i(n),$$

es la solución general de la ecuación propuesta, puesto que contiene k constantes arbitrarias. Por lo tanto, el problema de resolver la ecuación dada se reduce a la obtención de k soluciones particulares linealmente independientes. Para ello, investiguemos las soluciones particulares de la forma: $u_n = r^n$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial tendremos que:

$$a_0 \cdot r^{n+k} + a_1 \cdot r^{n+k-1} + a_2 \cdot r^{n+k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot r^{n+1} + a_k \cdot r^n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot r^{n+k-i} = 0,$$

y después de simplificar dividiendo por r^n obtendremos la ecuación equivalente:

$$a_0 \cdot r^k + a_1 \cdot r^{k-1} + a_2 \cdot r^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot r + a_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot r^{k-i} = 0,$$

que es una ecuación algebraica asociada, denominada "ecuación característica", que admitirá las k "raíces características": $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$, y a cuyo primer miembro: $\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot r^{k-i}$ se le suele denominar "polinomio característico asociado". Así pues, las soluciones para las ecuaciones en diferencias finitas normalmente se clasifican como *particulares* o *generales*, dependiendo de si hay o no *condiciones iniciales* asociadas. Las soluciones se verifican por medio de la substitución directa. La teoría de las soluciones para este tipo de ecuaciones resulta virtualmente idéntica a la de las ecuaciones diferenciales y las técnicas de "intuir soluciones" son, de algún modo, una reminiscencia de los métodos empleados y ya vistos para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

2.2.2. Raíces reales distintas

Si las raíces son reales y distintas ($\forall\, r_i \neq r_j$), es inmediato comprobar que las k soluciones particulares siguientes: r_1^n, r_2^n, r_{3n}, … , r_k^n, son linealmente independientes y, por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias será una combinación lineal de las funciones r_1^n y r_2^n, así:

$$u_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n + c_3 \cdot r_3^n + \ldots + c_k \cdot r_k^n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot r_i^n$$

siendo las c_i constantes arbitrarias.

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos representativos:

Ejemplo 1

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+2} - u_{n+1} – 2u_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación característica es: $r^2 - r – 2 = 0$, con las raíces reales: $r_1 = 2$ y $r_2 = -1$, por lo que la solución general buscada será:

$$\boxed{u_n = c_1\cdot(-1)^n + c_2\cdot 2^n},\ \forall\ c_1,\ c_2 \in \Re$$

Ejemplo 2

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} - 4a_n = 0,\ \forall n \geq 0, \text{ con } a_0 = 1 \text{ y } a_1 = 2.$$

Solución:

La ecuación característica es:

$r^2 - 3r - 4 = 0$; $r = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix} \right.$; y la solución general es:

$a_n = C_1\cdot 4^n + C_2(-1)^n$; pero las condiciones dadas exigen que:

$$a_0 = C_1 + C_2 = 1 \ ; \quad a_1 = 4C_1 - C_2 = 2 \ ;$$

$5C_1 = 3$; $C_1 = \frac{3}{5}$; $C_2 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$; con lo que:

$$\boxed{a_n = \frac{3}{5} \times 4^n + \frac{2}{5} \times (-1)^n}$$

Ejemplo 3

Resuélvase la ecuación recurrente: $u_{n+3} - u_{n+1} = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Solución:

Es evidente que la ecuación dada es equivalente a la: $u_{n+2} - u_n = 0$. En cualquier caso, la ecuación característica es: $r^3 - r = 0 \rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = 1,\ r_3 = -1$, luego la solución general buscada es:

$$\boxed{u_n = c_1 + c_2(-1)^n},\ \forall\ c_1,\ c_2 \in \Re$$

Ejemplo 4

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:
$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, y obténgase una solución particular cualquiera de la misma.

Solución:

La ecuación característica correspondiente: $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$, que tiene por soluciones: 1, 2 y 3, luego la solución general es: $u_n = C_1 + C_2\cdot 2^n + C_3\cdot 3^n$. Ahora, por ejemplo, la solución: $u_p = 1 + 2\cdot 3^n$, es una solución particular, puesto que siendo solución de la ecuación, se obtiene de la solución general haciendo: $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ y $C_3 = 2$. Otra solución particular de esta ecuación vendría dada, v. gr., por las condiciones de contorno: $u_0 = 2$; $u_1 = 5$; $u_2 = 13$, lo que generaría el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u_0 = C_1 + C_2 + C_3 = 2 \\ u_1 = C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 5 \\ u_2 = C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 13 \end{cases}$$

que resuelto proporciona los valores: $C_1 = 0$; $C_2 = C_3 = 1$, con lo que la solución particular buscada, que satisface las condiciones de contorno exigidas, es: $u_p = 2^n + 3^n$.

Puede comprobarse, por ejemplo, que si las condiciones de contorno exigidas son: $u_0 = 7$; $u_1 = 11$ y $u_2 = 21$, la solución particular correspondiente vendría dada por: $u_p = 3^n + 2^{n+1} + 4$.

Ejemplo 5

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}, \text{ sabiendo que: } u_1 = 0,\ u_2 = 5.$$

Solución:

La ecuación característica $r^2 - r - 2 = 0$, admite las soluciones 2 y –1, luego la solución general de la ecuación en diferencias expuesta será de la forma: $u_n = C_1(-1)^n + C_2 \cdot 2^n$.

Por otra parte, se tendrá que: $u_1 = -C_1 + 2C_2 = 0$; $u_2 = C_1 + 4C_2 = 5$; de donde se deduce que: $C_1 = 5/3$ y $C_2 = 5/6$, por lo que se deduce la siguiente solución particular:

$$u_n = \boxed{\frac{5}{3}[(-1)^n + 2^{n-1}]}$$

Ejemplo 6

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+2} - 7u_{n+1} + 6u_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación característica: $r^2 - 7r + 6 = 0$, operando por Ruffini, ofrece:

$$r = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \begin{cases} 6 = r_1 \\ 1 = r_2 \end{cases}$$

O sea, que tiene las soluciones $r_1 = 6$, $r_2 = 1$, luego la solución buscada de la ecuación en diferencias es:

$$\boxed{u_n = c_1 \cdot 6^n + c_2 = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 7

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+2} - 10u_{n+1} + 21u_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

De la ecuación característica: $r^2 - 10r + 21 = 0$ obtenemos las soluciones $r_1 = 3$, $r_2 = 7$, luego la solución general buscada de la ecuación en diferencias es:

$$\boxed{u_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 7^n = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 8

Resolver la siguiente ecuación en diferencias finitas:

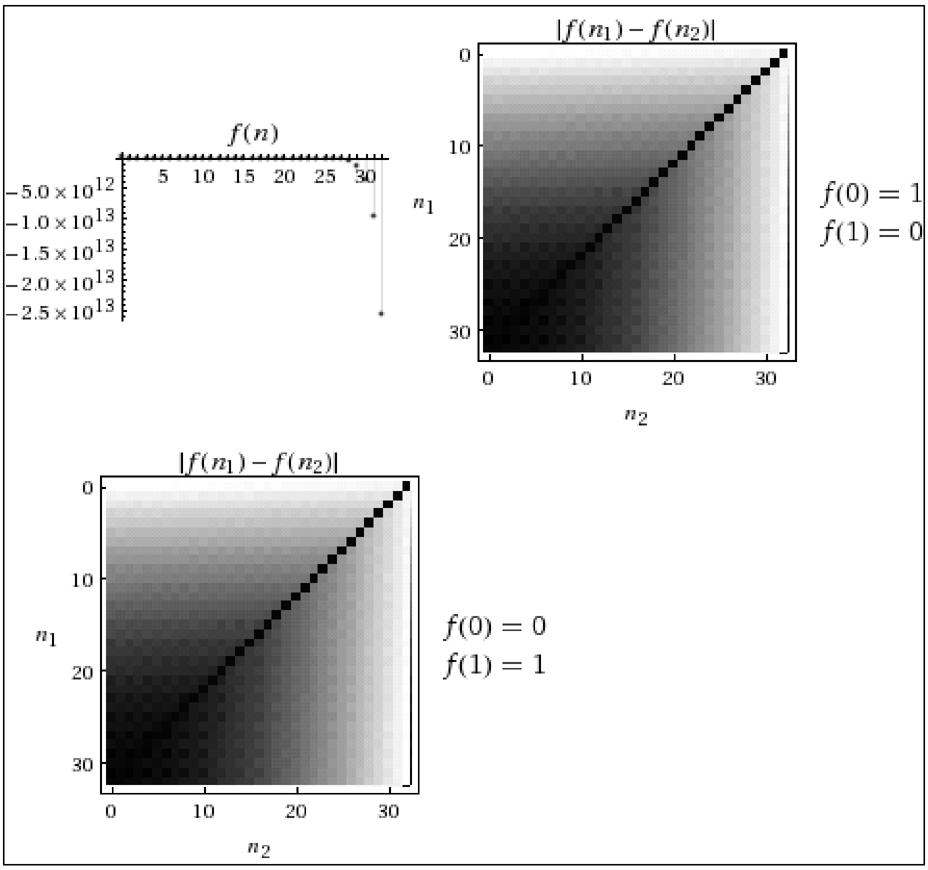
$$3u_{n+2} - 11u_{n+1} + 8u_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación característica: $3r^2 - 11r + 8 = 0$, tiene las soluciones $r_1 = 1$ y $r_2 = 8/3$, luego la solución general de la ecuación pedida es:

$$\boxed{u_n = c_1 + c_2 \cdot (8/3)^n = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

La correspondiente representación gráfica es la siguiente:



Ejemplo 9

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$6u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n = 0, \forall n \in \mathbf{N},$$

y determinar la solución particular tal que: $u_0 = 5$ y $u_1 = 2$.

Solución:

Su ecuación característica es: $6r^2 - 5r + 1 = 0$, que ofrece las soluciones: $r_1 = ½$ y $r_2 = 1/3$, con lo que se tendrá la solución general:

$$u_n = c_1 \cdot (1/2)^n + c_2 \cdot (1/3)^n = f(n)$$

Por otra parte, las condiciones particulares dadas exigen que:

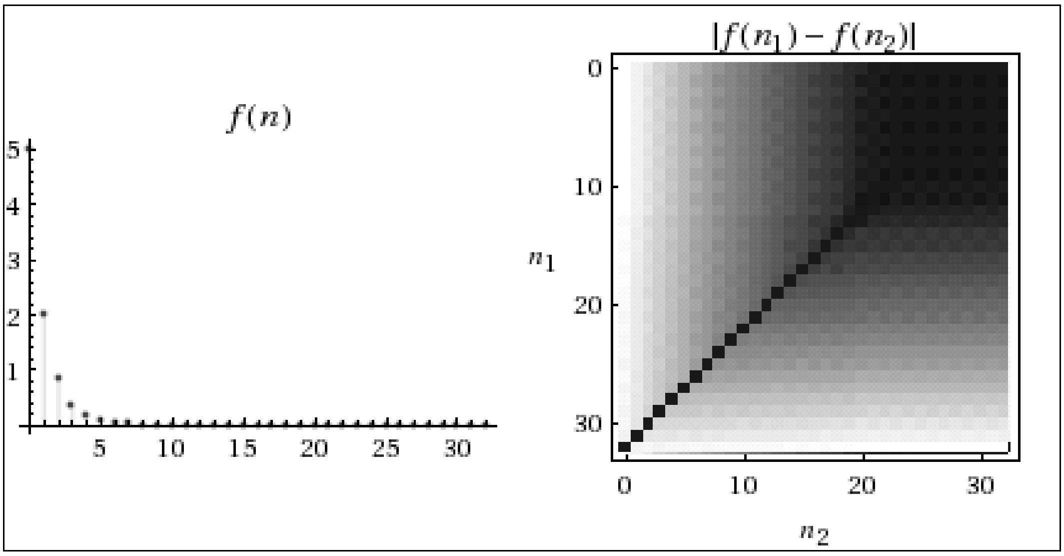
$u_0 = c_1 + c_2 = 5$; $u_1 = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} = 2$, lo que ofrece: $c_1 = 2$ y $c_2 = 3$, por lo que la solución particular pedida será:

$$u_p = 2 \cdot (1/2)^n + 3 \cdot (1/3)^n = \boxed{\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^{n-1}} = f(n)}$$

con los siguientes valores:

n	0	1	2	3	4
$f(n)$	5	2	0.833333	0.361111	0.162037

y la representación gráfica de valores y recurrencia siguiente:



Ejemplo 10

Hállese la solución particular de la ecuación homogénea, que cumple las siguientes condiciones:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0,\ \forall n\in \mathbf{N},\ \text{con: } a_0 = 1 \text{ y } a_1 = 2.$$

Solución:

Primero resolvemos la ecuación como en los ejercicios anteriores para calcular la ecuación general; la ecuación característica es: $r^2 - 5r + 6 = 0$, y sus raíces $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$, y, por tanto, la solución general será:

$$a_n = c_1\cdot 2^n + c_2\cdot 3^n = f(n).$$

Para hallar la solución particular que corresponde a las condiciones dadas, se hace que se cumplan dichas condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = c_1\cdot 2^0 + c_2\cdot 3^0 = 1 \\ a_1 = c_1\cdot 2^1 + c_2\cdot 3^1 = 2 \end{array}\right\}$$

de este sistema despejamos las constantes c_1 y c_2, de donde $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, y, por tanto, la solución particular buscada será:

$$a_p = 1\cdot 2^n + 0\cdot 3^n = \boxed{2^n}.$$

Ejemplo 11

Hállese la solución particular de la ecuación recurrente homogénea, que cumple las siguientes condiciones:

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0,\ \forall n\in \mathbf{N},\ \text{con: } a_0 = 1 \text{ y } a_1 = 0.$$

Solución:

Como en los ejercicios anteriores, veamos que la ecuación característica es: $r^2 + 3r + 1 = 0$, y sus raíces:

$$r_1 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

y la solución general:

$$a_n = c_1\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n = f(n).$$

Para hallar la solución particular se hace que se cumplan las condiciones dadas, o sea:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = c_1\left(-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1 \\ a_1 = c_1\left(-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 0 \end{array}\right\}$$

y de este sistema despejamos las constantes c_1 y c_2, de donde resulta que:

$$c_1 = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10},$$

y, por lo tanto, la solución particular buscada será:

$$\boxed{a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n} = f(n).$$

2.2.3. Raíces reales múltiples

En el caso de que una de las raíces sea doble, por ejemplo, las r_i, se tiene que r_i^n y r_i^n no son linealmente independientes sino iguales, y se hace necesario encontrar una segunda solución, aunque se comprueba que: $(c_i + c_{i+1}\cdot n)r_i^n$ es una solución particular de la ecuación recurrente planteada.

Del mismo modo, si r_i es raíz triple, se tendrá que:

$$(c_i + c_{i+1}\cdot n + c_{i+2}\cdot n^2)r_i^n,$$

es también una solución particular, y así sucesivamente según el grado de multiplicidad de la raíz en cuestión.

Se ha de tener en cuenta, en definitiva, que si alguna de las raíces es múltiple, las soluciones correspondientes a cada una de ellas deberían aparecer en la combinación lineal tantas veces como indicase su orden o grado de multiplicidad, siendo necesario multiplicar cada solución por *n* cuando aparezca por segunda vez, por *n^2* si aparece por tercera vez, y así sucesivamente, hasta completar en cada caso el número de veces que aparece.

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos representativos de lo aquí expuesto:

Ejemplo 1

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0, \ \forall n \geq 0, \text{ con } a_0 = 1 \text{ y } a_1 = 1.$$

Solución:

La ecuación característica, que tiene una raíz doble, es:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \ ; \quad r = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right. \ ; \text{ y la solución general es:}$$

$a_n = C_1 \cdot 1^n + n \cdot C_2 \cdot 1^n = C_1 + n \cdot C_2 = f(n)$; con las condiciones dadas:

$a_0 = C_1 = 1$; $a_1 = C_1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 0$, con lo que resultará:

$\boxed{a_p = 1}$ (sucesión constante).

Ejemplo 2

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+3} - 5u_{n+2} + 8u_{n+1} - 4u_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación característica es: $r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$, con las raíces reales: $r_1 = 1$; $r_2 = r_3 = 2$ (doble), con lo que la solución general buscada será:

$$\boxed{u_n = c_1 + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot n \cdot 2^n = c_1 + 2^n(c_2 + c_3 \cdot n) = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2, c_3 \in \Re$$

Ejemplo 3

Resuélvase la siguiente ecuación recurrente homogénea:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

Se trata de una ecuación de segundo orden; para resolverla, primero escribimos su ecuación característica, que será: $r^2 - 4r + 4 = 0$, a continuación calculamos sus raíces: $r_1 = 2$ y $r_2 = 2$ (que forman una raíz real doble), luego la solución general será de la forma:

$$\boxed{a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n = 2^n(c_1 + c_2 \cdot n) = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 4

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+3} - 9u_{n+2} + 27u_{n+1} - 27u_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación característica es: $r^3 - 9r^2 + 27r - 27 = 0 \leftrightarrow (r - 3)^3 = 0$, puesto que, operando por Ruffini, con $r_1 = 3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & 27 & -27 \\ 3) & & 3 & -18 & 27 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array} \rightarrow r^2 - 6r + 9 = 0; \qquad r = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 3 = r_2 \\ 3 = r_3 \end{array} \right. ;$$

luego la solución general, con la raíz real triple 3, sería:

$$\boxed{u_n = (c_1 + c_2 \cdot n + c_3 \cdot n^2)3^n},\ \forall\ c_1, c_2, c_3 \in \Re$$

Ejemplo 5

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$y_{n+4} - 2y_{n+2} + y_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación característica es: $r^4 - 2r^2 + 1 = 0$, que se trata de una ecuación bicuadrada, por lo que haciendo la substitución: $r^2 = \lambda$, se obtienen, al cabo, las 4 raíces características: $r_1 = r_2 = 1$; $r_3 = r_4 = -1$, con lo que la solución general de la ecuación en diferencias propuesta resulta ser la siguiente:

$$\boxed{y_n = c_1 + c_2 \cdot n + c_3(-1)^n + c_4 \cdot n \cdot (-1)^n},\ \forall\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \Re$$

Ejemplo 6

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 9u_{n+1} = 0,\ \forall n \in \mathbf{N},\ \text{con: } u_1 = 1 \text{ y } u_2 = 2.$$

Solución:

La ecuación dada es equivalente a: $u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0$, cuya ecuación característica: $r^2 - 6r + 9 = 0$, tiene la raíz: $r = 3$, doble. Luego la solución general será: $u_n = C_1 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n$, $\forall\ C_1, C_2 \in \Re$.

Por lo que se refiere a la solución particular buscada, veamos que:

$$\left.\begin{array}{r} u_1 = 3C_1 + 3C_2 = 1 \\ u_2 = 9C_1 + 18\, C_2 = 2 \end{array}\right\}$$

, de donde se deduce que: $C_1 = 4/9$ y $C_2 = -1/9$, y la solución particular será:

$$\boxed{u_p = \frac{4}{9}3^n - \frac{1}{9}n \cdot 3^n = 3^n \cdot \frac{4-n}{9} = f(n)}$$

Ejemplo 7

Resuélvase la siguiente ecuación recurrente:

$$9a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

Su ecuación característica es: $9r^2 - 6r + 1 = 0$, y sus raíces son: $r_1 = 3$ y $r_2 = 3$ (raíz doble), entonces la solución general será de la forma:

$$\boxed{a_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot n \cdot 3^n},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 8

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$u_{n+3} - 5u_{n+2} + 3u_{n+1} + 9u_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, y determinar la solución particular tal que:

$$u_0 = 3;\ u_1 = 5;\ u_2 = 19.$$

Solución:

La ecuación característica: $r^3 - 5r^2 + 3r + 9 = 0$ tiene por soluciones –1 y 3 (doble), luego la solución general es: $u_n = c_1(-1)^n + c_2 \cdot 3^n + +c_3 \cdot n \cdot 3^n = f(n)$.

Haciendo ahora respectivamente: n = 0, n = 1 y n = 2, se tendrá el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 = c_1 + c_2 \\ 5 = -c_1 + 3c_2 + 3c_3 \\ 19 = c_1 + 9c_2 + 18\ c_3 \end{cases}$$

, de donde se obtienen los valores: $c_1 = 1$; $c_2 = 2$ y $c_3 = 0$, por lo que la solución particular buscada será:

$$\boxed{u_p = (-1)^n + 2 \cdot 3^n = f(n)}.$$

Ejemplo 9

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+4} + u_{n+3} - 3u_{n+2} -5u_{n+1} - 2u_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

En este caso, la ecuación característica: $r^4 + r^3 - 3r^2 - 5r - 2 = 0$,

admite las soluciones reales (una de ellas triple): $r_1 = r_2 = r_3 = -1$; $r_4 = 2$, con lo que se tendrá la solución general buscada siguiente:

$$\boxed{u_n = (C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \cdot n^2) \cdot (-1)^n + C_4 \cdot 2^n = f(n)},\ \forall\ C_1, C_2, C_3\ , C_4 \in \Re$$

Ejemplo 10

Hállese la solución particular de la ecuación recurrente homogénea, que cumple las siguientes condiciones:

$$4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N},\ \text{con: } a_0 = 1 \text{ y } a_1 = -1.$$

Solución:

Procediendo como en los ejercicios anteriores la ecuación característica es: $4r^2 - 4r + 1 = 0$. Operando por aplicación de la regla de Ruffini se tendrá que:

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \left\langle \begin{array}{l} 1/2 = r_1 \\ 1/2 = r_2 \end{array} \right.$$

Así pues, sus raíces son $r_1 = ½$ y $r_2 = ½$ (que forman una raíz doble), y, por tanto, la solución general resulta ser:

$$a_n = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \cdot n\left(\frac{1}{2}\right)^n = f(n).$$

Para hallar la solución particular que corresponde a las condiciones dadas, se hace que se cumplan dichas condiciones, esto es:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + c_2 n\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \\ a_1 = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + c_2 n\left(\frac{1}{2}\right)^1 = -1 \end{array}\right\}$$

y de este sistema despejamos las constantes c_1 y c_2, de donde resultan sus valores: $c_1 = 1$ y $c_2 = -3$, y, por tanto, la solución particular buscada será:

$$\boxed{a_n = 1\left(\frac{1}{2}\right)^n + (-3)n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-3n}{2^n} = f(n)}.$$

Ejemplo 11

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 12u_{n+1} - 8u_n = 0, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación característica correspondiente es: $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$. Operando por aplicación de la regla de Ruffini, se tendrá que, con $r_1 = 2$:

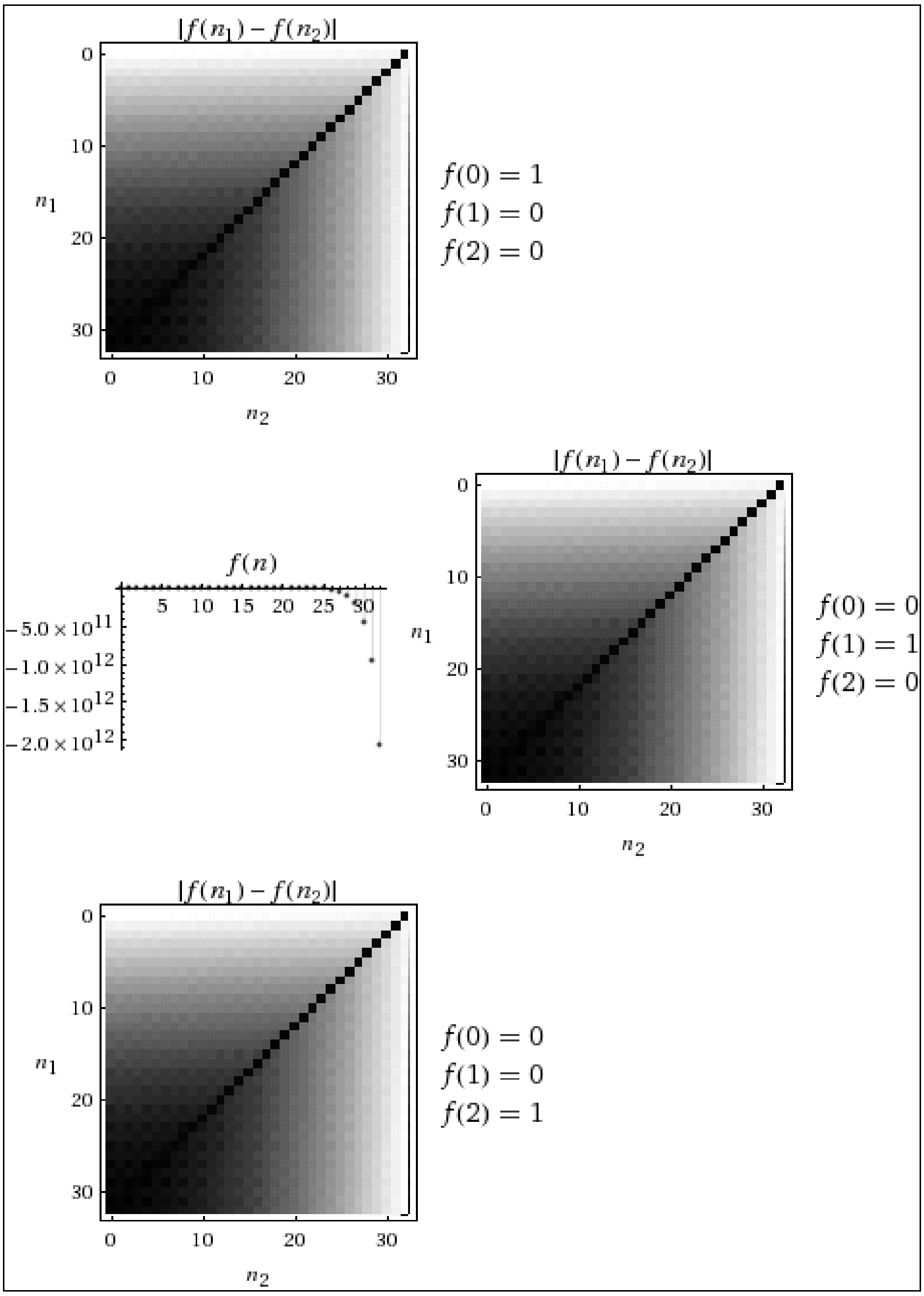
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 12 & -8 \\ 2) & & 2 & -8 & 8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array} \rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0;$$

, que proporciona las raíces reales: $r = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2 = r_2 \\ 2 = r_3 \end{array} \right.$;

con las raíces: $r_1 = r_2 = r_3 = 2$ (triple), por lo que la solución general vendrá dada por la expresión:

$$\boxed{u_n = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2) \cdot 2^n = f(n)}, \ \forall \ c_1, c_2, c_3 \in \Re.$$

Y ello con la representación gráfica de valores y recurrencia siguiente:



2.2.4. Raíces complejas

Si una de las raíces de la ecuación característica es compleja (pura o mixta), expresada en la forma binómica general: a + bi, también existirá la conjugada: a – bi, con módulo r y argumento θ. Escritas en forma polar, resultará la expresión (véase el capítulo 9 de “Complementos”):

$$c_1(a + bi)^n + c_2(a - bi)^n = c_1 \cdot r^n(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)^n + c_2 \cdot r^n(\cos\theta - i \cdot \text{sen}\,\theta)^n =$$

$$= c_1 \cdot r^n(\cos n\theta + i \cdot \text{sen}\, n\theta) + c_2 \cdot r^n(\cos n\theta - i \cdot \text{sen}\, n\theta)$$

Elegidos convenientemente los números complejos c_1 y c_2, se obtiene una solución general de la ecuación recurrente de la forma:

$$r^n(c_1 \cdot \cos n\theta + c_2 \cdot \text{sen } n\theta) \quad (1),$$

aunque también se pueden emplear las expresiones alternativas siguientes:

$$u_n = C \cdot r^n \cdot \cos(n\theta + \phi) \quad (2) \text{ o bien: } u_n = (\alpha + i\beta) \cdot r_1^n + (\alpha - i\beta) \cdot r_2^n \quad (3)$$

En el caso de obtenerse raíces complejas múltiples se opera como en el caso ya visto de las raíces reales múltiples, esto es, combinando los procedimientos anteriores.

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos representativos:

Ejemplo 1

a) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+4} + 2u_{n+2} + u_n = 0, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

b) Resumir las distintas formas que puede tener una ecuación en diferencias finitas, lineal, homogénea y de coeficientes constantes, según las raíces correspondientes de la ecuación característica asociada.

Solución:

a) La ecuación característica asociada: $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$ tiene las raíces complejas i y –i (ambas dobles). Así pues la solución general es:

$$\boxed{u_n = A_1 \text{sen } \frac{n\pi}{2} + B_1 \cos \frac{n\pi}{2} + n \cdot (A_2 \text{sen } \frac{n\pi}{2} + B_2 \cos \frac{n\pi}{2})}$$

, que también puede expresarse de otras formas como veremos posteriormente en otro ejercicio de este mismo capítulo.

b)

- Si $\mathbf{r_0}$ es una solución real de la ecuación característica, entonces sucede que: $\mathbf{n^{h-1} \cdot r_0^n}$ es una solución particular de la ecuación en diferencias, siendo h el orden de multiplicidad de la expresada solución.

- Si ρ**(cos** α **+ i·sen** α**)** y ρ**(cos** α **– i·sen** α**)** son raíces complejas de la ecuación característica, entonces $\mathbf{n^{h-1}}$**sen n**α y $\mathbf{n^{h-1}}$**cos n**α son soluciones particulares de la ecuación en diferencias, siendo h el orden o grado de multiplicidad de las soluciones.

- La solución general se obtiene formando una combinación lineal, por el método de los coeficientes indeterminados, con todas las soluciones particulares asociadas a las distintas soluciones de la ecuación característica.

Ejemplo 2

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación característica es: $r^2 + 2r + 2 = 0$, y sus raíces características son las complejas conjugadas: $r_1 = -1+i$ y $r_2 = -1-i$, cuyo módulo es: $\rho = \sqrt{2}$ y el argumento, que se halla en el segundo cuadrante del círculo, es:

$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ = 135º. Por consiguiente, la solución general buscada será:

$$\boxed{y_n = c_1(\sqrt{2})^n \cdot \cos\frac{3\pi n}{4} + c_2(\sqrt{2})^n \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi n}{4} = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 3

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+3} - a_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

En este caso, la ecuación característica es: $r^3 - 1 = 0$, y se tendrán las tres raíces características cúbicas de la unidad:

$$r_1 = 1;\ r_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3};\ r_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3};$$

y la ecuación solicitada tendrá como solución general:

$$\boxed{a_n = c_1 + c_2\cdot\cos\frac{2\pi n}{3} + c_3\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{3} = f(n)},\ \forall\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ \forall\ c_1, c_2, c_3 \in \Re$$

Ejemplo 4

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación característica correspondiente: $r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0$ tiene las soluciones: $r_1 = 2$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$. Por lo que se refiere a las dos raíces complejas obtenidas, veamos los coeficientes respectivos de la parte real e imaginaria, y tendremos que: $\alpha = 0$, $\beta = 1$, con lo que el módulo y el argumento serán:

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1;\ \operatorname{tg}\theta = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{0} = \infty\text{, y entonces: } \theta = \operatorname{arc\,tg}\infty = \frac{\pi}{2}$$

La solución general de la ecuación dada pues, según hemos visto en la teoría correspondiente, se puede expresar en cualquiera de las tres formas siguientes:

$$u_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2} + \phi\right) \quad (1)$$

$$u_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot \text{sen}\,\frac{n\pi}{2} + C_3 \cdot \cos\frac{n\pi}{2} \quad (2)$$

$$u_n = C_1 \cdot 2^n + (C_2 + i \cdot C_3) \cdot i^n + (C_2 - i \cdot C_3) \cdot (-i)^n \quad (3)$$

y como siempre $\forall C_i \in \Re$.

Ejemplo 5

Resuélvase la siguiente ecuación recurrente homogénea:

$$a_{n+4} + a_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

Escribimos la ecuación característica: $r^4 + 1 = 0$, y sus raíces resultan ser:

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ \ r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ \ r_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ \ r_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Procediendo como en el ejercicio anterior calculamos el módulo y el argumento, respectivamente ρ y θ, para cada par de raíces conjugadas. O sea:

$$\rho_1 = \frac{1}{2};\ \ \theta_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad \rho_2 = \frac{1}{2};\ \ \theta_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

La solución general pedida será, en definitiva, de la forma:

$$a_n = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{sen}\left(n\frac{\pi}{4}\right) + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \ldots +$$
$$+ c_3\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{sen}\left(n\frac{3\pi}{4}\right) + c_4\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(n\frac{3\pi}{4}\right) = f(n)$$

, y como siempre $\forall\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \Re$

Ejemplo 6

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+2} + 6a_{n+1} + 25a_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

Se escribe su ecuación característica, que es: $r^2 + 6r + 25 = 0$, y sus raíces resultan ser: $r_1 = -3+4i$ y $r_2 = -3-4i$, con los coeficientes: $\alpha = -3$ y $\beta = 4$.

Cuando las raíces son complejas, siempre aparecen en parejas de números complejos conjugados por ser los coeficientes de la ecuación reales. En este caso, tal como hemos visto en la teoría, resulta habitual expresar las soluciones correspondientes a cada par conjugado de la forma:

$$c_i\rho^n \text{ sen } (n\theta) + c_j\rho^n \cos (n\theta),$$

siendo ρ el módulo y θ el valor absoluto del argumento.

Calculamos en este caso ρ (módulo) y θ (argumento), con lo que:

$$\rho = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \quad \text{y} \quad \theta = \text{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right),$$

y la solución general buscada será de la forma:

$$\boxed{a_n = c_1 \cdot 5^n \text{ sen } (n\theta) + c_2 \cdot 5^n \cos (n\theta) = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

NOTA: En este caso particular no se da el valor del argumento (θ = -53,1301º) por no resultar un ángulo fácilmente expresable.

Ejemplo 7

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+3} - 3u_{n+2} + 4u_{n+1} - 2u_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación característica correspondiente es: $r^3 - 3r^2 + 4r - 2 = 0$, que admite las raíces: $r_1 = 1$, $r_2 = 1+i$, $r_3 = 1-i$, por lo que la solución general tendrá las tres formas alternativas siguientes (ver la teoría correspondiente):

$$\boxed{u_n = c_1 + (\sqrt{2})^n \left(c_2 \cdot \cos\frac{n\pi}{4} + c_3 \cdot \text{sen}\frac{n\pi}{4}\right)} = c_1 + c_2 \cdot (\sqrt{2})^n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{4} + \phi\right) =$$

$$= c + (\alpha + i\beta)\cdot(1+i)^n + (\alpha - i\beta)\cdot(1-i)^n = f(n), \text{ y como siempre } \forall\ n \in \{N\} \text{ y también}$$

$$\forall\ c_1, c_2, c_3 \in \Re$$

Ejemplo 8

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+4} - 2u_{n+3} + 2u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

En este caso, la ecuación característica tiene por raíces:

$r_1 = r_2 = 1$ (doble); $r_3 = i$; $r_4 = -i$, luego la solución general tendrá las tres formas alternativas siguientes (ver la teoría correspondiente):

$$\boxed{u_n = c_1 + c_2 n + c_3 \cdot \cos \frac{n\pi}{2} + c_4 \cdot \text{sen}\, \frac{n\pi}{2}} = c_1 + c_2 n + c_3 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \phi\right) =$$

$$= c_1 + c_2 n + (\alpha + i\beta)\cdot i^n + (\alpha - i\beta)\cdot(-i)^n = f(n), \text{ y como siempre } \forall\ n \in \{N\} \text{ y también}$$

$$\forall\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \Re$$

2.3. ECUACIÓN LINEAL NO HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES Y ORDEN K

2.3.1. Introducción

Sea la ecuación lineal no homogénea o completa de coeficientes constantes:

$$a_0 \cdot u_{n+k} + a_1 \cdot u_{n+k-1} + a_2 \cdot u_{n+k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot u_{n+1} + a_k \cdot u_n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot u_{n+k-i} = b_n$$

Sea u_n^* la solución de la correspondiente ecuación homogénea:

$$a_0 \cdot u_{n+k} + a_1 \cdot u_{n+k-1} + a_2 \cdot u_{n+k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot u_{n+1} + a_k \cdot u_n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot u_{n+k-i} = 0$$

y sea u_p una solución particular de la ecuación completa dada. Entonces, se verifica que la solución general de la ecuación buscada será la suma de las soluciones anteriores, esto es: $u_n = u_n^* + u_p$, como sucedía también con las ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas.

Por otra parte, se cumplen las siguientes proposiciones que admitiremos sin demostración: a) Si u_n y v_n son soluciones de la ecuación no homogénea, $(u_n - v_n)$ lo es de la homogénea asociada; b) si u_n es solución de la no homogénea y v_n lo es de la homogénea, entonces $(u_n + v_n)$ lo es de la no homogénea.

Obviamente, como sucedía también con las ecuaciones diferenciales, según la naturaleza analítica de la función del segundo miembro habrá que ensayar diferentes tipos de soluciones particulares, cuestión ésta que desarrollaremos en los epígrafes siguientes para los casos más frecuentes que se pueden presentar en la práctica.

Existen diversos métodos para calcular soluciones particulares de la ecuación completa. El más común es el de los *coeficientes indeterminados*, aunque también se emplea el de *variación de parámetros o constantes* (este segundo será objeto de tratamiento en posteriores epígrafes de este mismo capítulo).

Por lo que se refiere al primero de ellos, veamos que dicho método consiste en probar como posible solución de la ecuación completa una combinación lineal de las funciones que forman el término independiente b_n con los coeficientes indeterminados y, posteriormente, de las ecuaciones que resultan de identificar los coeficientes de los términos semejantes, calcular los coeficientes de la combinación lineal. Además, hay que tener en cuenta que si alguna de las funciones monomio que forman el término independiente es, a la vez, solución de la ecuación homogénea con un cierto orden de multiplicidad (las simples tienen orden de multiplicidad 1), dicha función debe entrar en la combinación lineal que forma la solución multiplicada por n^p, siendo p dicho orden o grado de multiplicidad.

Para obtener la solución general de la ecuación de recurrencia realizamos los siguientes pasos:

- Resolvemos la relación homogénea asociada como se conoce (sin sacar las constantes), pasos anteriormente dados, y así obtenemos la solución homogénea asociada (u_n*).
- Ahora iremos a obtener la solución particular de la ecuación completa. Lo primero es ver la naturaleza analítica la función dada en b_n y observamos la tabla siguiente para ver cuál es el ensayo de la u_p más conveniente, a saber:

b_n	u_p
c, constante	A, constante
n	$A_1n + A_0$
n^2	$A_2n^2 + A_1n + A_0$
n^t, $t \in \mathbf{Z}^+ = \mathbf{N}$	$A_tn^t + A_{t-1}n^{t-1} + ... + A_1n + A_0$
r^n, $r \in \mathbf{R}$	Ar^n
n^tr^n	$r^n\ (A_tn^t + A_{t-1}n^{t-1} + ... + A_1n + A_0)$

Solo faltaría (en su caso, si se trata de un problema de valor inicial o de contorno) calcular los valores constantes c_i (de la solución homogénea asociada), mediante un sencillo sistema de ecuaciones, substituyendo con las condiciones iniciales dadas. Y con esto, tenemos ya la solución general buscada de la relación de recurrencia planteada.

Veamos, a continuación, los diferentes casos que se pueden plantear en función de la naturaleza de la b_n, con mayor especificidad.

2.3.2. Si b_n es un polinomio

En este caso, se ensaya un polinomio genérico de igual o menor grado que se obtiene por aplicación del método de los coeficientes indeterminados. Los coeficientes de este polinomio son las incógnitas a determinar, lo que se puede llevar a efecto substituyendo en el ecuación en diferencias dada. Si se obtuviese un sistema incompatible (problema de "resonancia"), se ensayaría un polinomio de grado una unidad mayor. En general, si en la solución de la homogénea figurasen términos de un polinomio, se debería multiplicar el polinomio a ensayar por una potencia conveniente de *n* para que no resultasen términos linealmente dependientes.

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos representativos:

Ejemplo 1

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = n,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación característica es: $r^2 - r + 1 = 0$ cuyas soluciones complejas son: $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i = \cos\frac{\pi}{3} \pm i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$, luego la solución de la ecuación homogénea es:

$$u_n^* = c_1 \cdot \cos\frac{n\pi}{3} + c_2 \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}$$

Una solución particular de la ecuación completa será de la forma polinómica genérica de primer grado: $u_p = An + B$. Substituyendo en la ecuación inicial, se tendrá que:

$$A(n+2) + B - A(n+1) - B + An + B = n \leftrightarrow An + A + B = n \leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}.$$

Luego la solución general de la ecuación dada es:

$$\boxed{u_n = u_n^* + u_p = c_1 \cdot \cos\frac{n\pi}{3} + c_2 \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} + n - 1 = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 2

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 3n + 5,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

Como hemos visto en ejercicios anteriores, la ecuación homogénea es: $a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$, de ecuación característica: $r^2 - 4r + 1 = 0$, y cuyas raíces reales son:

$$r_1 = 2 + \sqrt{3} \quad \text{y} \quad r_2 = 2 - \sqrt{3}$$

Por tanto, la solución de la homogénea o incompleta será:

$$a_n{}^* = c_1(2+\sqrt{3})^n + c_2(2-\sqrt{3})^n$$

En este caso, para calcular una solución particular de la completa probamos con el polinomio genérico de primer grado de la forma an + b = a_p. Substituyendo en la ecuación completa obtenemos:

$$a(n + 2) + b - 4[a(n + 1) + b] + an + b = 3n + 5.$$

Simplificando:

$-2an - 2a - 2b = 3n + 5$, e identificando coeficientes indeterminados:

$$\left.\begin{array}{l} -2a = 3 \\ -2a - 2b = 5 \end{array}\right\}$$

de donde: $a = -\frac{3}{2}$ y b = -1.

La solución general de la ecuación completa quedará, entonces, así:

$$\boxed{a_n = a_n{}^* + a_p = c_1(2+\sqrt{3})^n + c_2(2-\sqrt{3})^n - \frac{3}{2}n - 1}, \ \forall\, c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 3

Resuélvase la ecuación recurrente: $u_{n+1} - 2u_n = 1 + n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Solución:

La ecuación característica de la homogénea es: r – 2 = 0, con lo que la solución de la homogénea será: $u_n{}^* = c \cdot 2^n$.

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la ecuación completa del tipo: $u_p = an + b$, que es un polinomio genérico de primer grado, por lo que substituyendo en la ecuación inicial se tendrá:

$$a(n + 1) + b - 2an - 2b = -an + a - b = n + 1, \text{ de donde:}$$

a = -1 y b = -2, por lo que: $u_p = -n - 2$, y la solución general será:

$$\boxed{u_n = u_n{}^* + u_p = c \cdot 2^n - n - 2 = f(n)}$$

Ejemplo 4

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = n^2, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

Procediendo como en el ejercicio anterior, la homogénea será: $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$, de ecuación característica: $r^2 - r - 1 = 0$, cuyas raíces son:

$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Por tanto, la solución de la homogénea será:

$$a_n^* = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para calcular una solución particular de la completa se prueba con un polinomio de la forma $an^2 + bn + c$. Substituyendo en la ecuación completa:

$$a(n + 2)^2 + b(n + 2) + c - [a(n + 1) + b (n + 1) + c] - (an^2 + bn + c) = n^2.$$

Simplificando e identificando coeficientes indeterminados, resulta que:

$$-an^2 + 2an + 3a + bn + 3b + c = n^2 \text{ ; de donde:}$$

$$a = -1 \text{ ; } \quad b = 2 \text{ ; } \quad c = -3 \text{ ;}$$

por tanto, la solución general buscada de la completa será:

$$\boxed{a_n = a_n^* + a_p = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - n^2 + 2n - 3 = f(n)}, \ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 5

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias:

$$4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 2, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

De forma análoga a los ejercicios anteriores, la homogénea será:

$4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$, de ecuación característica: $4r^2 - 4r + 1 = 0$, y cuyas raíces son:

$$r_1 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{1}{2} \text{ (raíz real doble).}$$

Por tanto, la solución de la homogénea será:

$$a_n^* = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \cdot n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En este caso particular, para calcular una solución particular de la completa basta con probar con una constante “k” cualquiera.

Substituyendo en la ecuación completa se obtiene que:

$$4k - 4k + k = 2,$$

De donde a_p = k = 2. Y la solución general de la completa será:

$$\boxed{a_n = a_n^* + a_p = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \cdot n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 = 2^{-n}(c_1 + nc_2) + 2 = f(n)},\ \forall\ c_1,\ c_2 \in \Re$$

Ejemplo 6

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+3} + 3a_{n+2} - 4a_n = 9n + 10,\ \forall n \geq 0.$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea es: $c_1 + c_2 \cdot (-2)^n + c_3 \cdot n(-2)^n$. En cuanto a la solución particular de la no homogénea, puesto que la familia polinómica de primer grado An + B contiene una solución de la homogénea, probamos con $n(An + B) = An^2 + Bn$. Una vez efectuadas las operaciones pertinentes, se tiene que $(19/48)n^2 - (11/48)n$ es una solución particular del tipo buscado, y en consecuencia se obtiene la solución general de la completa, a saber:

$$\boxed{a_n = c_1 + c_2(-2)^n + c_3 \cdot n(-2)^n + (19/48) \cdot n^2 - (11/48)n = f(n)}\ \forall\ c_1,\ c_2\ ,\ c_3 \in \Re$$

Ejemplo 7

Resuélvase la ecuación recurrente: $u_{n+2} + u_n = 1 + n,\ \forall n \in \mathbf{N}$.

Solución:

En este caso, la ecuación característica es: $r^2 + 1 = 0$, de la que se obtienen las raíces complejas: $r_1 = i$ y $r_2 = -i$, con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, o bien:

$$r_1 = \cos(\pi/2) + i \cdot \text{sen}(\pi/2) \quad \text{y también: } r_2 = \cos(\pi/2) - i \cdot \text{sen}(\pi/2)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea será:

$$u_n^* = c_1 \cdot \cos\frac{n\pi}{2} + c_2 \cdot \text{sen}\frac{n\pi}{2}$$

A continuación, se trata de ensayar una solución particular del mismo grado que b_n, esto es: $u_p = an + b$, y substituir en la ecuación inicial, de lo que resultará, una vez realizadas las operaciones oportunas: a = ½, b = 0, por lo que la solución general buscada será:

$$\boxed{u_n = u_n^* + u_p = c_1 \cdot \cos\frac{n\pi}{2} + c_2 \cdot \text{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{n}{2} = f(n)},\ \forall\ c_1,\ c_2 \in \Re$$

Ejemplo 8

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 8u_n = 6n - 5,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

Se trata, como puede verse, de una ecuación completa o no homogénea, en que el segundo miembro b_n es una función polinómica de primer grado. En su consecuencia, resolveremos, en principio, la homogénea, con lo que la ecuación característica será: $r^2 - 6r + 8 = 0$, y la solución de la homogénea será: $u_n^* = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot 2^n$. A continuación, se trata de ensayar una solución particular del mismo grado que b_n, esto es: $u_p = an + b$.

Substituyendo ahora en la ecuación inicial se tendrá que:

$$a(n+2) + b - 6[a(n+1) + b] + 8(an + b) = 6n - 5$$

Agrupando términos y simplificando, se identifican los coeficientes del siguiente modo: $a = 2$ y $b = 1$, con lo que: $u_p = 2n + 1$. De este modo, la solución general buscada será:

$$\boxed{u_n = u_n^* + u_p = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot 2^n + 2n + 1 = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Podría haber sucedido que al ensayar un polinomio del mismo grado de b_n se obtuviese un sistema incompatible; entonces, tal como ya se ha explicado en la teoría, se deberá investigar un polinomio de grado una unidad mayor.

Ejemplo 9

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+3} = 4u_{n+2} + 3u_{n+1} - 18u_n + 24n + 20,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación homogénea correspondiente será:

$$u_{n+3} - 4u_{n+2} - 3u_{n+1} + 18u_n = 0, \text{ cuya ecuación característica:}$$

$$r^3 - 4r^2 - 3r + 18 = 0, \text{ tiene las raíces reales: } r_1 = r_2 = 3, \text{ y } r_3 = -2.$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea será:

$$u_n^* = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot 3^n + c_3(-2)^n$$

Determinemos ahora una solución particular de la ecuación completa, por lo que ensayaremos una solución polinómica genérica de primer grado del tipo: $u_p = an + b$, con lo que se tendrá:

$a(n+3) + b – 4[a(n+2) + b] – 3[a(n+1) + b] + 18(an + b) = 24n + 20$, de donde se deduce que: $a = 2$ y $b = 3$, por lo que: $u_p = 2n + 3$, y la solución general buscada de la ecuación propuesta es la siguiente:

$$\boxed{u_n = u_n^* + u_p = (c_1 + c_2\cdot n)\cdot 3^n + c_3(-2)^n + 2n + 3 = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2, c_3 \in \Re$$

Ejemplo 10

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+2} + a_{n+1} – 2a_n = n + 5,\ \forall n \geq 0.$$

Solución:

La solución de la homogénea es $a_n^* = c_1 + c_2\cdot(-2)^n$. Como la familia polinómica de primer grado $a_p = An + B$ contiene a una solución de la homogénea, buscamos una solución particular de la no homogénea del tipo: $n(An + B) = An^2 + Bn$; se tiene que $a_p = (1/6)n^2 + (25/18)n$ es una solución particular del tipo buscado. Por lo tanto, la solución general buscada es:

$$\boxed{a_n = a_n^* + a_p = c_1 + c_2(-2)^n + (1/6)\cdot n^2 + (25/18)n = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 11

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+2} – a_n = n^2,\ \forall n \geq 0, \text{ con: } a_0 = 2 \text{ y } a_1 = 0.$$

Solución:

La solución de la homogénea es: $a_n^* = C_1\cdot 1^n + C_2\cdot(-1)^n = C_1 + C_2\cdot(-1)^n$. En principio, deberíamos buscar una solución particular de la no-homogénea mediante un polinómico genérico de segundo grado del tipo $An^2 + Bn + C$, pero observamos que esta familia contiene una solución de la homogénea. Por lo tanto, probamos con $n(An^2 + Bn + C) = An^3 + Bn^2 + Cn$.

Se obtiene que $a_p = (1/6)n^3 – (1/2)n^2 + (1/3)n$ es una solución particular de la no homogénea, y por lo tanto, la solución general de la no homogénea es:

$$a_n = C_1 + C_2\cdot(-1)^n + (1/6)n^3 – (1/2)n^2 + (1/3)n,\ \forall\ C_1, C_2 \in \Re$$

Aplicando las condiciones iniciales, se tiene que: $C_1 = C_2 = 1$, luego la solución buscada es:

$$\boxed{a_n = 1 + (-1)^n + (1/6)n^3 – (1/2)n^2 + (1/3)n = f(n)}$$

Ejemplo 12

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+2} – 8a_{n+1} + 15a_n = 2n – 2,\ \forall n \geq 0.$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea es:

$$r^2 - 8r + 15 = 0\ ;\quad r = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases};$$

y la solución de la ecuación homogénea es, pues:

$$a^*_n = c_1 \cdot 5^n + c_2 \cdot 3^n.$$

Ensayaremos ahora una solución particular de la ecuación completa del tipo: $a_p = a \cdot n + b$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se tendrá que:

$$a(n + 2) + b - 8[a(n + 1) + b] + 15an + 15b = 2n - 2\ ;$$

$$an + 2a + b - 8an - 8a - 8b + 15an + 15b = 2n - 2\ ;$$

$$8an + 8b - 6a = 2n - 2\ ;\quad \text{o sea:}$$

$$a = \frac{1}{4};\ \ 8b - \frac{3}{2} = -2;\ \ 8b = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{1}{2};\ \ b = -\frac{1}{16};$$

y la solución general buscada será:

$$\boxed{a_n = a^*_n + a_p = c_1 \cdot 5^n + c_2 \cdot 3^n + \frac{n}{4} - \frac{1}{16} = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 13

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 3n + 11,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

Una vez formada la ecuación característica, veamos que la solución de la homogénea es: $u_n^* = c_1 + c_2 \cdot n$. La solución particular de la ecuación completa debería ser un polinomio de primer grado, pero como en la solución de la homogénea figuran términos polinómicos, deberemos multiplicar por n^2 a dicho polinomio, siendo, por tanto, la solución particular a ensayar la siguiente: $u_p = an^2 + bn^3$.

Substituyendo en la ecuación inicial, se obtendrá que:

$$a(n+2)^2 + b(n+2)^3 - 2[a(n+1)^2 + b(n+1)^3] + an^2 + bn^3 = 3n + 11;$$

Simplificando e identificando los coeficientes de los términos de igual grado se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 6b = 3 \\ 2a + 6b = 11 \end{cases}$$

De donde resulta que: a = 4 y b = 1/2, por lo que la solución general pedida será:

$$\boxed{u_n = u_n^* + u_p = c_1 + c_2 \cdot n + 4n^2 + \frac{n^3}{2} = f(n)}, \ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 14

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2n+1, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación característica: $r^2 - 3r + 2 = 0$ tiene por soluciones: $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$, luego la solución de la ecuación homogénea es: $a^*_n = c_1 + c_2 \cdot 2^n$. Para ensayar la solución particular de la completa, puesto que la solución de la homogénea contiene un monomio de grado cero, ensayaremos una función de la forma: $a_p = (An+B)n = An^2 + Bn$, con lo que se obtiene la ecuación:

$$A(n+2)^2 + B(n+2) - 3A(n+1)^2 - 3B(n+1) + 2An^2 + 2Bn = 2n+1.$$

Desarrollando e identificando coeficientes indeterminados, se obtiene el sistema:

$\left.\begin{array}{l} -2A = 2 \\ A - B = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ A = -1, B = -2. Luego la solución general buscada es:

$$\boxed{a_n = a_n^* + a_p = c_1 + c_2 \cdot 2^n - n^2 - 2n = f(n)}, \ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 15

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias:

$$a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 7, \ \forall n \geq 0, \text{ con } a_0 = 1 \text{ y } a_1 = 2.$$

Solución:

La solución general es $a_n = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot n \cdot (-2)^n + 7/9$ (la no homogénea admite como solución particular la sucesión constante 7/9). Aplicando las condiciones iniciales se tiene que: $C_1 = 2/9$, $C_2 = -5/6$, luego la solución particular buscada es:

$$\boxed{a_n = (-2/9) \cdot (-2)^n - (5/6) \cdot n \cdot (-2)^n + 7/9 = f(n)}$$

2.3.3. Si b_n es una función exponencial

Si el segundo miembro de la ecuación es del tipo: $b_n = h \cdot a^n$, se debe ensayar otra función exponencial de la forma: $u_p = C \cdot a^n$, donde la constante C se determina igualando coeficientes. Si *a* fuera una raíz de orden de multiplicidad *p* de la ecuación característica de la homogénea, la solución particular que debe ensayarse será del tipo: $u_p = C \cdot n^p \cdot a^n$, de modo que este término no aparezca en la ecuación complementaria (solución de la ecuación homogénea asociada).

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos representativos:

Ejemplo 1

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias:

$$a_{n+3} – 7a_{n+2} + 16a_{n+1} – 12a_n = 5\cdot 2^n,\ \forall n\in \mathbf{N}.$$

Solución:

Como es una ecuación completa o no homogénea, primero calculamos la solución de la homogénea: $a_{n+3} – 7a_{n+2} + 16a_{n+1} – 12a_n = 0$, de ecuación característica: $r^3 – 7r^2 + 16r – 12 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 3$, $r_2 = 2$ y $r_3 = 2$ (r_2 y r_3 forman una raíz real doble = 2).

Por tanto, la solución de la homogénea es: $a_n^* = c_1\cdot 3^n + c_2\cdot 2^n + c_3\cdot n\cdot 2^n$.

Ahora buscamos una solución particular de la completa probando con un polinomio de la forma $a_p = a\cdot n^2 2^n + b$, por ser 2 una solución doble de la ecuación característica.

Substituyendo en la ecuación completa resultará que:

$$a(n + 3)^2\cdot 2^{(n+3)} + b – 7 [a(n + 2)^2\cdot 2^{(n+2)} + b] +$$
$$+16[a(n + 1)^2\cdot 2^{(n + 1)} + b] – 12[an^2\cdot 2^n + b] = 5\cdot 2^n$$

Simplificando se obtiene: $-a\cdot 2^{n+3} – 2b = 5\cdot 2^n$, e identificando coeficientes, resulta que: $a = -\frac{5}{8}$ y $b = 0$. Y la solución general de la ecuación completa será:

$$\boxed{a_n = a_n^* + a_p = c_1\cdot 3^n + c_2\cdot 2^n + c_3\cdot n\cdot 2^n - \frac{5}{8}n^2\cdot 2^n = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2, c_3 \in \Re$$

Ejemplo 2

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+2} – 6a_{n+1} + 9a_n = 3\cdot 2^n,\ \forall n \geq 0.$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea es:

$$r^2 – 6r + 9 = 0\ ;\quad r = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 36}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right.\ ;$$

y la solución de la homogénea es, pues: $a^*_n = c_1\cdot 3^n + c_2\cdot n\cdot 3^n$.

Investigaremos ahora una solución particular de la completa del tipo: $a_p = A\cdot 2^n$, con lo que sustituyendo en la ecuación inicial se obtiene que:

$$A\cdot 2^{n+2} - 6\cdot A\cdot 2^{n+1} + 9\cdot A\cdot 2^n = 3\cdot 2^n \ ;$$
$$4\cdot A\cdot 2^n - 12\cdot A\cdot 2^n + 9\cdot A\cdot 2^n = A\cdot 2^n = 3\cdot 2^n \ ; \text{ luego:}$$

$A = 3$, y la solución buscada será:

$$\boxed{a_n = a^*_n + a_p = c_1\cdot 3^n + c_2\cdot n\cdot 3^n + 3\cdot 2^n = f(n)}, \ \forall\, c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 3

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+3} - a_{n+2} + 4a_{n+1} - 4a_n = 13\cdot 3^n, \ \forall n \geq 0.$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea es:

$r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0$; $r_1 = 1$; operando según la regla de Ruffini resulta que:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1) & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array} \rightarrow r^2 + 4 = 0\,; \qquad r = \pm\sqrt{-4} = \left\langle \begin{array}{l} 2i = r_2 \\ -2i = r_3 \end{array} \right. ;$$

y la solución de la homogénea en sus diversas formas es, teniendo en cuenta que $\alpha = 0$ y $\beta = 2$:

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2\,; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\beta}{\alpha} = \infty\,; \quad \theta = \frac{\pi}{2}\,;$$

$$a^*_n = C_1 + 2^n\left(C_2\cdot\cos\frac{n\pi}{2} + C_3\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= C_1 + C_2\cdot 2^n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \phi\right) = C_1 + (C_2 + i\cdot C_3)\cdot(2i)^n + (C_2 - i\cdot C_3)\cdot(-2i)^n.$$

Investigaremos ahora una solución particular de la ecuación completa del tipo: $a_p = A\cdot 3^n$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se tiene que:

$$A\cdot 3^{n+3} - A\cdot 3^{n+2} + 4A\cdot 3^{n+1} - 4A\cdot 3^n = 13\cdot 3^n \ ;$$

$$27A\cdot 3^n - 9A\cdot 3^n + 12A\cdot 3^n - 4A\cdot 3^n = 26A\cdot 3^n = 13\cdot 3^n \ ;$$

$A = \frac{1}{2}$, y la solución buscada será:

$$\boxed{a_n = a^*_n + a_p = C_1 + 2^n\left(C_2\cdot\cos\frac{n\pi}{2} + C_3\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3^n}{2}}, \ \forall\, C_1, C_2, C_3 \in \Re$$

Ejemplo 4

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+3} - 3a_{n+2} + 4a_{n+1} + 8a_n = 26\cdot(-1)^n,\ \forall n \geq 0.$$

Solución:

La solución de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$a_n^* = C_1\cdot(-1)^n + C_2\cdot(\sqrt{8})^n\cdot\cos(n\pi/4) + C_3\cdot(\sqrt{8})^n\cdot\operatorname{sen}(n\pi/4).$$

Como $(-1)^n$ es una solución de la homogénea, buscamos soluciones particulares de la no homogénea del tipo $a_p = A\cdot n(-1)^n$; se tiene que $-2n(-1)^n$ es una solución de la no homogénea. En consecuencia, la solución buscada es:

$$\boxed{a_n = a_n^* + a_p = C_1\cdot(-1)^n + C_2\cdot(\sqrt{8})^n\cdot\cos(n\pi/4) + C_3\cdot(\sqrt{8})^n\cdot\operatorname{sen}(n\pi/4) - 2n(-1)^n}$$

, $\forall\ C_1, C_2, C_3 \in \Re$

Ejemplo 5

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 6^n,\ \forall n\in \mathbf{N}.$$

Solución:

Como es una ecuación completa, primero calculamos la solución de la ecuación homogénea: $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$, de ecuación característica: $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r + 1)^3 = 0$, con $r = -1$ (raíz real triple), puesto que operando por aplicación de la regla de Ruffini, se obtiene que, con $r_1 = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow r^2 + 2r + 1 = 0; \qquad r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \begin{cases} -1 = r_2 \\ -1 = r_3 \end{cases}$$

, con lo que la solución de la ecuación homogénea es la siguiente:

$$a_n^* = c_1(-1)^n + c_2\cdot n\cdot(-1)^n + c_3\cdot n^2\cdot(-1)^n = (-1)^n(c_1 + c_2\cdot n + c_3\cdot n^2).$$

Busquemos ahora una solución particular de la ecuación completa, de la forma: $a_p = k\cdot 6^n$, y substituyendo en la ecuación inicial, tendremos que: $k\cdot 6^{n+3} + 3k\cdot 6^{n+2} + 3k\cdot 6^{n+1} + k\cdot 6^n = 6^n$; $216k + 108k + 18k + k = 343k = 1$; de donde: $k = 1/343$. Por consiguiente, la solución general buscada será:

$$\boxed{a_n = a_n^* + a_p = (-1)^n\cdot(c_1 + c_2\cdot n + c_3\cdot n^2) + \frac{6^n}{343} = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2, c_3 \in \Re$$

Ejemplo 6

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$8a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 2^n,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

Semejantemente a los ejercicios anteriores, la ecuación homogénea será: $8a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0$, cuya ecuación característica es: $8r^2 - 6r + 1 = 0$, y cuyas raíces son: $r_1 = ½$ y $r_2 = ¼$,y por tanto, la solución de la homogénea será:

$$a_n{*} = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Para calcular una solución particular de la completa probamos con una función exponencial del mismo tipo que el término independiente, por ejemplo, $a2^n + b = a_p$. Substituyendo en la ecuación completa resultará que:

$$8(a2^{n+2} + b) - 6(a2^{n+1} + b) + a2^n + b = 2^n.$$

Simplificando se obtiene que: $21a2^n + 3b = 2^n$, e identificando coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l} 21a = 1 \\ 3b = 0 \end{array}\right\}$$

de donde: $a = \frac{1}{21}$ y b = 0, hallamos que la solución general buscada de la ecuación completa será:

$$\boxed{a_n = a_n{*} + a_p = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{21}\cdot 2^n = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 7

Sea resolver la ecuación recurrente:

$$u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 5^n,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

Si decidimos aplicar para su resolución el método clásico, veamos que la ecuación característica: $r^2 - 3r + 2 = 0$, proporciona las soluciones reales: $r_1 = 2$ y $r_2 = 1$, luego la solución de la homogénea será:

$$u_n^* = A + B \cdot 2^n$$

La solución particular a ensayar será de la forma: $u_p = C \cdot 5^n$, luego substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$C \cdot 5^{n+2} - 3C \cdot 5^{n+1} + 2C \cdot 5^n = 5^n$$
$$(25C - 15C + 2C)5^n = 5^n$$

de donde se deduce que: 12C = 1, o sea: $C = \frac{1}{12}$; luego la solución general buscada será:

$$\boxed{u_n = u_n^* + u_p = A + B \cdot 2^n + \frac{1}{12} \cdot 5^n = f(n)}, \ \forall \ A, B \in \Re$$

Ejemplo 8

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+3} - 7u_{n+2} + 16u_{n+1} - 12u_n = 2^n, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La solución de la ecuación homogénea es: $u_n^* = c_1 \cdot 3^n + (c_2 + c_3 \cdot n) \cdot 2^n$, y como 2 (base de la función exponencial que figura en el segundo miembro de la ecuación completa) es precisamente una raíz doble de la ecuación característica, la solución particular a ensayar será del tipo: $u_p = c \cdot n^2 \cdot 2^n$, y substituyendo en la ecuación inicial, se tendrá que:

$$c \cdot (n+3)^2 \cdot 2^{n+3} - 7 \cdot c \cdot (n+2)^2 \cdot 2^{n+2} + 16 \cdot c \cdot (n+1)^2 \cdot 2^{n+1} - 12 \cdot c \cdot n^2 \cdot 2^n = 2^n;$$

simplificando y agrupando términos, resulta que: c = -1/8, con lo que la solución general buscada será:

$$\boxed{u_n = u_n^* + u_p = c_1 \cdot 3^n + (c_2 + c_3 \cdot n) \cdot 2^n - \frac{n^2 \cdot 2^n}{8} = f(n)}, \ \forall \ c_1, c_2, c_3 \in \Re$$

2.3.4. Si b_n es una expresión trigonométrica

Éste es un caso bastante menos común que los anteriores. Si el segundo miembro es de la forma *cos an* o bien *sen an*, se ensayará una solución de la forma: A·cos an + B·sen an. Veamos, al respecto de lo expuesto, el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+2} + u_n = \cos n \cdot \pi, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La solución de la homogénea será: $u_n^* = c_1 \cdot \cos \frac{n\pi}{2} + c_2 \cdot \text{sen} \frac{n\pi}{2}$.

Para encontrar una solución particular de la ecuación completa se debe investigar, como se ha dicho, una solución de la forma:

$u_p = A \cdot \cos n \cdot \pi + B \cdot \text{sen } n \cdot \pi$, obteniéndose los valores:

A = ½ y B = 0, por lo que la solución general buscada, será:

$$\boxed{u_n = u_n^* + u_p = c_1 \cdot \cos\frac{n\pi}{2} + c_2 \cdot \text{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{\cos n\pi}{2} = f(n)}, \forall\, c_1, c_2 \in \Re$$

NOTA: En este caso, si el segundo miembro de la ecuación en diferencias finitas planteada fuese de la forma: $\cos n\cdot\frac{\pi}{2}$, o bien: $\text{sen } n\cdot\frac{\pi}{2}$, se habría investigado una solución particular de la forma: $u_p = n(A\cdot\cos n\cdot\frac{\pi}{2} + B\cdot\text{sen } n\cdot\frac{\pi}{2})$, esto es, la solución que habitualmente se ensaya multiplicada por una potencia conveniente de *n*, a fin de que no existan combinaciones lineales indeseables que produzcan fenómenos de *resonancia*.

2.3.5. Si b_n es una combinación lineal de los anteriores

En este caso, se ensayará también una combinación lineal de las soluciones particulares propuestas. Del mismo modo, si el segundo miembro es el producto de una exponencial a^n por un polinomio bastará con ensayar el producto de dicha exponencial por un polinomio del mismo grado, teniendo en cuenta las advertencias realizadas en los epígrafes anteriores.

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos representativos:

Ejemplo 1

Resuélvase la ecuación recurrente: $u_{n+1} - 2u_n = 2^n(1 + n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Solución:

En este caso, se trata de una ecuación recurrente de orden uno. La ecuación característica de la homogénea, igual que en el problema anterior, es: $r – 2 = 0$, con lo que la solución de la homogénea será: $u_n^* = c\cdot 2^n$.

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la ecuación completa del tipo: $u_p = n\cdot 2^n(an + b)$, para no tener problemas de resonancia, por lo que substituyendo en la ecuación inicial y dividiendo por 2^n, se tendrá que:

$$2(n + 1)[a(n + 1) + b] – 2n(an + b) = (n + 1),$$

y al final, identificando coeficientes, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 2b + 1 \\ 2a + 2b = 1 \end{cases}$$

de donde se deduce que: $a = b = 1/4$, por lo que la solución particular resulta ser: $u_p = n\cdot 2^n\cdot\frac{n+1}{4}$, y la solución general buscada será la siguiente:

$$\boxed{u_n = u_n^* + u_p = c\cdot 2^n + n\cdot 2^n\cdot\frac{n+1}{4} = 2^n(c + \frac{n^2+n}{4}) = f(n)}, \forall\, c \in \Re$$

Ejemplo 2

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 4 + 2\cdot 3^n,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

Como en los ejercicios anteriores, la ecuación homogénea será: $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$, de ecuación característica: $r^2 - 4r + 3 = 0$, y cuyas raíces reales son: $r_1 = 3$ y $r_2 = 1$. Por tanto, la solución de la homogénea será:

$$a_n^* = c_1\cdot 3^n + c_2\cdot 1^n = c_1\cdot 3^n + c_2$$

Para buscar una solución particular de la completa se prueba con un polinomio de la forma $n(a3^n + b)$, pues en el término independiente aparecen las dos soluciones de la homogénea (la "1" multiplicada por 4 y la "3^n" multiplicada por 2). Substituyendo en la ecuación completa obtenemos que:

$$(n+2)(a3^{(n+2)} + b) - 4(n + 1)(a3^{(n+1)} + b) + 3n(a3^n + b) = 4 + 2\cdot 3^n,$$

y simplificando: $6a3^n - 2b = 4 + 2\cdot 3^n$, e identificando coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l} 6a = 2 \\ -2b = 4 \end{array}\right\}$$

de donde: $a = \frac{1}{3}$ y b = -2. La solución general de la completa será, pues:

$$\boxed{a_n = a_n^* + a_p = c_1 3^n + c_2 + n\left(\frac{1}{3}3^n - 2\right) = c_1 3^n + c_2 + n3^{n-1} - 2n = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 3

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 1 + 2^n,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación homogénea asociada tiene como solución:

$$a_n^* = c_1\cdot 2^n + c_2\cdot 1^n = c_1\cdot 2^n + c_2$$

En este caso, para buscar una solución particular de la completa, probamos con un polinomio de la forma $a_p = n(a2^n + b)$, por las razones anteriormente citadas. Substituyendo en la ecuación inicial nos queda que:

$$(n + 2)(a2^{(n+2)} + b) - 3(n + 1)(a2^{(n+1)} + b) + 2n(a2^n + b) = 1 + 2^n,$$

y simplificando: $2a\cdot 2^n - b = 1 + 2^n$, e identificando coeficientes resulta:

$$\left.\begin{array}{l} 2a = 1 \\ b = -1 \end{array}\right\}$$

de donde: $a = \frac{1}{2}$ y b = -1. La solución general de la ecuación completa será:

$$\boxed{a_n = a_n* + a_p = c_1 \cdot 2^n + c_2 + n\left(\frac{1}{2}2^n - 1\right) = c_1 \cdot 2^n + c_2 + n \cdot 2^{n-1} - n = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 4

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n + 1,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

La ecuación característica de la homogénea es: $r^2 - 4r + 4 = 0$, y posee las raíces reales: $r_1 = r_2 = 2$ (doble), puesto que operando por aplicación de la regla de Ruffini resulta que:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -4 & 4 \\ 2) & & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array} \quad \rightarrow r - 2 = 0 \rightarrow r_2 = 2$$

por lo que la solución de la homogénea es:

$$y_n* = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n$$

Para ensayar ahora una solución particular de la ecuación completa, lo llevaremos a cabo por partes, o sea, buscaremos la solución para el primer sumando: $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n$, con lo que probaremos: $y_p' = c' \cdot n^2 \cdot 2^n$, ya que la base 2 es también raíz doble de la ecuación característica. Substituyendo en la ecuación inicial llegaríamos a que: $8c' \cdot 2^n = 2^n$, con lo que necesariamente se cumple que: $c' = 1/8 \rightarrow y_p' = (1/8) \cdot n^2 \cdot 2^n$.

Del mismo modo, buscaremos la otra solución particular para la ecuación: $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 1$. En este caso, el término independiente es una constante y, por consiguiente, un polinomio de grado cero. Ensayando, pues, otro polinomio de grado cero, se tendrá: $y_p'' = c''$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial, se llega a que: $c'' - 4c'' + 4c'' = c'' = 1 \rightarrow y_p'' = 1$, y la solución general de la ecuación buscada será:

$$\boxed{y_n = y_n* + y_p' + y_p'' = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n + \frac{1}{8}n^2 \cdot 2^n + 1 = 2^n(c_1 + c_2 \cdot n + \frac{n^2}{8}) + 1 = f(n)},$$

$$\forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

2.4. PROBLEMAS DIVERSOS

Ejemplo 1

Determinar el término general de una sucesión tal que cada término sea igual a la suma de los dos anteriores y tal que $u_0 = 0$ y $u_1 = 1$.

Solución:

Evidentemente, se verifica que:

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (se trata de la denominada *sucesión de Fibonacci*), que es una ecuación en diferencias finitas, tal que su ecuación característica es:
$r^2 – r -1 = 0$, y proporciona las raíces reales: $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Por lo tanto, el término general de esta sucesión será:

$$u_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ahora bien, las constantes A y B se deben determinar teniendo en cuenta las condiciones iniciales dadas, esto es: $u_0 = 0$ y $u_1 = 1$; por tanto:

- para $n = 0$ $\qquad 0 = A + B$
- para $n = 1$ $\qquad 1 = A\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

de donde se deduce que: $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, y por tanto, en este caso concreto se tendrá que:

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = f(n)}\ .$$

Ejemplo 2

Resuélvanse las siguientes ecuaciones en diferencias finitas:

a) $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 5^n$,
b) $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = n^2 + n + 1$, y
c) $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$,

siempre $\forall n \in \mathbf{N}$, y en el último caso con las condiciones iniciales: $u_0 = 1$ y $u_1 = 2$.

Solución:

a) Empezaremos por resolver la homogénea correspondiente, cuya ecuación característica posee las raíces: $r_1 = 2$; $r_2 = 3$, con lo que su solución será: $u_n^* = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$. Como el número 5, base de la función exponencial que figura en el segundo miembro de la ecuación propuesta, no es raíz de la ecuación característica, podremos ensayar una solución de la forma: $u_p = c \cdot 5^n$, y substituyendo en la ecuación completa, obtendremos: $c \cdot 5^{n+2} - 5 \cdot c \cdot 5^{n+1} + 6 \cdot c \cdot 5^n = 5^n$, de donde se deduce que: $c = 1/6$, y la solución general buscada será:

$$\boxed{u_n = u_n^* + u_p = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n + \frac{5^n}{6} = f(n)} \ \forall\, c_1, c_2 \in \Re$$

b) En este caso, b_n es un polinomio de segundo grado, por lo que ensayaremos una solución genérica particular de la forma: $u_p = an^2 + bn + c$, debiendo verificarse, substituyendo en la ecuación inicial, que:

$$a(n+2)^2 + b(n+2) + c - 5[a(n+1)^2 + b(n+1) + c] + 6(an^2+bn+1) = n^2 + n + 1;$$

Identificando coeficientes de los términos de igual grado se obtienen los valores: $a = ½$; $b = 2$; $c = 15/4$, y, por tanto, la solución general buscada es:

$$\boxed{u_n = u_n^* + u_p = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n + \frac{n^2}{2} + 2n + \frac{15}{4} = f(n)} \ \forall\, c_1, c_2 \in \Re$$

c) En este último caso, las condiciones dadas exigen que:

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + 3c_2 = 2 \end{array}\right.$$, lo que implica que: $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, por lo que la solución

particular pedida es (habiendo ya hallado la ecuación característica en los ejemplos anteriores):

$$\boxed{u_n = 2^n = f(n)}.$$

Ejemplo 3

En una sucesión, $u_0 = a$ y $u_1 = b$, cada término, a partir de u_2, es la semisuma de los dos anteriores. Hallar el término n-ésimo y el límite de la sucesión.

Solución:

Se tiene que: $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} + u_n}{2}$, o bien: $2u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$, cuya solución general es:

$$\boxed{u_n = c_1 + c_2 \cdot (-1/2)^n = f(n)} \ \forall\, c_1, c_2 \in \Re$$

La solución que buscamos se obtiene para:

$$c_1 = \frac{1}{3}(a + 2b) \ \text{ y } \ c_2 = \frac{2}{3}(a - b), \text{ esto es: } u_n = \frac{1}{3}(a + 2b) + \frac{2}{3}(a - b) \cdot (-1/2)^n$$

y el límite pedido será: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{2}{3}(a-b)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(-1/2)^n$. Por aplicación de la fórmula de Euler, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} K^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot(K-1)} \text{ ; para } K = -\frac{1}{2}\text{, con lo que:}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(-\frac{3}{2}\right)} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2}} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0\text{, por lo que resultará: } \boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{a+2b}{3}}.$$

Ejemplo 4

Resuélvanse las siguientes ecuaciones en diferencias finitas:

a) $a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = n + 1$, y b) $a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$, siempre $\forall n \in \mathbf{N}$, con $a_0 = 0$ y $a_1 = 2$ en el último caso.

Solución:

a) El polinomio característico es: $r^2 - r - 2$, tiene las raíces -1 y 2, luego la solución de la ecuación homogénea es: $a_n^* = c_1(-1)^n + c_2\cdot 2^n$.

Como solución particular de la ecuación completa ensayamos la expresión genérica: $a_p = An + B$. Substituyendo ahora en la ecuación inicial, se obtiene que:

$A(n+2) + B - A(n+1) - B - 2An - 2B = n + 1 \leftrightarrow -2An + A - 2B = n + 1 \leftrightarrow$

$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = -\frac{3}{4} \end{cases}$. Luego la solución general de la ecuación propuesta será:

$$a_n = a_n^* + a_p = \boxed{c_1\cdot(-1)^n + c_2\cdot 2^n - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4} = f(n)},\ \forall\, c_1, c_2 \in \Re$$

b) La solución de la ecuación homogénea asociada ya ha sido calculada en el apartado anterior. Pues bien, para hallar la solución particular que corresponde a las condiciones dadas se hace que se cumplan dichas condiciones, esto es:

$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 = 0 \\ a_1 = -c_1 + 2c_2 = 2 \end{cases}$, de donde: $c_1 = -\frac{2}{3}$; $c_2 = \frac{2}{3}$, y por tanto, la solución particular buscada será:

$$\boxed{a_p = -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}\cdot 2^n = \frac{2}{3}[2^n - (-1)^n] = f(n)}$$

2.5. ECUACIÓN NO LINEAL

En este tipo de ecuaciones recurrentes, algún término con subíndice de la relación de recurrencia aparece elevado a una potencia diferente a la primera potencia, como por ejemplo en la que sigue:

$$u_{n+1}^2 = 3u_n^2,\ u_0 = 3,\ \forall n \geq 0.$$

Se puede transformar una relación de recurrencia no lineal a otra lineal para poder resolverla mediante una substitución algebraica del tipo: $b_n = u_n^2$.

Esta modalidad de ecuaciones en diferencias finitas, cuya presencia resulta menos común en el análisis de algoritmos que las lineales, se pueden resolver también, además de la substitución ya reseñada, por diferentes procedimientos (cambio de variable, inducción constructiva, fórmulas maestras, etc.). Veámoslo posteriormente mediante un sencillo ejemplo en que se trata de hallar u_n en función de n.

Existen, sin embargo, otras ecuaciones no lineales que resultan más complicadas de resolver. Un ejemplo de ellas podría ser el siguiente:

$$u_{n+2}^3 - 3u_{n+1} \cdot u_n = 1$$

En cualquier caso, toda ecuación en diferencias finitas da una relación recurrente siempre que podamos despejar. Así, en el ejemplo anterior, es:

$$u_{n+2} = \sqrt[3]{1 + 3u_n \cdot u_{n+1}}$$

Ello posibilita calcular un gran número de términos partiendo de los iniciales, siempre que éstos sean fijos y mediante el uso de ordenadores con el *software* adecuado. El inconveniente de esta solución estriba en que puede complicar notablemente el estudio de algunas propiedades importantes como, por ejemplo, los comportamientos a largo plazo, o bien los estudios de sensibilidad, y no permite, en general, llevar a cabo trabajos sobre la expresión analítica de las funciones.

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos representativos de este tipo de ecuaciones recurrentes:

Ejemplo 1

Resolver la anterior ecuación recurrente: $u_{n+1}^2 = 3u_n^2$, con la condición inicial: $u_0 = 3$, $\forall n \geq 0$.

Solución:

Llevando a cabo la substitución antedicha, se tendrá la nueva ecuación: $b_{n+1} = 3b_n$, con: $b_0 = 9$, $\forall n \geq 0$, o sea: $b_{n+1} - 3b_n = 0$, cuya solución es: $b_n = c \cdot 3^n$. A su vez, la condición inicial dada exige que:

$$b_0 = a_0^2 = 9 = c\cdot 3^0, \text{ con lo que: } c = 9.$$

Una vez hecho esto procedemos a resolverla como una relación de recurrencia lineal, para este ejemplo corresponde a de primer orden, homogénea y con coeficientes constantes. Después de resolverla sacamos raíz a cada número obtenido en la solución general para tener la solución general de la relación de recurrencia no lineal. Así:

$$b_n = 9(3)^n,\ b_0 = 9,\ \forall n \geq 0,\ \boxed{u_n = 3(\sqrt{3})^n},\ u_0 = 3,\ \forall n \geq 0$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación recurrente: $u_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2n-u_n}$, siendo: $u_1 = ½$, $\forall n \geq 0$.

Solución:

Para ello, efectuamos un cambio de variable: $u_n = n\cdot v_n$, con lo que se obtiene la expresión:

$(n+1)v_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2n - n\cdot v_n}$, de donde: $v_{n+1} = \dfrac{1}{2-v_n}$. Como: $u_1 = v_1 = ½$, se tendrá que:

$$v_2 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3};\quad v_3 = -\frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4};\quad v_4 = \frac{1}{2-\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

y en general se cumple que: $v_n = \dfrac{1}{2-\frac{n-1}{n}} = \dfrac{n}{n+1}$, y como $u_n = n\cdot v_n$, se obtiene la solución particular buscada: $\boxed{u_n = \dfrac{n^2}{n+1}}$.

3. EL OPERADOR DIFERENCIA Δ Y SU INVERSO Δ^{-1}

De una forma general, se define el operador Δ de la forma siguiente: $\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$, donde *h* es un número dado llamado "intervalo de diferencia". La teoría que desarrollaremos a continuación corresponde al caso particular en que h = 1.

Así pues, la ecuación en diferencias finitas se puede expresar, genéricamente, de esta forma:

$$F[x, f(x), \Delta f(x), \Delta^2 f(x), \ldots, \Delta^n f(x)] = 0.$$

Hay que tener en cuenta que:

$$\begin{cases} \Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \\ \Delta^2 f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) \\ \Delta^3 f(x) = f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

y así sucesivamente.

Generalmente, venimos empleando la notación:

$$f(x) = u_n \text{ ; } f(x+1) = u_{n+1} \text{ ; } f(x+2) = u_{n+2} \text{ ; } \ldots \text{ ; } f(x+k) = u_{n+k}$$

Pues bien, dadas dos funciones de variable entera que designaremos por f(x) y F(x), tales que: $\Delta F(x) = F(x + 1) – F(x) = f(x)$, se define el operador Δ^{-1}, como el operador tal que: $\Delta^{-1}f(x) = F(x)$.

Es inmediato comprobar que el operador Δ^{-1} es lineal, esto es, que cumple las siguientes propiedades:

a) $\Delta^{-1}[f(x) + g(x)] = \Delta^{-1}f(x) + \Delta^{-1}g(x)$
b) $\Delta^{-1}[k\cdot f(x)] = k\cdot\Delta^{-1}f(x)$

siendo k una constante arbitraria.

Los operadores Δ y Δ^{-1} son tales que: $\Delta\cdot\Delta^{-1} = \Delta^{-1}\cdot\Delta = I$, donde I denota el operador unidad o identidad; en otros términos, Δ y Δ^{-1} son operadores inversos. En efecto, a partir de: $\Delta^{-1}f(x) = F(x)$, se obtiene:

$\Delta[\Delta^{-1}f(x)] = \Delta F(x)$, o sea: $(\Delta\Delta^{-1})f(x) = f(x)$, de donde $\Delta\Delta^{-1}\Delta = I$.

Análogamente, de: $\Delta F(x) = f(x)$, se deduce que:

$\Delta^{-1} [\Delta F(x)] = \Delta^{-1}f(x)$, de donde: $\Delta^{-1}\cdot\Delta = I$, c.s.q.d.

A partir de aquí, y de la linealidad de Δ, se comprueba que:

$\Delta^{-1}[f(x) + g(x)] = \Delta^{-1}f(x) + \Delta^{-1}g(x)$, puesto que:

$\Delta\Delta^{-1}[f(x) + g(x)] = \Delta[\Delta^{-1}f(x) + \Delta^{-1}g(x)]$ resulta ser una identidad.

Análogamente se tiene que: $\Delta^{-1}[k\cdot f(x)] = k\cdot\Delta^{-1}f(x)$, pues resulta también una identidad: $\Delta\Delta^{-1}[k\cdot f(x)] = \Delta[k\cdot\Delta^{-1}f(x)]$.

Una propiedad interesante del operador Δ^{-1}, que pone de manifiesto su analogía con el operador D^{-1}, inverso del operador derivada que ha sido empleado en la resolución de las ecuaciones diferenciales (ver capítulos anteriores), es la siguiente:

Si dos funciones tienen la misma diferencia, ambas funciones, no son necesariamente iguales, sino que pueden diferir en una función periódica de período unidad, esto es, una función C(x) tal que:

$$C(1) = C(2) = ... = C(x) = C(x + 1) = ...$$

En efecto, sean las funciones F(x) y F(x) + C(x); se verifica que:

a) $\Delta F(x) = F(x + 1) – F(x)$
b) $\Delta[F(x) + C(x)] = F(x + 1) + C(x + 1) - [F(x) + C(x)] = F(x + 1) - F(x)$

luego ambas poseen la misma diferencia.

Otra interesante propiedad se deduce a partir de la diferencia de un producto; en efecto, de la igualdad:

$\Delta[f(x) \cdot g(x)] = \Delta f(x)\cdot g(x + 1) + f(x) \cdot \Delta g(x)$, se obtiene:

$f(x) \cdot \Delta g(x) = \Delta [f(x) \cdot g(x)] - g(x + 1) \cdot \Delta f(x)$,

y después de aplicar el operador Δ^{-1}, resultará que:

$$\Delta^{-1}[f(x) \cdot \Delta g(x)] = f(x) \cdot g(x) - \Delta^{-1}[g(x + 1) \cdot \Delta f(x)]$$

fórmula ésta que recuerda la de la integración por partes y que algunos autores denominan de “sumación por partes”.

Veamos lo expuesto hasta aquí mediante la resolución de algunos ejercicios que juzgamos suficientemente representativos:

Ejemplo 1

Resolver la ecuación en diferencias finitas: $(x+1)\cdot\Delta f(x) + f(x) = 0$.

Solución:

Se trata de una ecuación lineal de primer orden y homogénea, que se puede escribir de la forma:

$\Delta f(x) + \frac{f(x)}{x+1} = 0$, y como: $\Delta f(x) = f(x+1) – f(x)$, se tendrá que:

$$f(x+1) = f(x) - \frac{f(x)}{x+1} = f(x)\cdot[1 - \frac{1}{x+1}] = f(x)\cdot \frac{x}{x+1}$$

Dando valores $\forall x \in (1, 2, 3, \ldots, x-1)$, se tendrá que:

$$f(2) = f(1) \cdot \frac{1}{2};\ f(3) = f(2) \cdot \frac{2}{3};\ f(4) = f(3) \cdot \frac{3}{4};\ \ldots ;\ f(x) = f(x-1) \cdot \frac{x-1}{x};$$

Multiplicando miembro a miembro y simplificando, se obtiene que:

$$\boxed{f(x) = f(1) \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (x-1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot x} = \frac{c}{x}}$$

volviendo a simplificar y haciendo: $f(1) = c$.

Ejemplo 2

Escríbase en notación de subíndices y resolver la ecuación recurrente:

$$\Delta^2 f(x) - 3\cdot\Delta f(x) = 0.$$

Solución:

Se tiene que: $\Delta^2 f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$; así mismo: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = u_{n+1} - u_n$. Substituyendo queda:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n - 3(u_{n+1} - u_n) = 0 \leftrightarrow u_{n+2} - 5u_{n+1} + 4u_n = 0,$$

que trataremos de resolver a continuación. La ecuación característica correspondiente es: $r^2 - 5r + 4 = 0$; de donde se deduce que: $r_1 = 4$ y $r_2 = 1$, con lo que se tendrá la solución general siguiente:

$$\boxed{u_n = c_1 + c_2\cdot 4^n = f(n)},\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re$$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación recurrente: $\Delta^3 f(x) + \Delta^2 f(x) - \Delta f(x) - f(x) = 0$.

Solución:

Teniendo en cuenta los valores correspondientes, se puede escribir:

$$[f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)] + [f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)] -$$
$$- [f(x+1) - f(x)] - f(x) = 0, \text{ o bien simplificando: } f(x+3) - 2f(x+2) = 0,$$

que, mediante una translación, se puede escribir la ecuación equivalente:

$f(x+1) - 2f(x) = 0$, o bien expresada en notación de subíndices: $u_{n+1} - 2u_n = 0$, cuya ecuación característica tiene una única solución real: $r_1 = 2$, por lo que la solución general de la ecuación en diferencias finitas propuesta será simplemente: $\boxed{u_n = c\cdot 2^n}$, $\forall c \in \Re$.

Ejemplo 4

Resolver la ecuación recurrente: $3\Delta^3 f(x) - 2\Delta^2 f(x) - 5\Delta f(x) = 0$.

Solución:

Procediendo como hemos hecho en el ejercicio anterior, se debe obtener: $3f(x+3) - 11f(x+2) + 8f(x+1) = 0$, y mediante una translación y la correspondiente notación en subíndices, se tendrá la ecuación:

$$3u_{n+2} - 11u_{n+1} + 8u_n = 0,$$

cuya ecuación característica ofrece las raíces: $r_1 = 8/3$ y $r_2 = 1$, con lo que se obtendrá la solución general buscada siguiente:

$\boxed{u_n = c_1 \cdot (8/3)^n + c_2 = f(n)}$, $\forall\ c_1, c_2 \in \Re$

Ejemplo 5

Si $u_n = \dfrac{n+1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, calcúlense: Δu_n y $\Delta^2 u_n$.

Solución:

Se tendrá, respectivamente:

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{n+1}{n^2} = \frac{(n+2)n^2 - (n+1)(n+1)^2}{(n+1)^2 n^2} = \boxed{\frac{n^2+3n+1}{(n+1)^2 n^2}}.$$

$$\Delta^2 u_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_{n+1} = \frac{n+3}{(n+2)^2} - 2\frac{n+2}{(n+1)^2} + \frac{n+1}{n^2} = \boxed{\frac{3n^3+12n^2+16n+4}{(n+2)^2(n+1)^2 n^2}}.$$

Ejemplo 6

Si $u_n = 3n^2 + 2n - 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$, calcúlense: Δu_n y $\Delta^k u_n$ para $k>2$.

Solución:

Se tendrá, respectivamente:

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 8n + 4 - (3n^2 + 2n - 1) = 6n - 5;\ \Delta^k u_n = 0.$$

Se demuestra que las diferencias de un polinomio del mismo orden que éste son constantes y, en su consecuencia, las de orden superior son 0.

4. EL OPERADOR "E" EN EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Suele ser conveniente, en ocasiones, el empleo del operador E, que se define del siguiente modo: $Ef(x) = f(x + 1)$. De la igualdad anterior, se deduce que:

$$Ef(x) - f(x) = f(x + 1) - f(x), \text{ o bien: } (E - 1)f(x) = \Delta f(x),$$

donde por 1 se designa el operador identidad; luego se tendrá que:

$E - 1 = \Delta$, o bien: $E = 1 + \Delta$. Entonces, resulta evidente que:

$$\begin{cases} f(x + 2) = Ef(x + 1) = E^2 f(x) \\ f(x + 3) = Ef(x + 2) = E^2 f(x + 1) = E^3 f(x) \end{cases}$$ etc., y así sucesivamente.

Usando esta misma notación, la ecuación:

$f(x + 3) + a \cdot f(x + 2) + b \cdot f(x + 1) + c \cdot f(x) = 0$, se escribirá del siguiente modo:

$$E^3f(x) + a\cdot E^2f(x) + b\cdot Ef(x) + c\cdot f(x) = 0, \text{ o bien: } (E^3 + aE^2 + bE + c)f(x) = 0.$$

En definitiva, veamos que la forma general de una ecuación en diferencias finitas de segundo orden y homogénea es la siguiente:

$$(a_2.E^2 + a_1.E + a_0).y[n] = 0$$

Suponemos que la ecuación tiene soluciones de la forma exponencial, así: $y(n) = r^n$. Se toman los dos primeros desplazamientos y se substituyen en la ecuación.

$$E\cdot y(n) = r^{n+1}\ ; \quad E^2\cdot y(n) = r^{n+2}\ ; \quad a_2\cdot r^{n+2} + a_1\cdot r^{n+1} + a_0\cdot r^n = 0\ ;$$

A partir de la identidad anterior obtenemos la ecuación característica, la cual es una sencilla ecuación cuadrática que posee dos soluciones, a saber:

$$r_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4\cdot a_2\cdot a_0}}{2\cdot a_2}\ ; \quad r_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4\cdot a_2\cdot a_0}}{2\cdot a_2}$$

Análogamente, por ejemplo, la ecuación no homogénea en diferencias finitas dada por: $u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 + 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$, se podrá escribir así, usando el operador E:

$$(E^2 + 3E + 2)\cdot u_n = n^2 + 1$$

, donde el segundo miembro de la ecuación, b_n, es un polinomio o función polinómica de segundo grado.

Para la resolución de este tipo de ecuaciones se emplearán, también con el operador "E" los mismos criterios ya expuestos. De esta suerte, para resolver la ecuación no homogénea de segundo orden, representada por la expresión $(a_2E^2 + a_1E + a_0)\ y(n) = F[n] = b_n$, debemos sumar una solución particular de esta ecuación, a la solución obtenida de resolver la ecuación homogénea: $(a_2E^2 + a_1E + a_0)\ y(n) = 0$.

Para hallar la solución particular necesaria, empleamos el método de los coeficientes indeterminados, comenzando con una combinación lineal arbitraria de todos los términos independientes que se obtienen a partir de b_n por aplicación repetida del operador E.

Como también sucedía en el caso de las ecuaciones diferenciales, si cualquier término de la expresión elegida inicialmente para la solución particular u_p es repetición de algún término de la solución complementaria (solución de la ecuación en diferencias homogénea), éste y todos los términos asociados deben multiplicarse por la menor potencia entera positiva de n, hasta eliminar toda posible duplicación.

El proceso a seguir es análogo al empleado para resolver ecuaciones diferenciales de orden superior, por lo que juzgamos interesante, llegados a este punto, efectuar un somero repaso del mismo.

La solución particular a ensayar, en los casos más relevantes que se pueden presentar en la práctica, se resume en la siguiente tabla que completa otra anterior de este mismo capítulo:

$F[n] = b_n$	Forma que debe tomar $Y_p = u_p$
α (constante)	A (constante)
αn^k (k entero positivo)	$A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \ldots\ldots + A_{k-1} n + A_0$
$\alpha . k^n$	$A . k^n$
$\alpha . \cos kn$	$A \cos kn + B \operatorname{sen} kn$
$\alpha . \operatorname{sen} kn$	$A \cos kn + B \operatorname{sen} kn$
$\alpha n^k l^n \cos tn$	$(A_0 n^k + \ldots + A_{k-1} n + A_k) l^n \cos tn + (B_0 n^k + \ldots + B_{k-1} n + B_k) l^n \operatorname{sen} tn$
$\alpha n^k l^n \operatorname{sen} tn$	$(A_0 n^k + \ldots + A_{k-1} n + A_k) l^n \cos tn + (B_0 n^k + \ldots + B_{k-1} n + B_k) l^n \operatorname{sen} tn$

Prosiguiendo con el parangón de las ecuaciones diferenciales, reparemos en que cuando b_n está formada por la suma de varios términos, la selección apropiada para u_p es la suma de las expresiones u_p correspondientes a cada uno de los términos por separado.

Veamos lo expuesto mediante la resolución de algunos ejercicios que juzgamos suficientemente representativos:

Ejemplo 1

Si $u_n = \frac{n+1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, calcúlense: Eu_n y $E^2 u_n$.

Solución:

Se tendrán, respectivamente:

$$\boxed{Eu_n = u_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{(n+1)^2}} \text{ y}$$

$$\boxed{E^2 u_n = u_{n+2} = \frac{(n+2)+1}{(n+2)^2} = \frac{n+3}{(n+2)^2}}.$$

Ejemplo 2

Si $u_n = 3n^2 + 2n - 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$, calcúlese: Eu_n.

Solución:

$$Eu_n = u_{n+1} = 3(n+1)^2 + 2(n+1) - 1 = \boxed{3n^2 + 8n + 4}.$$

Ejemplo 3

Encuentre la solución general para cada una de las siguientes ecuaciones en diferencias finitas:

a) $(2E^2 + 3E + 1)\, y(n) = 0$
b) $(4E^2 + 4E + 1)\, y(n) = 0$
c) $(2E^2 + 2E + 1)\, y(n) = 0$

Solución:

Resolvemos una por una las ecuaciones homogéneas propuestas de la siguiente manera:

a) En este caso, las raíces de la ecuación característica son reales y distintas:

$$r_1 = \frac{-1}{2},\ r_2 = -1$$

$$y_c(n) = C_1\left(\frac{-1}{2}\right)^n + C_2(-1)^n \quad ; \qquad y_c(n) = (-1)^n\left(C_1 2^{-n} + C_2\right)$$

b) En este caso, las raíces de la ecuación característica son reales y dobles:

$$r_1 = \frac{-1}{2},\ r_2 = \frac{-1}{2}$$

$$y_c(n) = C_1\left(\frac{-1}{2}\right)^n + C_2 \cdot n \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n \quad ; \qquad y_c(n) = (-1)^n 2^{-n}\left(C_1 + C_2 \cdot n\right)$$

c) En este caso, las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas:

$$r_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{1}{2},\ r_2 = \frac{-1}{2} - i\frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{-1}{2} \quad ; \quad \omega = \frac{1}{2} \quad ; \quad r = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \theta = arc\ tg(-1) = 3\frac{\pi}{4}$$

$$y_c(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(C_1 \cos\left(3\frac{\pi}{4}n\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{4}n\right)\right)$$

$$y_c(n) = 2^{-\frac{n}{2}}\left(C_1 \cos\left(3\frac{\pi}{4}n\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{4}n\right)\right)$$

Ejemplo 4

Para las tres ecuaciones del ejemplo anterior, tome las condiciones iniciales: y[0] = 1, y[1] = 0 y resuelva las ecuaciones por los dos métodos, comparando gráficamente las soluciones obtenidas.

Solución:

a) En este caso, la solución por recurrencia de la ecuación diferencial es:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	-0.5	0.75	-0.875	0.937	-0.969	0.984	-0.992	0.996	-0.998

Ahora lo resolvemos por el método descrito anteriormente, es decir, debemos calcular las constantes.

Por el ejercicio anterior se sabe que: $y_c[n] = c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + c_2(-1)^n$.

$$\begin{cases} \text{Como } y_c[0]=1 \text{ se tiene que: } c_1 + c_2 = 1. \\ \text{Como } y_c[1]=0 \text{ se tiene que: } -0.5\, c_1 - c_2 = 0. \end{cases}$$

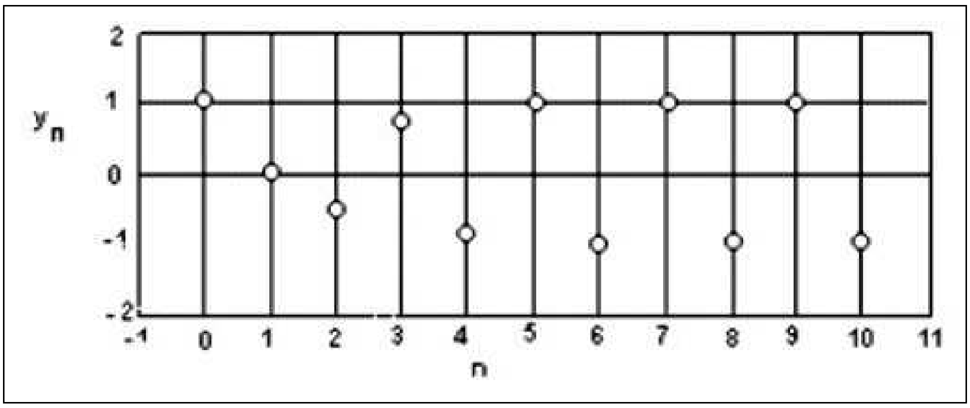
Resolviendo el sistema correspondiente, se tiene que $c_1 = 2$ y $c_2 = -1$. En consecuencia, la solución explícita está dada por la expresión:

$$\boxed{y_c[n] = (-1)^n(2\cdot 2^{-n}-1) = (-1)^n(2^{1-n} - 1)}$$

Observando la siguiente tabla, se puede ver que las dos soluciones son idénticas. En efecto:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_n	1	0	-0.5	0.75	-0.875	0.937	-0.969	0.984	-0.992	0.996	-0.998

La gráfica de la solución es la siguiente:



b) Según el ejercicio anterior, se tiene que $y_c[n] = (-1)^n 2^{-n}(c_1+c_2 n)$

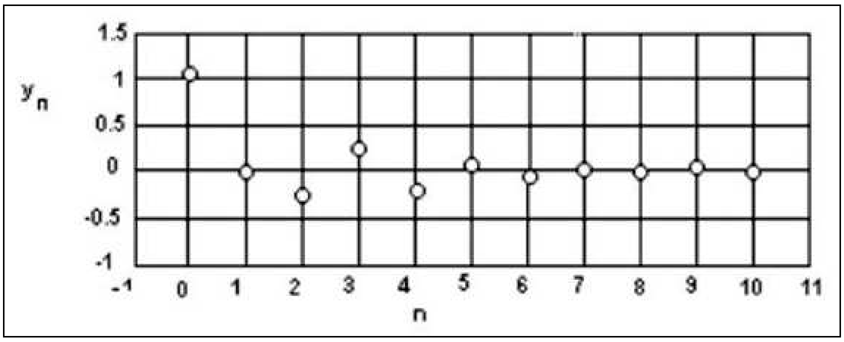
Como $y_c[0]=1$; se tiene que $c_1 = 1$.
Como $y_c[1]=0$ se tiene que $c_1 + c_2 = 0$, o sea que $c_2 = -1$.

Por tanto, resultará que: $\boxed{y_c[n] = (-1)^n 2^{-n}(1-n)}$.

La ecuación recursiva es: $y_{n+2} = \dfrac{-y_n - 4y_{n+1}}{4}$. Observando la siguiente tabla, se puede ver que las soluciones son idénticas. En efecto:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_n	1	0	-0.25	0.25	-0.187	0.125	-0.078	0.047	-0.027	0.016	$9*10^{-3}$

La gráfica de la solución es la siguiente:



c) Según el ejercicio anterior, se tiene que:

$$y_c[n] = 2^{-\frac{n}{2}}\left(c_1 \cos 3\frac{\pi}{4}n + c_2 \operatorname{sen} 3\frac{\pi}{4}n\right)$$

Como $y_c[0] = 1$ se tiene que: $c_1 = 1$.
Como $y_c[1] = 0$ se tiene que: $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}c_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}c_2 = 0$, de donde: $c_2 = 1$.

Por consiguiente, resultará que:

$$\boxed{y_c[n] = 2^{-\frac{n}{2}}\left(\cos 3\frac{\pi}{4}n + \operatorname{sen} 3\frac{\pi}{4}n\right)}$$

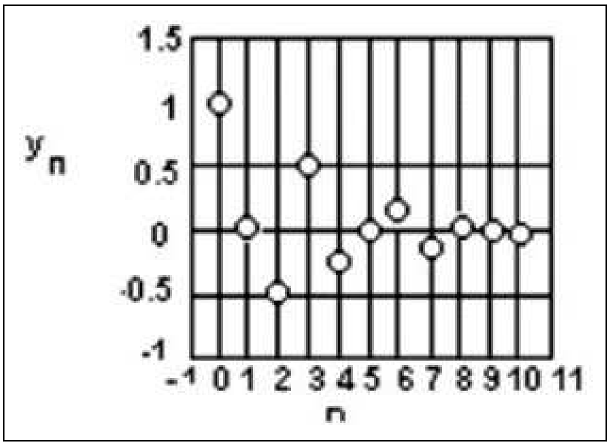
Con $y[0] = 1$ y $y[1] = 0$, se tiene que la ecuación recursiva es:

$$y_{n+2} = \frac{-y_n - 2y_{n+1}}{2}$$

Observando la siguiente tabla, se puede ver que las soluciones son idénticas. En efecto:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_n	1	0	-0.5	0.5	-0.25	0	0.12	-0.12	0.06	0	-0.03	0.03	-0.01

La gráfica de la solución correspondiente es la siguiente:



5. EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Hemos visto anteriormente que para obtener una solución particular de una ecuación lineal no homogénea, en el caso de ser el segundo miembro un polinomio, bastaba con ensayar un polinomio de igual grado (salvo que se presentasen fenómenos de resonancia), que se obtenía por aplicación del método de los coeficientes indeterminados.

De igual forma, si el segundo miembro es una exponencial del tipo a^n, bastaba con ensayar otra expresión exponencial de la forma $A \cdot a^n$, donde A se determinaba también igualando coeficientes. En el caso de que *a* fuera raíz de la ecuación característica, téngase en cuenta lo dicho, en caso similar, para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Vamos a exponer, a continuación, un método aplicable en todo caso para la determinación de la solución general de la ecuación lineal no homogénea una vez conocida la correspondiente solución de la homogénea asociada. Se denomina de "variación de parámetros o constantes" y, como casi siempre, tiene su parangón en la resolución de las ecuaciones diferenciales.

Sea, v. gr., la ecuación siguiente, que tomamos de tercer orden, para hacer más clara la exposición subsiguiente,

$$a \cdot u_{n+3} + b \cdot u_{n+2} + c \cdot u_{n+1} + d \cdot u_n = \varphi(n),\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

y supongamos que la homogénea correspondiente, admite las tres soluciones particulares, linealmente independientes v_1, v_2 y v_3; por tanto, la solución general de la homogénea será: $u_n^* = Av_1 + Bv_2 + Cv_3$.

Si ahora suponemos que las tres constantes A, B y C se substituyen por tres funciones de n, A_n, B_n y C_n con la condición de que: $u = A_n v_1 + B_n v_2 + C_n v_3$ sea la solución general de la homogénea de la ecuación completa.

Teniendo en cuenta que:

$$\Delta u = A_n\Delta v_1(n) + B_n\Delta v_2(n) + C_n\Delta v_3(n) + v_1(n+1)\cdot\Delta A_n + v_2(n+1)\cdot\Delta B_n + v_3(n+1)\cdot\Delta C_n$$

se puede obtener una condición complementaria, haciendo:

$$v_1(n+1)\cdot\Delta A_n + v_2(n+1)\cdot\Delta B_n + v_3(n+1)\cdot\Delta C_n = 0 \qquad [I]$$

Entonces la expresión de $\Delta^2 u$, resulta ser:

$$\Delta^2 u = A_n\Delta^2 v_1(n) + B_n\Delta^2 v_2(n) + C_n\Delta^2 v_3(n) + \Delta v_1(n+1)\cdot\Delta A_n + \Delta v_2(n+1)\cdot\Delta B_n +$$
$$+ \Delta v_3(n+1)\cdot\Delta C_n$$

Una nueva condición complementaria se obtiene de:

$$\Delta v_1(n + 1)\cdot\Delta A_n + \Delta v_2(n + 1)\cdot\Delta B_n + \Delta v_3(n + 1)\cdot\Delta C_n = 0 \qquad [II]$$

De forma análoga se obtiene $\Delta^3 u$:

$$\Delta^3 u = A_n\Delta^3 v_1(n) + \cdots + \Delta^2 v_3(n + 2)\cdot\Delta C_n$$

La ecuación propuesta, en definitiva, se puede escribir así:

$(a\cdot E^3 + b\cdot E^2 + c\cdot E + d)u_n = \varphi(n)$, y como $E = 1 + \Delta$, se tendrá que:

$$[a(1 + \Delta)^3 + b(1 + \Delta)^2 + c(1 + \Delta) + d]u_n = \varphi(n)$$

o sea: $[a\Delta^3 + (3a + b)\Delta^2 + (3a + 2b + c)\Delta + (a + b + c + d)]u_n = \varphi(n)$

Substituidos, en esta igualdad, los valores de Δu, $\Delta^2 u$ y $\Delta^3 u$, se obtiene una ecuación que, junto con [I] y [II], conforma un sistema que permite despejar

$$\Delta A_n = F_1(n);\quad \Delta B_n = F_2(n)\quad \text{y}\quad \Delta C_n = F_3(n)$$

Si $\Delta^{-1}F_1$, $\Delta^{-1}F_2$ y $\Delta^{-1}F_3$ son calculables, sus expresiones conteniendo, cada una de ellas, una nueva constante, proporcionan la solución buscada.

Veamos, a continuación, el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Resolver la ecuación en diferencias siguiente: $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 4^n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, siguiendo diferentes métodos, a saber:

a) Por coeficientes intermedios.
b) Por variación de parámetros.

Solución:

La ecuación característica es: $r^2 - 3r + 2 = 0$, de donde: $r = 1$ y $r = 2$, y se obtiene para solución de la homogénea: $u_n^* = A + B \cdot 2^n$.

a) Una solución particular de la ecuación completa será de la forma: $u_p = C \cdot 4^n$, de donde: $\Delta u_p = 3C \cdot 4^n$, $\Delta^2 u_p = 9C \cdot 4^n$.
La ecuación dada se puede escribir así:

$$(E^2 - 3E + 2)u_n = [(1 + \Delta)^2 - 3(1 + \Delta) + 2]u_n = \Delta^2 u_n - \Delta u_n = 4^n$$

Obligando, ahora, a que u_p sea solución, se tendrá que:

$9C \cdot 4^n - 3C \cdot 4^n = 6C \cdot 4^n = 4^n$, o sea: $C = 1/6$. Luego la solución general buscada será:

$$\boxed{u_n = u^*_n + u_p = A + B \cdot 2^n + \frac{1}{6} \cdot 4^n = f(n)}$$

A la misma conclusión hubiéramos llegado, por aplicación del método clásico, substituyendo en la ecuación inicial, con lo que:

$$C \cdot 4^{n+2} - 3C \cdot 4^{n+1} + 2C \cdot 4^n = 4^n;$$
$$16C \cdot 4^n - 12C \cdot 4^n + 2C \cdot 4^n = 6C \cdot 4^n = 4^n, \text{ o sea: } C = 1/6, \text{ c.s.q.d.}$$

b) Tomando, ahora, la solución: $u_n = A_n + B_n \cdot 2^n$, de donde:

$\Delta u_n = \Delta A_n + \Delta B_n \cdot 2^{n+1} + B_n \cdot 2^n$, y haciendo: $\Delta A_n + \Delta B_n \cdot 2^{n+1} = 0$, resulta:

$\Delta u_n = B_n \cdot 2^n$; $\Delta^2 u_n = \Delta B_n \cdot 2^{n+1} + B_n \cdot 2^n$. Luego, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \Delta A_n + \Delta B_n \cdot 2^{n+1} = 0 \\ \Delta B_n \cdot 2^{n+1} = 4^n \end{cases}$$

De donde: $\Delta B_n = 2^{n-1}$, $\Delta A_n = -4^n$, y entonces:

$$B_n = 2^{n-1} + C \quad \text{y} \quad A_n = -\frac{1}{3} 4^n + D$$

y la solución general buscada se escribe así:

$$u_n = -\frac{1}{3} 4^n + D + (2^{n-1} + C) \cdot 2^n = -\frac{1}{3} 4^n + D + 2^{2n-1} + C \cdot 2^n =$$

$= D + C \cdot 2^n - \frac{1}{3} 4^n + \frac{1}{2} 4^n = \boxed{D + C \cdot 2^n + \frac{1}{6} 4^n}$, que es un resultado evidentemente coincidente con el obtenido por aplicación de los métodos anteriores.

6. ECUACIONES LINEALES DE COEFICIENTES VARIABLES

Las ecuaciones lineales de coeficientes variables, de orden superior al primero, no son siempre resolubles exactamente. Pero en el caso de que se pueda descomponer en factores lineales P(E), su solución es perfectamente viable; esto es, si escribimos el primer miembro de la ecuación, en la forma:

$$E^k u_n + A_1 E^{k-1} u_n + \cdots + A_k u_n = (E^k + A_1 E^{k-1} + \cdots + A_k) u_n = P(E) u_n$$

P(E) se puede descomponer en factores de la forma:

$(E - B_1)(E - B_2) \ldots (E - B_k)$, donde tanto las A_i como las B_i son funciones de *n*, y la solución de la ecuación se obtiene a partir de ecuaciones de primer orden. Por tanto, el problema previo a resolver es el relativo a la ecuación lineal de primer orden. Hay que tener cuidado con la descomposición de P(E), pues hay que recordar que “E” no es más que un operador.

Sea, ahora, la ecuación:

$u_{n+1} - B_n u_n = (E - B_n) u_n = 0$, de donde: $u_{n+1} = B_n u_n$, y dando valores:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n = B_{n-1} \cdot u_{n-1} \\ u_{n-1} = B_{n-2} \cdot u_{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_2 = B_1 \cdot u_1 \end{array} \right.$$

y multiplicando, se tendrá que: $u_n = B_{n-1} \cdot B_{n-2} \ldots \cdot B_1 u_1$, y tomando el valor u_1, como una constante C, resulta en definitiva:

$$u_n = C \cdot B_1 \cdot B_2 \ldots \cdot B_{n-1} = C \cdot \prod_{i=1}^{n-1} B_i$$

Si la ecuación fuese no homogénea, se tendría una expresión del tipo: $u_{n+1} - B_n u_n = \varphi(n)$, que se puede determinar su solución por el método de variación de parámetros. En efecto, haciendo:

$u_n = C_n B_1 B_2 \ldots B_{n-1}$; $E u_n = C_{n+1} B_1 B_2 \ldots B_{n-1} B_n$; y por tanto:

$B_1 B_2 \ldots B_n (C_{n+1} - C_n) = \varphi(n)$, o bien: $\Delta C_n = \dfrac{\varphi(n)}{B_1 B_2 \ldots B_n}$, de donde:

$$C_n = \Delta^{-1} \frac{\varphi(n)}{B_1 B_2 \ldots B_n} = \sum_{n=1}^{n-1} \frac{\varphi(n)}{B_1 B_2 \ldots B_n} + K$$, donde K es una nueva constante.

Por lo tanto, se tendrá que: $u_n = B_1 B_2 \ldots B_{n-1} \sum_{n=1}^{n-1} \dfrac{\varphi(n)}{B_1 B_2 \ldots B_n} + K B_1 B_2 \ldots B_{n-1}$.

Veamos lo expuesto mediante la resolución de algunos ejercicios suficientemente representativos:

Ejemplo 1

Se trata de resolver la ecuación recurrente: $u_{n+1} - (n + 2)u_n = n\,!$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Solución:

Tendremos, aplicando el resultado anteriormente obtenido, que:

$$u_n = 3 \cdot 4 \ldots (n+1)\sum_{n=1}^{n-1} \frac{n!}{3 \cdot 4 \ldots (n+2)} + K \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n+1) = \frac{(n+1)!}{2}\sum_{n=1}^{n-1} \frac{2}{(n+1)(n+2)} + \frac{K}{2}(n+1)!$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación recurrente: $(E - A_n)(E - B_n)u_n = \varphi(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Solución:

Para ello se procede a tomar: $v_n = (E - B_n)u_n$. Resulta, entonces, la ecuación: $(E - A_n)v_n = \varphi(n)$, y por tanto, obtenida $v_n = \psi(n)$, se procede a resolver la ecuación:

$$(E - B_n)u_n = \psi(n)$$

Ejemplo 3

Sea resolver la ecuación recurrente:

$$u_{n+2} - (n + 3)u_{n+1} + 2n \cdot u_n = 0, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Solución:

Si existe una descomposición de la forma: $(E - A_n)(E - B_n)u_n = 0$, deberá verificarse que: $(E - A_n)(E - B_n)u_n = (E - A_n)(u_{n+1} - B_n u_n) =$
$= E(u_{n+1} - B_n u_n) - A_n(u_{n+1} - B_n u_n) = u_{n+2} - B_{n+1}u_{n+1} - A_n u_{n+1} + A_n B_n u_n$

de donde igualando coeficientes en la expresión inicial, se deduce que:

$A_n + B_{n+1} = n + 3$; $A_n B_n = 2n$; que resuelto proporciona los valores: $A_n = 2$ y $B_n = n$. Luego la ecuación se puede escribir así: $(E - 2)(E - n)u_n = 0$, que se procede a resolver.

7. LA TRANSFORMADA Z

7.1. CONCEPTO

Del mismo modo que la transformada de Laplace resulta una herramienta útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales, la transformada Z lo es para resolver ecuaciones en diferencias lineales. Y así, veamos como en el campo de la Ingeniería Electrónica la transformada Z convierte una señal real o compleja, definida en el dominio del tiempo discreto, en una representación en el dominio de la frecuencia compleja.

El nombre de "Transformada Z" procede de la variable del dominio, al igual que se podría llamar "Transformada S" o "Transformada p" a la Transformada de Laplace. Probablemente, un nombre más adecuado para la TZ podría haber sido el de "Transformada de Laurent", ya que está basada en la serie de Laurent[3]. La TZ es a las señales de tiempo discreto lo mismo que la de Laplace a las señales de tiempo continuo.

La transformada Z, al igual que otras transformaciones integrales, puede ser definida como una transformada unilateral o bilateral, como veremos a continuación.

7.2. LA TRANSFORMADA Z BILATERAL

La TZ bilateral de una señal definida en el dominio del tiempo discreto x[n] es una cierta función X(z) que se define así:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Donde n es un número entero y z es, en general, un número complejo de la forma: $z = A \cdot e^{i\omega}$. Aquí, A es el módulo de z, y ω podría ser la frecuencia o velocidad angular expresada en radianes por segundo (rad/s.) en cierto tipo de problemas.

7.3. LA TRANSFORMADA Z UNILATERAL

De forma alternativa, en los casos en que x[n] está definida únicamente para *n* = 0, la transformada Z *unilateral* se define como:

$$X^{+}(z) = Z^{+}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

[3] The *Laurent series* of a complex function *f*(*z*) is a representation of that function as a power series which includes terms of negative degree. It may be used to express complex functions in cases where a Taylor series expansion cannot be applied. The Laurent series was named after and first published by Pierre Alphonse Laurent in 1843. Karl Weierstrass may have discovered it first in 1841 but did not publish it at the time. More generally, Laurent series can be used to express holomorphic functions defined on an annulus, much as power series are used to express holomorphic functions defined on a disc. A *Laurent polynomial* is a Laurent series in which only finitely many coefficients are non-zero. Laurent polynomials differ from ordinary polynomials in that they may have terms of negative degree. Laurent series cannot in general be multiplied. Algebraically, the expression for the terms of the product may involve infinite sums which need not converge (one cannot take the convolution of integer sequences). Geometrically, the two Laurent series may have non-overlapping annuli of convergence. Two Laurent series with only *finitely* many negative terms can be multiplied: algebraically, the sums are all finite; geometrically, these have poles at *c*, and inner radius of convergence 0, so they both converge on an overlapping annulus. Thus when defining formal Laurent series, one requires Laurent series with only finitely many negative terms. Similarly, the sum of two convergent Laurent series need not converge, though it is always defined formally, but the sum of two bounded below Laurent series (or any Laurent series on a punctured disk) has a non-empty annulus of convergence.

En el procesamiento de señales se usa esta definición cuando la señal es causal. En este caso, la transformada Z resulta ser una serie de Laurent con ROC del tipo $|z| > R$, es decir, que converge "hacia afuera".

Un ejemplo interesante de la TZ unilateral es la función de generación de probabilidades, donde x[n] es justamente la probabilidad que toma una variable discreta aleatoria en el instante *n*, y la función X(z) suele escribirse como X(s), ya que s = z-1. Como consecuencia de ello, las propiedades de las transformadas Z son especialmente útiles en la teoría de la probabilidad.

7.4. LA TRANSFORMADA Z INVERSA

La Transformada Z inversa se define del siguiente modo[4]:

$$x[n] = Z^{-1}\{(X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

Aquí, C es un círculo cerrado que envuelve el origen y la región de convergencia (ROC). El contorno C debe contener todos los polos de X(z). Un caso especial y simple de esta integral circular es que cuando C es el círculo unidad (que también puede usarse cuando la ROC incluye el círculo unidad), obtenemos la transformada inversa de tiempo discreto de Fourier.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

La TZ con un rango finito de *n* y un número finito de *z* separadas de forma uniforme puede ser procesada de forma eficiente con el algoritmo de Bluestein[5]. La transformada discreta de Fourier (DFT) es un caso especial de la TZ, y se obtiene limitando *z* para que coincida con el círculo unidad.

[4] Aquí se utiliza el concepto de *integral de contorno*. Una *integral de línea* o *curvilínea* es aquella integral cuya función es evaluada sobre una curva. En el caso que se trate de una curva es cerrada en dos dimensiones o del plano complejo o plano de Gauss, y se llama también *integral de contorno*. Ejemplos prácticos de su utilización pueden ser los siguientes:

- el cálculo de la longitud de una curva en el espacio,
- el cálculo del volumen de un objeto descrito por una curva, objeto del que se posee una función (campo escalar) que describe su volumen a lo largo de la curva,
- también para el cálculo del trabajo que se realiza para mover algún objeto a lo largo de una trayectoria teniendo en cuenta los campos de fuerzas (descritos por campos vectoriales) que actúen sobre el mismo.

[5] El algoritmo de Bluestein FFT (1968), comúnmente llamado el *chirrido transformada Z algoritmo* (1969), es una transformada rápida de Fourier (FFT) o algoritmo que calcula la transformada de Fourier discreta (DFT) de tamaños arbitrarios (incluidos los primeros tamaños) por re-expresión de la DFT como una convolución. El otro algoritmo de FFT de tamaños primos, conocido como algoritmo de Rader, también trabaja por la reescritura de la DFT como una convolución. De hecho, el algoritmo de Bluestein se puede utilizar para calcular las transformaciones más generales que la DFT, basado en la transformada Z unilateral.

7.5. REGIÓN DE CONVERGENCIA

La región de convergencia, también conocida abreviadamente como ROC, define la región donde la transformada-z existe. La ROC es una región del plano complejo donde la TZ de una señal tiene una suma finita.

La ROC para una x[n] es definida como el rango de z para la cual la transformada-z converge. Ya que la transformada-z es una serie de potencia, converge cuando $x[n]\cdot z^{-n}$ es absolutamente sumable. Y así:

$$ROC = \{z : \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} < \infty\}$$

7.6. MULTIPLICACIÓN POR a^n

Una propiedad interesante consiste en que si X[Z] es la transformada Z de X[n], entonces la transformada Z de $a^n X[n]$ está dada por $X[a^{-1}Z]$.

Demostración:

$$Z(a^n X[n]) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n X[n] z^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} X[n](a^{-1}z)^{-n} = X[a^{-1}z]$$

Siempre estamos suponiendo que X[n]=0 para n<0.

7.7. TABLAS CON LOS PARES MÁS HABITUALES DE LA TRANSFORMADA Z

Dada una ecuación en diferencias finitas de orden *n*, utilizamos las propiedades de la transformada Z, en especial las de linealidad y desplazamiento, para transformarla en una ecuación algebraica. Después, aplicaremos las siguientes tablas:

	Señal, x(n)	**Transformada Z, X(z)**	**ROC**
1	$\delta(n)$	1	todo z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
4	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
5	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

	Señal, x(n)	Transformada Z, X(z)	ROC
6	$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
7	$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
8	$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
9	$a^n \cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
10	$a^n \sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$

Por otra parte, la siguiente tabla muestra la transformada Z de algunas secuencias discretas, usando la propiedad de desplazamiento:

Función Discreta	Transformada Z
X[n+4]	$Z^4X[Z]-Z^4X[0]-Z^3[1]-Z^2X[2]-ZX[3]$
X[n+3]	$Z^3X[Z]-Z^3X[0]-Z^2X[1]-ZX[2]$
X[n+2]	$Z^2X[Z]-Z^2X[0]-ZX[1]$
X[n+1]	ZX[Z]-ZX[0]
X[n]	X[Z]
X[n-1]	$Z^{-1}X[Z]$
X[n-2]	$Z^{-2}X[Z]$
X[n-3]	$Z^{-3}X[Z]$
X[n-4]	$Z^{-4}X[Z]$

Veamos lo anteriormente expuesto mediante la resolución de algunos ejercicios que estimamos suficientemente representativos:

Ejemplo 1

Resolver la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$X[n+2] + 3X[n+1] + 2X[n] = 0 \text{ , con: } X[0] = 0,\ X[1] = 1.$$

Solución:

Al tomar las transformadas Z de ambos miembros de la ecuación en diferencias dadas, se obtiene la expresión:

$$Z^2X[Z] - Z^2X[0] - ZX[1] + 3ZX[Z] - 3ZX[0] + 2X[Z] = 0$$

Al substituir las condiciones iniciales y simplificar, se obtiene:

$$X[Z] = \frac{Z}{Z+1} - \frac{Z}{Z+2}$$

$$Z^{-1}\left[\frac{Z}{Z+1}\right] = (-1)^k \text{ ; } Z^{-1}\left[\frac{Z}{Z+2}\right] = (-2)^k$$

por tanto, la solución particular buscada es: $\boxed{X[n] = [(-1)^k - (-2)^k]U[n] = f(n)}$.

A este mismo resultado puede llegarse por aplicación del método tradicional de resolución de este tipo de ecuaciones. En efecto, la ecuación inicialmente planteada tiene la forma de subíndices: $u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = 0$, con: $u_0 = 0$ y $u_1 = 1$. La ecuación característica correspondiente será: $r^2 + 3r + 2 = 0$, de donde sus raíces: $r_1 = -1$ y $r_2 = -2$, con lo que la solución general será:

$$u_n = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n$$

Para hallar la solución particular pedida, debe considerarse que:

$\begin{cases} u_0 = C_1 + C_2 = 0 \\ u_1 = -C_1 - 2C_2 = 1 \end{cases}$, de donde se deduce que: $C_1 = 1$ y $C_2 = -1$,

luego la solución buscada será: $u_n = (-1)^n - (-2)^n$, c.s.q.d.

Ejemplo 2

Resolver la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$X[n+2] = X[n+1] + X[n], \text{ con: } X[0] = 0,\ X[1] = 1.$$

Solución:

Al tomar la transformada Z de esta ecuación en diferencias finitas, se obtiene la expresión: $Z^2X[Z] - Z^2X[0] - ZX[1] = ZX[Z] - ZX[0] + X[Z]$. Al resolver para X[Z] se obtiene:

$$X[Z] = \frac{Z^2X[0] + ZX[1] - ZX[0]}{Z^2 - Z - 1}$$

Al substituir las condiciones iniciales se obtiene que:

$$\mathrm{X}[z] = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

por tanto, la solución general vendrá dada por la expresión:

$$\boxed{\mathrm{X}[n] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\mathrm{U}[n]}$$

Se trata, en definitiva, de la denominada “sucesión de Fibonacci”, que también se resuelve por el sistema tradicional en otro ejercicio anterior de este mismo capítulo de nuestro libro alcanzándose, obviamente, la misma solución.

Ejemplo 3

Dada la ecuación en diferencias finitas siguiente:

$$\mathrm{x}(k) - 3x\,(k-1) + 3x\,(k-2) - x\,(k-3) = u\,(k)$$

, se trata de obtener la solución x(k) para las condiciones: u(0) = u(1) = 1; u(k) = 0, ∀ k≥2 y x(k) = 0, ∀k<0.

Solución:

Respecto de la transformada Z de la entrada, aplicando la definición de transformada Z, se tendrá que:

$$Z\left[u\,(k)\right] = U\,(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u\,(k)\,z^{-k} = u\,(0)\,z^0 + u\,(1)\,z^{-1} + u\,(2)\,z^{-2} + \cdots = 1 + z^{-1} = \frac{z+1}{z}$$

La transformada Z puede ser ya escrita como:

$$X\,(z)\left[1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3}\right] = \frac{z+1}{z} \Rightarrow \frac{X\,(z)}{z} = \frac{z^2+z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$$

Un poco más adelante se verá por qué razón interesa despejar la variable a calcular dividida por *z*. Ahora, al igual que se procedía para la transformada de Laplace en la resolución de las ecuaciones diferenciales, se descompone la relación de polinomios en fracciones simples para obtener coeficientes indeterminados. Nótese que la raíz del denominador (polo) es de grado de multiplicidad 3, con lo que:

$$\frac{X\,(z)}{z} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{(z-1)^3}$$

Para el cálculo de *C* se puede proceder como en el caso cuando no hay polos múltiples, esto es, multiplicando ambos miembros de esta última ecuación por $(z-1)^3$, con lo que se tiene que:

$$(z-1)^3 \frac{z^2+z}{(z-1)^3} = A(z-1)^2 + B\,(z-1) + C$$

A partir de aquí, basta con substituir el valor del polo para calcular *C*:

$$C = \left. z^2 + z \right|_{z=1} = 2$$

El resto de términos no pueden ser calculados de la misma forma. Una opción que, dependiendo del caso, puede resultar algo tediosa, consiste en substituir el valor calculado de *C* e identificar los términos en las potencias de *z*, esto es:

$$z^2 + z = A(z-1)^2 + B\,(z-1) + 2 = Az^2 - 2Az + A + Bz - B + 2$$

Del término en z^2 se deduce que A = 1. Del término independiente, A – B + 2 = 0, se deduce que B = 3. Al mismo resultado podríamos haber llegado de una forma más sistemática eliminando de forma sucesiva el índice de multiplicidad del polo, esto es, derivando cada vez respecto de *z* ambos miembros de la expresión anterior, y se obtiene que:

$$\frac{d}{dz}\left(z^2 + z\right) = \frac{d}{dz}\left(Az^2 - 2Az + A + Bz - B + 2\right)$$

Esto es,

$$2z + 1 = 2A\,(z-1) + B$$

Substituyendo en la ecuación anterior el valor del polo z = 1 se tiene de nuevo que B = 3. Por último, derivando ahora respecto de z se obtiene que A = 1, como queríamos demostrar.

En definitiva, la expresión anterior puede ser escrita en forma de fracciones simples del modo siguiente:

$$\frac{X\,(z)}{z} = \frac{1}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3}$$

A partir de aquí se escribe la expresión anterior en la forma como aparecen los términos en las tablas de transformadas, esto es, en potencias de z^{-1}, con lo que se tendrá que:

$$X\,(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{3z}{(z-1)^2} + \frac{2z}{(z-1)^3} = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{3z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{2z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$$

Aplicando la transformada Z inversa, z^{-1}, a la ecuación anterior sabiendo que:

$$Z\left[1\left(k\right)\right]=\frac{1}{1-z^{-1}},Z\left[kT\right]=\frac{Tz^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^{2}}\text{y}Z\left[\frac{k\left(k-1\right)\cdots\left(k-m+2\right)}{\left(m-1\right)!}\right]=\frac{z^{-m+1}}{\left(1-z^{-1}\right)^{m}}$$

se obtiene la solución: $x(k) = 1(k) + 3\cdot k + 2\frac{k(k-1)}{2!} = 1(k) + 2\cdot k + k^2$.

Para los primeros 3 muestreos se tiene que:

$$\boxed{\begin{array}{l} x\left(0\right)=1\left(0\right)=1 \\ x\left(1\right)=1\left(1\right)+3\,.1=4 \\ x\left(2\right)=1\left(2\right)+3\,.\,2\,+2\frac{2\,.1}{2!}=9 \\ x\left(3\right)=1\left(3\right)+3\,.\,3\,+2\frac{3\,.\,2}{2!}=16 \end{array}}$$

Por otra parte, la ecuación inicialmente planteada tiene la forma siguiente, expresada en notación de subíndices:

$u_n - 3u_{n-1} + 3u_{n-2} - u_{n-3} = 0,\ \forall\ k \geq 2$, o bien su ecuación equivalente:

$$u_{n+3} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n = 0$$

La ecuación característica correspondiente será:

$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$, de donde sus raíces son: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, con lo que, al tratarse de una raíz real triple, la solución general será:

$$u_n = c_1 + c_2\cdot n + c_3\cdot n^2 = f(n),\ \forall\ c_1, c_2, c_3 \in \Re$$

CAPÍTULO 7
SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

1.1. GENERALIDADES

Como sabemos, las ecuaciones de diferencias finitas aparecen en Economía, por ejemplo, cuando se analizan fenómenos económicos dinámicos y discretos. Si en estos fenómenos el número de variables estudiadas es mayor que uno, podemos llegar a los sistemas de ecuaciones de diferencias finitas que son objeto de estudio en el presente capítulo de nuestro libro.

Los sistemas de ecuaciones en diferencias intentan simular un fenómeno en forma discreta; en otras palabras, es como verlo a intervalos iguales de tiempo. Son sistemas de ecuaciones recurrentes de la forma:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= a \cdot x_n + b \cdot y_n \\ y_{n+1} &= c \cdot x_n + d \cdot y_n \end{aligned}\right\}$$

Esto es coherente con la realidad, ya que normalmente se toman una serie de medidas espaciadas en el tiempo, una vez al día, o por semana, o al mes, por ejemplo, y siempre a la misma hora si confiamos en que nos sirva para detectar un patrón. Ahora bien, ¿cómo se relaciona esta sucesión de valores?. Podría servirnos, al respecto, un modelo lineal.

Sea A una matriz cuadrada de orden p y sea: $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ una sucesión de vectores en $\Re^p$ definidos de manera recurrente por:

$$u_n = A \cdot u_{n-1}, \ \forall\ n = 1, 2, \ldots$$

a partir de un cierto vector inicial $u_0 \in \Re^p$. Una relación de recurrencia de esta forma se llama *sistema de ecuaciones en diferencias lineal y homogéneo.*

Si $u_n = A \cdot u_{n-1}$ es un sistema de ecuaciones en diferencias, se tiene, razonando por inducción, que: $u_n = A^n u_0$. Con esta expresión podemos hallar u_n para cualquier valor de *n*. Sin embargo, vamos a dar una expresión más simple para u_n que nos permitirá ahorrar tiempo de cálculo y también estudiar el comportamiento a largo plazo de la sucesión u_n (es decir, cuando n es grande): será la forma de Jordan o de diagonalización, ya que las matrices de paso P y su inversa P^{-1} permitirán simplificaciones en el cálculo de las potencias de A (ver capítulo 9 de “Complementos”).

Concretamente se tiene el siguiente resultado: sea A una matriz cuadrada de orden p, y $u_0 \in \Re^p$. Entonces, la solución del sistema de ecuaciones en diferencias: $u_n = A \cdot u_{n-1}$ con vector inicial u_0 es el siguiente:

$$u_n = P \cdot J^n \cdot P^{-1} \cdot u_0 \quad \forall\ n = 1, 2, \ldots$$

siendo: $J = P^{-1} \cdot A \cdot P$ la forma canónica de Jordan de A.

Se precisa, a continuación, cómo evaluar J^n. En realidad no resulta complicado, por la forma que tiene, tanto si es diagonal como si no.

Hay, como mínimo, tres métodos diferentes para resolver los sistemas de ecuaciones recurrentes que aquí se contemplan. En el primer método el problema se reduce a resolver una ecuación en diferencias de segundo grado. En el segundo método se utiliza la diagonalización de matrices para hallar la potencia enésima de la matriz del sistema, esto es, partiendo del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} = a \cdot x_n + b \cdot y_n \\ y_{n+1} = c \cdot x_n + d \cdot y_n \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Llamando: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A \cdot \left[A \cdot \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} \right] = A^2 \cdot \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots\cdots = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Luego: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Ahora solo es necesario calcular A^n para tener la solución del sistema, que dependerá de las condiciones iniciales x_0 e y_0. Un tercer método de resolución emplearía el operador E, cuyo homónimo D ha sido usado también en la resolución de las EDO. En cualquier caso, el método que resulta más cómodo, en general, para la resolución de un sistema de k ecuaciones en diferencias finitas con k funciones desconocidas consiste en la eliminación de k–1 funciones, obteniéndose una única ecuación, cuya resolución proporciona la del sistema planteado.

Debe tenerse en cuenta que *x* será una variable entera, y notaremos por $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ una familia de *n* sucesiones dependientes de *x*. Un sistema de primer orden de ecuaciones en diferencias será una expresión de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(y_1(x+1), \ldots, y_n(x+1), y_1(x), \ldots, y_n(x), x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(y_1(x+1), \ldots, y_n(x+1), y_1(x), \ldots, y_n(x), x) = 0 \end{array}\right\}$$

donde *m* es el número de ecuaciones y *n* el de variables. Cuando aparezcan desplazamientos de *x* superiores a x + 1, estaremos ante un sistema de orden mayor que uno. Realizando un cambio de variable análogo al que hemos utilizado para la ecuación de orden *n*, veamos que cualquier sistema se puede reducir a otro equivalente de primer orden, de forma que no constituye ninguna limitación el hecho de profundizar solo en el orden uno.

Dentro de los sistemas de ecuaciones recurrentes, los más fáciles de resolver son los lineales, y son éstos los que nosotros vamos a estudiar.

1.2. SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS

Un sistema lineal homogéneo de primer orden con *n* ecuaciones e incógnitas es el que tiene la forma general:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x+1) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x) \\ y_2(x+1) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \ldots + a_{2n}(x)y_n(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x+1) = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n(x) \end{array}\right\}$$

donde las $a_{ij}(x)$ son sucesiones que consideramos datos del problema. Un ejemplo concreto de ello puede ser el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x+1) = 3y_1(x) + 5y_2(x) \\ y_2(x+1) = y_1(x) + 7y_2(x) \end{array}\right\}$$

Observaciones. El ejemplo anterior es claramente un sistema homogéneo de primer orden con dos ecuaciones y dos incógnitas. En dicho ejemplo, las sucesiones $a_{ij}(x)$ son, respectivamente:

$$a_{11}(x) = 3, \quad a_{12}(x) = 5, \quad a_{21}(x) = 1, \quad a_{22}(x) = 7$$

y, por consiguiente, son constantes que no dependen de x. Cuando esto sucede, se dice que se trata de un sistema con coeficientes constantes, y son los que fundamentalmente vamos a estudiar aquí. Un ejemplo en el que los coeficientes son variables puede ser el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x+1) = x\cdot y_1(x) + y_2(x) \\ y_2(x+1) = (3x+1)\cdot y_1(x) + x^2 y_2(x) \end{array}\right\}$$

Si ahora llamamos:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad y \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x),\ldots,a_{1n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(x),\ldots,a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

el sistema en cuestión admite la expresión matricial:

$$Y(x+1) = A(x)\cdot Y(x), \text{ y escribiremos: } Y(x+1) = A\cdot Y(x),$$

si el sistema es de coeficientes constantes.

Desde luego, un sistema práctico de resolución de este tipo de problemas consiste en la utilización del operador E. Veamos, a continuación, algunos ejemplos representativos que se van a resolver por diferentes procedimientos.

Ejemplo 1

Resolvamos ahora el sistema recurrente expuesto al comienzo del presente capítulo por dos procedimientos diferentes:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x+1) = 3y_1(x) + 5y_2(x) \\ y_2(x+1) = y_1(x) + 7y_2(x) \end{array}\right\}$$

a) Utilizando el operador E.
b) Por el método matricial.

Solución:

a) El sistema se puede escribir en la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{l} y_{x+1} = 3y_x + 5z_x \\ z_{x+1} = y_x + 7z_x \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} y_{x+1} - 3y_x - 5z_x = 0 \\ z_{x+1} - y_x - 7z_x = 0 \end{array}\right\}$$

Utilizando el operador **E** se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{l} (E-3)y_x - 5z_x = 0 \\ (E-7)z_x - y_x = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} (E-3)y_x - 5z_x = 0 \\ (E-7)(E-3)z_x - (E-3)y_x = 0 \end{array}\right\}$$

$$(E-7)(E-3)z_x - 5z_x = 0 \ ; \quad (E^2 - 3E - 7E + 21)z_x - 5z_x = 0 \ ;$$

$$(E^2 - 10E + 16)z_x = 0 \ \Rightarrow \ z_{x+2} - 10z_{x+1} + 16z_x = 0 \ ; \quad \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \ ;$$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 8 \\ 2 \end{array} \right. \text{, o sea: } \boxed{z_x = c_1 \cdot 8^x + c_2 \cdot 2^x}$$

$$y_x = z_{x+1} - 7z_x = c_1 \cdot 8^{x+1} + c_2 \cdot 2^{x+1} - 7c_1 \cdot 8^x - 7c_2 \cdot 2^x =$$

$$= 8c_1 \cdot 8^x + 2c_2 \cdot 2^x - 7c_1 \cdot 8^x - 7c_2 \cdot 2^x \text{ ; de donde:}$$

$$\boxed{y_x = c_1 \cdot 8^x - 5c_2 \cdot 2^x} \text{ ; o sea, también:}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(x) = c_1 \cdot 8^x - 5c_2 \cdot 2^x \\ y_2(x) = c_1 \cdot 8^x + c_2 \cdot 2^x \end{array}}$$

con lo que se cumple: $y_1(x) - y_2(x) = -c_2 \cdot 2^x - 5c_2 \cdot 2^x = -6c_2 \cdot 2^x$.

b) La matriz A es: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

y sus autovalores son las raíces de la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ ; \quad \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0.$$

que son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$, como hemos visto antes. A es diagonalizable, porque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, y: $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Los autovectores asociados a $\lambda_1 = 2$ son los vectores que verifican:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es decir, la variedad lineal generada por (-5, 1).

Análogamente, los autovectores del $\lambda_2 = 8$ salen de la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y están formados por la variedad lineal generada por (1, 1).

Tomando: $M = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, obtenemos: $A = M \cdot J \cdot M^{-1}$.

Como: $M^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$, llegamos a que la solución general es:

$$Y(x) = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 8^x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -5 \cdot 2^x - 8^x & 5(2^x - 8^x) \\ 2^x - 8^x & -2^x - 5 \cdot 8^x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

siendo c_1 y c_2 $y_1(0)$ e $y_2(0)$, respectivamente.

En casos como el anterior, en los que la matriz es diagonalizable en el cuerpo real, también hay otras expresiones más cómodas de la solución general del sistema.

Desde luego, el resultado así obtenido coincide con el resultado hallado anteriormente por aplicación del método del operador E teniendo en cuenta la arbitrariedad de las constantes c_1 y c_2. En efecto:

$$-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 \cdot 2^x - 8^x & 5(2^x - 8^x) \\ 2^x - 8^x & -2^x - 5 \cdot 8^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5c_1 \cdot 2^x - c_1 \cdot 8^x + 5c_2(2^x - 8^x) \\ c_1 \cdot 2^x - c_1 \cdot 8^x - c_2 \cdot 2^x - 5c_2 \cdot 8^x \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} (5c_2 - 5c_1) \cdot 2^x - (c_1 + 5c_2)8^x \\ (c_1 - c_2) \cdot 2^x - (c_1 + 5c_2)8^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1 + 5c_2}{6} \cdot 8^x - \frac{5c_2 - 5c_1}{6} \cdot 2^x \\ \frac{c_1 + 5c_2}{6} \cdot 8^x + \frac{c_2 - c_1}{6} \cdot 2^x \end{pmatrix},$$

que, comparando con la solución hallada por el procedimiento anterior, ofrece el mismo resultado como no podría ser de otra manera, dado que si hacemos:

$\frac{c_1 + 5c_2}{6} = K_1$ y $\frac{c_2 - c_1}{6} = K_2$, resultará la solución buscada:

$$\begin{cases} y_1(x) = K_1 \cdot 8^x - 5K_2 \cdot 2^x \\ y_2(x) = K_1 \cdot 8^x + K_2 \cdot 2^x \end{cases} \text{, c.s.q.d.}$$

Ejemplo 2

Resolvamos el siguiente sistema recurrente por dos procedimientos:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x+1) &= 2y_1(x) + y_2(x) \\ y_2(x+1) &= 2y_2(x) \end{aligned}\right\}$$

a) Utilizando el operador E.
b) Por el método matricial.

Solución:

a) El sistema en cuestión se puede escribir en la siguiente forma:

$$\begin{cases} y_{x+1} = 2y_x + z_x \\ z_{x+1} = 2z_x \end{cases} \qquad \left.\begin{aligned} y_{x+1} - 2y_x - z_x &= 0 \\ z_{x+1} - 2z_x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Utilizando el operador **E** se tendrá que:

$$\left.\begin{aligned} (E-2)y_x - z_x &= 0 \\ (E-2)z_x &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} (E-2)(E-2)y_x - (E-2)z_x &= 0 \\ (E-2)z_x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$(E^2 - 4E + 4)y_x = 0 \;\Rightarrow\; y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = 0\;; \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0\;;$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right. \text{, o sea: } \boxed{y_x = c_1 \cdot 2^x + c_2 \cdot x \cdot 2^x}$$

$$z_x = y_{x+1} - 2y_x = c_1 \cdot 2^{x+1} + c_2(x+1) \cdot 2^{x+1} - 2c_1 \cdot 2^x - 2c_2 \cdot x \cdot 2^x =$$

$= 2c_1 \cdot 2^x + 2c_2(x+1) \cdot 2^x - 2c_1 \cdot 2^x - 2c_2 \cdot x \cdot 2^x = = c_1 \cdot 2^x + c_2 \cdot x \cdot 2^x + c_2 \cdot 2^x - c_1 \cdot 2^x -$
$-c_2 \cdot x \cdot 2^x = \boxed{c_2 \cdot 2^x}$; o sea, también se puede escribir así:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(x) &= c_1 \cdot 2^x + c_2 \cdot x \cdot 2^x = 2^x(c_1 + c_2 \cdot x) \\ y_2(x) &= c_2 \cdot 2^x \end{aligned}}$$

b) Aquí, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y el lector podrá comprobar que la matriz A no es diagonalizable. Por inducción se demuestra que:

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^x = \begin{bmatrix} a^x & x \cdot a^{x-1} \\ 0 & a^x \end{bmatrix} \quad \forall x = 1,2,... \forall a \in \Re,$$

luego la solución general del sistema planteado es:

$$Y(x) = \begin{bmatrix} 2^x & x \cdot 2^{x-1} \\ 0 & 2^x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2^x \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x \cdot 2^{x-1} \\ 2^x \end{bmatrix} \quad \forall x = 1,2,...$$

siendo $Y(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ arbitrario. Se puede escribir también:

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1 \cdot 2^x + c_2 \cdot x \cdot 2^{x-1} = 2^x[c_1 + (c_2/2) \cdot x] \\ y_2(x) = c_2 \cdot 2^x \qquad\qquad\qquad \forall x = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

que coincide obviamente con el resultado anteriormente obtenido por aplicación del método del operador E teniendo en cuenta la arbitrariedad de las constantes del problema c_1 y c_2.

Ejemplo 3

Resolvamos el siguiente sistema recurrente por teoría matricial:

$$Y(x+1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot Y(x)$$

Solución:

Este sistema también puede escribirse así:

$$\begin{cases} y_{x+1} = 3y_x + z_x + w_x \\ z_{x+1} = y_x + 3z_x + w_x \\ w_{x+1} = y_x + z_x + 3w_x \end{cases} \quad y \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Consecuentemente, la ecuación característica o secular es:

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, de la que se obtiene la ecuación: $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 20 = 0$

Los autovalores de A son las raíces: $\lambda_1 = 2$ (doble) y $\lambda_3 = 5$ (simple). El subespacio de autovectores asociado a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ es: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, y está generado por los vectores:

$$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Como tiene dimensión dos, la matriz es diagonalizable. Análogamente, el subespacio de autovectores asociados a $\lambda_3 = 5$ está generado por el vector (1, 1, 1), luego los vectores:

$$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}2^x, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}2^x, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}5^x$$

forman una base del espacio vectorial de soluciones, y la solución general es:

$$\boxed{Y(x) = c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}2^x + c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}2^x + c_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}5^x}\text{, es decir:}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = -c_1 2^x - c_2 2^x + c_3 5^x \\ y_2(x) = c_1 2^x + c_3 5^x \\ y_3(x) = c_2 2^x + c_3 5^x \end{array}\right\} \forall x = 0, 1, 2, \ldots$$

con c_1, c_2, $c_3 \in \Re$. Obsérvese que la misma solución se obtiene poniendo:

$$\begin{bmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\\y_3(x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2^x & 0 & 0\\0 & 2^x & 0\\0 & 0 & 5^x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

, que corresponde a la fórmula matricial: $Y(x) = M\cdot J^x\cdot\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$.

Ejemplo 4

Sea resolver el sistema de EDF:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(x+1) = 6y_1(x) + y_2(x) \\ y_2(x+1) = -y_2(x) - 12y_1(x) \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_{x+1} = 6y_x + z_x \\ z_{x+1} = -z_x - 12y_x \end{array}\right.$$

En definitiva, se trata de resolver el sistema de ecuaciones recurrentes:

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} - 6u_n - v_n = 0 \\ v_{n+1} + v_n + 12u_n = 0 \end{array}\right.$$

, que también se puede escribir del siguiente modo, usando el operador E:

$$\left\{\begin{array}{l} (E-6)\cdot u_n - v_n = 0 \\ 12u_n + (E+1)\cdot v_n = 0 \end{array}\right.$$

Eliminaremos v_n, para lo cual se procede como sigue:

$$\begin{cases} (E + 1)(E - 6)u_n - (E + 1)v_n = 0 \\ 12u_n + (E + 1)v_n = 0 \end{cases}$$

y sumando miembro a miembro, se obtiene que: $[(E + 1)(E - 6) + 12]u_n = 0$,

o bien: $(E^2 - 5E + 6)u_n = 0 \Rightarrow u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$; la ecuación característica correspondiente será:

$r^2 - 5r + 6 = 0 \rightarrow$ con las raíces $\begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = 2 \end{cases}$, ecuación que resuelta proporciona la

solución general: $\boxed{u_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n}$, $\forall$ A, B $\in \Re$, y también se obtendrá que:

$$v_n = u_{n+1} - 6u_n = A \cdot 3^{n+1} + B \cdot 2^{n+1} - 6A \cdot 3^n - 6B \cdot 2^n \text{ ;}$$

$$\boxed{v_n = -A \cdot 3^{n+1} - B \cdot 2^{n+2}}.$$

Es frecuente, tanto en sistemas como en ecuaciones recurrentes, que se conozcan ciertas condiciones iniciales que permiten determinar la solución particular correspondiente, tal como acontecía con las ecuaciones diferenciales que hemos visto en capítulos anteriores. Así, por ejemplo, si en el problema anterior se hubiesen dado las condiciones: $u_1 = 12$, $u_2 = 30$, podríamos formar el sistema de ecuaciones ordinarias:

$$u_1 = 3A + 2B = 12;\ u_2 = 9A + 4B = 30,$$

que resuelto proporciona los valores: A = 2 y B = 3. Luego la solución particular, correspondiente a dichos valores iniciales, sería la siguiente:

$$u_p = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n \quad ; \quad v_p = -2 \cdot 3^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+2} = -6 \cdot 3^n - 12 \cdot 2^n$$

con lo que también se cumple que: $3u_p + v_p = -3 \cdot 2^n$.

Ejemplo 5

Resolvamos el siguiente sistema de EDF por teoría matricial:

$$Y(x+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot Y(x)$$

y comparar este problema con su homólogo en los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Solución:

a) Este sistema de ecuaciones recurrentes también puede escribirse así:

$$\begin{cases} y_{x+1} = y_x + 2z_x + w_x \\ z_{x+1} = 6y_x - z_x \\ w_{x+1} = -y_x - 2z_x - w_x \end{cases} \quad y \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Consecuentemente, la ecuación característica o secular es:

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, del que se obtiene la ecuación: $\lambda^3 + \lambda^2 - 12\lambda = 0$

Los tres autovalores de A son las raíces simples características siguientes: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -4$. Operando como en otras ocasiones, alcanzaríamos la solución general del sistema planteado.

b) El correspondiente sistema de EDO vendría dado por la expresión:

$Y'(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot Y(x)$, que también puede escribirse así:

$\begin{cases} y'_1 = y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y'_2 = 6y_1 - y_2 \\ y'_3 = -y_1 - 2y_2 - y_3 \end{cases} \quad y \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Como puede verse, se obtiene la misma ecuación característica o secular que en el caso anterior, con los correspondientes autovalores: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -4$. Haciendo: $A \cdot x_i = \lambda_i \cdot x_i$ se tendrá:

$$\boxed{\lambda_1 = 0} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow k \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{bmatrix}$$

Del mismo modo operaremos con las otras 2 raíces características para obtener los autovectores correspondientes:

$$\boxed{\lambda_2 = 3} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3x_1 \\ 6x_1 - x_2 = 3x_2 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 3x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow k\begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Y por último:

$$\boxed{\lambda_3 = -4} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_1 \\ -4x_2 \\ -4x_3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = -4x_1 \\ 6x_1 - x_2 = -4x_2 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = -4x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

, luego la integral general buscada del sistema planteado será la siguiente:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3x} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4x}\text{; o sea:}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = c_1 + c_2 \cdot e^{3x} + c_3 \cdot e^{-4x} \\ y_2 = 6c_1 + \dfrac{3c_2}{2} e^{3x} - 2c_3 \cdot e^{-4x} \\ y_3 = -13c_1 - c_2 \cdot e^{3x} - c_3 \cdot e^{-4x} \end{array}}$$

1.3. SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS

Un sistema lineal no homogéneo (o completo) de primer orden es el que tiene la forma general:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x + 1) = a_{11}(x)y_1(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(x + 1) = a_{n1}(x)y_1(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x) \end{array}\right\}$$

donde las funciones $b_1(x), \ldots, b_n(x)$ son sucesiones arbitrarias en la variable x. Con las mismas notaciones que para el caso homogéneo, y llamando b(x) a la sucesión vectorial:

$\begin{bmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{bmatrix}$, el sistema admite la representación matricial:

$$Y(x + 1) = A(x) \cdot Y(x) + b(x)$$

Dado el sistema anterior, llamaremos “sistema homogéneo asociado” al $Y(x+1) = A(x) \cdot Y(x)$, y, si la matriz A(x) es constante, diremos que el sistema (homogéneo y no homogéneo) es de coeficientes constantes, independientemente de que b(x) sea o no constante.

Las propiedades que relacionan un sistema no homogéneo con el sistema homogéneo asociado son similares a las que ya hemos estudiado para las ecuaciones diferenciales, de tal forma que el camino que se sigue en la resolución de un sistema completo es paralelo al estudiado entonces.

Veamos lo anteriormente expuesto mediante la resolución de algunos ejercicios que juzgamos suficientemente representativos:

Ejemplo 1

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones recurrentes:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x+1) = 2y_1(x) + y_2(x) + 3 \\ y_2(x+1) = 2y_2(x) \end{array}\right\}$$

Solución:

El sistema homogéneo asociado es el resuelto en un ejemplo anterior tanto por el método del operador E como por el matricial, y la matriz fundamental correspondiente es:

$$A^x = \begin{bmatrix} 2^x & x\cdot 2^{x-1} \\ 0 & 2^x \end{bmatrix} \quad \forall x = 0,1,...$$

Busquemos ahora una solución particular U(x) del sistema completo. En base al procedimiento de variación de las constantes, basta con tomar:

$$U(0) = 0;\ U(x) = A^x \sum_{k=0}^{x-1} (A^{-1})^{k+1} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obviamente: $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, y se demuestra sin dificultad (por inducción) que:

$$\begin{bmatrix} a & -1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^x = \begin{bmatrix} a^x & -x\cdot a^{x-1} \\ 0 & a^x \end{bmatrix}$$, de donde se deduce que:

$$(A^{-1})^{k+1} = \frac{1}{4^{k+1}} \begin{bmatrix} 2^{k+1} & (k+1)2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, también:

$$U(x) = A^x \sum_{k=0}^{x-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{k+1}} & -\frac{k+1}{4}\cdot\frac{1}{2^k} \\ 0 & \frac{1}{2^{k+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = A^x \sum_{k=0}^{x-1} \begin{bmatrix} \frac{3}{2^{k+1}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Puesto que, por la fórmula general de la suma de los términos de una progresión geométrica, sabemos que:

$$1+r+r^2+\ldots+r^s=\frac{r^{s+1}-1}{r-1} \quad \text{si} \quad r\neq 1\text{, y se tiene que:}$$

$$\sum_{k=0}^{x-1}\frac{3}{2^{k+1}}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{3}{2^x}=\frac{\frac{3}{2^x}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}-1}=-(\frac{3}{2^x}-3)=3\left[1-\frac{1}{2^x}\right]\text{. Luego:}$$

$$U(x)=3\begin{bmatrix}2^x & x\cdot 2^{x-1}\\ 0 & 2^x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2^x}\\ 0\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}2^x-1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Para x = 0, la expresión anterior da U(0) = 0, y, por tanto, es válida para cualquier x. Finalmente, la solución general buscada del sistema completo es:

$$Y(x)=\begin{bmatrix}2^x & x\cdot 2^{x-1}\\ 0 & 2^x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2^x-1\\ 0\end{bmatrix}\text{, es decir:}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = c_1 2^x + c_2 x\cdot 2^{x-1} + 3(2^x - 1)\\ y_2(x) = c_2 2^x \end{array}\right\} \qquad \forall x = 0, 1, 2, \ldots$$

Observaciones. Cuando la sucesión b(x) es constante (tal y como pasa en el ejemplo presente) se puede intentar ensayar una solución particular constante del tipo:

$$U(x)=\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Resolvamos el sistema de ecuaciones recurrentes:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x + 1) = y_1(x) + 2y_2(x) + 1\\ y_2(x + 1) = 2y_1(x) + y_2(x) - 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

La matriz A es, en este caso: $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, siendo -1 y 3 sus autovalores. El subespacio de autovectores asociados al autovalor -1 es la variedad lineal generada por (1, -1), y el subespacio de autovectores asociados al autovalor 3 es la variedad lineal generada por (1, 1). Por consiguiente, la solución general del sistema homogéneo asociado es:

$$c_1\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}(-1)^x+c_2\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}3^x.$$

Puesto que $b(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ es constante, busquemos una solución particular del tipo: $U(x) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$. Deberá verificarse, entonces, que:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = k_1 + 2k_2 + 1 \\ k_2 = 2k_1 + k_2 - 1 \end{array}\right\}$$

de donde: $U(x) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ es, efectivamente, una solución particular. La solución general del sistema no homogéneo planteado es:

$$Y(x) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} (-1)^x \\ (-1)^{x+1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3^x \\ 3^x \end{bmatrix}.$$

Es decir:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(x) = ½ + c_1 \cdot (-1)^x + c_2 \cdot 3^x \\ y_2(x) = -½ + c_1 \cdot (-1)^{x+1} + c_2 \cdot 3^x = -½ - c_1 \cdot (-1)^x + c_2 \cdot 3^x \ ; \end{array}\right.$$

de este modo, también se cumple que: $y_1(x) + y_2(x) = 2c_2 \cdot 3^x$.

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN CON COEFICIENTES VARIABLES

Veámoslos mediante un sencillo ejemplo que resolveremos utilizando el operador E:

Ejemplo 1

Se trata de resolver el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x + 1) = x \cdot y_1(x) \\ y_2(x + 1) = y_1(x) + y_2(x) \end{array}\right\}$$

Solución:

El sistema se puede escribir también de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} y_{x+1} = x \cdot y_x \\ z_{x+1} = y_x + z_x \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y_{x+1} - x \cdot y_x = 0 \\ z_{x+1} - z_x - y_x = 0 \end{array}\right\}$$

Utilizando para su resolución el operador **E**, se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{l} (E - x)y_x = 0 \\ (E - 1)z_x - y_x = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} (E - x)y_x = 0 \\ (E - 1)(E - x)z_x - (E - x)y_x = 0 \end{array}\right\}$$

$$(E^2 - x \cdot E + x - E)z_x = 0 \ \Rightarrow \ z_{x+2} - x \cdot z_{x+1} + x \cdot z_x - z_{x+1} = 0$$

$$z_{x+2} - (x + 1)z_{x+1} + x \cdot z_x = 0 \ ; \quad \lambda^2 - (x + 1)\lambda + x = 0 \ ;$$

$$\lambda = \frac{x+1 \pm \sqrt{x^2+2x+1-4x}}{2} = \frac{x+1 \pm (x-1)}{2} = \left\langle \begin{matrix} x \\ 1 \end{matrix} \right. \quad \text{, o sea:}$$

$$\boxed{z_x = c_1 \cdot x^x + c_2 \cdot 1^x = c_2 + c_1 \cdot x^x}$$

$y_x = z_{x+1} - z_x = c_2 + c_1 \cdot (x + 1)^{x+1} - c_2 - c_1 \cdot x^x$; $\boxed{y_x = c_1(x + 1)^{x+1} - c_1 \cdot x^x}$; o también:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(x) = c_1(x + 1)^{x+1} - c_1 \cdot x^x \\ y_2(x) = c_2 + c_1 \cdot x^x \end{array}}$$

con lo que también se cumple que: $y_1(x) + y_2(x) = c_1(x + 1)^{x+1} + c_2$.

3. SISTEMA LINEAL EQUIVALENTE

Dada la ecuación lineal de diferencias finitas de orden *n*:

$$y(x + n) + a_1(x)y(x + n - 1) + \ldots + a_n(x)y(x) = b(x),$$

si hacemos el cambio de variable:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = y(x) \\ y_2(x) = y(x + 1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x) = y(x + n - 1) \end{array}\right\} \qquad \forall x = 0, 1, 2, \ldots$$

obtenemos el sistema lineal de primer orden (con *n* incógnitas):

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(x + 1) = y_2(x) \\ y_2(x + 1) = y_3(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1}(x + 1) = y_n(x) \\ y_n(x + 1) = -a_1(x)y_n(x) - a_2(x)y_{n-1}(x) - \ldots - a_n(x)y_1(x) + b(x). \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema y observando que $y(x) = y_1(x)$ obtendremos también la solución general de la ecuación recurrente planteada de orden *n*.

En concreto, el problema de determinar una solución particular de la ecuación no homogénea se puede resolver determinando una solución particular del sistema equivalente.

Veamos, al respecto de lo expuesto, el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Obténgase el sistema equivalente para la ecuación de diferencias no homogénea de orden dos:

$$y_{x+2} + 4y_{x+1} + 4y_x = 1.$$

Solución:

Poniendo:

$$\left.\begin{array}{l} y_x = y_1(x) \\ y_{x+1} = y_2(x) \\ y_{x+2} = y_3(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

y así sucesivamente, y puesto que: $y_{x+2} = 1 - 4y_{x+1} - 4y_x$, se obtiene el sistema equivalente buscado siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(x+1) = y_2(x) \\ y_2(x+1) = 1 - 4y_2(x) - 4y_1(x) \end{array}}$$

que también se puede escribir así:

$$\left.\begin{array}{r} y_{x+1} = z_x \\ z_{x+1} = 1 - 4y_x - 4z_x \end{array}\right\}$$

4. SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS NO LINEALES

Al igual que ocurría con las ecuaciones diferenciales, hay muchos sistemas de ecuaciones recurrentes que se presentan en la práctica que no son lineales. Un ejemplo cualquiera de ellos puede ser el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} y_1(x+1) = y_2(x)^3 \\ y_2(x+1) = -3y_1(x) + 4y_2(x)^2 \end{array}\right\}$$

Algunos de ellos se pueden resolver de forma explícita mediante el empleo de diversas técnicas analíticas, pero la mayor parte no pueden ser tratados mediante estos procedimientos. En cualquier caso, fijados los valores iniciales $y_1(0)$, $y_2(0)$, …, $y_n(0)$, el propio sistema nos ofrece una ley recurrente para calcular los términos posteriores de éste. Los inconvenientes del método son los mismos que señalábamos anteriormente para las ecuaciones de diferencias lineales.

CAPÍTULO 8
APLICACIONES DIVERSAS

1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1.1. CONSTRUCCIÓN Y RESISTENCIA DE MATERIALES

Ejemplo 1

When a bullet is fired into a sank bank, it will be assumed that its retardation is equal to the square root of its velocity on entering. For how long will it travel if its velocity on entering the bank is 144 m./sec.

Solution:

Let *v* represent the velocity *t* seconds after striking the bank.

Then the retardation is $= -\frac{dv}{dt} = \sqrt{v}$ or $\frac{dv}{\sqrt{v}} = -dt$ and $2\sqrt{v} = -t + C$.

When t = 0, v = 144 and $C = 2\sqrt{144} = 24$. Thus, $2\sqrt{v} = -t + 24$ is the law governing the motion of the bullet. When v = 0, t = 24; the bullet will travel 24 seconds before coming to rest.

Ejemplo 2

Con motivo de un trabajo profesional del autor del presente libro, consistente en el proyecto técnico de un telesilla para el paso de un río de montaña en lugar no vadeable, se le planteó el siguiente problema en cuya resolución intervienen conceptos relacionados con las ecuaciones diferenciales que aquí son objeto de nuestro estudio. Se trata, en definitiva, de calcular el tipo de cable de acero necesario para soportar el paso del telesilla en vanos o luces de hasta 60 metros.

Solución:

Un cable suspendido por sus extremos y sometido únicamente a la influencia de su propio peso, adopta, como sabemos, la figura de una curva plana llamada *catenaria*, cuya ecuación es la siguiente:

$$y = \frac{H}{p}\cos h\frac{X - C_1}{H/p} + C_2$$

, en la cual H es la tensión horizontal, que es la misma en cualquier punto, p el peso del cable por unidad de longitud y C_1 y C_2 son dos constantes.

Ello puede asimilarse (suponiendo la reacción elástica despreciable frente al peso) a una cadena de infinitos eslabones articulados sin rozamiento, y por eso la figura de equilibrio recibe la denominación de “catenaria”.

Así pues, la forma de un cable colgante no es parabólica, difiriendo tanto más de ella cuanto mayor sea la caída del cable. Sin embargo, si el cable sostuviera un tablero horizontal en el que existiera una carga uniformemente repartida de peso notablemente superior al del cable, de modo que pueda despreciarse éste frente a aquél (caso de los puentes colgantes), la forma del cable ya no es de catenaria sino de parábola o función polinómica.

De este modo, cuando la flecha o sagita no es muy grande, en el desarrollo en serie de la función hiperbólica, si despreciamos los términos en *x* que no sean de grado 0, 1 ó 2, resulta la ecuación de una parábola, lo que significa admitir que el peso del cable se distribuye uniformemente según el eje de abscisas u horizontal. Esta ecuación de la parábola fácilmente se deduce con la hipótesis anteriormente expresada mediante el planteamiento de las condiciones de equilibrio de un elemento diferencial de cable, a saber:

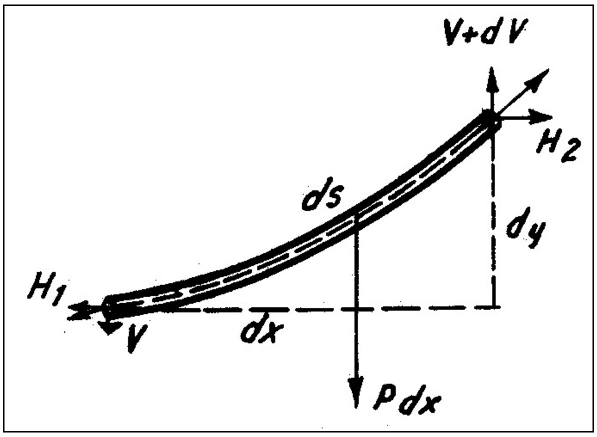


FIG. 8.1. Elemento infinitesimal de cable.

$$|H_1| = |H_2|; \quad |dV| = |p \cdot ds|$$

$$\frac{V}{H} = \frac{dy}{dx}; \quad V = H \cdot \frac{dy}{dx}; \quad \frac{dV}{dx} = H \cdot \frac{d^2y}{dx^2}; \quad dV = H \frac{d^2y}{dx^2} dx$$

luego:

$$\frac{dV}{dx} = H \frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{ds}{dx}$$

donde si a efectos de distribución del peso hacemos ds = dx, tenemos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{H}$$

Integrando sucesivamente esta ecuación diferencial se obtiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{p}{H} \cdot dx = \frac{p}{H} \cdot x + C_1$$

de donde:

$$y = \int \left(\frac{p}{H} \cdot x + C_1 \right) \cdot dx = \int \frac{p}{H} \cdot x \cdot dx + C_1 \cdot x = \frac{p}{2H} x^2 + C_1 \cdot x + C_2$$

En general, para vanos que no excedan de 400 m. y ángulos con la horizontal de los extremos del cable inferiores a 30º, puede substituirse en los cálculos la catenaria por la parábola sin efectos constructivos apreciables.

La instalación del telesilla debe hacerse colocando los trípodes de apoyo del cable de acero a igual altura taquimétrica en ambas márgenes del río. En este supuesto y tomando como ejes coordenados la tangente en el vértice de la curva y su perpendicular en ese punto, la ecuación de la parábola queda reducida a la expresión:

$$y = \frac{p}{2H} x^2$$

Considerando que no existe alargamiento elástico en el cable al introducir la carga puntual de la silla, podemos hallar la flecha máxima en el centro tomando momentos respecto a uno de los extremos, A, substituyendo una mitad del cable por la tensión horizontal, H, en el punto medio y teniendo presente que la carga puntual de la silla, K, puede estimarse dividida en dos fuerzas iguales, K/2, que actúan en cada parte del cable, así:

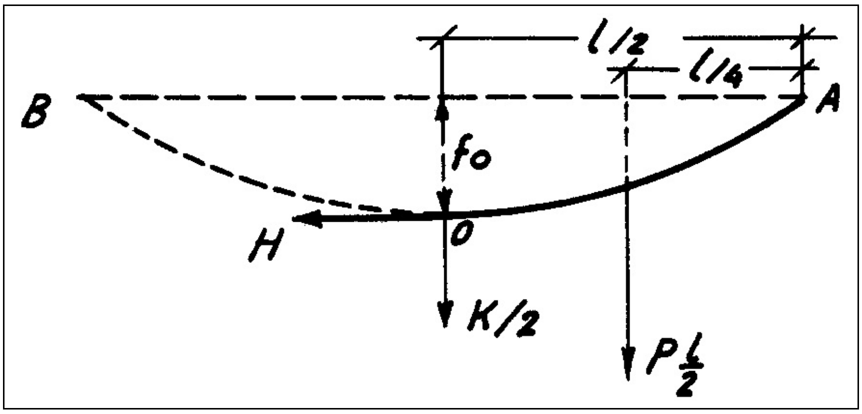


FIG. 8.2. Tensión horizontal y flecha máxima.

$$H \cdot f_0 = \frac{K}{2} \cdot \frac{l}{2} + p \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Kl}{4} + \frac{pl^2}{8}$$, y de aquí se deduce que:

$$H = \frac{l(2K + pl)}{8f_0}$$, o bien: $$f_0 = \frac{l(2K + pl)}{8H}$$, siendo *l* la longitud del vano.

Para calcular la tensión T_A a que estará sometido el cable en uno de los extremos, A, estableceremos la condición de equilibrio de los momentos de fuerzas respecto al otro apoyo, B, con lo que:

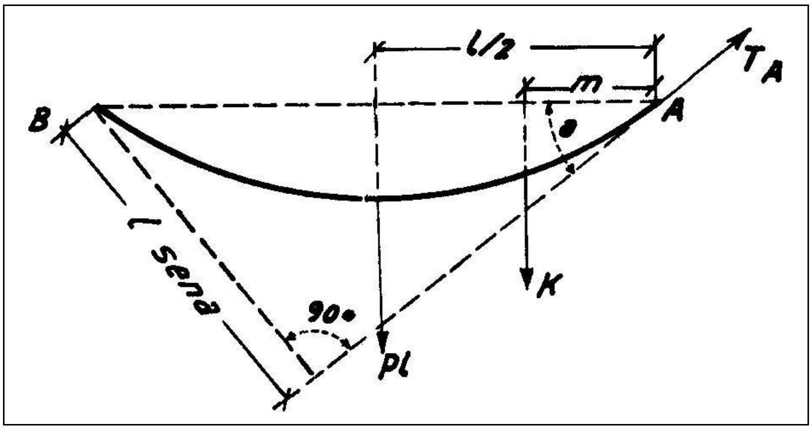


FIG. 8.3. Tensión en los extremos del cable.

$$T_A \cdot l \cdot \text{sen } a = p \cdot l \cdot \frac{l}{2} + K(l - m)$$

de donde se sigue:

$$T_A = \frac{pl^2 + 2K(l - m)}{2l \cdot \text{sen } a}$$

que va creciendo a medida que la carga puntual K se va acercando al apoyo A.

Si suponemos que el máximo acercamiento de la silla al apoyo A es a una distancia m = 0’75 m. tendremos que la expresión anterior se convierte en:

$$T_A = \frac{pl^2 + 2K(l - 0'75)}{2l \cdot \text{sen } a} \quad (1)$$

Suponiendo cortado el cable en el punto M y tomando momentos respecto al punto A y al B, tendremos:

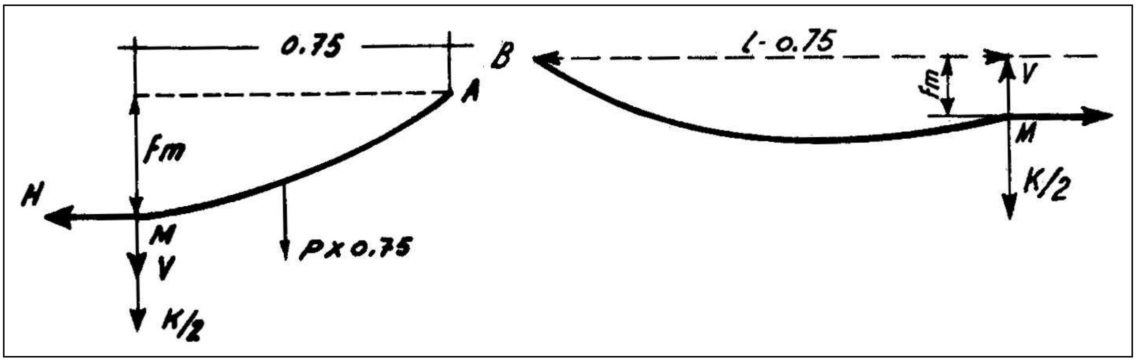


FIG. 8.4. Proximidad a los apoyos.

$$H \cdot fm = 0'75\, p \cdot \frac{0'75}{2} + \frac{K}{2} 0'75 + V \cdot 0'75 \qquad (2)$$

$$H \cdot fm + V(l - 0'75) = (l - 0'75) \cdot p \frac{l - 0'75}{2} + \frac{K}{2}(l - 0'75)$$

Expresiones de las que eliminando V se obtiene:

$$fm = \frac{0'75(l - 0'75)}{H}\left(\frac{K}{l} + \frac{p}{2}\right)$$

De (2) tenemos que:

$$V = \frac{H \cdot fm}{0'75} - \frac{0'75}{2}p - \frac{K}{2}$$

y substituyendo el valor de fm llegamos a la expresión:

$$V = \frac{(l - 1'50)(pl + K)}{2l}$$

Por otra parte, la tangente del ángulo *a* cuando la silla se encuentra a una distancia m = 0’75 m. del extremo del cable es:

$$\text{tg } a = \frac{V + \frac{K}{2}}{H} = \frac{(l - 1'50)(pl + K) + l \cdot K}{2 \cdot l \cdot H}$$

y substituyendo en (1) el seno por la tangente, cosa que puede admitirse con aproximación suficiente[1], tenemos que la tensión máxima en ese caso será de:

$$T_A = \frac{pl^2 + 2K(l - 0'75)H}{(l - 1'50)(pl + K) + l \cdot K}$$

Veamos que la condición de equilibrio de un cable sometido a su propio peso vertical lleva a un problema de equilibrio en el plano (la catenaria es siempre una curva plana si se puede despreciar la rigidez flexional del cable). En general la ecuación de la catenaria se refiere a cadenas o cuerdas infinitamente flexibles e inextensibles. El requisito de flexibilidad infinita se refiere a que la rigidez flexional sea nula y el requisito de inextensibilidad se refiere a que la longitud de cada tramo de la misma no varíe a pesar de estar sometido a fuerzas. Obviamente en las cuerdas reales estos requisitos se cumplen solo de forma aproximada. Para cuerdas de gran longitud, la elasticidad de la cuerda las aleja del comportamiento perfectamente inextensible. Si bien la catenaria de una cuerda inextensible es siempre una curva plana, para cables gruesos de pequeña longitud la rigidez flexional finita hace que su deformada no necesariamente esté contenida en un plano.

[1] Cuando hablamos de ángulos de 0,5º o menos, el seno o la tangente del ángulo *en radianes* es justamente el ángulo mismo (con más de 7 decimales), y el coseno del ángulo en radianes es prácticamente uno, con 5 decimales o más. Estas aproximaciones no se sustentan para ángulos en grados sexagesimales o centesimales, solo expresados en radianes, por lo que será necesario realizar un paso adicional de conversión si se requieren ángulos en grados. En la aproximación paraxial de primer orden, pues, el seno y la tangente de un ángulo se aproximan por el ángulo mismo (expresado en radianes), con lo que sen $\alpha \cong$ tg $\alpha \cong \alpha$.

Dado un elemento lineal sometido solo a cargas verticales, la forma catenaria es precisamente la forma del eje baricéntrico que minimiza las tensiones. Esa propiedad puede aprovecharse para el diseño de arcos. De este modo un arco en forma de catenaria invertida es precisamente la forma en la que se evita la aparición de esfuerzos distintos de los de compresión, como son los esfuerzos cortantes o los momentos flectores. Por esa razón, una curva catenaria invertida constituye un trazado útil para un arco en la arquitectura, forma que fue aplicada, entre otros y fundamentalmente, por el gran arquitecto modernista catalán Antoni Gaudí (1852-1926) en muchas de sus construcciones.

De acuerdo con la teoría antes expuesta, damos en el cuadro siguiente distintos valores de las tensiones H, constante, y T_A máxima, para la silla a una distancia de 0'75 m. del punto de apoyo A, así como de la flecha en el punto M, situado a dicha distancia de 0'75 m. del extremo A, en el supuesto de que el cable se tense hasta conseguir una flecha máxima en el centro del 2 por 100 del vano. En este caso, se toma la carga dinámica K igual a 150 Kg. que se estima el máximo peso de la silla con una persona corpulenta que lleve un niño en brazos o una mochila. Esto es:

Vano = l (m.)	**Flecha máxima en el centro = 0'02·l (m.)**	**H = tensión horizontal (kp.)**	**T_A = tensión máxima a 0'75 m. del apoyo (kp.)**	**Flecha a 0'75 m. del apoyo (m.)**
20	0'40	1.960'50	1.989'67	0'0577
30	0'60	2.035'30	2.065'90	0'0585
40	0'80	2.088'75	2.133'60	0'0588
50	1'00	2.142'20	2.168'20	0'0591
60	1'20	2.195'60	2.227'90	0'0592

Vemos, por consiguiente, que las tensiones T_A, obtenidas con vanos de hasta 60 m., no exceden en ningún caso de 2.300 kp. a 0'75 m. del apoyo.

El coeficiente de seguridad de trabajo f de un cable de acero es el cociente entre la carga de rotura efectiva y la carga que realmente debe soportar el cable. La Ordenanza General de Seguridad e Higiene en el Trabajo dispone en su Artº. 112.2 que, para los aparatos de elevación y transporte, dicho factor o coeficiente de seguridad no será inferior a 6. No obstante, existen diversas normativas y reglamentos específicos (Aparatos elevadores, Minería, etc.) a los que cada equipo debe adaptarse.

Todas las características de los alambres de acero están especificadas en la Norma ISO 2232, que rige para los cables. El grado o calidad de los alambres de acero usuales, en función de su resistencia nominal a la tracción, son los siguientes: 1.570 N/mm^2 (160 kp/mm^2), 1.770 N/mm^2 (180 kp/mm^2), 1.960 N/mm^2 (200 kp/mm^2).

Veamos, a continuación, la siguiente tabla de características, extraída de publicaciones comerciales de empresas fabricantes de cables de acero existentes al efecto:

DIN 3060 - Tabla de cargas de rotura y densidades lineales de cables de acero para una resistencia nominal a la tracción de 160 kp/mm^2

Diámetro nominal [mm.]	Tolerancia [%]	Peso aprox. [kg/m.l.]	Carga de rotura calculada [kp.]	Carga de rotura mínima [kp.]
3	+8/-0%	0,0343	597	478
4	+7/-0%	0,0609	1.060	850
5	+7/-0%	0,0951	1.660	1.330
6	+6/-0%	0,137	2.390	1.910
7	+6/-0%	0,186	3.250	2.600
8	+5/-0%	0,244	4.240	3.400
9	+5/-0%	0,308	5.370	4.300
10	+5/-0%	0,381	6.630	5.310
11	+5/-0%	0,461	8.030	6.430
12	+5/-0%	0,548	9.550	7.650
13	+5/-0%	0,643	11.200	8.980
14	+5/-0%	0,746	13.000	10.400
16	**+5/-0%**	**0,974**	**17.000**	**13.600**
18	+5/-0%	1,23	21.500	17.200
20	+5/-0%	1,52	26.500	21.200
22	+5/-0%	1,84	32.100	25.700
24	+5/-0%	2,19	38.200	30.600
26	+5/-0%	2,57	44.800	35.900
28	+5/-0%	2,98	52.000	41.600
32	+5/-0%	3,9	67.900	54.400
36	+5/-0%	4,93	86.000	68.800
40	+5/-0%	6,09	106.000	85.000
44	+5/-0%	7,37	128.000	103.000
48	+5/-0%	8,77	153.000	122.000
52	+5/-0%	10,3	179.000	144.000
56	+5/-0%	11,9	208.000	167.000

En nuestro caso, en fin, considerando un f = 6 y para un telesilla de hasta 60 m. de vano o luz libre, serviría perfectamente el cable de diámetro nominal comercial 16 mm., con una tensión total de rotura de 17.000 kp., ya que se precisa una carga de rotura de:

$$T = 2.227'9 \times 6 = 13.367'4 \text{ kp } (131.134 \text{ N}) < 17.000 \text{ kp } (166.770 \text{ N})$$

, con lo que queda eficazmente resuelto el problema planteado.

Ejemplo 3

El método de la doble integración aunque es el más antiguo, sigue siendo el más útil para entender, en un principio, el comportamiento de los elementos estructurales y maquinales expuestos a deformación por flexión en el caso de las vigas isostáticas.

En lo que sigue, suponemos que las deformaciones verticales producidas por cargas transversales se verifican siempre dentro del período elástico, siendo muy pequeñas comparadas con la longitud de la viga.

El cálculo de la deformación de una viga por el método de la doble integración, es una operación de varios pasos o etapas que pueden generalmente ser facilitadas siguiendo un proceso definido. Aparece una ecuación diferencial ordinaria cuya resolución se precisa. Las etapas para la solución de problemas por doble integración las definimos a continuación:

a) Dibujar o trazar la posible curva elástica de la viga y determinar, si fuera necesario, las reacciones de sus soportes o empotramientos.
b) Seleccionar los intervalos de la viga que se vayan a estudiar indicando los límites de x en cada intervalo, estableciendo previamente un sistema de ejes coordenados en la viga con el origen en el extremo de uno de los intervalos. Por ejemplo, dos intervalos adyacentes pueden estar definidos como $O \leq x \leq L$ y $L \leq x \leq 3L$.
c) Escribir el momento de flexión expresándolo en función de x para cada intervalo seleccionado e igualando M_X a $E{\cdot}I_X \frac{d^2y}{dx^2}$. Se integra posteriormente dicha expresión dos veces determinando dos ecuaciones, que nos expresarán la inclinación o pendiente y la deformación.
d) Evaluar y resolver las constantes de integración y otras incógnitas si las hubiera (caso de las vigas hiperestáticas), determinando finalmente la deformación en los puntos específicos requeridos.

Como $E{\cdot}I_X \frac{d^2y}{dx^2} = M_X$ puede expresarse por $E{\cdot}I_X \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x)$ o igualmente, $E{\cdot}I_X \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x){\cdot}dx$ integrando esta EDO obtenemos:

$$E{\cdot}I_X \frac{dy}{dx} = \int f(x){\cdot}dx + C_1 = \varphi(x) + C_1$$

ecuación llamada de la *inclinación de la tangente* que nos da los valores de la pendiente $\frac{dy}{dx}$ en cada punto.

Igualmente, $E\cdot I_x\cdot dy = \varphi(x)\cdot dx + C_1\cdot dx$, que integrada da la ecuación finita de la elástica siguiente:

$$E\cdot I_x\cdot dy = \int\varphi(x)\cdot dx + C_1\cdot x + C_2 = \psi(x) + C_1\cdot x + C_2 \qquad (1)$$

Las constantes de integración pueden ser evaluadas por las condiciones límites en las ecuaciones de inclinación y deformación. Por ejemplo: en las vigas apoyadas, por las condiciones de sus apoyos y = 0 para x = 0 y x = L. Sin embargo, muchas vigas se encuentran sometidas a cambios bruscos de cargas

(cargas concentradas o móviles), lo que origina a la izquierda o a la derecha de cualquier cambio brusco de carga, expresiones diferentes del momento de flexión, que dan ecuaciones distintas de la elástica para cada uno de los intervalos en la viga, aunque la pendiente y la deformación tienen el mismo valor en la sección que gravita una carga concentrada por la condición de continuidad de la elástica. Igualando las dos expresiones, obtenemos una ecuación que nos permite determinar una de las constantes de integración.

Ejemplo: por la condición de continuidad en la unión de diversos intervalos, se produce que:

$$y_1 = y_2 \text{ , con lo que: } \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2} \text{ .}$$

Conocidas, como ya hemos señalado, las constantes C_1 y C_2 por las condiciones relativas a cada problema, para cada valor de *x* a lo largo de la viga tenemos el correspondiente de *y* por la expresión (1) que nos da la flecha correspondiente al punto de la elástica de abscisa *x*. Como método general, se determinará la flecha máxima en el punto en que la tangente es horizontal. Para ello anularemos la ecuación de la inclinación de la tangente, y el valor o valores obtenidos para *x*, lo llevamos a la ecuación anterior (1) de la curva elástica, obteniéndose la flecha máxima $y_{máx} = \delta$ (PEREZ WHITE, 1976).

El presente ejemplo ilustra el método de la doble integración en el caso de una viga isostática[2]. Se recomienda hacer el cálculo de deformaciones en vigas isostáticas correspondientes a distintos casos de sustentación y carga. Pues bien, el caso es el siguiente:

Una viga de acero en voladizo está cargada (con una carga puntual en el extremo libre y otra uniformemente repartida) y sustentada como representa la figura siguiente. Si el módulo de elasticidad del acero es: $E = 2'1 \times 10^6$ kp/cm^2, se trata de determinar:

1º. El perfil doble T de la viga si se considera un coeficiente de trabajo del acero de: $\sigma_{adm.}$ = 1.200 kp./cm^2, dibujando el correspondiente diagrama de momentos.

2º. La deformación en el extremo A de la viga.

[2] Una viga isostática es aquella estáticamente determinada en la cual sus reacciones pueden determinarse únicamente al aplicar condiciones de equilibrio del sistema. Las vigas isostáticas son aquellas que solo tienen dos apoyos y están libremente apoyadas sobre éstos. En este tipo de vigas no interesan las características de los apoyos, por lo cual solo se calculan los elementos de la propia viga. Existen dos tipos básicos de vigas isostáticas y, a partir de ellos, se pueden hacer combinaciones diversas; la diferencia radica en la condición de la carga. Contrariamente, una viga hiperestática es aquella que no se puede resolver con un análisis del sistema de fuerzas en equilibrio, es decir, que resulta estáticamente indeterminada, donde la sumatoria de fuerzas en x, y o z, así como la sumatoria de momentos no es suficiente para resolverla y se debe recurrir a otros métodos como el de la doble integración, el método de la superposición o el método de áreas y momentos.

Solución:

Un esquema de la viga mencionada podría ser el siguiente:

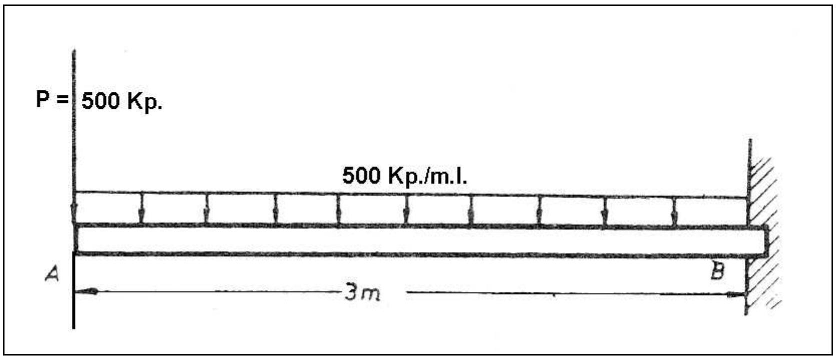


FIG. 8.5. Viga empotrada por un extremo.

1º) El momento máximo se produce en el empotramiento B, y:

M_B = -500·3 – 1.500·1'5 = -3.750 m.kp., y con un módulo resistente de:

$W_x = \frac{M_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{3.750 \cdot 100}{1.200} = 312{,}5\ cm^3$, correspondiendo un perfil de acero laminado en caliente IPN 240 mm. (con $W_x = 354 > 312'5\ cm^3$) o bien IPE 240 mm. (con $W_x = 324 > 312'5\ cm^3$).

Veamos, ahora, la figura siguiente:

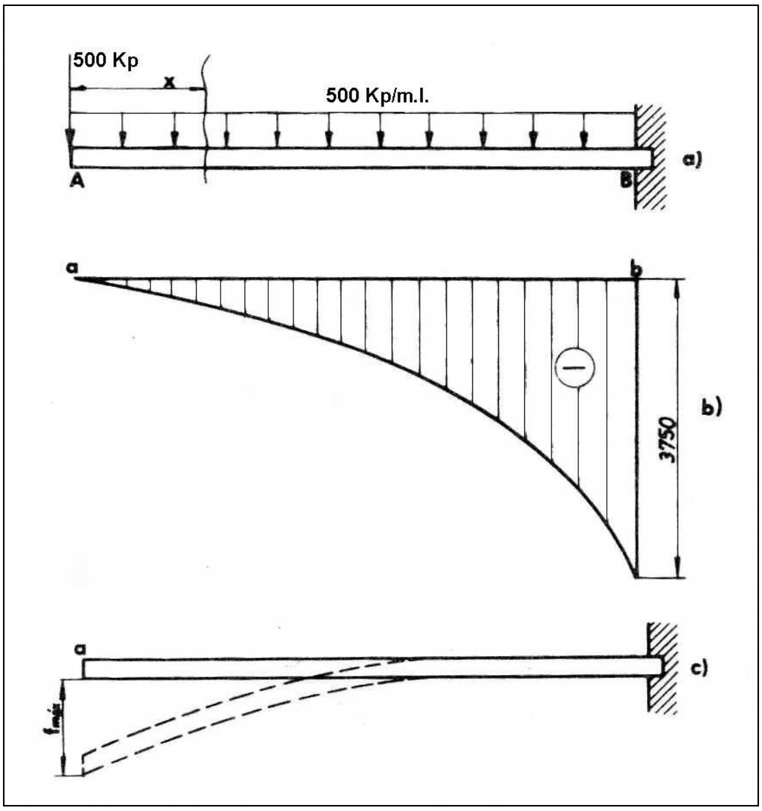


FIG. 8.6. Diagramas de cargas, momentos y deformación o flecha.

El diagrama de momentos se representa en la subfigura b).

2º) Para calcular la deformación o flecha, tomaremos momentos respecto a una sección cualquiera de abscisa x, con lo que:

$$M_x = -500 \cdot x - 500 \cdot \frac{x^2}{2}$$

y llevemos este valor a la ecuación de deformaciones, o sea:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -500 \cdot x - 500 \cdot \frac{x^2}{2} \quad \text{(I)}$$

Integrando esta expresión, que es una ecuación diferencial de variables separadas, tendremos la ecuación de inclinación de las tangentes:

$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = -500 \cdot \frac{x^2}{2} - 500 \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \qquad \text{(II)}$$

Para hallar la constante de integración C_1 por las condiciones iniciales, la tangente es horizontal (nula) en el empotramiento B impidiendo toda rotación, luego haciendo $\frac{dy}{dx} = 0$ para x = L, obtenemos que:

$$C_1 = \frac{500 \cdot L^2}{2} + \frac{500 \cdot L^3}{6}$$

valor éste que substituido en (II) y volviendo a integrar, ofrece la ecuación de la curva elástica:

$$E \cdot I \cdot y = -\frac{500 \cdot x^3}{6} - \frac{500 \cdot x^4}{24} + \frac{500 \cdot L^2}{2} x + \frac{500 \cdot L^3}{6} x + C_2$$

La constante de integración C_2 que calculamos con y = 0 para x = L y sustituyendo su valor:

$C_2 = -\frac{500 \cdot L^3}{3} - \frac{3}{24} 500 \cdot L^4$, en la (I), obtenemos después de reducir:

$$y = \frac{1}{E \cdot I}\left[-\frac{250 \cdot x^3}{3} - \frac{125 \cdot x^4}{6} + 250 \cdot L^2 \cdot x + \frac{250 \cdot L^3}{3} \cdot x - \frac{500 \cdot L^3}{3} - \frac{125}{2} \cdot L^4\right]$$

ecuación de la curva elástica, que para cada valor de x nos permite obtener el correspondiente valor de y.

El valor máximo de y lo obtenemos obviamente en el extremo libre, para x = 0, luego será:

$$y_{máx}(x=0) = f_{máx} = -\frac{500}{3 \cdot E \cdot I}\left(L^3 + \frac{3L^4}{8}\right)$$

y substituyendo valores con: E = 2'1·10^6 kp/cm^2, L = 300 cm. e I_x = 4.250 cm^4 (que es el momento de inercia correspondiente a un perfil IPN 240 mm.), obtenemos: $f_{máx}$ = 1'07 cm.

El perfil de la viga para una deformación máxima igual a $\frac{luz}{500}$, esto es, 300/500 = 0'60 cm. nos daría, por la expresión anterior:

$I_x = \frac{1'07 \times 4.250}{0'60}$ = 7.579 cm^4, correspondiendo a un perfil normal IPN 280 mm.

con I_x = 7.590 cm^4 o bien a un perfil IPE 300 mm. con I_x = 8.360 cm^4.

Por aplicación directa de las fórmulas existentes al respecto (pueden consultarse en los manuales *ad hoc*), se tendría una flecha o sagita de (correspondiente a un perfil IPN 240 mm.):

$$f_{máx} = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{Q \cdot L^3}{8 \cdot E \cdot I} = \frac{500 \cdot 300^3}{3 \cdot 2'1 \cdot 10^6 \cdot 4.250} + \frac{1.500 \cdot 300^3}{8 \cdot 2'1 \cdot 10^6 \cdot 4.250} = 0'50 + 0'57 = 1'07 \text{ cm.}$$

o sea $\cong \frac{1}{280}$ de la luz, que resulta ACEPTABLE para el caso de una viga metálica en voladizo, según la normativa constructiva vigente. En el caso de utilizar alternativamente un perfil IPE 240 mm., se tendría una flecha máxima de:

$$f_{máx} = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{Q \cdot L^3}{8 \cdot E \cdot I} = \frac{500 \cdot 300^3}{3 \cdot 2'1 \cdot 10^6 \cdot 3.890} + \frac{1.500 \cdot 300^3}{8 \cdot 2'1 \cdot 10^6 \cdot 3.890} = 0'55 + 0'62 = 1'17 \text{ cm.}$$

o sea $\cong \frac{1}{256}$ de la luz, que resulta ACEPTABLE (aunque más justo) para el caso de una viga metálica en voladizo, según la normativa constructiva vigente.

Como se ha visto antes, el método de la doble integración, ofrece:

$$M_B = -500 \cdot 3 - (500 \cdot 3) \cdot 1'5 = -3.750 \text{ mkp};$$

$$E \cdot I \cdot y'' = -M_x; \quad M_x = -P \cdot x - \frac{\omega \cdot x^2}{2} = -500 \cdot x - 250 \cdot x^2;$$

$$E \cdot I \cdot y'' = 500 \cdot x + 250 \cdot x^2; \quad \text{Integrando: } E \cdot I \cdot y' = 500 \cdot \frac{x^2}{2} + 250 \cdot \frac{x^3}{3} + C_1;$$

$$E \cdot I \cdot y = 500 \cdot \frac{x^3}{6} + 250 \cdot \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2; \quad x = 3 \rightarrow y' = 0; \quad \text{de donde:}$$

$$0 = 250 \times 9 + 250 \times 9 + C_1; \text{ de donde: } C_1 = -4.500;$$

$$x = 3 \rightarrow y = 0, \text{ de donde:}$$

$$0 = \frac{500 \cdot 27}{6} + \frac{250 \cdot 81}{12} - 4.500 \cdot 3 + C_2 \text{ , con lo que:}$$

$$C_2 = 13.500 - 2.250 - 1.687'5 = 9.562'5 \;;$$

$$y = \frac{1}{E \cdot I} = \left(\frac{250 \cdot x^3}{3} + \frac{250 \cdot x^4}{12} - 4.500 \cdot x + 9.562'5 \right); \quad y_{máx} \rightarrow x = 0 \;;$$

o sea, en el caso de emplear un perfil IPN 240 mm.:

$$\boxed{y_{máx} = \frac{9.562'5}{(2'1 \cdot 10^6 \cdot 10^4) \cdot \left(\frac{4.250}{10^8} \right)} = 0'0107 \text{ m.} = 1'07 \text{ cm.}} \;,$$

, o bien en el caso de emplear un perfil IPE 240 mm.:

$$\boxed{y_{máx} = \frac{9.562'5}{(2'1 \cdot 10^6 \cdot 10^4) \cdot \left(\frac{3.890}{10^8} \right)} = 0'0117 \text{ m.} = 1'17 \text{ cm.}} \text{ c.s.q.d.}$$

Ejemplo 4

1. GENERALIDADES

La deformación total producida en una losa-voladizo de hormigón armado anclada en la roca para el sostenimiento de tierras, que fue propuesta por este autor (véase *Teoría, diseño y construcción de terrazas-voladizo*, obra citada en la bibliografía) ante la necesidad de proyectar abancalamientos en terrenos de elevada pendiente natural (generalmente en laderas de montaña para la construcción de caminos rurales o pistas forestales, parcelas agrícolas o forestales, parcelas urbanizadas, defensa contra la erosión, etc.), es la suma de diferentes deformaciones parciales. Su estudio deberá tener en cuenta las deformaciones del hormigón, así como la influencia que la fisuración ejerce sobre la rigidez de la pieza.

En nuestro caso, la deformación será función no solo de las resistencias de los materiales y de las acciones actuantes, sino también de la retracción, fluencia, temperatura, condiciones de curado del hormigón, edad, fechas de desencofrado y puesta en carga, fisuración, adherencia de las armaduras, etc.

La estimación de las deformaciones, en definitiva, constituirá una tarea compleja; su magnitud deberá ser considerada como una variable aleatoria, que solo es susceptible de evaluación aproximada. En nuestro caso, al estar la viga-voladizo empotrada en la roca, no existe la necesidad o limitación de evitar daños en la misma (salvo los que puedan comprometer la propia estabilidad del conjunto proyectado).

Resulta evidente, no obstante, que debe dotarse a la losa-voladizo de la rigidez necesaria para evitar que la flecha resultante pueda afectar a sus condiciones de servicio. Pese a que la mayoría de las diferentes normativas internacionales vigentes permiten la adopción, para voladizos, del valor (como momento de inercia media ponderada a lo largo de la luz) correspondiente a la sección de arranque o empotramiento (pues se trata de una viga de sección o escuadría variable), hemos considerado, en el cálculo que se desarrolla a continuación, el valor del momento de inercia efectivo de la sección de la losa correspondiente al punto de aplicación del empuje activo E para las 3 alturas verticales analizadas, a saber:

$$\begin{cases} h_1 = 1'00 \text{ m.} \\ h_2 = 2'00 \text{ m.} \\ h_3 = 3'00 \text{ m.} \end{cases}$$

y que son, respectivamente, los siguientes:

$$\begin{cases} Ie_1 = 6.781 \text{ cm}^4 \\ Ie_2 = 74.377 \text{ cm}^4 \\ Ie_3 = 416.996 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Las cargas puntuales o empujes activos actuantes, así como sus puntos de aplicación a partir de la distancia media desde el arranque de la losa y siguiendo la mediana del trapecio aproximado configurativo de su sección transversal, son los siguientes:

$$\begin{cases} a_1 = 0'44 \times \sqrt{2} = 0'62 \text{ m.} = 62 \text{ cm.} \\ a_2 = 0'82 \times \sqrt{2} = 1'16 \text{ m.} = 116 \text{ cm.} \\ a_3 = 1'18 \times \sqrt{2} = 1'67 \text{ m.} = 167 \text{ cm.} \end{cases}$$

En el cálculo se ha partido, en todos los casos, de la hipótesis minimalista, con los siguientes parámetros comunes:

$$\begin{cases} q = 1.400 \text{ kp/m}^2 \text{ (sobrecarga dinámica virtual equivalente)} \\ \alpha = 45^\circ \text{ (inclinación de la losa-voladizo)} \\ \beta = 2^\circ \text{ (pendiente de la terraza superior)} \\ E = 280.000 \text{ kp/cm}^2 \text{ (módulo de deformación del hormigón).} \end{cases}$$

De acuerdo con la normativa técnica existente al respecto, se emplea hormigón HA-25 de resistencia característica f_{ck} = 250 kp/cm^2 y dosificación mínima de 358 Kg/m^3 de cemento Portland artificial P-350, así como acero especial corrugado B500S con límite elástico mínimo de 500 N/mm^2. Se ha tomado como carga puntual actuante, así mismo, $\vec{E} = F$, o sea, el empuje activo transmitido por el terreno, en vez de su componente perpendicular a la losa $\vec{E}_F$, con el fin de compensar de algún modo, el efecto mayorante del peso propio de la losa, que no se ha tenido en cuenta por razones de rapidez y simplicidad operativa.

Aquí se ha considerado prudentemente, como puede observarse, un módulo minimalista de deformación del hormigón armado, a los 28 días, de E = 280.000 kp/cm^2. No obstante, existen diversos criterios para la determinación de su cuantía, como el de la pendiente de la secante, a saber:

$$E = 19.000\sqrt{f_{ck}} = 19.000\sqrt{250} = 300.416 \text{ kp/cm}^2$$

o bien el de la pendiente de la tangente:

$$E = 21.000\sqrt{f_{ck}} = 21.000\sqrt{250} = 332.039 \text{ kp/cm}^2.$$

Otras consideraciones, como la de la Escuela Politécnica de Stuttgart (“Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens”, cuaderno 227, citada por R. Saliger) que solo tiene en cuenta las deformaciones elásticas, ofrecería:

$$E = \frac{1.000.000}{1'7 + \frac{300}{f_{ck}}} = \frac{1.000.000}{1'7 + \frac{300}{250}} = 344.828 \text{ kp/cm}^2,$$

mientras que teniendo en cuenta la deformación total (elástica y plástica), resultará:

$$E = \frac{1.000.000}{1'7 + \frac{360}{f_{ck}}} = \frac{1.000.000}{1'7 + \frac{360}{250}} = 318.471 \text{ kp/cm}^2.$$

Otros autores, como Schüle, proponen la fórmula:

$$E = \frac{1.000(f_{ck} - 25)}{0'0016 \times f_{ck} + 0'25} = \frac{1.000(250 - 25)}{0'0016 \times 250 + 0'25} = 346.154 \text{ kp/cm}^2$$

o bien, el Código Modelo CEB-FIP recomienda, para el cálculo de las deformaciones del hormigón, el siguiente valor medio para cargas instantáneas o rápidamente variables:

$$E = 44.000 \times \sqrt[3]{f_{ck} + 80} = 44.000 \times \sqrt[3]{330} = 304.059 \text{ kp/cm}^2,$$

que resulta ser de concepción similar a la fórmula francesa:

$$E = 52.000 \times \sqrt[3]{f_{ck}} = 52.000 \times \sqrt[3]{250} = 327.579 \text{ kp/cm}^2.$$

2. PROGRAMA E HIPÓTESIS DE CÁLCULO

Se considerará a la losa-voladizo, en este caso, como una viga empotrada por un extremo y libre por el otro, con una carga concentrada $P = \vec{E}$

(empuje activo expresado en kp.) cuyo punto de aplicación se halla situado a una distancia:

$$a = y' \times \sqrt{2} \text{ (en cm.),}$$

del empotramiento en la roca. Esto es:

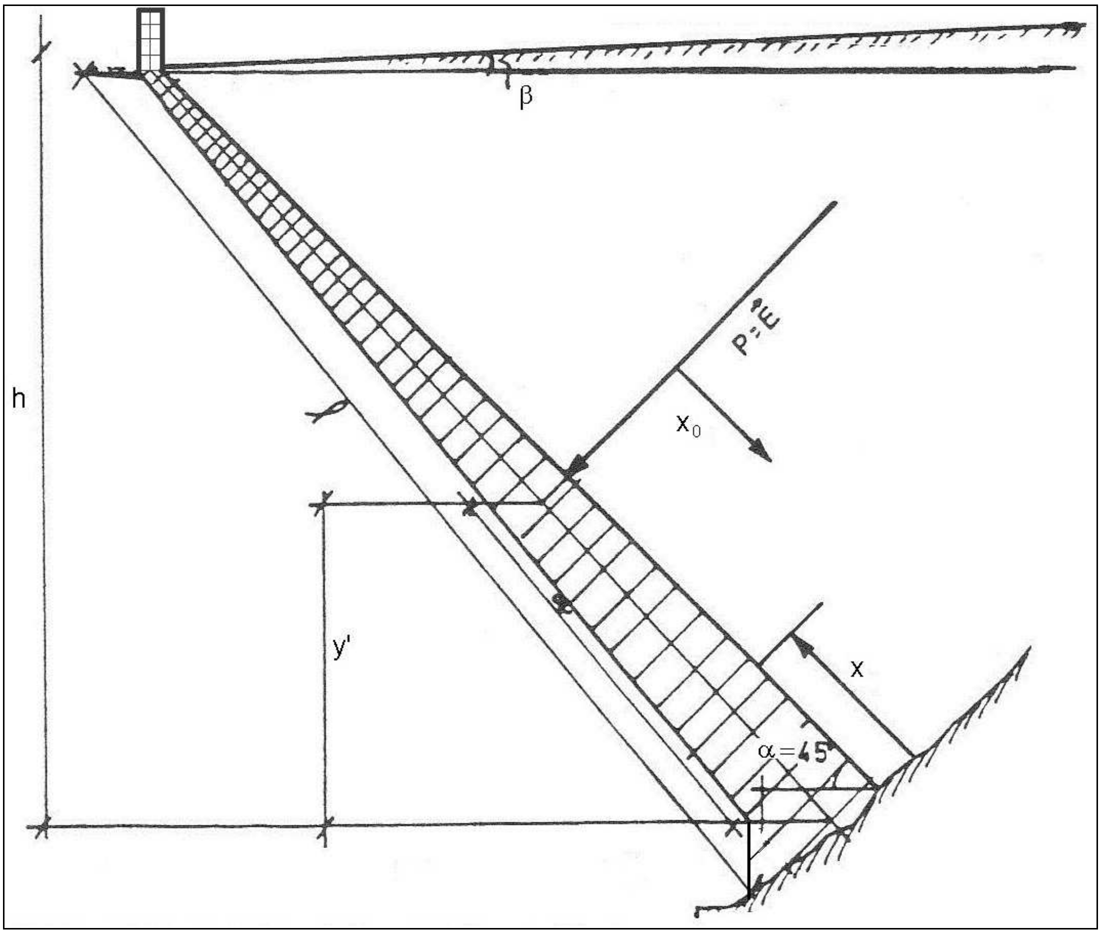


FIG. 8.7. Esquema de la losa-voladizo.

Se definen, al respecto, los siguientes parámetros:

E_c = Módulo de Young del hormigón (kp/cm^2).
I_e = Momento de inercia geométrico efectivo (cm^4).
x = Distancia de la sección en estudio desde el empotramiento (cm.).
l = $h \times \sqrt{2}$ = Longitud total de vuelo de la losa (cm.).

Se trata de obtener la flecha o deflexión y (cm.) en diferentes secciones de la losa, el ángulo de deflexión S (expresado en grados sexagesimales) y el momento de torsión M (cm.kp.).

En general, podrán presentarse dos casos diferentes, a saber:

CASO 1.

$$(a < x \leq l)$$

$$y = \frac{P \times a^3}{6 \times E_c \times I_e} - \frac{P \times a^2}{2 \times E_c \times I_e} \times x$$

$$S = \text{arc}\cdot\text{tg}\left(- \frac{P \times a^2}{2 \times E_c \times I_e} \right)$$

$$M = 0 \ (\text{carga tangencial} : \omega_m = 0)$$

CASO 2.

$$(x \leq a)$$

$$y = \frac{P \times x^3}{6 \times E_c \times I_e} - \frac{P \times a}{2 \times E_c \times I_e} \times x^2$$

$$S = \text{arc}\cdot\text{tg}\left[\frac{P \times x}{2 \times E_c \times I_e} (x - 2a) \right]$$

$$M = P(x - a) \ (\text{carga tangencial} : \omega_m = P)$$

Lógicamente, el momento máximo tendrá lugar en el empotramiento, cuando x = 0 $\Rightarrow$ y = 0, s = 0, M = -P·a.

Para los 3 casos ya mencionados, se tienen unas acciones (ver tabla correspondiente):

$$\begin{cases} P_1 = \overrightarrow{E_1} = 2.103 \text{ kp.} \\ P_2 = \overrightarrow{E_2} = 5.794 \text{ kp.} \\ P_3 = \overrightarrow{E_3} = 11.075 \text{ kp.} \end{cases}$$

con unos momentos de empotramiento de:

$$\begin{cases} M_1 = \overrightarrow{E_1} \times a_1 = 2.103 \times 0'62 \cong 1.309 \text{ m.kp.} \\ M_2 = \overrightarrow{E_2} \times a_2 = 5.794 \times 1'16 \cong 6.719 \text{ m.kp.} \\ M_3 = \overrightarrow{E_3} \times a_3 = 11.075 \times 1'67 \cong 18.482 \text{ m.kp.} \end{cases}$$

y unos valores que adopta x, en estudio, de (expresados en cms.):

	Empotramiento (x = 0)	**Punto de aplicación (x = a)**	**Máximo (x = l)**
1	0	62	141
2	0	116	283
3	0	167	424

Para la realización de los cálculos recurrentes correspondientes, se ha elaborado un programa para una computadora manual programable CASIO fx-

3.900P para la ejecución de fórmulas en forma consecutiva, del mismo modo que se realiza con las sentencias múltiples en los cálculos manuales.

La hoja de listado del programa elaborado, de gran interés y utilidad para los calculistas de este tipo de estructuras, es el siguiente:

Línea	MODE 2						Programa									Notas	Número de pasos
1	?	→	E	:	?	→	F	:	?	→	A	:	?	→	C		
2	:	?	→	D	:												20
3	D	≤	A	⇒	Goto	1	:										27
4	C	A	x^2	(	A	÷	3	−	D	)	÷	3	E	F	◢		42
5	$\tan^{-1}$	(	(−)	C	A	x^2	÷	2	E	F	◢						53
6	Ø	:	Goto	2	:												58
7	Lbl	1	:	C	D	x^2	(	D	÷	3	−	A	)	÷	2		
8	E	F	◢														76
9	$\tan^{-1}$	(	C	D	(	D	−	2	A	)	÷	2	E	F	◢		91
10	C	(	D	−	A	:	Lbl	2									99

Contenid de las memorias								
A	a							
B								
C	P							
D	x							
E	E							
F	I							

FIG. 8.8. Programa de cálculo.

3. INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

3.1. Introducción

No existe una gran concordancia, en la literatura especializada, con respecto a los valores límites que deben admitirse para las flechas, así como tampoco en las diferentes normativas de cálculo. Las discrepancias aludidas no son de extrañar, por las siguientes razones (JIMÉNEZ MONTOYA, GARCÍA MESEGUER y MORÁN CABRÉ, 1981):

- el cálculo de flechas no puede hacerse de forma muy precisa, especialmente el de flechas diferidas;

- en el fenómeno intervienen factores más o menos aleatorios, como la retracción, la fluencia, la relación de sobrecarga a carga permanente y las condiciones de temperatura y humedad;

- los valores admisibles dependen de la existencia de otros elementos ligados a la estructura y de su grado de deformabilidad;

Muchas normas establecen valores límites, bien directamente, bien indirectamente, a través de un mínimo prescrito para la relación canto/luz. Así por ejemplo, en las diferentes normativas aplicables al caso, son tradicionales los siguientes valores:

$$\boxed{f_1 \leq \frac{l}{500} \quad \text{y} \quad f_2 \leq \frac{l}{300}}$$

en donde l es la luz, f_1 la flecha correspondiente a las sobrecargas de uso y f_2 la debida a dichas sobrecargas más las cargas permanentes. Estos valores continúan figurando como límites admisibles en no pocas normas existentes al respecto.

A continuación, expondremos los valores límites preconizados por algunos de los reglamentos más modernos, advirtiendo que es siempre aconsejable, para reducir flechas, no utilizar elementos muy esbeltos, colocar armadura de compresión, emplear hormigones de baja fluencia y retrasar lo más posible la aplicación de cargas permanentes al hormigón.

Por lo que se refiere, tanto a las normas españolas como a las Recomendaciones del Comité Europeo del Hormigón (CEB-FIP 1970), que no incluyen valores límites admisibles para las flechas (remitiéndose, en este tema, a los trabajos de la Comisión CIB.W23), prescriben que podrá prescindirse del cálculo de flechas si el canto útil es mayor o igual a l/10. En nuestro caso, pues:

Si:

- $d_1 \geq$ 14’1 cm. (es d_1 = 11’23 cm. y 15’23 cm. en el empotramiento).
- $d_2 \geq$ 28’3 cm. (es d_2 = 27’51 cm. y 34’51 cm. en el empotramiento).
- $d_3 \geq$ 42’4 cm. (es d_3 = 47’57 cm. y 50’57 cm. en el empotramiento).

circunstancia ésta que solo se cumple claramente en el tercer supuesto de los estudiados (con h = 3’00 m.).

3.2. Cálculo computarizado

En definitiva, el cálculo de la flecha instantánea para el caso que nos ocupa (viga en flexión simple, voladiza, con carga concentrada cualquiera), viene dado por la expresión:

$$y = \alpha \times \frac{M_k \times l^2}{E_c \times I_e}$$, con los siguientes significados:

α = coeficiente que depende del tipo de carga y forma de sustentación, obtenido del análisis estructural, de valor $= \frac{a}{l}\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{6 \cdot l}\right)$.

M_k = momento flector característico máximo en la viga.

Aplicado, en fin, el programa de cálculo propuesto, se han obtenido los siguientes resultados:

TIPO DE LOSA ↓	SECCIÓN EN → ESTUDIO	EMPOTRAMIENTO (x = 0)	PUNTO DE APLICACIÓN EMPUJE (x = a)	EXTREMO LIBRE (x = l)
1 h = 1'00 m.	y	0	-0'08799 $\left(\frac{1}{705} a\right)$	-0'17078 $\left(\frac{1}{826} l\right)$
	S	0	-0'12197	-0'12197
	M	-1.309	0	0
2 h = 2'00 m.	y	0	-0'14476 $\left(\frac{1}{801} a\right)$	-0'30490 $\left(\frac{1}{928} l\right)$
	S	0	-0'10725	-0'10725
	M	-6.719	0	0
3 h = 3'00 m.	y	0	-0'14726 $\left(\frac{1}{1.134} a\right)$	-0'32479 $\left(\frac{1}{1.305} l\right)$
	S	0	-0'07578	-0'07578
	M	-18.482	0	0

que, como puede comprobarse en todos los casos, ofrece unos valores de las flechas perfectamente aceptables.

Por otra parte, y bajo la hipótesis de considerar como valor del momento de inercia efectivo de la losa-voladizo el correspondiente a la sección de arranque, resulta posible analizar el comportamiento de las diferentes secciones de la losa, al objeto de llevar a efecto un análisis más pormenorizado de su comportamiento futuro.

En los últimos años se han desarrollado programas de cálculo por computadora que permiten calcular las losas de hormigón armado en forma completa y cuyos valores serían mucho más cercanos a la realidad. Estos métodos consisten en dividir las losas en un gran número de pequeñas placas que se unen unas con otras, y la precisión del resultado resulta mayor cuanto menor sea el tamaño de estas placas. A este método se lo conoce como "resolución por elementos finitos". Sin embargo, los resultados muchas veces no resultan fáciles de manejar ya que las salidas de resultados suelen ser excesivamente voluminosas. Eso ha llevado a que la resolución por tabla subsista y sea todavía de aplicación generalizada. En realidad, la utilización de estas poderosas herramientas de cálculo ha desplazado el problema de la resolución de estos sistemas. Anteriormente, la dificultad principal se centraba en la resolución estricta, mientras que hoy en día, el problema estriba en analizar la validez de las hipótesis y la interpretación de los resultados obtenidos.

Para el caso concreto de las losas-voladizo propuestas, correspondientes a h_1 = 1'00 m. y h_2 = 2'00 m. (aunque sería posible alcanzar alturas de hasta 4'00 m.), y con momentos de inercia efectivos: Ie_1 = 12.932 cm^4 e Ie_2 = 122.362 cm^4, los resultados obtenidos del cálculo, por secciones situadas a 35 cm. de intereje a excepción de la última, son los siguientes (existen, pues, 10 secciones diferentes en estudio):

SECCIÓN	h = 1’00 m. (l = 1’41 m.) a = 62 cm. E = 2.103 kp.				h = 2’00 m. (l = 2’83 m.) a = 116 cm. E = 5.794 kp.			
x (cm.)	y (cm.)	y/l.	S (*)	M (cm.kp)	y (cm.)	y/l.	S (*)	M (cm.kp)
0	0	0	0	-130.900	0	0	0	-671.900
35	-0’01791	$\frac{1}{7.873}$	-0’05183	-56.781	-0’01081	$\frac{1}{26.179}$	-0’03340	-469.314
70	-0’03671	$\frac{1}{3.841}$	-0’06396	0	-0’03839	$\frac{1}{7.372}$	-0’05494	-266.524
105	-0’06276	$\frac{1}{2.247}$	-0’06396	0	-0’07551	$\frac{1}{3.748}$	-0’06460	-67.734
141	-0’08955	$\frac{1}{1.575}$	-0’06396	0	-0’07762	$\frac{1}{3.646}$	-0’06519	0
175	…	…	…	…	-0’10341	$\frac{1}{2.737}$	-0’06519	0
210	…	…	…	…	-0’12996	$\frac{1}{2.178}$	-0’06519	0
245	…	…	…	…	-0’15651	$\frac{1}{1.808}$	-0’06519	0
280	…	…	…	…	-0’18306	$\frac{1}{1.546}$	-0’06519	0
283	…	…	…	…	-0’18533	$\frac{1}{1.527}$	-0’06519	0

3.3. Métodos clásicos de cálculo

El método computerizado seguido hasta ahora se ha contrastado con los métodos tradicionales empleados en la Resistencia de Materiales, llegándose a obtener resultados similares. En efecto, el método de la doble integración analítica resulta altamente útil, a juicio del que suscribe, para entender, como en el caso de la losa-voladizo que nos ocupa, el comportamiento de los elementos estructurales y maquinales expuestos a deformación por flexión, y por haber sido ya aplicado y explicado en el problema anterior obviaremos aquí su exposición pormenorizada.

Considerando, en este caso, la abscisa x_0 como la distancia de la sección en estudio en el tramo comprendido desde el punto de aplicación del empuje hasta el empotramiento en la roca de la losa-voladizo (inversamente a lo supuesto anteriormente), el método clásico de la doble integración ofrece:

$$E_c \times I_e \times y'' = -Mx_0 \;;\quad 0 \leq x \leq a \;;$$

$$Mx_0 = -P \times x_0 \;;\quad \text{con lo que, para: h = 2'00 m. ;}\quad \vec{E} = P = 5.794 \text{ kp.}$$

$$x_0 = x - a = 70 - 116 = -46 \text{ cm.} = -0'46 \text{ m.},\ Mx_0 = -5.794 \times x_0 \;;$$

Integrando sucesivamente, se obtiene que:

$$\begin{cases} E_c \times I_e \times y'' = 5.794 \times x_0 \; ; \\ E_c \times I_e \times y' = 5.794 \times \dfrac{x_0^2}{2} + C_1; \\ E_c \times I_e \times y = 5.794 \times \dfrac{x_0^3}{6} + C_1 \times x_0 + C_2 \; ; \end{cases}$$

A la misma conclusión llegaríamos considerando la ecuación característica de la homogénea (puesto que se trata de una EDO de segundo orden):

$E_c \times I_e \times \lambda^2 = 0$; de raíces: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; y su solución es: $y^* = C_1x_0 + C_2$;

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la completa del tipo siguiente, aumentando en dos grados el polinomio del segundo miembro, habida cuenta de que faltan los términos correspondientes en y e y', o sea:

$$\begin{cases} y_p = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d \\ y'_p = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c \\ y''_p = 6ax_0 + 2b \end{cases}$$

que substituyendo en la ecuación inicial, ofrece:

$$E_c \times I_e \times (6ax_0 + 2b) = 5.794 \times x_0 \; ;$$

$6a \times E_c \times I_e \times x_0 + E_c \times I_e \times 2b = 5.794 \times x_0$; de donde: $b = c = d = 0$;

y $a = \dfrac{5.794}{6 \times E_c \times I_e}$; y la integral general es, efectivamente:

$$y = y^* + y_p = C_1x_0 + C_2 + \frac{5.794 \times x_0^3}{6 \times E_c \times I_e} \text{ , c.s.q.d.}$$

Ahora hacemos:

$x_0 = 1'16$ m. $\Rightarrow y' = 0$; de donde: $0 = 5.794 \times \dfrac{1'16^2}{2} + C_1$; $C_1 = -3.898$;

$x_0 = 1'16$ m. $\Rightarrow y = 0$; de donde:

$0 = 5.794 \times \dfrac{1'16^{\;3}}{6} - 3.898 \times 1'16 + C_2$; de donde: $C_2 = 3.014$;

ello nos ha permitido obtener el valor de las constantes, y la ecuación quedará así:

$$y = \frac{1}{E_c \times I_e}\left(\frac{5.794 \times x_0^3}{6} - 3.898 \times x_0 + 3.014\right) \; ;$$

con lo que para $x_0 = 0'46$ m. = 46 cm., se tendrá una flecha de la losa de:

$$y = \frac{1}{(280.000 \times 10^4) \times \left(\frac{122.362}{10^3}\right)} \left(\frac{5.794 \times 0'46^3}{6} - 3.898 \times 0'46 + 3.014 \right) = 0'03839 \text{ cm.}$$

lo que representa $\frac{1}{7.372}$ de la luz y ello concuerda exactamente con el cálculo computerizado anteriormente realizado para esta misma sección (x = 70 cm.), con un momento flector de:

$$M = -5.794 \times 46 = -266.524 \text{ cm.kp.}$$

Desde luego, en el punto de aplicación del empuje, se producirá: $x_0 = 0$, con lo que se tendrá una flecha de la losa-voladizo de (x = a = 116 cm.):

$$y = \frac{3.014 \times 10^4}{280.000 \times 122.362} = 0'0008797 \text{ m.} = 0'08797 \text{ cm.}$$

y también M = 0 cm.kp., pudiéndose, así mismo, llevar a cabo el estudio de las deformaciones mediante el correspondiente diagrama de momentos flectores (Teorema de Mohr), método de la viga conjugada (que no es más que una variante del método del área-momento[3]), método de superposición o cualquier otro procedimiento usualmente empleado al respecto, alcanzándose, en todos los casos, resultados similares.

1.2. FÍSICA GENERAL

Ejemplo 1

A tank contains 100 gallons of brine holding 200 pounds of salt in solution. Water containing 1 pound of salt per gallon flows into the tank at the rate of 3 gallons per minute and the mixture, kept uniform by stirring, flows out at the same rate. Find the amount of salt in the tank at the end of 90 minutes.

Solution:

Let q denote the number of pounds of salt in the tank at the end of *t* minutes. Then $\frac{dq}{dt}$ is the rate of change of the amount of salt at time *t*.

Three pounds of salt enters the tank each minute and 0’03·q pounds is removed. Thus, $\frac{dq}{dt} = 3 - 0'03 \cdot q$; $\frac{dq}{3 - 0'03 \cdot q} = dt$, and $\frac{\ln(0'03q - 3)}{0'03} = -t + C$.

[3] The moment-area theorems were developed by Christian Otto Mohr (1835-1918) and later published by Charles Ezra Greene (1842-1903) in 1873. These methods are used to find the deflection and slope of a beam during bending. The first theorem is used to find the slope at a location of the beam. Simply stated, the change in slope in a member is equal to the change in area of the beam’s moment diagram. The second method is used to find the vertical displacement of the beam. The vertical deviation of the tangent at a point on the elastic curve with respect to the tangent extended from another point equals the "moment" of the area under moment diagram between the two points.

When t = 0, q = 200 and $C = \dfrac{\ln 3}{0'03}$, so that ln(0'03·q – 3) = -0'03·t + ln3, 0'01q – 1 = $e^{-0'03\cdot t}$, and q = 100 + 100·$e^{-0'03\cdot t}$.

When t = 90, q = 100 + 100·$e^{-2'7}$ = 106'72 pounds = (106'72 × 454) g. = 48.451 g. = 48'451 kg. of salt.

Ejemplo 2

A chain 4 ft long starts to slide off a flat roof with 1 ft hanging over the edge. Discounting friction, find (a) the velocity with which it slides off and (b) the time required to slide off.

Solution:

Let *s* denote the length of the chain hanging over the edge of the roof at time *t*.

a) The force F causing the chain to slide off the roof is the weight of the part hanging over the edge.

Force = mass × acceleration = m·s'' = ¼m·g·s or s'' = ¼g·s.

2s's'' = ½gss' and $(s')^2 = \frac{1}{4}gs^2 + c_1$.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{When } t = 0,\ s = 1 \text{ and } s' = 0. \text{ Then } C_1 = -\frac{1}{4}g \text{ and } s' = \frac{1}{2}\sqrt{g}\cdot\sqrt{s^2-1}.\\ \text{When } s = 4,\ s' = \frac{1}{2}\sqrt{15g}\ \text{ft/sec.} = \frac{1}{2}\sqrt{15\cdot 32'174}\ \text{ft/sec.} =\\ = 10'984 \text{ ft/sec.} = 3'348 \text{ m./sec.}\end{array}\right.$$

b) $\dfrac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{g}\,dt$; Here, $\displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \frac{\sqrt{g}}{2}\int dt = \arg\text{ch}\, s =$

$= \ln(s + \sqrt{s^2-1}) = \dfrac{1}{2}\sqrt{g}\cdot t + C_2$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{When } t = 0,\ s = 1. \text{ Then } C_2 = 0 \text{ and } \ln(s + \sqrt{s^2-1}) = \frac{1}{2}\sqrt{g}\cdot t.\\ \text{When } s = 4,\ t = \dfrac{2}{\sqrt{g}}\ln(4 + \sqrt{15}) \text{ sec.} = 0'73 \text{ sec.}\end{array}\right.$$

Ejemplo 3

A boat of mass 1.600 lb has a speed of 20 ft/sec when the engine is cut off (at t = 0). The resistance of the water is proportional to its speed and is 200 lb when t = 0. How far will the boat have moved when its speed is reduced to 5 ft/sec?

Solution:

Let s denote the distance travelled by the boat *t* seconds after the engine is cut off.

$$m\cdot s'' = -K\cdot s' \quad \text{or} \quad s'' = -k\cdot s'$$

To determine k: At t = 0, s' = 20, $s'' = \frac{force}{mass} = -\frac{200\cdot g}{1.600}$ = -4, and $k = \frac{1}{5}$.

$s'' = \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{5}$, $\ln\cdot v = -\frac{1}{5}t + C_1$, and $v = C_1 e^{-t/5}$.

When t = 0, v = 20. Then $C_1 = 20$, $v = \frac{ds}{dt} = 20\cdot e^{-t/5}$, and $s = -100e^{-t/5} + C_2$.

When t = 0, s = 0. Then $C_2 = 100$ and $s = 100(1 - e^{-t/5})$.

When $v = 5 = 20e^{-t/5}$, $\boxed{s = 100(1 - ¼) = 75 \text{ ft.} = 22'86 \text{ m.}}$

Ejemplo 4

A particle of mass *m*, moving in a medium which offers a resistance proportional to the velocity, is subject to an attracting force proportional to the displacement. Find the equation of motion if at time t = 0, s = 0 and $s' = v_0$.

Solution:

Hint. Here: $m\frac{d^2s}{dt^2} = -k_1\frac{ds}{dt} - k_2 s$, or $\frac{d^2s}{dt^2} + 2b\frac{ds}{dt} + c^2 s = 0$, $\forall b > 0$.

The characteristic equation is, $\lambda^2 + 2b\lambda + c^2 = 0$; then,

$$\lambda = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4c^2}}{2} = \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - c^2}}{2} = \begin{cases} -b + \sqrt{b^2 - c^2} = \lambda_1 \\ -b - \sqrt{b^2 - c^2} = \lambda_2 \end{cases}$$

If $b^2 = c^2$, $s = v_0 t\cdot e^{-bt}$. Indeed, if $b^2 = c^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -b$, (the two roots are identical) then:

$$s = C_1\cdot e^{-bt} + C_2\cdot t\cdot e^{-bt} = (C_1 + C_2\cdot t)e^{-bt};$$

When $t = 0 \Rightarrow s = 0$, and: $0 = C_1$, also:

$$s' = \frac{ds}{dt} = C_2\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{e^{bt}}\right) = C_2\cdot\frac{e^{bt} + t\cdot b\cdot e^{bt}}{e^{2bt}} = C_2\cdot\frac{1 + t\cdot b}{e^{bt}};$$

for $t = 0 \Rightarrow s' = C_2 = v_0$, and to obtain: $s = v_0\cdot t + e^{-bt}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{If } b^2 < c^2,\ s = \dfrac{v_0}{\sqrt{c^2 - b^2}} \cdot e^{bt} \cdot \sin\sqrt{c^2 - b^2} \cdot t \\[2em] \text{If } b^2 > c^2,\ s = \dfrac{v_0}{2\sqrt{b^2 - c^2}} \cdot \left(e^{(-b+\sqrt{b^2-c^2})t} - e^{(-b-\sqrt{b^2-c^2})t}\right) \end{array}\right\} \quad \text{G.I.}$$

Ejemplo 5

El PB-209, que es un isótopo radiactivo del plomo, se desintegra con una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier momento y tiene un periodo medio de vida de 3’30 horas. Si al principio había un gramo de plomo, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir para que se desintegre el 90%?

Solución:

Sea:

$\left\{\begin{array}{l} \text{A: cantidad de plomo PB-209 presente en el tiempo } t. \\ A_0\text{: cantidad inicial de plomo PB-209.} \\ t\text{: tiempo, en horas.} \\ \dfrac{dA}{dt}\text{: rapidez de desintegración del PB-209.} \\ k>0\text{: constante de proporcionalidad.} \end{array}\right.$

De tal manera que: $\frac{dA}{dt} = -k{\cdot}A$: hipotéticamente, resulta que la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad presente del elemento, y entonces:

$$\frac{dA}{A} = -k{\cdot}dt \Leftrightarrow \ln A = -k{\cdot}t + c_1 \Leftrightarrow A = e^{-kt+c_1} \Leftrightarrow A = c{\cdot}e^{-kt}, \text{ con } c = e^{c_1} \quad (1)$$

$A_0 = A(0) = 1$: cantidad de PB-209 en t = 0 (2),

$\Rightarrow$ $1 = ce^{-k(0)} \Leftrightarrow c = 1$ $\{(2)$ en $(1)\}$ (3),

$\Rightarrow$ $A = e^{-kt}$ $\{(3)$ en $(1)\}$ (4)

A(3’3) = 0’5: en t = 3’3 se desintegra la mitad del PB-209 (5),

$$\Rightarrow 0'5 = e^{-k(3'3)} \Leftrightarrow -3'3k = \ln 0'5 \Leftrightarrow k = \frac{-0'6931471}{-3'3} \approx 0'21 \quad \{(5) \text{ en } (4)\} \quad (6)$$

Substituyendo (6) en (4) se obtiene la función para la cantidad de PB-209 en el tiempo *t*, a saber: $A = e^{-0'21\cdot t}$ (7).

Ahora necesitamos averiguar cuánto tiempo se necesita para que se desintegre el 90% de PB-209, es decir, para que la cantidad presente sea el

10% $\Leftrightarrow$ 0'1 (10% de 1) de la original; substituyendo este valor de A en (7), se obtiene que:

$$0'1 = e^{-0'21t} \Leftrightarrow -0'21t = \ln 0'1 \Leftrightarrow t = \frac{-2'3025851}{-0'21} = 10'964691 \approx 11 \text{ horas.}$$

Respuesta: para que se desintegre el 90% de PB-209, se necesitan transcurrir, aproximadamente, 11 horas.

Ejemplo 6

Un termómetro se saca de un horno donde la temperatura del aire es de 70ºC y se lleva al exterior, donde la temperatura es de 10ºC. Pasado medio minuto el termómetro indica 50ºC. a) ¿Cuál es la lectura cuando t = 1 minuto?, b) ¿Cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a los 15ºC?

Solución:

a) La ley de enfriamiento de Newton establece que en un cuerpo que se enfría, la rapidez con que la temperatura del cuerpo T cambia en el tiempo *t* es proporcional a la diferencia existente entre la temperatura del cuerpo y la temperatura constante T_m del medio ambiente que le rodea. Es decir, que si k es una constante de proporcionalidad, se tendrá que: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$. Pero, en el presente problema se tiene que: T_m = 10ºC. Ahora:

$$\frac{dT}{dt} = k(T-10) \Leftrightarrow \frac{dT}{(T-10)} = k \cdot dt \Leftrightarrow \ln(T-10) = k \cdot t + c_1 \Leftrightarrow T - 10 = e^{kt+c_1},$$

Y haciendo: $e^{c_1} = c \Rightarrow T = c \cdot e^{kt} + 10$ (1)

En: t = 0, T = 70ºC (2); por lo que, al substituir (2) en (1), se tiene que:

$70 = c \cdot e^{k(0)} + 10 \Leftrightarrow c = 60$ (3),

$$\left.\begin{array}{lll} T = 60e^{k \cdot t} + 10 & \{(3) \text{ en } (1)\} & (4) \\ T(0'5) = 50 & (5) & \end{array}\right\} \Rightarrow 50 = 60 \cdot e^{0'5 \cdot k} + 10 \quad \{(5) \text{ en } (4)\},$$

$$\Rightarrow \quad e^{0'5 \cdot k} = 0'\widehat{6} \Leftrightarrow 0'5 \cdot k = \ln 0'\widehat{6} \Leftrightarrow k = \frac{-0'40547}{0'5} \Leftrightarrow k = -0'81094 \qquad (6)$$

Substituyendo el valor de k dado por (6) en (4), se obtiene que:

$T = 60 \cdot e^{-0'81094 \cdot t} + 10$ (7), y la lectura buscada será:

$T(1) = 60 \cdot e^{-0'81094(1)} + 10 = 60(0'44444) + 10 = \boxed{36'67ºC}$

b) Para calcular el tiempo en que la temperatura sea de 15ºC, se substituye T = 15 en (7), esto es: $15 = 60 \cdot e^{-0'81094 \cdot t} + 10$; $60 \cdot e^{-0'81094 \cdot t} = 5$;

$e^{-0'81094 \cdot t} = 0'08\widehat{3333}$, y entonces:

$$\Rightarrow \quad -0'81094 \cdot t = \ln 0'08\widehat{3} \Leftrightarrow \boxed{t = \frac{-2'48491}{-0'81094} = 3'064 \text{ minutos.}}$$

Ejemplo 7

Una partícula se mueve a lo largo del eje OX de tal manera que su velocidad es proporcional al producto de su posición instantánea x (medida desde x = 0) y el tiempo t (medido de t = 0). Si la partícula está localizada en x = 54 m. cuando t = 0 seg. y x = 36 m. cuando t = 1 seg., ¿dónde estará situada cuando haya transcurrido un tiempo de t = 2 seg.?.

Solución:

Es obvio que si la velocidad de desplazamiento fuera constante, a los 2 segundos la partícula se hallaría a 18 m. a la derecha del origen. Pero al ser la velocidad variable, se tendrá que:

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x \cdot t \qquad \text{(k: constante de proporcionalidad),}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} - ktdt = 0 \qquad \text{(separando variables),}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} - \int k \cdot t \cdot dt = c \qquad \text{(integrando cada término de la ecuación),}$$

$$\Rightarrow \quad \ln|x| - \frac{k}{2}t^2 = c_1 \Leftrightarrow \ln|x| = c_1 + \frac{k}{2}t^2 \Leftrightarrow x = \pm \exp\left(c_1 + \frac{k}{2}t^2\right),$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm \exp(c_1) \cdot \exp\left(\frac{k}{2}t^2\right) \Leftrightarrow x = c \cdot \exp\left(\frac{k}{2}t^2\right) \qquad (1)$$

Las condiciones del problema planteado son las siguientes:

$$\begin{cases} x = 54 \text{ m., } t = 0 \text{ seg. } (2) \\ x = 36 \text{ m., } t = 1 \text{ seg. } (3) \end{cases}$$

Substituyendo (2) en (1), se obtiene que:
$54 = c \cdot \exp(0) \Leftrightarrow c = 54 \qquad (4)$

Substituyendo (3) y (4) en (1), se obtiene que:

$$36 = 54 \cdot \exp\left(\frac{k}{2}\right) \Leftrightarrow \exp\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{k}{2} = \ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 2\ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow k \approx -0'81093 \qquad (5)$$

Al substituir (4) y (5) en (1), se obtiene la solución particular requerida:

$x = 54 \cdot \exp\left(\frac{-0'81093}{2} t^2 \right) \Leftrightarrow x = 54 \cdot e^{-0'40547 \cdot t^2}$. De tal manera que:

$$x(2) = 54 \cdot e^{-0'40547(2)^2} \Leftrightarrow x(2) = 54 \cdot e^{-1.62186} = 54(0'19753) = 10'67 \text{ m.}$$

Respuesta: la partícula en cuestión, a los 2 segundos, se encontrará, aproximadamente, situada a 10’67 m. a la derecha del origen.

1.3. QUÍMICA

Ejemplo 1

Under certain conditions cane sugar in water is converter into dextrose at a rate which is proportional to the amount unconverted at any time. If, of 75 grams at time t = 0, 8 grams are converted during the first 30 minutes, find the amount converted in 1’5 hours.

Solution:

Let q denote the amount converted in *t* minutes.

Then $\frac{dq}{dt} = k(75 - q)$, $\frac{dq}{75 - q} = k \cdot dt$, and ln(75 – q) = -kt + C.

- When t = 0 min., q = 0 and C = ln 75 so that: ln(75 – q) = -k·t + ln 75.
- When t = 30 min., q = 8, 30k = ln 75 – ln 67, and k = 0’0038.

  Thus, $q = 75(1 - e^{-0'0038 \cdot t})$.
- When t = 90 min., $\boxed{q = 75(1 - e^{-0'342}) = 21'7 \text{ grams}}$.

1.4. MECÁNICA

Ejemplo 1

A weight attached to a spring moves up and down, so that the equation of motion is $\frac{d^2s}{dt^2} + 16s = 0$, where *s* is the stretch of the spring at time *t*. If s = 2 and $\frac{ds}{dt} = 1$ when t = 0, find *s* in terms of *t*.

Solution:

Here the characteristic equation is $\lambda^2 + 16 = 0$, the roots are $\lambda = \pm 4i$, and the general solution is: s(t) = A·cos 4t + B·sin 4t.

$$\begin{cases} \text{When } t = 0,\ s = 2 = A, \text{ so that } s = 2\cdot\cos 4t + B\cdot\sin 4t. \\ \text{When } t = 0,\ s' = ds/dt = 1 = -8\cdot\sin 4t + 4B\cdot\cos 4t = 4B, \text{ and } B = 1/4. \end{cases}$$

Thus, the required equation is an particular integral:

$$\boxed{s(t) = 2\cdot\cos 4t + (1/4)\cdot\sin 4t}$$

Ejemplo 2

Resolver, para $\omega \neq \omega_0$, el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} x'' + \omega_0^2\cdot x = k\cdot\text{sen}\cdot\omega\cdot t,\ \forall\ t > 0 \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

que describe las oscilaciones forzadas de una masa en un resorte no amortiguado. ¿Qué pasa si $\omega = \omega_0$?

Solución:

El presente problema puede resolverse por aplicación del método de las transformadas de Laplace, teniendo en cuenta que:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2a^3}(\text{sen}\, at - at\cdot\cos\, at),$$

tal como consta en la tabla de transformadas laplacianas que se adjunta en el presente libro. En cualquier caso, su resolución por el método clásico de los coeficientes indeterminados plantea una ecuación característica de la homogénea del tipo:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \text{y:} \quad \left.\begin{matrix} \lambda_1 = \omega_0\cdot i \\ \lambda_2 = -\omega_0\cdot i \end{matrix}\right\} \quad \lambda = \alpha \pm \beta i\ ;\ \text{con } \alpha = 0\ ;\ \beta = \omega_0\ ;$$

Y la solución de la homogénea será: $x^* = A\cdot\cos\omega_0\cdot t + B\cdot\text{sen}\,\omega_0\cdot t$;

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea, del tipo:

$$\begin{cases} x_p = a(h\cdot\cos\omega t + q\cdot\text{sen}\,\omega t) \\ x'_p = a(-h\cdot\omega\cdot\text{sen}\,\omega t + q\cdot\omega\cdot\cos\omega t) \\ x''_p = a(-h\cdot\omega^2\cdot\cos\omega t - q\cdot\omega^2\cdot\text{sen}\,\omega t) \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$a(-h\cdot\omega^2\cdot\cos\omega t - q\cdot\omega^2\cdot\text{sen}\,\omega t) + a(h\cdot\omega_0^2\cdot\cos\omega t + q\cdot\omega_0^2\cdot\text{sen}\,\omega t) =$$
$$= -a\cdot h\cdot\omega^2\cdot\cos\omega t - a\cdot q\cdot\omega^2\cdot\text{sen}\,\omega t + a\cdot h\cdot\omega_0^2\cdot\cos\omega t + a\cdot q\cdot\omega_0^2\cdot\text{sen}\,\omega t =$$
$$= k\cdot\text{sen}\,\omega t\ ;\ \text{ o sea: } k = a\cdot q(\omega_0^2 - \omega^2)\ ;$$

$q=\dfrac{k}{a(\omega_0^2-\omega^2)}$; h = 0 ; y entonces: $x_p = \dfrac{k\cdot \text{sen }\omega t}{\omega_0^2-\omega^2}$; y la I.G. buscada será:

$$x(t) = x^* + x_p = A\cdot\cos\omega_0 t + B\cdot\text{sen }\omega_0 t + \frac{k\cdot\text{sen }\omega t}{\omega_0^2-\omega^2}$$

Por aplicación de las condiciones iniciales dadas, se tendrá que:

$$\begin{cases} x(0) = A = 0 \\ x'(t) = -A\cdot\omega_0\cdot\text{sen }\omega_0 t + B\cdot\omega_0\cdot\cos\omega_0 t + \dfrac{k\cdot\omega\cdot\cos\omega t}{\omega_0^2-\omega^2} \\ x'(0) = B\cdot\omega_0 + \dfrac{k\cdot\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = 0\,;\quad B = -\dfrac{k\cdot\omega}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)} \end{cases}$$

con lo que se tendrá la integral particular:

$$\boxed{x(t) = \frac{k\cdot\omega_0\cdot\text{sen }\omega t}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)} - \frac{k\cdot\omega\cdot\text{sen }\omega_0 t}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)} = \frac{k}{\omega_0}\times\frac{\omega_0\cdot\text{sen }\omega t - \omega\cdot\text{sen }\omega_0 t}{\omega_0^2-\omega^2}}\ \text{(si } \omega \neq \omega_0\text{)}.$$

Por último, veamos que en el supuesto planteado de que: $\omega = \omega_0$, en la solución expuesta tendría lugar una indeterminación del tipo: $\frac{0}{0}$. De hecho, en el ensayo de la solución particular de la no homogénea o completa debería tenerse en cuenta que: $\omega i = \omega_0 i$ es raíz de la ecuación característica de la homogénea, por lo que se debería ensayar la solución particular del tipo:

$$\begin{cases} x_p = a\cdot t(h\cdot\cos\omega t + q\cdot\text{sen }\omega t) \\ x'_p = a(h\cdot\cos\omega t + q\cdot\text{sen }\omega t) + a\cdot t(-h\cdot\omega\cdot\text{sen }\omega t + q\cdot\omega\cdot\cos\omega t) \\ x''_p = a(-h\cdot\omega\cdot\text{sen }\omega t + q\cdot\omega\cdot\cos\omega t) + a(-h\cdot\omega\cdot\text{sen }\omega t + q\cdot\omega\cdot\cos\omega t) + \\ \qquad + a\cdot t(-h\cdot\omega^2\cdot\cos\omega t - q\cdot\omega^2\cdot\text{sen }\omega t)\,; \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$2a(-h\cdot\omega\cdot\text{sen }\omega t + q\cdot\omega\cdot\cos\omega t) - a\cdot t(h\cdot\omega^2\cdot\cos\omega t + q\cdot\omega^2\cdot\text{sen }\omega t) +$$
$$+ a\cdot t(h\cdot\omega_0^2\cdot\cos\omega t + q\cdot\omega_0^2\cdot\text{sen }\omega t) = k\cdot\text{sen }\omega t\,;$$

pero como $\omega = \omega_0$, quedará:

$$-2ah\cdot\omega\cdot\text{sen }\omega t + 2aq\cdot\omega\cdot\cos\omega t = k\cdot\text{sen }\omega t\ ;\ \text{de donde:}$$

$q = 0$; $-2ah\cdot\omega = k$; $h = -\dfrac{k}{2a\omega}$; y entonces se tendrá que:

$$x_p = -\frac{k\cdot at}{2a\omega}\cdot\cos\omega t = -\frac{k\cdot t\cdot\cos\omega\cdot t}{2\omega},$$

y la I.G. se formulará mediante la expresión:

$$x(t) = x^* + x_p = A\cdot\cos\omega_0 t + B\cdot\text{sen}\,\omega_0 t - \frac{k\cdot t\cdot\cos\omega_0 t}{2\omega_0}.$$

Por aplicación de las condiciones iniciales dadas, se tendrá que:

$$\begin{cases} x(0) = A = 0 \\ x'(t) = -A\cdot\omega_0\cdot\text{sen}\,\omega_0 t + B\cdot\omega_0\cdot\cos\omega_0 t - \dfrac{k\cdot\cos\,\omega_0 t - k\cdot t\cdot\omega_0\cdot\text{sen}\,\omega_0 t}{2\omega_0} \\ x'(0) = B\cdot\omega_0 - \dfrac{k}{2\omega_0} = 0; \quad B = \dfrac{k}{2\omega_0^2}; \end{cases}$$

y resultaría la integral particular buscada siguiente:

$$\boxed{x(t) = \frac{k}{2\omega_0^2}\cdot\text{sen}\,\omega_0 t - \frac{k\cdot t\cdot\omega_0\cdot\cos\omega_0 t}{2\omega_0^2} = \frac{k}{2\omega_0^2}(\text{sen}\,\omega_0 t - \omega_0 t\cdot\cos\omega_0 t)} \text{ (si } \omega = \omega_0).$$

Ejemplo 3

The differential equation for a mass-spring system is:

$$m\cdot x''(t) + \beta\cdot x'(t) + k\cdot x(t) = F_e(t).$$

Consider a mass-spring system with a mass m = 1 kg. That is attached to a spring with constant k = 5 N/m. The medium offers a damping forces six times the instantaneous velocity, i.e., β = 6 N·s/m. Thus,

(a) Determine the position of the mass x(t) if it is released with initial conditions: x(0) = 3 m., x'(0) = 1 m./s. There no external force.
(b) Determine the position of the mass x(t) if it is released with initial conditions: x(0) = x'(0) = 0, and the system is driven by an external force $F_e(t) = 30\cdot\sin 2t$ in newtons with time *t* measured in seconds.

Solution:

(a) The differential equation for a mass-spring system is:

$$x''(t) + 6x'(t) + 5x(t) = F_e(t).$$

We have $F_e(t) = 0$ and the initial conditions are x(0) = 3 and x'(0) = 1.

Take the Laplace transform on both sides of the ODE to get

$$[s^2X(s) - 3s - 1] + 6[sX(s) - 3] + 5X(s) = 0.$$

Solving for X(s) gives: $X(s) = \dfrac{3s+19}{s^2+6s+5} = \dfrac{3s+19}{(s+1)(s+5)}$.

Using partial fractions, we obtain: $X(s) = \dfrac{4}{s+1} - \dfrac{1}{s+5}$.

Taking the inverse Laplace transform gives the answer.

$\boxed{x(t) = 4e^{-t} - e^{-5t}}$, is the particular integral.

Moreover, operated by the classic method, is obtained the characteristic equation: $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$, and the roots are: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -5$; and the general solution is:

$$\boxed{x(t) = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{-5t}}$$

However, the initial conditions are:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 3\ ; \\ x'(t) = -C_1 \cdot e^{-t} - 5C_2 \cdot e^{-5t}\ ; \\ x'(0) = -C_1 - 5C_2 = 1. \end{cases}$$

Thus: $-3 + C_2 - 5C_2 = 1$; $C_2 = -1$; $C_1 = 4$; and the particular solution is also:

$$x(t) = 4 \cdot e^{-t} - e^{-5t} \text{ (as seen above).}$$

(b) We have $F_e(t) = 30 \cdot \sin 2t$, and the initial conditions are $x(0) = 0$ and $x'(0) = 0$.

Take the Laplace transform on both sides of the ODE to get

$$s^2X(s) + 6sX(s) + 5X(s) = 30\left(\frac{2}{s^2+4}\right).$$

Solving for X(s) gives: $X(s) = \dfrac{60}{(s^2+6s+5)(s^2+4)} = \dfrac{60}{(s+1)(s+5)(s^2+4)}$.

Using partial fractions, we obtain:

$$X(s) = 3\left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{15}{29}\left(\frac{1}{s+5}\right) - \frac{72}{29}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + \frac{12}{29 \cdot 2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right).$$

Taking the inverse Laplace transform gives the answer.

$\boxed{x(t) = 3e^{-t} - \dfrac{15}{29}e^{-5t} - \dfrac{72}{29}\cos 2t + \dfrac{6}{29}\sin 2t}$, is the particular integral.

The solution of homogeneous equation is: $x^*(t) = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{-5t}$.

An particular solution, operated by the classic method, is:

$$\begin{cases} x_p = A\cdot\cos 2t + B\cdot\sin 2t \\ x'_p = -2A\cdot\sin 2t + 2B\cdot\cos 2t \\ x''_p = -4A\cdot\cos 2t - 4B\cdot\sin 2t \end{cases}$$

$$-4A\cdot\cos 2t - 4B\cdot\sin 2t - 12A\cdot\sin 2t + 12B\cdot\cos 2t + 5A\cdot\cos 2t + 5B\cdot\sin 2t = \\ = 30\cdot\sin 2t.$$

And we have $A = -\frac{72}{29}$ and $B = \frac{6}{29}$, thus: $x_p = -\frac{72}{29}\cdot\cos 2t + \frac{6}{29}\cdot\sin 2t$.

The general integral is:

$x(t) = x^*(t) + x_p = C_1\cdot e^{-t} + C_2\cdot e^{-5t} - \frac{72}{29}\cos 2t + \frac{6}{29}\sin 2t$;

thus, the initial conditions are,

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 - \frac{72}{29} = 0; \\ x'(t) = -C_1\cdot e^{-t} - 5C_2\cdot e^{-5t} + \frac{144}{29}\sin 2t + \frac{12}{29}\cos 2t; \\ x'(0) = -C_1 - 5C_2 + \frac{12}{29} = 0; \quad \text{thus: } C_1 = 3 \text{ and } C_2 = -\frac{15}{29}; \end{cases}$$

And the answer is, also (as seen above):

$$x(t) = 3\cdot e^{-t} - \frac{15}{29}\cdot e^{-5t} - \frac{72}{29}\cdot\cos 2t + \frac{6}{29}\cdot\sin 2t$$

Ejemplo 4

Una masa de 5 Kg. se sujeta a un resorte suspendido del techo y ocasiona que el resorte se estire 2 metros al llegar al reposo en equilibrio. Se eleva luego la masa 1 metro sobre el punto de equilibrio y se le aplica una velocidad dirigida hacia arriba de (1/3) m./seg. Determine:

a) La ecuación del movimiento vibratorio armónico simple[4] de la masa.

[4] El *movimiento armónico simple* (m.a.s.), también denominado *movimiento vibratorio armónico simple* (m.v.a.s.), es un movimiento periódico, oscilatorio y vibratorio en ausencia de fricción, producido por la acción de una fuerza recuperadora que es directamente proporcional a la posición pero en sentido opuesto. Queda descrito en función del tiempo por una función senoidal (seno o coseno). Si la descripción de un movimiento requiriese más de una función armónica, en general sería un movimiento armónico, pero no un m.a.s. En el caso de que la trayectoria sea rectilínea, la partícula que realiza un m.a.s. oscila alejándose y acercándose de un punto, situado en el centro de su trayectoria, de tal manera que su posición en función del tiempo, con respecto a ese punto, es una sinusoide. En este movimiento, la fuerza que actúa sobre la partícula es proporcional a su desplazamiento respecto a dicho punto y dirigida hacia éste. El movimiento armónico simple es, pues, un movimiento periódico de vaivén, en el que un cuerpo oscila de un lado al otro de su posición de equilibrio, en una dirección determinada, y en intervalos iguales de tiempo. Por ejemplo, es el caso aquí contemplado de un cuerpo colgado de un muelle oscilando arriba y abajo. El objeto oscila alrededor de la posición de equilibrio cuando se le separa de ella y se le deja en libertad. En este caso el cuerpo sube y baja.

b) La posición del objeto al cabo de 1 minuto.

Solución:

La representación gráfica del problema planteado puede verse en la figura siguiente:

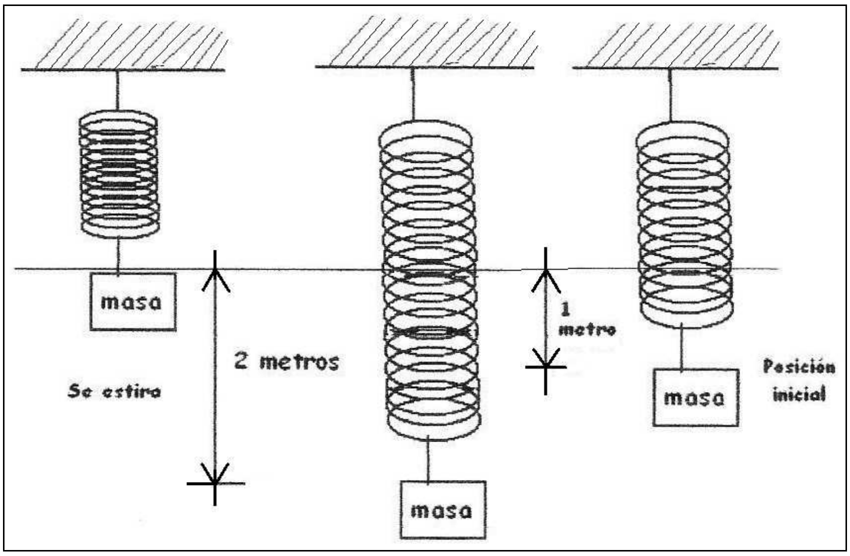


FIG. 8.9. Esquema de actuación de la masa.

a) La ecuación general correspondiente del movimiento vibratorio armónico simple será:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + C\frac{dy}{dt} + K \cdot y = f(t) \; .$$

Como no hay amortiguador C = 0, además no existe fuerza perturbadora que se aplique el sistema, por lo tanto f(t) = 0, la posición inicial de la masa es 1 metro sobre la posición de equilibrio, por lo tanto si tomamos el eje de referencia positivo hacia arriba la posición inicial de la masa será 1 metro. Y la velocidad inicial es v_0 = (1/3) m./seg.

Veamos que la fuerza que tiende a volver a su posición de equilibrio todo punto de un cuerpo elástico deformado, como un muelle, resulta, dentro de ciertos límites, proporcional a esta deformación. En definitiva, despreciando las pérdidas por resistencias, la ecuación del movimiento del extremo del muelle será del tipo: m·y'' = -k·y. Su integral primera entre dos posiciones será:

$$\frac{1}{2}m\left(y'^2_2 - y'^2_1\right) = -\int_{y_1}^{y_2} k \cdot y \cdot dy \; ,$$

que expresa el conocido teorema que iguala la variación de la energía cinética al trabajo desarrollado. Esta integral primera, pues, es una expresión particular del “teorema de la conservación de la energía”. La ecuación diferencial que representa al sistema es, pues, en este caso concreto:

$$5\frac{d^2y}{dt^2} + k\cdot y = 0$$

Así pues, se debe encontrar el valor de k. Como la masa es de 5 Kg. y si se asume la aceleración de la gravedad aproximadamente 9'81 ≈ 10 m./seg^2, el peso será de: P = m·g = 5·10 = 50 Newton. Al sujetar el resorte la masa se estira 2 metros, lo que indica de manera implícita la constante del resorte que se la puede calcular mediante la expresión:

P = k·Δl, donde P es el peso del objeto y Δl la longitud del estiramiento al cual se ve sometido el sistema. Despejando k se obtiene:

$$k = = \frac{P}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ N/m.}$$

Para resolver aquella ecuación diferencial ordinaria aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, esto es:

$$L\left[5\frac{d^2y}{dt^2} + 25y\right] = L[0];\ \ 5s^2Y(s) - 5sy(0) - 5y'(0) + 25y(s) = 0\ ;$$

La posición inicial del sistema es y(0) = 1 metro, y la velocidad inicial es y'(0) = (1/3) m./seg. Reemplazando las condiciones iniciales dadas se obtiene:

$$5s^2y(s) - 5s - \frac{5}{3} + 25y(s) = 0;\ \ (5s^2 + 25)y(s) = 5s + \frac{5}{3};$$

$$(s^2 + 5)y(s) = s + \frac{1}{3};\qquad y(s) = \frac{s}{(s^2+5)} + \frac{1}{3(s^2+5)};$$

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+5)} + \frac{1}{3(s^2+5)}\right] = L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+5)}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{3(s^2+5)}\right] =$$

$$= \cos\sqrt{5}t + L^{-1}\left[\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}(s^2+5)}\right] = \cos\sqrt{5}t + \frac{1}{3\sqrt{5}}\cdot L^{-1}\left[\frac{\sqrt{5}}{s^2+5}\right] =$$

$$= \cos\sqrt{5}t + \frac{1}{3\sqrt{5}}\cdot \text{sen}\sqrt{5}t$$

Si resolvemos alternativamente esta E.D.O. por el método clásico, se obtiene la ecuación característica: $5\lambda^2 + 25 = 0$, de raíces complejas:

$\lambda^2 + 5 = 0$; $\lambda = \pm\sqrt{-5} = \pm i\sqrt{5} = \alpha \pm \beta i$; con los coeficientes: $\alpha = 0$; $\beta = \sqrt{5}$,

con lo que la solución general será: $y(t) = A\cdot\cos t\sqrt{5} + B\cdot\text{sen } t\sqrt{5}$, con las condiciones iniciales dadas:

y(0) = A = 1 m.
$y'(t) = -A\cdot\sqrt{5}\cdot\text{sen } t\sqrt{5} + B\cdot\sqrt{5}\cdot\cos t\sqrt{5}$

$y'(0) = B \cdot \sqrt{5} = \frac{1}{3}$; $B = \frac{1}{3\sqrt{5}}$; y resultará, en definitiva, la ecuación pedida:

$$\boxed{y = \cos(t\sqrt{5}) + \frac{1}{3\sqrt{5}} \cdot \text{sen}(t\sqrt{5})}\text{, c.s.q.d.}$$

b) Al cabo de 60 segundos, la posición del objeto será la siguiente:

$$\boxed{y = \cos 60\sqrt{5} + \frac{1}{3\sqrt{5}} \cdot \text{sen} 60\sqrt{5} = -0'697 + \frac{0'717}{3\sqrt{5}} = -0'59 \text{ m.}}$$

1.5. ELECTRICIDAD

Ejemplo 1

The electric current in a certain circuit is given by the expression $\frac{d^2I}{dt^2} + 4\frac{dI}{dt} + 2.504 \cdot I = 110.$ If I = 0 and $\frac{dI}{dt} = 0$ when t = 0, find I in terms of t.

Solution:

The characteristic equation of the homogeneous is: $\lambda^2 + 4\lambda + 2.504 = 0$; thus: $\lambda = -2 + 50i, -2 - 50i$, with $\alpha = -2$ and $\beta = 50$. The complementary function is:

$$I^* = e^{-2t}(A \cdot \cos 50t + B \cdot \sin 50t).$$

The particular integral is: $I_p = k$; k = 110/2.504 = 0’044.

Thus, the general solution is: $I = I^* + I_p = e^{-2t}(A \cdot \cos 50t + B \cdot \sin 50t) + 0'044$.

$$\begin{cases} \text{When } t = 0,\ I = 0 = A + 0'044; \text{ then } A = -0'044. \\ \text{When } t = 0,\ \frac{dI}{dt} = 0 = e^{-2t}[(-2A + 50B) \cdot \cos 50t - (2B + 50A) \cdot \sin 50t] = \\ = -2A + 50B. \end{cases}$$

Then B = -0’00176, and the required relation (particular solution) is:

$$\boxed{I = 0'044 - e^{-2t}(0'044 \cdot \cos 50t + 0'00176 \cdot \sin 50t)}.$$

Ejemplo 2

Determinar la corriente I(T) de un circuito eléctrico ¨LRC¨ en serie, cuando la inductancia es L = 0’005 henrios, la resistencia R = 1 Ω y la capacidad C = 0’02 faradios, teniendo en cuenta que:

$$E(T) = 100[1 - u(T - 1)] \; ; \; I(0) = 0$$

Solución:

Sabemos que la ecuación diferencial de la corriente eléctrica en este circuito es del tipo siguiente:

$$L\frac{dI}{dT}+RI+\frac{1}{C}\int_o^T I(\tau)d\tau=100[1-u(T-1)],\ \text{y substituyendo valores se tiene que:}$$

$$0'005\frac{dI}{dT}+I+\frac{1}{0'02}\int_o^T I(\tau)d\tau=100[1-u(T-1)],\ \text{o sea:}$$

$$0'005(SI_s-I(0))+I_s+\frac{50\cdot I_s}{S}=100\left(\frac{1}{S}-\frac{e^{-S}}{S}\right)$$

$$SI_s+200\cdot I_s+\frac{10.000\cdot I_s}{S}=20.000\left(\frac{1}{S}-\frac{e^{-S}}{S}\right)$$

$$I_s\left(\frac{S^2+200\cdot S+10.000}{S}\right)=20.000\left(\frac{1}{S}-\frac{e^{-S}}{S}\right)\Rightarrow I_s\left(\frac{(S+100)^2}{S}\right)=20.000\left(\frac{1-e^{-S}}{S}\right)$$

O también:

$$I_s=\frac{20.000S}{(S+100)^2}\left(\frac{1-e^{-S}}{S}\right)=\frac{20.000}{(S+100)^2}-\frac{20.000e^{-S}}{(S+100)^2},\ \text{ y en definitiva, se tendrá la I.P.:}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&I(T)=20.000Te^{-100T}-20.000Te^{-100T}e^{-S}=\\&=20.000Te^{-100T}-20.000(T-1)e^{-100(T-1)}u(T-1)\end{aligned}}$$

Ejemplo 3

Usar la transformada de Laplace para determinar la carga en un capacitor (condensador)[5] de un circuito eléctrico en serie (RC) cuando: q(0) = 0, la resistencia R = 2’5 Ω, la capacidad c = 0’08 faradios y E(T) = 5u(T-3).

---

[5] A **capacitor** (originally known as **condenser**) is a passive two-terminal electrical component used to store energy in an electric field. The forms of practical capacitors vary widely, but all contain at least two electrical conductors separated by a dielectric (insulator); for example, one common construction consists of metal foils separated by a thin layer of insulating film. Capacitors are widely used as parts of electrical circuits in many common electrical devices. When there is a potential difference (voltage) across the conductors, a static electric field develops across the dielectric, causing positive charge to collect on one plate and negative charge on the other plate. Energy is stored in the electrostatic field. An ideal capacitor is characterized by a single constant value, capacitance, measured in farads. This is the ratio of the electric charge on each conductor to the potential difference between them. The capacitance is greatest when there is a narrow separation between large areas of conductor, hence capacitor conductors are often called *plates*, referring to an early means of construction. In practice, the dielectric between the plates passes a small amount of leakage current and also has an electric field strength limit, resulting in a breakdown voltage, while the conductors and leads introduce an undesired inductance and resistance. Capacitors are widely used in electronic circuits for blocking direct current while allowing alternating current to pass, in filter networks, for smoothing the output of power supplies, in the resonant circuits that tune radios to particular frequencies, in electric power transmission systems for stabilizing voltage and power flow, and for many other purposes.

Solución:

La ecuación diferencial de la carga en este circuito es:

$$R\frac{dq}{dT}+\frac{1}{c}q=E(T)\text{, y substituyendo los valores dados se tendrá que :}$$

$$2'5\cdot q'+12'5\cdot q=5u(T-3)\Rightarrow 2'5(Sq_s-q(0))+12'5\cdot q_s=\frac{5e^{-3S}}{S}$$

$$2'5\cdot q_s(S+5)=\frac{5e^{-3S}}{S}\Rightarrow q_s=\frac{2e^{-3S}}{S(S+5)}$$

$$\frac{A}{S}+\frac{B}{S+5}=\frac{2}{S(S+5)}\text{, e identificando coeficientes indeterminados se}$$

$$\text{obtendrá : } AS+5A+BS=2\,;\ A+B=0\Rightarrow A=2/5\Rightarrow B=-2/5\text{, con lo que :}$$

$$q(T)=\frac{2}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\}e^{-3S}-\frac{2}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{S+5}\right\}e^{-3S}=\boxed{\frac{2}{5}u(T-3)-\frac{2}{5}e^{-5(T-3)}u(T-3)}\text{ (I.P.)}$$

Ejemplo 4

Aplicar la transformada de Laplace para hallar la carga q(T) en el capacitor (condensador) de un circuito ¨RC¨ en serie cuando: q(0) = 0, la resistencia R = 50 Ω, la capacidad c = 0’01 faradios y la función: E(T) = 50u(T-1)-50u(T-3).

Solución:

Como siempre, se tendrá que la ecuación diferencial de la carga en este circuito es: $R\frac{dq}{dT}+\frac{q}{c}=E(T)$, y substituyendo los valores dados se obtiene que:

$$50\frac{dq}{dT}+\frac{1}{0'01}q=50u(T-1)-50u(T-3)$$

$$50(Sq_s-q(0))+100q_s=\frac{50e^{-S}}{S}-\frac{50e^{-3S}}{S};\ q_s=\frac{e^{-S}}{S(S+2)}-\frac{e^{-3S}}{S(S+2)}$$

$$\frac{A}{S}+\frac{B}{S+2}=\frac{1}{S(S+2)}\text{, e identificando coeficientes indeterminados se}$$

$$\text{obtendrá: } AS+2A+BS=1;\ A+B=0\Rightarrow A=1/2\Rightarrow B=-1/2\text{, con lo que:}$$

$$q(T)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{S}\right\}e^{-S}-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{S+2}\right\}e^{-S}-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{S}\right\}e^{-3S}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{S+2}\right\}e^{-3S}$$

, y la solución particular buscada será:

$$\boxed{q(T)=\frac{1}{2}u(T-1)-\frac{1}{2}e^{-2(T-1)}u(T-1)-\frac{1}{2}u(T-3)+\frac{1}{2}e^{-2(T-3)}u(T-3)}.$$

Ejemplo 5

The differential equation for the current i(t) in an LR circuit is:

$$L\frac{di}{dt}+R{\cdot}i=V(t)$$

Find the current in an LR circuit if the initial current is i(0) = 0 amperes, given that L = 2 H, R = 4 ohm, and $V(t) = 5{\cdot}e^{-t}$ volts, with the time *t* measured in seconds.

Solution:

The differential equation of the LR circuit is: $2i'(t) + 4i(t) = 5e^{-t}$, with initial condition i(0) = 0. Find your general and particular solutions.

Take the Laplace on both sides of the ODE to get:

$2sI(s) + 4I(s) = \dfrac{5}{s+1}$. Solving for I(s) gives: $I(s)=\dfrac{5}{(2s+4)(s+1)}$.

Using partial fractions, we obtain: $I(s)=\dfrac{5}{2(s+1)}-\dfrac{5}{2(s+2)}$.

Taking the inverse Laplace transform gives the answer (P.I.):

$$\boxed{i(t)=\frac{5}{2}e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}=\frac{5}{2}(e^{-t}-e^{-2t})}$$

Moreover, operated by the classic method, is obtained the characteristic equation of the homogeneous: $2\lambda + 4 = 0$, with the root: $\lambda = -2$; thus: $i^*(t) = C_1{\cdot}e^{-2t}$. An particular integral is: $i_p = A{\cdot}e^{-t}$, $i'_p = -A{\cdot}e^{-t}$, and substituting in initial equation on obtain: $-2A{\cdot}e^{-t} + 4A{\cdot}e^{-t} = 5{\cdot}e^{-t}$.

And we have: $A=\dfrac{5}{2}$. The general integral is:

$$\boxed{i(t) = i^*(t) + i_p = C_1{\cdot}e^{-2t} + \frac{5}{2}{\cdot}e^{-t}}$$

$i(0) = C_1 + \dfrac{5}{2} = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = -\dfrac{5}{2}$, and the particular solution is, really:

$$i(t)=\frac{5}{2}{\cdot}e^{-t}-\frac{5}{2}{\cdot}e^{-2t}=\frac{5}{2}(e^{-t}-e^{-2t})$$, as seen above.

Ejemplo 6

The differential equation for the charge q(t) in an LRC circuit is

$$L{\cdot}q''(t) + R{\cdot}q'(t) + q(t)/C = V(t).$$

Find the charge and current in an LRC circuit with L = 1 H, R = 2 ohm, C = 0’25 F, and V = 50·cos t volts, if q(0) = 0 C, and i(0) = 0 amperes.

Solution:

The differential equation of the LRC circuit is in this example: $q''(t) + 2q'(t) + 4q(t) = 50\cdot\cos t$, with initials conditions are: $q'(0) = 0$ and $q(0) = 0$.

Take the Laplace on both sides of the ODE to get:

$s^2Q(s) + 2sQ(s) + 4Q(s) = \frac{50}{s^2+1}$. Solving for Q(s) gives: $Q(s) = \frac{50s}{(s^2+1)(s^2+2s+4)}$. Using partial fractions, we obtain:

$Q(s) = \frac{50}{13}\left(\frac{3s+2}{s^2+1}\right) - \frac{50}{13}\left(\frac{3s+8}{s^2+2s+4}\right)$. By completing the square, we get:

$$s^2 + 2s + 4 = (s + 1)^2 + 3.$$

Therefore,

$$Q(s) = \frac{50}{13}\left(\frac{3s+2}{s^2+1}\right) - \frac{50}{13}\left(\frac{3(s+1)+5}{(s+1)^2+3}\right) =$$
$$= \frac{150}{13}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \frac{100}{13}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) - \frac{150}{13}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+3}\right) - \frac{250}{13\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+3}\right)$$

Taking the inverse Laplace transform gives the answer (P.I.):

$$\boxed{q(t) = \frac{150}{13}\cos t + \frac{100}{13}\sin t - \frac{150}{13}e^{-t}\cos\sqrt{3}t - \frac{250}{13\sqrt{3}}e^{-t}\sin\sqrt{3}t}$$

Moreover, operated by the classic method, is obtained the characteristic equation of the homogeneous: $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$; and the complex roots are: $\lambda_1 = -1 + i\sqrt{3}$ and $\lambda_2 = -1 - i\sqrt{3}$; with $\lambda = \alpha \pm \beta i$; $\alpha = -1$; $\beta = \sqrt{3}$; thus:

$$q^*(t) = e^{\alpha t}(C_1\cdot\cos\beta t + C_2\cdot\sin\beta t) = e^{-t}(C_1\cdot\cos\sqrt{3}\,t + C_2\cdot\sin\sqrt{3}\,t)$$

An particular solution of the complete equation is:

$$\begin{cases} q_p = A\cdot\cos t + B\cdot\sin t \\ q'_p = -A\cdot\sin t + B\cdot\cos t \\ q''_p = -A\cdot\cos t - B\cdot\sin t \end{cases}$$

$$-A\cdot\cos t - B\cdot\sin t - 2A\cdot\sin t + 2B\cdot\cos t + 4A\cdot\cos t + 4B\cdot\sin t = 50\cdot\cos t$$

$$(3A + 2B)\cdot\cos t + (3B - 2A)\cdot\sin t = 50\cdot\cos t$$

$$\left.\begin{array}{l} 3A + 2B = 50 \\ 3B - 2A = 0 \end{array}\right\}$$

, and we have $A = \frac{150}{13}$ and $B = \frac{100}{13}$, thus: $q_p = \frac{150}{13} \cdot \cos t + \frac{100}{13} \cdot \sin t$.

The general integral is:

$$q(t) = q^*(t) + q_p = e^{-t}\left(C_1 \cdot \cos\sqrt{3}t + C_2 \cdot \sin\sqrt{3}t\right) + \frac{150}{13}\cos t + \frac{100}{13}\sin t\ ;$$

But, with initial conditions of the problem:

$$\begin{cases} q(0) = C_1 + \frac{150}{13} = 0;\quad C_1 = -\frac{150}{13}; \\ q'(t) = -e^{-t}\left(C_1 \cdot \cos\sqrt{3}t + C_2 \cdot \sin\sqrt{3}t\right) + \\ \quad + e^{-t}\left(-\sqrt{3} \cdot C_1 \cdot \sin\sqrt{3}t + \sqrt{3} \cdot C_2 \cdot \cos\sqrt{3}t\right) - \frac{150}{13}\sin t + \frac{100}{13}\cos t\ ; \\ q'(0) = -C_1 + \sqrt{3} \cdot C_2 + \frac{100}{13} = 0;\quad C_2 = -\frac{250}{13 \cdot \sqrt{3}}; \end{cases}$$

And the answer is, also:

$$q(t) = \frac{150}{13} \cdot \cos t + \frac{100}{13} \cdot \sin t - \frac{150}{13} \cdot e^{-t} \cdot \cos\sqrt{3}t - \frac{250}{13 \cdot \sqrt{3}} \cdot e^{-t} \cdot \sin\sqrt{3}t\ ,$$

as seen above.

1.6. ECONOMÍA

1.6.1. Finanzas

Ejemplo 1

Cuando nació su primer hijo, una pareja depositó en una cuenta de ahorros de largo plazo 5.000 € bajo un interés continuo al 8% anual. Se dejó que se acumularan los intereses devengados, por lo que se desea saber a cuánto ascenderá la cuenta en el decimoctavo cumpleaños del niño, o sea, al cumplir su mayoría de edad.

Solución:

El monto del dinero en una cuenta bajo interés compuesto crece proporcionalmente a la cantidad de dinero presente en la cuenta en un momento determinado. De tal manera que la ecuación diferencial asociada al hecho en cuestión está dada por la expresión:

$\frac{dA}{dt} = k \cdot A$ (1). En estos casos la constante de proporcionalidad k es el rédito o interés porcentual. Esto es: $8\% \leftrightarrow 8 \times \frac{1}{100} = 0'08$. Por lo que k = 0’08. (2)

Substituyendo (2) en (1), se obtiene: $\frac{dA}{dt} = 0'08 \cdot A$,

$\Rightarrow \frac{dA}{A} = 0'08 \cdot dt$ (separando variables) $\Rightarrow \int \frac{dA}{A} = \int 0'08 \cdot dt$ (aplicando la integral),

$\Rightarrow$ ln A = 0'08·t + c_1 (integrando) $\Rightarrow A = e^{0'08 \cdot t + c_1} \Leftrightarrow A = e^{c_1} e^{0'08 \cdot t} \Leftrightarrow A = c \cdot e^{0'08 \cdot t}$

(habiendo hecho: $e^{c}{}_1 = c$) (3) . En el momento de abrir la cuenta, los datos son: t = 0, A = 5.000 € (4).

Substituyendo ahora (4) en (3), se obtiene que:

$5.000 = c \cdot e^{0'08(0)} \Leftrightarrow 5.000 = c \cdot e^0 \Leftrightarrow 5.000$, o sea: c = 5.000 (5)

Ahora, substituyendo (5) en (3), se obtiene que: $A = 5.000 \cdot e^{0'08 \cdot t}$ (♦).

Como necesitamos averiguar el monto del dinero A en el momento en que el muchacho cumple 18 años de edad, debemos substituir t = 18 años en la expresión anterior (♦), con lo que:

$$A = 5.000 \cdot e^{0'08(18)} \Leftrightarrow A = 5.000 \cdot e^{1'44} \Leftrightarrow A \approx 5.000(4'220695817) \approx 21.103 \text{ €}.$$

Respuesta: cuando el muchacho cumpla sus 18 años de edad, el saldo de la cuenta ascenderá a 21.103 € aproximadamente. Si el período de capitalización fuera anual ascendería a 19.980 €, si fuera mensual ascendería a 21.003 €, y si fuera diario ascendería a 21.096 €, como puede comprobarse por aplicación de las pertinentes fórmulas de la matemática financiera.

1.6.2. Teoría microeconómica

Ejemplo 1

Sea *x* el precio unitario de venta de un producto determinado, e *y* la oferta de dicho producto. Se sabe que la razón a la que cambia la oferta respecto al precio viene dada por la ecuación diferencial:
x(x + 3)dy – y(2x + 3)dx = 0. Sabiendo que para x = 2 el valor de *y* es de 20 unidades, se pide hallar la oferta en función del precio.

Solución:

x(x + 3)dy – y(2x + 3)dx = 0 $\leftrightarrow$ (2xy + 3y)dx – (x^2 + 3x)dy = 0; se trata de hecho de una EDO de variables separables, puesto que:

$\frac{dy}{y} = \frac{2x+3}{x(x+3)} dx = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} \right) dx \leftrightarrow$ ln y = [ln x + ln(x + 3)] + ln C = ln Cx(x + 3), de donde se deduce que: y = Cx(x + 3). Substituyendo ahora la condición dada en esta ecuación, resultará que: x = 2 $\rightarrow$ y = 20, luego: 20 = 10·C $\rightarrow$ C = 2, por lo que la relación que liga la oferta del producto en función del precio vendrá dada por la expresión:

$\boxed{y = 2x(x + 3)}$, que es una integral particular.

Ejemplo 2

Señalemos por *y*, en euros, el ingreso que se obtiene al vender *x* unidades de un producto determinado. Se sabe que la tasa a la que varía el ingreso respecto al número de unidades vendidas, viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $y' + \frac{x^2}{1-y^2} = 0$. Obtener *y* en función de *x*, sabiendo que la venta de 1 unidad de producto produce un ingreso de 1 euro.

Solución:

$y' + \frac{x^2}{1-y^2} = 0 \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{1-y^2} = \frac{x^2}{y^2-1}$, o también: $(y^2 - 1)dy = x^2dx$; integrando: $\frac{y^3}{3} - y = \frac{x^3}{3} + C$; puesto que $y(1) = 1 \rightarrow \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3} + C \rightarrow C = -1$, luego la solución buscada es: $\frac{y^3}{3} - y = \frac{x^3}{3} - 1 \leftrightarrow$ $\boxed{y^3 - 3y = x^3 - 3}$ (I.P.)

Ejemplo 3

Sea *y*, en euros, el ingreso obtenido por la venta de *x* unidades de un producto determinado. Se sabe que la tasa a la que varía el ingreso respecto al número de unidades vendidas, viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = \frac{y(3x^2 - 4x)}{x(x^2 - 2x)}$. Hállese *y* en función de *x*, sabiendo que la venta de 10 unidades produce unos ingresos de 100 euros.

Solución:

Escribimos la ecuación diferencial, que resulta ser de variables separables, en la forma: $\frac{1}{y}dy = \frac{(3x^2 - 4x)}{x(x^2 - 2x)}dx$. Integrando mediante una cuadratura se obtiene que:

$$\ln y = \int \frac{(3x^2 - 4x)}{x(x^2 - 2x)}dx = \int \frac{3x - 4}{x^2 - 2x}dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-2}\right)dx = \int \frac{2dx}{x} + \int \frac{dx}{x-2} = ,$$
$$= 2\ln x + \ln(x-2) + \ln k = \ln kx^2(x-2),$$

puesto que se trata de la integral indefinida de una función racional con las raíces reales simples del denominador del integrando (x = 0 y 2).

de donde: $y = kx^2(x - 2)$. Si $x = 10 \Rightarrow 100 = k\cdot 100\cdot 8 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$, luego la solución buscada es:

$$\boxed{y = \frac{1}{8}x^2(x-2)} \text{ (I.P.)}$$

Ejemplo 4

El precio de venta *y* de un bien, respecto a la cantidad demandada *x*, cambia con la razón expresada por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 24x}{x^2 + 16}$. Obtener el precio en función de la demanda, sabiendo que cuando el precio es de 7'5 euros/unidad, la cantidad demandada es de 4 unidades.

Solución

Podemos escribir la ecuación dada así: $(2xy + 24x)dx + (x^2 + 16)dy = 0$, que es diferencial exacta, como puede comprobarse. En efecto:

$M(x, y) = 2xy + 24x$; $N(x,y) = x^2 + 16$; entonces, se cumple que:

$$\frac{\delta M(x,y)}{\delta y} = 2x = \frac{\delta N(x,y)}{\delta x}.$$

Así pues: $\int (2xy + 24x)dx = x^2y + 12x^2 + C(y)$. Derivando respecto de y se obtiene que: $x^2 + C'(y) = x^2 + 16 \rightarrow C'(y) = 16 \rightarrow C(y) = 16y + C$. Luego, la solución general será: $x^2y + 12x^2 + 16y + C = 0 \leftrightarrow y = \frac{-12x^2 - C}{x^2 + 16}$. Substituyendo los valores dados, se obtiene que:

$C = -x^2y - 12x^2 - 16y = -16 \cdot 7'5 - 12 \cdot 16 - 16 \cdot 7'5 = -16(15 + 12) = -432$. La solución o integral particular buscada es, pues: $\boxed{y = \frac{-12x^2 + 432}{x^2 + 16}}$.

1.7. DEMOGRAFÍA

Ejemplo 1

Se sabe que la población de cierta comunidad humana aumenta en una razón proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento. Si la población se duplicó en cinco años, ¿en cuánto tiempo se triplicará y cuadruplicará?

Solución:

Sean los siguientes parámetros del problema planteado, que definimos a continuación:

P: población de la comunidad en el tiempo t.
P_0: población inicial, en t = 0.
t: tiempo, expresado en años.
$\frac{dP}{dt}$: rapidez con la que aumenta la población.
k > 0: constante de proporcionalidad.

De tal manera que:

$$\frac{dP}{dt} = k\cdot P \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = k\cdot dt \Leftrightarrow \ln P = k\cdot t + c_1 \Leftrightarrow P = c\cdot e^{kt} \qquad (1)$$

$P_0 = P(0)$ (2). Substituyendo (2) en (1), se obtiene el valor constante c:

$P_0 = c\cdot e^{k(0)} \Leftrightarrow c = P_0$ (3). $P = P_0e^{kt}$ {(3) en (1)} (4)

$$\left.\begin{array}{r} t = 5 \\ p = 2P_0 \end{array}\right\}: \text{ la población se duplicó en cinco años} \qquad (5)$$

$\Rightarrow$ $2P_0 = P_0e^{5k}$ {(3) en (1)}, $\Rightarrow 2 = e^{5k} \Leftrightarrow 5k = \ln 2 \Leftrightarrow k \approx 0'13863$ (6)

La función que da la población en función del tiempo t, se obtiene sustituyendo (6) en (4), o sea: $P = P_0e^{0'13863\cdot t}$ (7).

Cuando la población se triplica, (7) queda del siguiente modo:

$$3P_0 = P_0e^{0'13863\cdot t} \Leftrightarrow 3 = e^{0'13863\cdot t} \Leftrightarrow 0'13863\cdot t = \ln 3 \Leftrightarrow t = \frac{1'09861}{0'13863} \Leftrightarrow t = 7'9 \text{ años}.$$

Cuando la población se cuadruplica, (7) queda del siguiente modo:

$$4P_0 = P_0e^{0'13863\cdot t} \text{ y, al final, } t = \frac{1'38629}{0'13863} = 10 \text{ años}.$$

Ejemplo 2

Cierta ciudad tenía una población de hecho de 25.000 habitantes en el año 2000 y una población de 30.000 habitantes en el censo del 2010. Suponiendo que su población continúe creciendo exponencialmente con un índice constante, ¿qué población pueden esperar los urbanistas que tenga la ciudad en el año 2040?.

Solución:

De acuerdo con el enunciado del problema, la tasa de crecimiento de la población respecto al tiempo, es proporcional al tamaño de la misma en un momento determinado, x, (crecimiento exponencial); de tal modo que la ecuación diferencial que describe este suceso, está dada por la expresión:

$\frac{dx}{dt} = k\cdot x$, $\Rightarrow$ $x^{-1}dx = k\cdot dt$ (separando variables),

$\Rightarrow$ $\int x^{-1}dx = \int k\cdot dt$, (aplicando la integral mediante una cuadratura)

$\Rightarrow$ $\ln x = k\cdot t + c_1$, (integrando en ambos miembros),

$\Rightarrow \quad x = \exp(k \cdot t + c_1) \Leftrightarrow x = \exp(c_1) \cdot \exp(k \cdot t) \Leftrightarrow x = c \cdot e^{kt} \quad (1)$

Se toma t_0 en el año 2000 y, de tal modo que: 25.000 = x(0)(2)

Substituyendo (2) en (1), se obtiene:

$25.000 = c \cdot e^{k \cdot 0} \Leftrightarrow c = 25.000$ (3). Substituyendo (3) en (1), se obtiene:

$x = 25.000 e^{k \cdot t} \qquad (4)$

Desde 2000 a 2010 han transcurrido 10 años y la población a aumentado a 30.000 habitantes; así que:

$x(10) = 30.000$ (5). Substituyendo (5) en (4), se obtiene que:

$$30.000 = 25.000 e^{k(10)} \Leftrightarrow \frac{6}{5} = e^{10k} \Leftrightarrow 10k = \ln(1'2) \Leftrightarrow k = \ln(1'2)/10 \approx 0'018232 \quad (6)$$

Al substituir (6) en (4), se obtiene la fórmula que nos permite calcular el tamaño de la población en función del tiempo t, en años: $x = 25.000 \cdot e^{0'018232 \cdot t}$.

Desde el año 2000 al año 2040 habrán transcurrido 40 años. De tal modo que:

$x(40) = 25.000 e^{0'018232(40)} \Leftrightarrow x(40) = 25.000 \cdot e^{0'72928} \approx 51.840$ personas.

Respuesta: para el año 2040 los urbanistas deben esperar una población aproximada de 51.840 personas.

1.8. BIOLOGÍA

Ejemplo 1

En cualquier momento dado, la cantidad de bacterias en un cultivo crece a una tasa proporcional a las bacterias presentes. Al cabo de tres horas se observa que hay 400 individuos. Pasadas 10 horas, hay 2.000 especímenes. ¿Cuál era la cantidad inicial existente de bacterias?

Solución:

Sean los siguientes parámetros del problema planteado, que definimos a continuación:

$$\begin{cases} x\text{: cantidad de bacterias en el tiempo t.} \\ t\text{: tiempo, expresado en horas.} \\ x_0\text{: cantidad inicial de bacterias.} \\ \dfrac{dx}{dt}\text{: rapidez con la que aumenta el número de bacterias en el cultivo.} \\ k > 0\text{: constante de proporcionalidad.} \end{cases}$$

De tal manera que:

$$\frac{dx}{dt} = k\cdot x \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} - k\cdot x = 0 \Leftrightarrow e^{-kt}\frac{dx}{dt} - k\cdot e^{-kt}x = 0 \Leftrightarrow (e^{-kt}x)' = 0 \Leftrightarrow e^{-kt}x = c$$

$\Rightarrow$ $x = c\cdot e^{kt}$ (1), $x_0 = x(0)$: cantidad inicial de bacterias (en t = 0) (2),

$\Rightarrow$ $x_0 = c\cdot e^{k(0)} \Leftrightarrow x_0 = c$ {(2) en (1) y operando} (3),

$\Rightarrow$ $x = x_0 e^{kt}$ {(3) en (1)} (4)

$\left.\begin{matrix} t = 3 \\ x = 400 \end{matrix}\right\}$: al cabo de 3 horas hay 400 individuos, con lo que: (5),

$\Rightarrow$ $400 = x_0 e^{3k} \Leftrightarrow e^{3k} = \frac{400}{x_0} \Leftrightarrow 3k = \ln\frac{400}{x_0} \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}\ln\frac{400}{x_0}$ {(5) en (4)} (6)

$\left.\begin{matrix} t = 10 \\ x = 2.000 \end{matrix}\right\}$: al cabo de 10 horas hay 2.000 individuos, con lo que: (7),

$\Rightarrow$ $2.000 = x_0 e^{10k} \Leftrightarrow e^{10k} = \frac{2.000}{x_0} \Leftrightarrow 10k = \ln\frac{2.000}{x_0} \Leftrightarrow k = \frac{1}{10}\ln\frac{2.000}{x_0}$.

Igualamos esta última expresión con la (6) y resultará que:

$$\frac{1}{3}\ln\frac{400}{x_0} = \frac{1}{10}\ln\frac{2.000}{x_0} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{400}{x_0}\right)^{1/3} = \ln\left(\frac{2.000}{x_0}\right)^{1/10} \Leftrightarrow \left(\frac{400}{x_0}\right)^{1/3} = \left(\frac{2.000}{x_0}\right)^{1/10};$$

en definitiva, resultará que: $400^{1/3}\cdot x_0^{1/10} = x_0^{1/3}\cdot 2.000^{1/10}$; o sea:

$x_0 = \frac{400^{10/7}}{2.000^{3/7}} = \frac{400^{1'4285714}}{2.000^{0'4285714}} = \frac{5.214'6899}{25'985259} \approx \boxed{201 \text{ bacterias}}$, o también:

$$x_0 = \frac{400}{(125)^{1/7}} = \frac{400}{1'9932349} = 200'67881 \approx 201 \text{ bacterias.}$$

Y la constante de proporcionalidad del problema propuesto tiene de valor:

$$k = \frac{1}{3}\ln\frac{400}{x_0} = \frac{\ln 1'9932349}{3} = 0'2299196 \approx 0'23.$$

Ejemplo 2

En cierto cultivo de bacterias, el número de éstas se ha sextuplicado en 10 h. ¿Qué tiempo tarda la población bacteriana en duplicar su número inicial?

Solución:

Suponiendo que la tasa de cambio del número de bacterias con respecto al tiempo, dx/dt, sea proporcional al número existente de bacterias en un momento determinado, x, se tiene que:

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x, \Rightarrow \; x^{-1}dx = k \cdot dt \quad \text{(separando variables)},$$

$\Rightarrow$ $\int x^{-1}dx = \int k \cdot dt$ (aplicando la integral mediante una cuadratura),

$\Rightarrow$ $\ln x = k \cdot t + c_1$ (integrando en ambos miembros),

$\Rightarrow$ $x = \exp(k \cdot t + c_1) \Leftrightarrow x = \exp(c_1) \cdot \exp(k \cdot t) \Leftrightarrow x = c \cdot e^{k \cdot t}$, (con: $e^{c_1} = c$) (1)

Sea ahora:

c_0: población inicial (número de bacterias cuando t = 0: cuando se inició el estudio).
c_f: población final (número de bacterias en el último conteo realizado).

Así, (1) queda del siguiente modo: $c_f = c_0 e^{kt}$ (2)

Debido a que el número inicial de bacterias se ha sextuplicado en 10 horas, se tiene que: $c_f = 6c_0$, $t = 10$ horas (3). Substituyendo (3) en (2), se obtiene que:

$$6c_0 = c_0 e^{10k} \Leftrightarrow 6 = e^{10k} \Leftrightarrow \ln 6 = 10k \Leftrightarrow k = \frac{\ln 6}{10} \approx 0'1791759469 \quad (4)$$

De tal manera que: $c_f = c_0 e^{0'1791759469 \cdot t}$ {(4) en (2)}

Se pide averiguar cuándo el número de bacterias se duplicó, esto es, cuando se cumpla que: $c_f = 2c_0$; de esta forma, la expresión anterior queda así:

$$2 = e^{0'1791759469 \cdot t} \Leftrightarrow \ln 2 = 0'1791759469 \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{0'6031471806}{0'1791759469};$$

$$t \approx 3'868528073 \text{ horas} = 3h, 52'$$

Respuesta: la población de bacterias se duplicará al cabo de aproximadamente 3 horas y 52 minutos.

Ejemplo 3

Suponga que se usa un pentobarbitol sódico para anestesiar a un perro: el can queda anestesiado cuando la concentración en su corriente sanguínea es por lo menos de 45 miligramos (mg. o p.p.m.) de pentobarbitol sobre kilogramo de peso del perro. Suponga también que el pentobarbitol sódico es eliminado de la corriente sanguínea del perro en forma exponencial, con una vida media de 5 horas. ¿Qué dosis simple debe ser administrada para tener anestesiado durante una hora a un perro de 50 kg. de peso?.

Solución:

Como el medicamento es eliminado de la corriente sanguínea del perro en forma exponencial, la ecuación diferencial que describe la tasa instantánea de disminución del medicamento, dM/dt, para una cantidad presente de medicamento, M, al tiempo *t* en horas, está dada por la expresión:

$$\frac{dM}{dt} = -k\cdot M, \Rightarrow \qquad \frac{dM}{M} = -k\cdot dt \quad \text{(separando variables),}$$

$\Rightarrow$ $\int \frac{dM}{M} = \int -k\cdot dt$,(aplicando las integrales mediante una cuadratura),

$\Rightarrow$ $\ln M = -k\cdot t + c_1$ (integrando),

$\Rightarrow$ $M = \exp(-k\cdot t + c_1) \Leftrightarrow M = \exp(c_1)\cdot\exp(-k\cdot t) \Leftrightarrow M = c\cdot\exp(-k\cdot t)$ (1)

(habiendo hecho: $e^{c_1} = c$). Sea ahora:

(2) M_0 : cantidad inicial del medicamento aplicada al tiempo t = 0 horas
Substituyendo (2) en (1), se obtiene:
$M_0 = c\cdot\exp(-k(0)) \Leftrightarrow M_0 = c\cdot\exp(0) \Leftrightarrow c = M_0$ (3),

$\Rightarrow$ $M = M_0\exp(-k\cdot t)$ $\{$(3) en (1)$\}$ (4)

Como el medicamento tiene una vida media de t = 5 horas, la mitad del medicamento se eliminará de la corriente sanguínea del perro en ese tiempo. Si M_0 es la cantidad inicial de medicamento aplicada, $M_0/2$ es la cantidad del mismo al cabo de 5 horas. Substituyendo estos valores en la expresión anterior (1), se obtiene que:

$$\frac{M_0}{2} = M_0 \exp(-5k) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \exp(-5k) \Leftrightarrow \ln\frac{1}{2} = -5k \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}\ln(1/2),$$

$\Rightarrow$ $k \approx$ 0'1386294361, (5). Substituyendo (5) en (4), se obtiene que:

$$M = M_0\cdot\exp(-0'1386294361\cdot t), \Rightarrow M_0 = M\cdot\exp(0'1386294361\cdot t) \qquad (6)$$

El perro pesa 50 kg. y por cada kg. de peso del perro se deben aplicar 45 mg. de medicamento; con lo que: M = 50 x 45 = 2.250 mg. Substituyendo este último valor en la expresión (6), se obtiene que:

$M_0 = 2.250\cdot\exp(0'1386294361\cdot t)$ (la cantidad final de medicamento debe ser 2.250 mg.). Pero se nos pide que averigüemos qué cantidad mínima de medicamento debemos aplicar para que el perro permanezca anestesiado por un lapso de 1 hora. De tal manera que:

$M_0 = 2.250\cdot\exp(0'1386294361) \Leftrightarrow M_0 = 2.250 \times 1'148698355 = 2.584'5713$ mg.

Respuesta: para que el perro quede anestesiado por una hora, es decir, para que la cantidad de droga esté por encima de 2.250 mg. en el lapso de 1 hora, se debe aplicar una dosis de, aproximadamente, 2.585 mg. de pentobarbitol sódico a tan noble como sufrido animal.

1.9. ÓPTICA

Ejemplo 1

Cuando un rayo vertical de luz pasa a través de una substancia transparente, el grado con que su intensidad I disminuye es proporcional a I(t), en donde *t* representa el espesor del medio, expresado en pies. En agua de mar limpia, la intensidad a 3 pies bajo la superficie es el 25% de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie del agua?

Solución:

$\frac{dI}{dt} = -k\cdot I$: la intensidad del rayo de luz disminuye con una rapidez proporcional a la intensidad presente.
k > 0: constante de proporcionalidad.
t: espesor del medio, expresado en pies.

De tal modo que: $\frac{dI}{I} = -k\cdot dt \Leftrightarrow \ln I = -k\cdot t + c_1 \Leftrightarrow I = e^{-k\cdot t + c_1} \Leftrightarrow I = ce^{-k\cdot t}$ (1)

(habiendo hecho: $e^{c_1} = c$). I(0) = I_0: intensidad del rayo en t = 0 (2)

Substituyendo (2) en (1) y operando, se obtiene c = I_0; reemplazamos este valor de c en (1), con lo que: $I = I_0e^{-kt}$ (3)

$$\left.\begin{array}{c} t = 3 \\ I = 25\% I_0 \Leftrightarrow I = 0'25 I_0 \end{array}\right\}$$: A 3 pies bajo la superficie la intensidad es el 25% de la inicial I_0 (4) . Substituyendo (4) en (3), se obtiene que:

$$0'25\cdot I_0 = I_0e^{-3k};\ e^{-3k} = 0'25;\ -3k = \ln 0'25 \Leftrightarrow k = \frac{-1'3862944}{-3} \Leftrightarrow k = 0'4620981 \sim$$

$\sim$ 0’4621 (5), $\Rightarrow$ $I(t) = I_0e^{-4621\cdot t}$ {(5) en (3)} (6)

$I(15) = I_0e^{-0'4621(15)} = I_0e^{-6'9} = 0'001\cdot I_0 \Leftrightarrow 0'1\%$ de I_0.

Respuesta: aproximadamente, a una profundidad de 15 pies bajo la superficie del agua, la intensidad del rayo de luz es de solo el 0’1% de la intensidad en la superficie.

1.10. ANTROPOLOGÍA

Ejemplo 1

En un trozo de madera quemada se determinó que el 85’5% de su C-14 (carbono C^{14}) se había desintegrado. Determine la edad aproximada de la madera (la vida media del C-14 es de 5.600 años). Estos son precisamente los datos que usaron los arqueólogos para fechar los murales prehistóricos descubiertos en una caverna de Lascaux, Francia.

Solución:

Hipotéticamente el C-14 se desintegra con una rapidez que es proporcional a la cantidad presente en el tiempo t, y la ecuación diferencial asociada a este tipo de fenómenos es la siguiente:

$A(t) = A_0e^{k\cdot t}$, $\forall k > 0$ (1)

$\frac{A_0}{2} = A_0e^{5.600\cdot k}$: la vida media del C-14 es de 5.600 años, con lo que:

$$\frac{1}{2} = e^{5.600\cdot k} \Leftrightarrow 5.600\cdot k = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{-0'6931471}{5.600} = -0'00012377628 \approx -1'24\cdot 10^{-4},$$
que constituye la expresión (2). Entonces: $A(t) = A_0e^{-0'00012378\cdot t}$ (3)

Como ya se ha desintegrado el 85’5% del C-14, resta por desintegrarse el 14’5% del C-14 original en el trozo de madera quemada; de donde:

$A = 14'5\%A_0 \Leftrightarrow 0'145\cdot A_0$ (4) . Al reemplazar (4) en (3) se tiene que:

$$0'145\cdot A_0 = A_0e^{-0'00012378\cdot t} \Leftrightarrow 0'145 = e^{-0'00012378\cdot t} \Leftrightarrow -0'00012378\cdot t = \ln 0'145,$$

de donde resultará que: $\boxed{t = \frac{-1'93102154}{-0'00012378} \approx 15.610 \text{ años.}}$

Ejemplo 2

El carbono extraído de un cráneo antiguo contenía solamente una sexta parte del carbono C^{14} extraído de un hueso de los tiempos actuales. ¿Cuál es la antigüedad del expresado cráneo?

Solución:

La tasa de desintegración respecto al tiempo, dN/dt, de un material radiactivo de masa N, es proporcional a N. De tal modo que la ecuación diferencial que describe cuantitativamente este fenómeno es la siguiente:

$\frac{dN}{dt} - kN$. Para el carbono 14 el valor aproximado de k es de 0’0001216, de tal modo que la expresión anterior queda establecida así: $\frac{dN}{dt} = -0'0001216 \cdot N$, y $\Rightarrow \frac{dN}{N} = -0'0001216 \cdot dt$ (separando variables),

$\Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int -0'0001216 \cdot dt$ (aplicando la integral mediante una cuadratura),

$\Rightarrow$ $\ln N = -0'0001216 \cdot t + c_1$ (integrando mediante una cuadratura),

$\Rightarrow$ $N = \exp(-0'0001216 \cdot t + c_1) \Leftrightarrow N = \exp(c_1)\exp(-0'0001216 \cdot t) \Leftrightarrow$

$N = c \cdot \exp(-0'0001216 \cdot t)$, haciendo: $e^{c_1} = c$ (1). Sea ahora:

$$\begin{cases} N_0\text{: cantidad de } C^{14} \text{ presente en el cráneo antiguo.} \\ N\text{: cantidad de } C^{14} \text{ presente en un hueso actual.} \end{cases}$$

Según los datos del problema, $N_0 = N/6 \Leftrightarrow N = 6N_0$. De tal manera que la función (1) se debe reescribir como:

$$6N_0 = N_0 \exp(-0'0001216 \cdot t) \Leftrightarrow 6 = \exp(-0'0001216 \cdot t) \Leftrightarrow \ln 6 = -0'0001216 \cdot t \Leftrightarrow$$

$$t = -\frac{1'7917595}{0'0001216}$$

, con lo que: $\boxed{t \approx -14.734'86405 \text{ años}}$.

Respuesta: el cráneo estudiado tiene una antigüedad aproximada de 14.734 años, 10 meses y 11 días.

Ejemplo 3

El carbono extraído de una reliquia al parecer característica de los tiempos de Cristo contenía $4'6 \times 10^{10}$ átomos de C^{14} por gramo. El carbono extraído de un espécimen actual de la misma sustancia contiene $5'0 \times 10^{10}$ átomos de C^{14} por gramo. Calcular la edad aproximada de la reliquia. ¿Cuál es su opinión sobre la autenticidad de la reliquia (se trata de la sábana santa de Turín, también conocida como la Síndone o el Santo Sudario, que es una tela de lino causante de uno de los misterios religiosos más antiguos conocidos del cristianismo)?

Solución:

En este caso se tendrá que: $N = 5'0 \times 10^{10}$ y $N_0 = 4'6 \times 10^{10}$. (1)

A partir del problema anterior podemos deducir que la función que permite calcular la masa N de carbono 14 conociendo la cantidad de masa original, N_0, en función del tiempo t, en años, está dada por la expresión:

$N = N_0 e^{-0.0001216 \cdot t}$ (2). Substituyendo (1) en (2), se obtiene que:

$$5'0 \times 10^{10} = 4'6 \times 10^{10} \times e^{-0'0001216 \cdot t} \Leftrightarrow e^{-0'0001216 \cdot t} = \frac{5'0}{4'6} = 1'086956522,$$

$$\Rightarrow -0'0001216 \cdot t = \ln 1'086956522 \Leftrightarrow t = \frac{0'0833816091\,8}{0'0001216} \approx 685'7 \text{años}.$$

Respuesta: la supuesta reliquia tiene una edad aproximada de 686 años (S.XIV). Parece que nos quieren dar gato por liebre puesto que, de acuerdo con los resultados obtenidos, el material con que está confeccionada la sábana santa de Turín no es precisamente de los tiempos en que murió Jesús de Nazareth (año 33 de nuestra era), sino mucho más tardío, teniendo en cuenta los datos del problema.

2. ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

2.1. SALARIOS

Ejemplo 1

Una persona, acabada la carrera y después de ganar la correspondiente oposición, se incorpora a la edad de 27 años a una empresa pública y cobra inicialmente un sueldo bruto de S_0 = 40.000 euros anuales (incluso pagas extraordinarias, complementos y demás) que se ve incrementado, cada año, de la siguiente manera:

- Se le aplica una subida igual al IPC que publica periódicamente, con carácter oficial, el INE, que notaremos por $i \neq 0$, y supondremos fijo a lo largo de los años (estimación media de i = 2'5%).
- Se le aplica un incremento lineal de C = 2.000 €.

Se le supone una vida laboral de 40 años (jubilación a los 67 años). ¿Cuánto dinero ganará este trabajador en el momento de su bien ganada jubilación?

Solución:

Llamaremos S_n al sueldo anual que percibe transcurridos n años. Dicho sueldo anual será igual al sueldo percibido el año anterior más los incrementos correspondientes, es decir:

$$S_{n+1} = S_n + i \cdot S_n + C,\ \forall\, n \in \mathbf{N},$$

que es una ecuación recurrente de orden uno que produce dependencia únicamente respecto del término anual exactamente anterior (y del rango temporal n). Se trata, pues, de una ecuación lineal con $b_n = C$, que se puede expresar así:

$$S_{n+1} – (1 + i)S_n = C$$

La ecuación característica de la homogénea es: $r – 1 – i = 0$, cuya solución es: $r = 1 + i$, y la solución de la homogénea es: $S^* = \alpha\cdot(1 + i)^n$.

Para la búsqueda de la solución particular de la ecuación completa ensayaremos: $S_p = A$, y substituyendo en la ecuación inicial quedará:

$A – (1+i)\cdot A = C$, de donde: $A = -\frac{C}{i}$, por lo que la solución general será:

$S_n = S^* + S_p = \alpha\cdot(1 + i)^n - \frac{C}{i}$; así mismo, $S_0 = \alpha - \frac{C}{i}$, por lo que también la ecuación general a aplicar será la siguiente: $S_n = (S_0 + \frac{C}{i})\cdot(1 + i)^n - \frac{C}{i}$.

Así pues, con los datos del problema planteado, se obtiene un último sueldo bruto anual, en el instante de la jubilación, por un importe de:

$$\boxed{S_{40} = (40.000 + \frac{2.000}{0'025}) \text{ x } 1'025^{40} - \frac{2.000}{0'025} = 242.207'66\ €}$$

2.2. TEORÍA MICROECONÓMICA

Ejemplo 1

El modelo de la telaraña es clásico en microeconomía. Con él se analiza, mediante una ecuación recurrente lineal, la variación de los precios de un bien o de un servicio ocasionada por la interacción entre la oferta y la demanda del mismo. Su nombre se debe a la semejanza que tiene su representación gráfica con una tela de araña. Pues bien, con los datos que se dan para el modelo de la telaraña, obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente.

Datos: $D_t = 5 – 3P_t$; $O_t = -2 + P_{t-1}$; $P_0 = 4$.

Solución:

a) Las funciones de demanda y oferta son, respectivamente:

$$D_t = 5 – 3P_t , \quad S_t = O_t = -2 + P_{t-1}$$

Igualando demanda y oferta para la búsqueda del punto de equilibrio, se tendrá que: $5 - 3P_t = -2 + P_{t-1}$. Por tanto, se tiene que: $P_t + 1/3 \cdot P_{t-1} = 7/3$, que resulta ser una ecuación en diferencias de primer orden equivalente a: $3P_{t+1} + P_t = 7$, cuya ecuación característica es: $3r + 1 = 0$; $r = -(1/3)$.

Al ser: $0 < |r| < 1$ y $r < 0$, la solución converge de forma oscilante al punto de equilibrio; es decir, los precios tienden al precio de equilibrio. De hecho, la ecuación anterior se puede escribir de la forma: $P_{t+1} = a \cdot P_t + c = -\frac{1}{3}P_t + \frac{7}{3}$, en que se cumple que: $a = -(1/3)$ y $c = 7/3$. Al ser $-1 < a = -0'333 < 0$, todas las soluciones son oscilantes, y los términos de índice par tienen signo diferente que los de índice impar.

La solución de la ecuación homogénea es: $P^*_t = k\left(-\frac{1}{3}\right)^t$, con k como constante arbitraria, ya que el polinomio característico es: $3r + 1$.

Como solución particular busquemos: $P_p = k'$, y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$k' + \frac{1}{3}k' = \frac{7}{3}; \quad \frac{4}{3}k' = \frac{7}{3}; \quad k' = \frac{7}{4}.$$

La solución general de la ecuación no homogénea o completa es:

$$\boxed{P_t = P^*_t + P_p = \frac{7}{4} + k\left(-\frac{1}{3}\right)^t}, \ \forall\, t \in \mathbf{N}.$$

b) Puesto que $P_0 = 4$ €, se tendrá que:

$$\frac{7}{4} + k\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 4; \quad \frac{7}{4} + k = 4; \quad k = 4 - \frac{7}{4} = \frac{9}{4}.$$

Así pues, la solución particular es: $P_t = \frac{7}{4} + \frac{9}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^t$, $\forall\, t \in \mathbf{N}$

y, a largo plazo, sucederá que: $\boxed{\lim_{t\to+\infty} P_t = \frac{7}{4} + \frac{9}{4}\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^t = \frac{7}{4}} = 1'75$ €,

es decir, que el precio se estabilizará en (7/4) €.

En el modelo de la telaraña pueden presentarse dos casos, a saber:

- Si la pendiente de la curva de oferta es mayor que la pendiente de la curva de demanda, entonces las fluctuaciones disminuyen en magnitud con cada ciclo, así que un diagrama de precios mostrará que en un cierto plazo las cantidades parecerían un espiral interna, según lo ilustrado en el diagrama correspondiente. Este se llama *caso estable o convergente* y supone que los productores del bien o servicio van corrigiendo paulatinamente los errores de estimación del precio futuro.

- Si la pendiente de la curva de oferta es menor que la pendiente de la curva de demanda (la elasticidad de la demanda es menor que la de la oferta) entonces las fluctuaciones aumentan de magnitud con cada ciclo, de tal modo que la espiral de los precios y las cantidades se moverá hacia afuera. Este se llama el *caso inestable o divergente*.

c) Gráficamente, lo expuesto hasta ahora se puede representar mediante la siguiente figura:

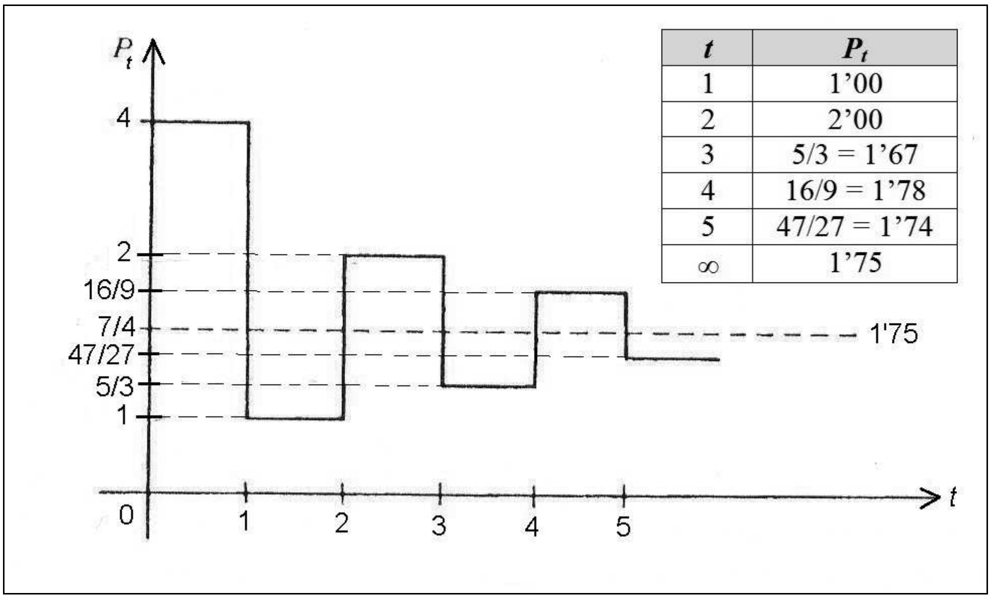


FIG. 8.10. Evolución temporal del precio (I).

Ejemplo 2

La demanda en el mercado de un bien sigue una relación de la forma:

$D(t+2) = \frac{3}{2}D(t+1) - \frac{1}{2}D(t)$. Estúdiese bajo qué condiciones iniciales la demanda D(t) se estabiliza a largo plazo.

Solución:

La ecuación en diferencias finitas es: $D(t+2) - \frac{3}{2}D(t+1) + \frac{1}{2}D(t) = 0$; que expresada en notación de subíndices es: $2D_{t+2} - 3D_{t+1} + D_t = 0$, y tiene por ecuación característica la siguiente:

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0\,; \quad 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0, \text{con las raíces :}$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ 1/2 \end{array} \right.$$

De este modo, la solución general de la ecuación anterior es:

$$D(t) = c_1 + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^t = c_1 + \frac{c_2}{2^t}, \forall\ t \in \mathbf{N}$$

A largo plazo, se tiene que:

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} D(t) = \lim_{t\to+\infty}\left[c_1 + \frac{c_2}{2^t}\right] = c_1},$$

lo que quiere decir que la demanda siempre se estabiliza a largo plazo alrededor de c_1.

Ejemplo 3

En un mercado supuesto de competencia perfecta, las funciones de oferta y de demanda vienen dadas por las expresiones siguientes:

$$\begin{cases} \text{Oferta del mercado } (S_t = O_t)\text{: } p = 8 - 0'025\cdot q \\ \text{Demanda del mercado } (D_t)\text{: } p = 10 - 0'05\cdot q \end{cases}$$

Se pide:

1º) Comprobar si el equilibrio del mercado es estable, según la condición de estabilidad estática de Walras.

2º) Si la reacción dinámica del mercado es: $q_t - q_{t-1} = k\cdot F(q_{t-1})$, siendo $F(q_{t-1})$ la función de exceso del precio de demanda, determinar la estabilidad dinámica del mercado, según la condición de Marshall, para los valores de k siguientes: $k_1 = 10$, $k_2 = 60$ y $k_3 = 120$.

Solución:

1º) No se cumple la condición de estabilidad estática de Walras[6]. Las condiciones de estabilidad se derivan de supuestos sobre la conducta en el mercado de compradores y vendedores. La condición antedicha se basa en el supuesto de que los compradores tienden a subir sus pujas si el exceso de demanda es positivo, mientras que los vendedores tienden a bajar sus precios

[6] **Léon Walras** (1834-1910) was a French mathematical economist. He formulated the marginal theory of value (independently of William Stanley Jevons and Carl Menger) and pioneered the development of general equilibrium theory. In 1874 and 1877 Walras published *Elements of Pure Economics*, a work that led him to be considered the father of the general equilibrium theory. The problem that Walras set out to solve was one presented by Cournot, that even though it could be demonstrated that prices would equate supply and demand to clear individual markets, it was unclear that an equilibrium existed for all markets simultaneously. Walras constructed his basic theory of general equilibrium by beginning with simple equations and then increasing the complexity in the next equations. He began with a two person bartering system, then moved on to the derivation of downward-sloping consumer demands. Next he moved on to exchanges involving multiple parties, and finally ended with credit and money. Walras created a system of simultaneous equations in an attempt to solve Cournot's problem (which supposedly Walras at first thought was complete merely because the number of equations equalled the number of unknowns).

si resulta negativo. Si este supuesto de conducta es correcto, un mercado es estable si una subida de precio disminuye el exceso de demanda.

En nuestro caso, la función de exceso de demanda es:

$$\begin{cases} O(p) \rightarrow 0'025\cdot q = 8 - p \ ; \ q = 320 - 40\cdot p \\ D(p) \rightarrow 0'05\cdot q = 10 - p \ ; \ q = 200 - 20\cdot p \end{cases}$$

$E(p) = D(p) - O(p) = 200 - 20\cdot p - 320 + 40\cdot p = 20\cdot p - 120$, con lo que:

$\frac{dE(p)}{dp} = 20 > 0$, luego el mercado no es estable.

2º) La función de exceso del precio de demanda es la diferencia existente entre el precio que los compradores están dispuestos a pagar, y los vendedores a pedir, por una cantidad dada del bien o servicio. El supuesto de conducta subyacente en la condición de estabilidad de Marshall establece que los productores tendrán tendencia a aumentar su *output* cuando el precio de exceso de demanda es positivo, y a bajarlo cuando es negativo. Si el precio del exceso de demanda es positivo, el productor se da cuenta de que los consumidores están ofreciendo un precio mayor que el que él pide para su producto y deduce que puede aumentar con provecho la cantidad ofrecida. Para el caso contrario sirve un razonamiento análogo. Así, un equilibrio es estable en el sentido de Marshall cuando un aumento de la cantidad de producto reduce el precio del exceso de demanda.

En nuestro caso será:

$F(q) = D(q) - O(q) = (10 - 0'05\cdot q) - (8 - 0'025\cdot q) = 2 - 0'025\cdot q$, y entonces:

$\frac{dF(q)}{dq} = -0'025 < 0$, por lo que sí se cumple la condición de estabilidad estática de Marshall[7].

Puesto que la curva de demanda tiene pendiente negativa, ambas condiciones de estabilidad estática se satisfacen si la curva de oferta tiene pendiente positiva. Por lo tanto, la situación ordinaria de oferta-demanda resulta estable según ambas definiciones de Walras y Marshall.

[7] **Alfred Marshall** (1842-1924) was one of the most influential economists of his time. His book, *Principles of Economics* (1890), was the dominant economic textbook in England for many years. It brings the ideas of supply and demand, marginal utility, and costs of production into a coherent whole. He is known as one of the founders of economics. He desired to improve the mathematical rigor of economics and transform it into a more scientific profession. In the 1870s he wrote a small number of tracts on international trade and the problems of protectionism. In 1879, many of these works were compiled into a work entitled *The Theory of Foreign Trade: The Pure Theory of Domestic Values*. In the same year (1879) he published *The Economics of Industry* with his wife Mary Paley. Although Marshall took economics to a more mathematically rigorous level, he did not want mathematics to overshadow economics and thus make economics irrelevant to the layman. Accordingly, Marshall tailored the text of his books to laymen and put the mathematical content in the footnotes and appendices for the professionals.

Contrariamente, si la curva de oferta tiene pendiente negativa, el equilibrio no puede ser estable de acuerdo con las dos definiciones[8]. Ambas condiciones no pueden cumplirse simultáneamente: si un equilibrio es estable en el sentido de Walras, dicho equilibrio es inestable en el sentido de Marshall. De hecho, estos resultados se pueden comprobar gráficamente de una forma más directa.

Así pues, la función de exceso del precio de demanda puede expresarse así:

$F(q_{t-1}) = 2 - 0'025 \cdot q_{t-1} = 2 - \frac{q_{t-1}}{40}$, o sea: $\Delta q = q_t - q_{t-1} = k \cdot F(q_{t-1}) = 2k - \frac{k \cdot q_{t-1}}{40}$;

$$q_t = 2k - \frac{k \cdot q_{t-1}}{40} + q_{t-1} = 2k + q_{t-1}(1 - \frac{k}{40}) = a + b \cdot q_{t-1}, \text{ donde:}$$

$a = 2k$ y $b = 1 - \frac{k}{40}$. Esto es: $q_t - b \cdot q_{t-1} = a$, o bien su ecuación en diferencias finitas lineal y de primer orden equivalente: $q_{t+1} - b \cdot q_t = a$. La ecuación característica de la homogénea será: $r - b = 0$, o sea: $r = b$, por lo que la solución de la homogénea será: $q^*_t = c \cdot b^t$. Ensayaremos, ahora, una solución particular de la forma: $q_p = k$, y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que: $k - b \cdot k = a$; $k(1-b) = a$; $k = \frac{a}{1-b}$, y la solución general vendrá dada por la expresión:

$$q_t = q^*_t + q_p = c \cdot b^t + \frac{a}{1-b}, \text{ y entonces:}$$

$$q_0 = c + \frac{a}{1-b}, \text{ y } c = q_0 - \frac{a}{1-b}; \text{ de donde: } q_t = (q_0 - \frac{a}{1-b}) \cdot b^t + \frac{a}{1-b}.$$

Si $a = 2k$, y $b = 1 - \frac{k}{40}$, resultará que: $\frac{a}{1-b} = \frac{2k}{k/40} = 80$, que es la cantidad de equilibrio, con la nueva expresión de la solución general:

$$q_t = (q_0 - 80) \cdot (1 - \frac{k}{40})^t + 80, \ \forall \ t \in \mathbf{N}.$$

Para los diferentes valores de k propuestos, se tendrá, a su vez, que:

a) Si $k_1 = 10 \rightarrow q_t = (q_0 - 80) \cdot (\frac{3}{4})^t + 80$. Resulta un equilibrio estable porque el primer miembro tiende a cero cuando t tiende a $+\infty$.

b) Si $k_2 = 60 \rightarrow q_t = (q_0 - 80) \cdot (-\frac{1}{2})^t + 80$. La cantidad oscila en el tiempo pero acercándose al nivel de equilibrio cuando t tiende a $+\infty$.

[8] Las curvas o funciones de oferta que pueden tener pendiente negativa son la de oferta de *inputs* primarios tales como el trabajo y las de oferta de productos cuando existan economías o deseconomías externas. Solamente en estos casos pueden darse equilibrios inestables.

c) Si $k_3 = 120 \rightarrow q_t = (q_0 - 80)\cdot(-2)^t + 80$. Resulta un equilibrio inestable, puesto que el mercado presenta oscilaciones explosivas.

Debe tenerse en cuenta, en definitiva, que las afirmaciones acerca de la estabilidad del equilibrio dependen de los supuestos hechos sobre el mecanismo del mercado y la conducta de los que participan en él. *A priori*, no puede afirmarse cuál de las dos condiciones (Walras o Marshall) es más plausible en la realidad. En cualquier situación concreta, solo puede establecerse el punto de equilibrio después de acumular información empírica suficientemente validada acerca de los modelos de comportamiento de los que participan en el mercado en cuestión.

Las condiciones de estabilidad estática se formulan en términos de la relación de variación del exceso de demanda respecto al precio, o bien de la relación de cambio del precio del exceso de demanda respecto a la cantidad. Pero el análisis estático no intenta investigar el aspecto temporal del proceso de ajuste; en cambio, en el modelo de estabilidad dinámica no se esperan ajustes instantáneos: si el precio inicial no es igual al equilibrio, cambia y tiene lugar la recontratación. Si el nuevo precio sigue difiriendo del de equilibrio se ve forzado a cambiar otra vez. El equilibrio es estable en sentido dinámico si el precio converge (o se acerca) al precio de equilibrio con el tiempo, y es inestable si, con el cambio, el precio se aleja del equilibrio. También puede definirse la estabilidad dinámica en términos de convergencia de la cantidad ofrecida a la de equilibrio. La primera definición de estabilidad corresponde a la de Walras (suponiendo que el mecanismo de Walras operase en el mercado, un exceso de demanda positivo tendería a aumentar el precio) y la última a la de Marshall.

Ejemplo 4

La demanda de patatas por parte de los consumidores responde al precio del mercado según la función siguiente: $q = 500\ (10 - p_t)$. La oferta de patatas por parte de los agricultores, que es proporcional a la superficie sembrada de dicho tubérculo, responde al precio de mercado que rigió el año o campaña anterior, según la función siguiente: $q = 1.000\ (p_{t-1} - 1)$. Se pide:

1º) Determinar el precio de equilibrio del mercado y la producción de patatas correspondiente, así como los ingresos netos de los agricultores considerando un 15% de impuestos.
2º) Estudiar la estabilidad del equilibrio del mercado.

Solución:

Se contestará a ambos apartados simultáneamente.

La condición de equilibrio es que la oferta del mercado iguale a la demanda, por lo que igualando ambas ecuaciones resulta:

$$500\ (10 - p_t) = 1.000\ (p_{t-1} - 1);\ 10 - p_t = 2p_{t-1} - 2;\ \text{y resulta que:}$$

$p_t + 2p_{t-1} = 12$, o bien su ecuación en diferencias finitas lineal de primer grado equivalente: $p_{t+1} + 2p_t = 12$.

La ecuación característica de la homogénea será:

$r + 2 = 0$; $r = -2$ y la solución de la homogénea será: $p_t^* = c\cdot(-2)^t$.

Ensayamos ahora una solución particular de la ecuación completa, del tipo: $p_p = k$, y substituyendo en la ecuación inicial se tiene que:
$k + 2k = 12$, de donde: $k = 4$, con la solución general:

$$p_t = p_t^* + p_p = c\cdot(-2)^t + 4$$

Si ahora hacemos $t = 0$, $p_0 = c + 4$, entonces: $c = p_0 – 4$, luego:

$$p_t = (p_0 - 4)\cdot(-2)^t + 4,\ \forall\ t \in \mathbf{N}$$

De hecho, genéricamente, la solución de la ecuación recurrente:

$a\cdot p_t + b\cdot p_{t-1} + c = 0$, es la siguiente: $p_t = (p_0 + \frac{c}{a-b})\cdot(-\frac{b}{a})^t - \frac{c}{a+b}$

Veamos, en fin, que el precio de equilibrio es 4 €, y el mercado oscila alrededor del nivel de equilibrio con tendencia a alejarse. En efecto, al ser $|r| = 2 > 1$ y $r < 0$, las soluciones (todas las sucesiones) siempre divergen de forma oscilante (salvo, evidentemente, la solución constantemente igual a 4 €). En particular, el punto de equilibrio no es estable, puesto que se trata de oscilaciones explosivas. En este caso, el modelo solo tiene sentido para un período de tiempo limitado, precisamente el período a partir del cual aparecen precios negativos.

El precio de equilibrio del mercado resultará de la ecuación que iguala la oferta y la demanda (con $p_t = p_{t-1}$) siguiente:

$500\ (10 – p) = 1.000\ (p – 1)$, de donde: $\boxed{p = 4\text{ € y } q = 500\ (10 – 4) = 3.000}$,

con lo que los ingresos netos de los agricultores (deduciendo los impuestos) serán:

$$\boxed{I = 0'85 \times p \times q = 0'85 \times 4 \times 3.000 = 10.200\text{ €}}$$

Ejemplo 5

Se supone que, en una economía determinada, los mercados del maíz en grano y de la carne de cerdo se hallan interrelacionados de forma que las funciones de oferta y demanda en el mercado del maíz, que son independiente del mercado del cerdo, son las siguientes:

$$\begin{cases} \text{Oferta} \rightarrow q_m = 2.000\cdot p_{m,t-1} \\ \text{Demanda} \rightarrow q_m = 5.000\cdot(7 – p_{m,t}) \end{cases}$$

, esto es, la demanda de maíz es función del precio actual del mercado, mientras que la oferta es función del precio que rigió el año anterior. Por otra parte, las funciones de oferta y demanda en el mercado del cerdo son las siguientes:

$$\begin{cases} \text{Oferta} \rightarrow q_c = 15 \cdot p_{c,t-1} - 100 - 80 \cdot p_{m,t-1} \\ \text{Demanda} \rightarrow q_c = 25 \cdot (40 - p_{c,t}) \end{cases}$$

, o sea, que la demanda de la carne de cerdo es función del precio actual del mercado mientras que la oferta depende de los precios que alcanzaron el año anterior tanto el cerdo como el maíz. Se pide:

1º) Determinar los precios de equilibrio del maíz y del cerdo, así como las cantidades respectivas que se producen.

2º) Comprobar si la situación de equilibrio[9] de los dos mercados interrelacionados es estable.

Solución:

1º) a) *Mercado del maíz*. Las condiciones de equilibrio de este mercado son las siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Oferta = Demanda} \\ p_{m,t} = p_{m,t-1} = p_m \end{array}}$$

o sea: $2.000 \cdot p_m = 35.000 - 5.000 \cdot p_m$; $p_m = 35/7 = 5$;

y también: $q_m = 2.000 \times p_m = 2.000 \times 5 = 10.000$.

b) *Mercado del cerdo*. Las condiciones de equilibrio de este mercado son las siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Oferta = Demanda} \\ p_{c,t} = p_{c,t-1} = p_c \\ p_{m,t-1} = 5 \end{array}}$$

o sea: $15 \cdot p_c - 100 - 80 \times 5 = 1.000 - 25 \cdot p_c$; $p_c = 1.500/40 = 37'5$;

y también: $q_c = 25\ (40 - 37'5) = 62'5$.

[9] Habrá una situación de equilibrio entre la oferta y la demanda cuando, a los precios de mercado, todos los consumidores puedan adquirir las cantidades que deseen y los oferentes consigan vender todas las existencias. El precio y la cantidad de producto que se intercambiará realmente en el mercado queda determinado automáticamente como consecuencia de la forma de las curvas de oferta y demanda del producto. Si el precio es muy alto, los productores estarán ofreciendo mucho más producto del que demandan los consumidores por lo que se encontrarán con *excedentes*, cantidades que no pueden vender, por lo que reducirán sus producciones y bajarán los precios. Por el contrario, si el precio resulta ser demasiado bajo, las cantidades demandadas serán mayores que las ofrecidas por lo que se producirá *escasez*. Algunos consumidores estarán dispuestos a pagar más dinero por ese bien. El precio y la cantidad producida aumentarán en ese caso.

A continuación, pueden verse las representaciones gráficas de los puntos de equilibrio de ambos mercados y las correspondientes funciones de oferta y demanda:

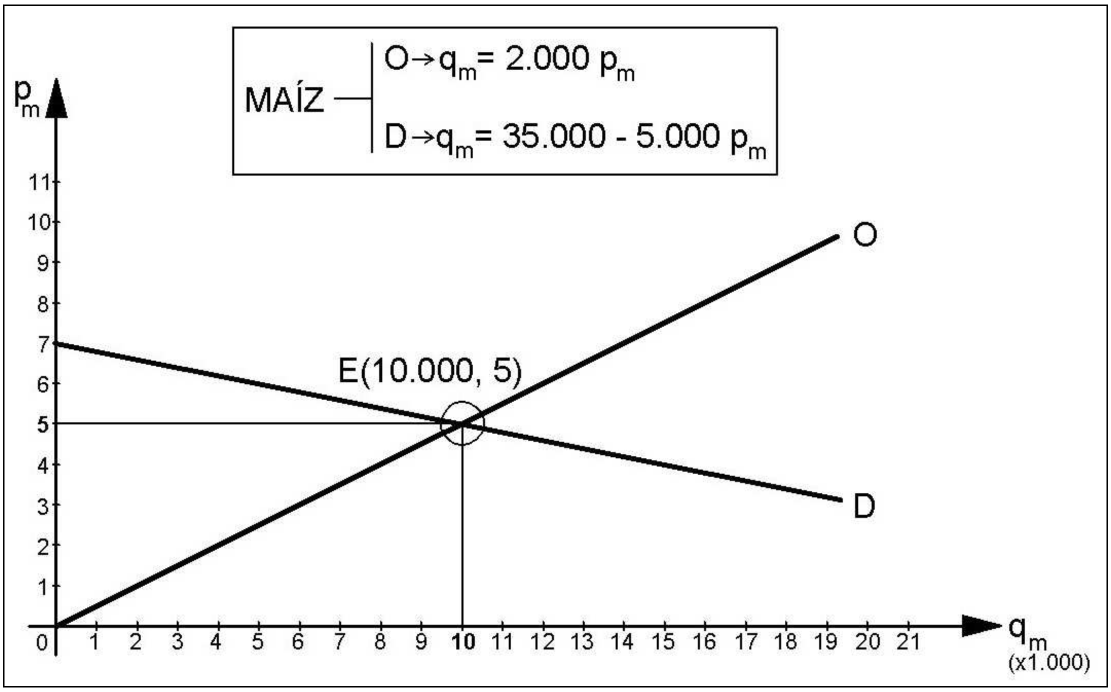


FIG. 8.11. Funciones de oferta y demanda del maíz.

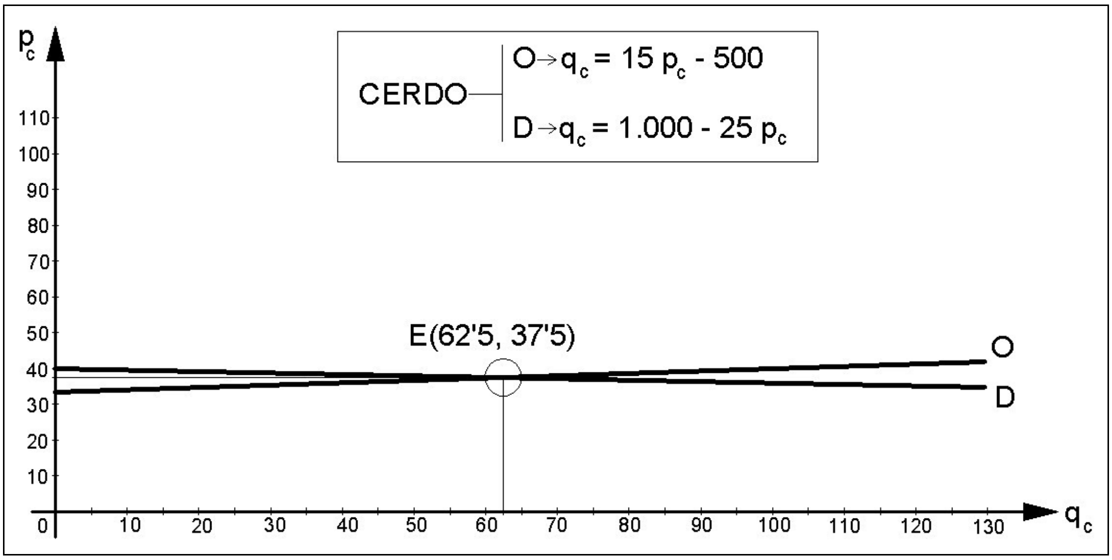


FIG. 8.12. Funciones de oferta y demanda del cerdo.

2º) Por lo que se refiere a la estabilidad del equilibrio, veamos que:

a) Mercado del maíz.

Es autosuficiente, es decir, independiente del mercado del cerdo. Así mismo, es estable, puesto que la elasticidad de la demanda es mayor que la elasticidad de la oferta. En efecto:

Elasticidad de la D $\rightarrow$ q = 5.000 (7 – p) = 35.000 – 5.000·p;

$$p = 7 - \frac{q}{5.000}\text{, y: } \varepsilon_D = -\frac{p}{q} x \frac{dq}{p} = -\left(\frac{7}{q} - \frac{1}{5.000}\right)\cdot(-5.000) = \frac{35.000}{q} - 1$$

Elasticidad de la O $\rightarrow$ q = 2.000·p ; $p = \frac{q}{2.000}$, y entonces:

$$\varepsilon_O = -\frac{p}{q} x \frac{dq}{p} = -\frac{1}{2.000} x 2.000 = -1\text{, luego: } \varepsilon_D > \varepsilon_O\ .$$

De la condición de equilibrio: Oferta = Demanda, se obtiene que:

$2.000\cdot p_{m,t-1} = 35.000 - 5.000\cdot p_{m,t}$; del que se obtiene la siguiente ecuación en diferencias finitas: $5\cdot p_{m,t} + 2\cdot p_{m,t-1} = 35$. La ecuación característica de la homogénea es: 5r + 2 = 0, con lo que: r = - (2/5) y la solución de la homogénea será:

$$p_{m,t}^* = c\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^t$$

Nótese que dicha ecuación recurrente resulta equivalente a la otra:

$$5\cdot p_{m,t} = -2\cdot p_{m,t-1} + 35;\ p_{m,t} = \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot p_{m,t-1} + 7$$

, por lo que tiene un punto de equilibrio estable y todas las soluciones convergen a él. Pero como: -1 < (-2/5) = -0'4 < 0, resulta que todas las soluciones son oscilantes y los términos de índice par tienen signo diferente que los de índice impar.

Ensayamos, ahora, una solución particular de la ecuación completa del tipo: $p_p = k$, por lo que substituyendo en la ecuación inicial se tiene que: 5k + 2k = 35, de donde: k = 5, y entonces, la solución general es:

$$p_{m,t} = p_{m,t}^* + p_p = c\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^t + 5,\ \forall\ t \in \mathbf{N}.$$

A largo plazo sucederá que: $\lim\limits_{t\to+\infty} p_{m,t} = 5$.

b) Mercado del cerdo.

De la condición: Oferta = Demanda, se obtiene que:

$$15\cdot p_{c,t-1} - 100 - 80\cdot p_{m,t-1} = 1.000 - 25\cdot p_{c,t}\ \text{; o sea:}$$

$$16\cdot p_{m,t-1} = 5\cdot p_{c,t} + 3\cdot p_{c,t-1} - 220\text{, y entonces :}$$

$$p_{m,t-1} = \frac{5 \cdot p_{c,t} + 3 \cdot p_{c,t-1} - 220}{16}, \text{ y también: } p_{m,t} = \frac{5 \cdot p_{c,t+1} + 3 \cdot p_{c,t} - 220}{16}$$

Substituyendo estos valores en la ecuación: $5 \cdot p_{m,t} + 2 \cdot p_{m,t-1} = 35$, se tiene que:

$$\frac{25 \cdot p_{c,t+1} + 15 \cdot p_{c,t} - 1.100}{16} + \frac{10 \cdot p_{c,t} + 6 \cdot p_{c,t-1} - 440}{16} = 35 \ ;$$

$25 \cdot p_{c,t+1} + 25 \cdot p_{c,t} + 6 \cdot p_{c,t-1} - 1.540 = 560$, y resulta, en definitiva, la ecuación recurrente de segundo orden:

$$25 \cdot p_{c,t+1} + 25 \cdot p_{c,t} + 6 \cdot p_{c,t-1} = 2.100.$$

Su ecuación característica será: $25r^2 + 25r + 6 = 0$, de la que se deducen las dos raíces reales: $r_1 = -(2/5)$ y $r_2 = -(3/5)$, con lo que la solución de la homogénea será:

$$p_{c,t}^* = c_1 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^t + c_2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^t.$$

Para la búsqueda de una solución particular de la ecuación completa, ensayaremos: $p_p = k$, y substituyendo en la ecuación inicial se tiene que:
$25k + 25k + 6k = 2.100$, por lo que:

$k = 2.100/56 = 37'5$, y la solución general será:

$$p_{c,t} = p_{c,t}^* + p_p = c_1 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^t + c_2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^t + 37'5, \ \forall\ t \in \mathbf{N}$$

A largo plazo, se tendrá que: $\lim_{t \to +\infty} p_{c,t} = 37'5$, que es el precio de equilibrio, y resulta que el equilibrio del mercado de cerdo es estable.

Obsérvese también que:

- $r_1 = -(2/5)$, es la relación entre las pendientes de las curvas de oferta y de demanda de maíz.

- $r_2 = -(3/5)$, es la relación entre las pendientes de las curvas de oferta y de demanda de cerdo.

Por otra parte, si las curvas de demanda, en los dos mercados, son más elásticas que las curvas de oferta, el equilibrio en los dos mercados interrelacionados resulta estable.

De cualquier modo, tanto en el caso del maíz como del cerdo, se cumple que: $0 < |r| < 1$, con $r < 0$, por lo que las soluciones convergen de forma oscilante al punto de equilibrio; es decir, los precios tienden al precio de equilibrio correspondiente.

Ejemplo 6

En un supuesto de estabilidad dinámica del comportamiento de un mercado cuya función de oferta de un producto es: q_o = 1.000 (p - 1), y la función de demanda es: q_d = 500 (10 – p), sucede que inicialmente:

$$p_0 = 8 \text{ €} \ \text{ y } \ k = 1/3.000.$$

Se pide:

1º) Hallar el punto de equilibrio estático y hacer la representación gráfica correspondiente.
2º) Si el incremento de precios viene dado por la expresión:
$\Delta\ p = p_t - p_{t-1} = k\cdot(q_d - q_o)$, $\forall k > 0$, hallar la correspondiente fórmula de recurrencia.

Solución:

1º) Oferta = Demanda, por lo que: 1.000 (p - 1) = 500 (10 – p), de lo que se deduce que el punto buscado es: p = 4 y q = 3.000, con la siguiente representación gráfica:

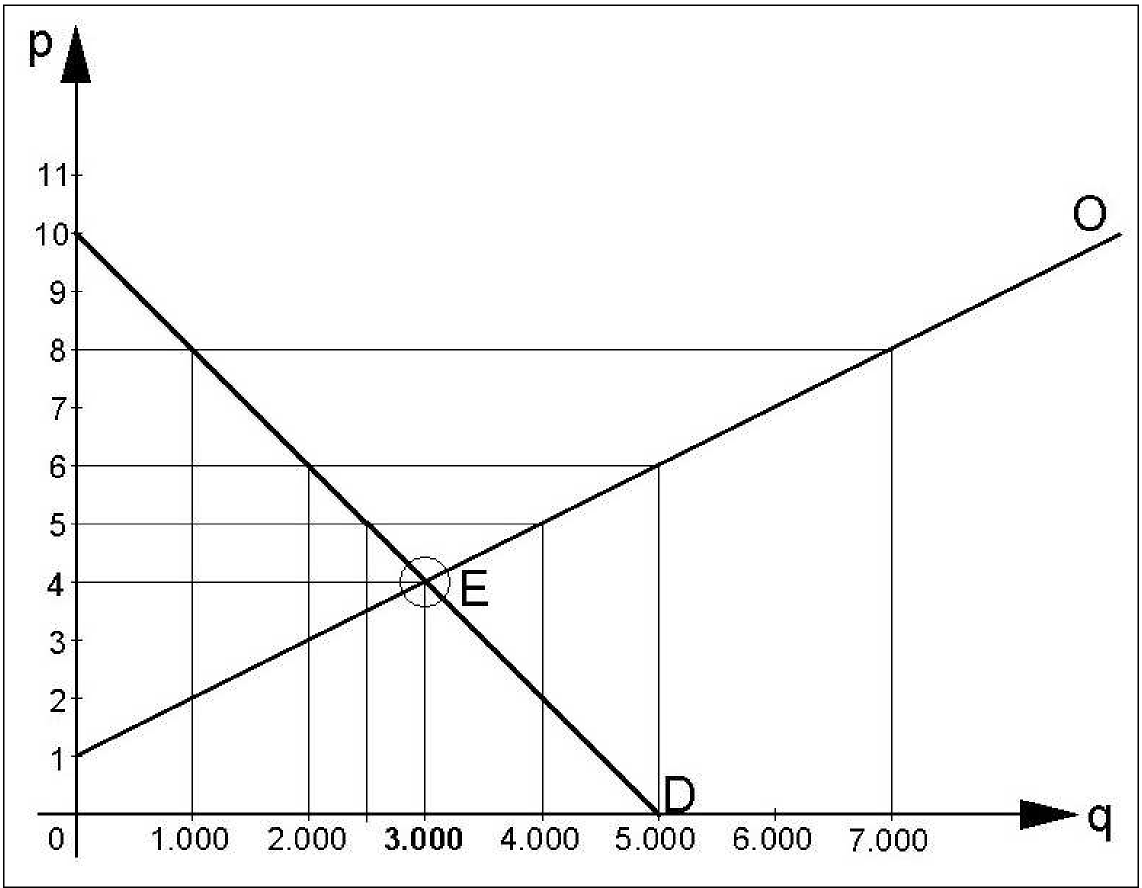


FIG. 8.13. Funciones de oferta, demanda y punto de equilibrio.

2º) En el período t_0 se tendrá que: p_0 = 8 €, con lo que:

$$\begin{cases} q_d = 500\cdot(10 - p) \text{ y } p = p_0, \text{ implica que } q_d = 1.000 \\ q_o = 1.000\cdot(p - 1) \text{ y } p = p_0, \text{ implica que } q_0 = 7.000 \end{cases}$$

Δ p = $p_t - p_{t-1} = k\cdot(q_d - q_o) = \dfrac{1}{3.000}(1.000 - 7.000) = -2$ €, con lo que: p_{t-1} = 8 €, Δ p = $p_t - p_{t-1}$; esto es, -2 = p_t – 8, y pt = 6 €, y así sucesivamente hasta alcanzar el punto de equilibrio.

Ello puede verse reflejado en la siguiente tabla y gráfica:

Período (t)	**Precio (p_t)**	**Cantidad demandada (q_d)**	**Cantidad ofrecida (q_o)**	**Δp(€)**	**$q_o - q_d$**
0	p_0 = 8’00 €	1.000	7.000	-2’000	6.000
1	p_1 = 6’00 €	2.000	5.000	-1’000	3.000
2	p_2 = 5’00 €	2.500	4.000	-0’500	1.500
3	p_3 = 4’50 €	2.750	3.500	-0’250	750
4	p_4 = 4’25 €	2.875	3.250	-0’125	375
…	…	…	…	…	…
∞	p_∞ = 4’00 €	3.000	3.000	0	0

El equilibrio, pues, tendrá lugar cuando p = 4’00 € (cuando $t \to +\infty$).

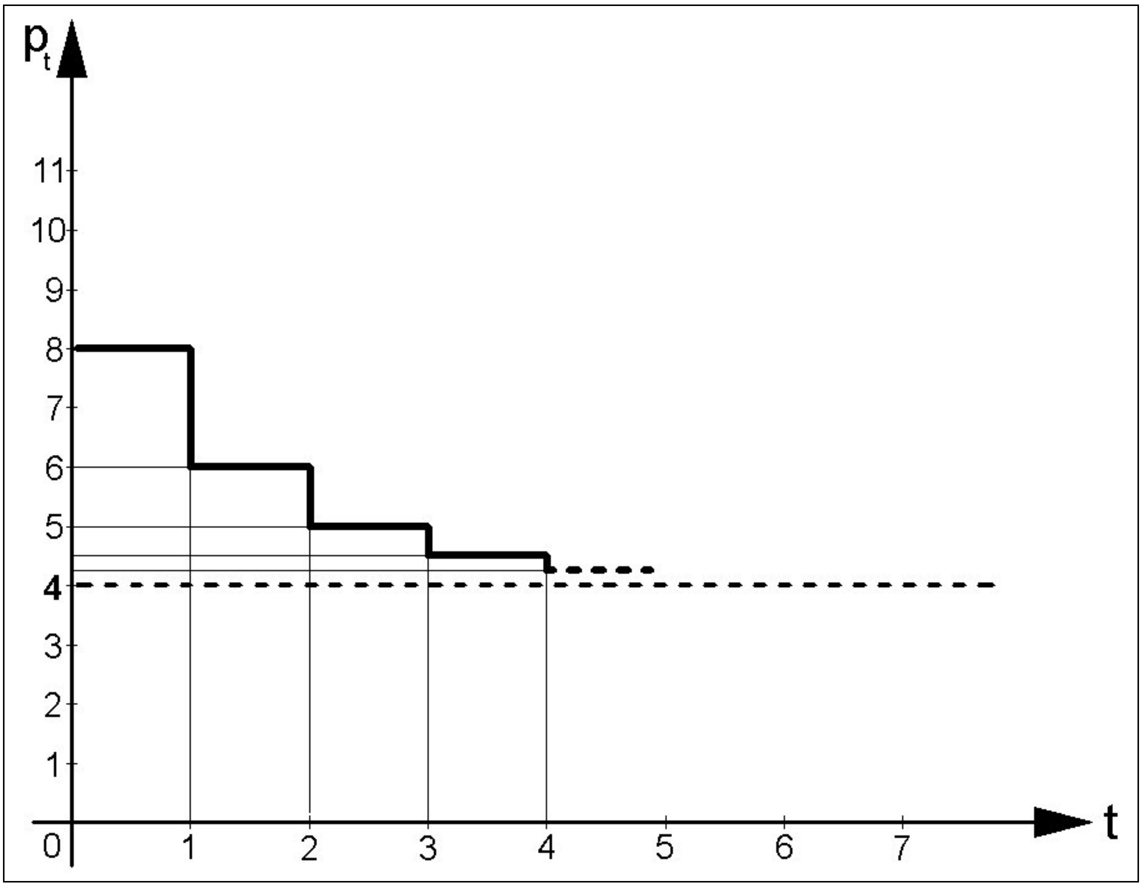


FIG. 8.14. Evolución temporal del precio (II).

Hallemos ahora la fórmula de recurrencia:

$$\Delta p = p_t - p_{t-1} = \frac{1}{3.000}\left[500(10 - p_{t-1}) - 1.000(p_{t-1} - 1)\right] =$$
$$= \frac{1}{30}(60 - 15 \cdot p_{t-1}) = 2 - 0'5 \cdot p_{t-1} \,;$$

$$p_t = p_{t-1} + 2 - \frac{1}{2}p_{t-1} \Rightarrow \boxed{p_t = \frac{1}{2}p_{t-1} + 2} \text{ (ley de recurrencia)}$$

Se tendrá, en definitiva, la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$2p_t = p_{t-1} + 4$, o bien su ecuación equivalente: $2p_{t+1} - p_t = 4$.

De la expresión: $p_t = \frac{1}{2}p_{t-1} + 2$, deducimos que todas las soluciones convergen al punto de equilibrio, y además: $0 < ½ < 1$, luego todas las soluciones son monótonas, es decir, crecientes o decrecientes.

La ecuación característica de la homogénea será: $2r - 1 = 0$; $r = ½$; con lo que la solución de la homogénea es: $p_t^* = C \cdot (1/2)^t$.

Ensayamos, ahora, una solución particular de la ecuación completa del tipo: $p_p = k$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se tendrá que:

$2k - k = 4 \rightarrow k = 4$, y la solución general buscada será:

$$p_t = p_t^* + p_p = C \cdot (1/2)^t + 4, \ \forall\, t \in \mathbf{N}$$

$p_0 = C + 4$; $C = p_0 - 4$, y la solución queda así:

$$p_t = (p_0 - 4) \cdot (1/2)^t + 4 = \left(p_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^t + \frac{b}{1-a}, \text{con:} \begin{cases} b = 2 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \text{, y tendremos que:}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}
p_1 = \frac{1}{2}p_0 + 2 \rightarrow \times\left(\frac{1}{2}\right)^t \\
p_2 = \frac{1}{2}p_1 + 2 \rightarrow \times\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \\
p_3 = \frac{1}{2}p_2 + 2 \rightarrow \times\left(\frac{1}{2}\right)^{t-2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_{t-1} = \frac{1}{2}p_{t-2} + 2 \rightarrow \times\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
p_t = \frac{1}{2}p_{t-1} + 2 \rightarrow \times\frac{1}{2}
\end{array}}$$

Se trata de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón ½ , por lo que operando adecuadamente obtendremos que:

$$p_t = p_0\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-1}{\frac{1}{2}-1}\right] = p_0\left(\frac{1}{2}\right)^t - 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^t - 1\right] = (p_0 - 4)\cdot(1/2)^t + 4,$$

como queríamos demostrar. Así pues, para un *t* suficientemente grande, el precio de mercado se aproxima al de equilibrio (p_t = 4 €).

Ejemplo 7

Si en el modelo de la telaraña las ecuaciones que ligan la oferta y la demanda con el precio son las siguientes:

$$D_t = 100 - 2\cdot p_t \;;\quad O_t = -20 + 3\cdot p_{t-1} \;;$$

, encontrar el precio de equilibrio y analizar si es estable o no. Si p_0 = 25 €, se pide calcular p_1, p_2, p_3 y p_4.

Solución:

Igualando oferta y demanda, se tendrá que:

$100 - 2\cdot p_t = -20 + 3\cdot p_{t-1}$, de donde se deduce la ecuación recurrente:

$2\cdot p_{t+1} + 3\cdot p_t = 120$; la ecuación característica de la homogénea será:

$2r + 3 = 0$; $r = -(3/2)$, y la solución de la homogénea será: $p_t^* = c\cdot(-\frac{3}{2})^t$.

El precio de equilibrio vendrá dado por: $2p + 3p = 120$, y $p = 24$ €.

Ensayaremos ahora una solución particular de la ecuación completa del tipo: $p_p = k$; $5k = 120$; $k = 24$, por lo que la solución general de la ecuación en cuestión será:

$$p_t = p_t^* + p_p = c\cdot(-\frac{3}{2})^t + 24,\ \forall\ t \in \mathbf{N}$$

Se tendrá que: $p_0 = c + 24$ y $c = p_0 - 24$; para $p_0 = 25$ € $\rightarrow$ $c = 1$. En cada período, los precios correspondientes serán los siguientes:

$$\begin{cases} p_0 = 1 + 24 = 25 \text{ €} \\ p_1 = -(3/2) + 24 = 22'5 \text{ €} \\ p_2 = 9/4 + 24 = 26'25 \text{ €} \\ p_3 = -(27/8) + 24 = 20'625 \text{ €} \\ p_4 = 81/16 + 24 = 29'0625 \text{ €} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{y así sucesivamente.} \end{cases}$$

Ello puede verse reflejado en la siguiente tabla y gráfica:

Período (t)	**Precio (p_t) en €**	**Cantidad demandada (q_d)**	**Cantidad ofrecida (q_o)**	**Δp (€)**	**$q_o - q_d$**
0	p_0 = 25’0000	50’000	55’0000	-2’5000	+5’0000
1	p_1 = 22’5000	55’000	47’5000	+3’7500	-7’5000
2	p_2 = 26’2500	47’500	58’7500	-5’6250	+11’2500
3	p_3 = 20’6250	58’750	41’8750	+8’4375	-16’8750
4	p_4 = 29’0625	41’875	67’1875	…	+25’3125
…	…	…	…	…	…
∞	p_∞ = 24’0000	52’000	52’0000	0	0

El equilibrio, pues, tendrá lugar cuando p = 24’00 € (cuando $t \to -\infty$, lo que constituye una consideración puramente teórica).

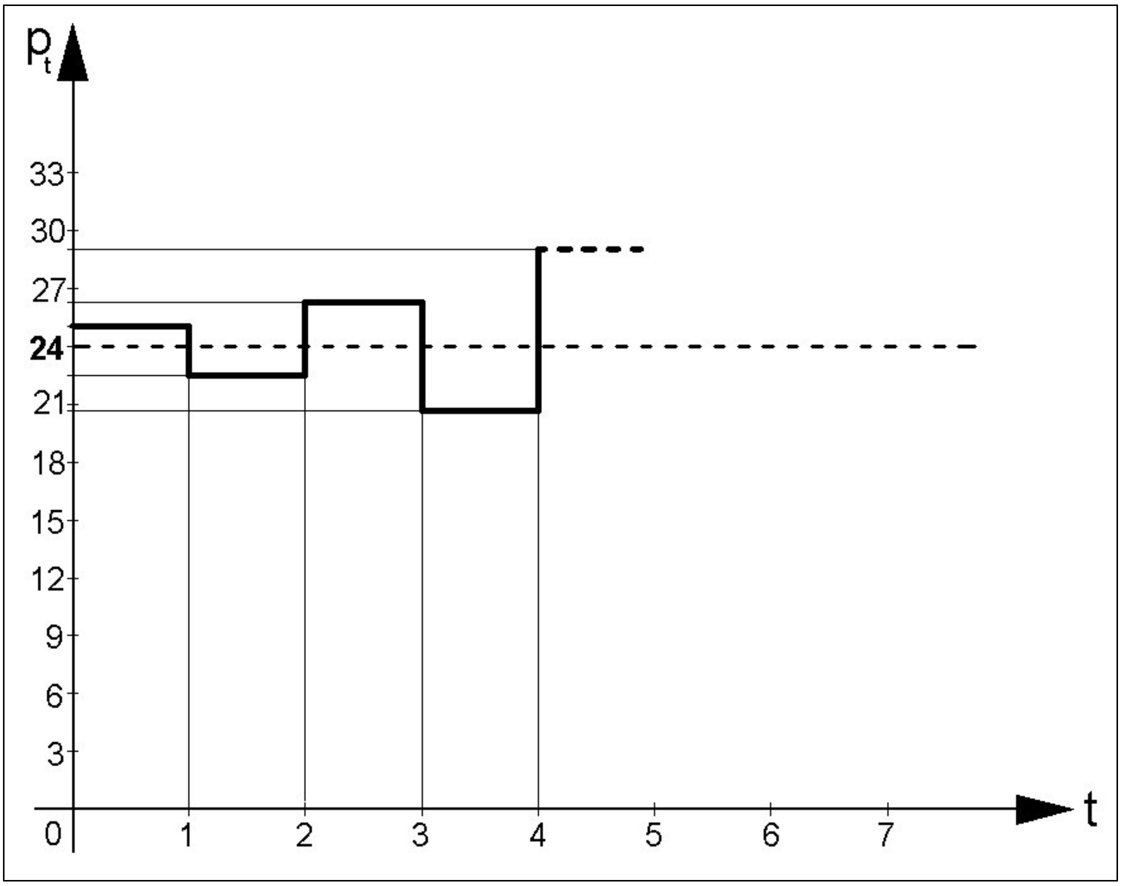


FIG. 8.15. Evolución temporal del precio (III).

Se tiene que: $|r| = 3/2 = 1’5 > 1$ y $r < 0$, con lo que las soluciones siempre divergen de forma oscilante mediante oscilaciones explosivas (salvo, evidentemente, la solución constantemente igual a 24 €). En particular, el punto de equilibrio no resulta estable y el modelo en cuestión solamente tiene sentido para un período de tiempo limitado, precisamente el período o lapso a partir del cual comienzan a aparecer precios negativos (o sea, hasta que se cumple t = 9, puesto que p_9 = -14’4434 €).

2.3. TEORÍA MACROECONÓMICA

Ejemplo 1

Se considera el siguiente modelo en una economía determinada:

$$\begin{cases} Y = G \\ G = C + I \\ C = c\cdot Y \\ I = v\cdot\Delta Y \\ s = 1 - c \end{cases}$$

donde: Y = Renta Nacional; G = Gasto total; C = Consumo; I = Inversión;
c = propensión marginal al consumo; s = propensión marginal al ahorro;
v = relación capital-producto = K/Y.

Existen rendimientos de escala constantes y no hay progreso técnico. Los valores de los parámetros v y c no varían. Se pide:

a) Calcular el tipo o ritmo de crecimiento cuando la economía en cuestión se mantiene en equilibrio de crecimiento, si v = 4 y el ahorro es igual al 20% de la renta total.

b) Se considera ahora un modelo análogo, en el que la inversión en el período t es igual a: $I_t = v\cdot\Delta Y = v(Y_{t+1} - Y_t)$.

c) El mismo modelo anterior, pero ahora la inversión viene dada de la siguiente manera: $I_t = v\cdot\Delta Y = v(Y_t - Y_{t-1})$.

Solución:

a) En equilibrio de crecimiento, todas las magnitudes económicas implicadas crecen al mismo ritmo g, esto es:

$\Delta Y/Y = g$; $Y = C + I = c\cdot Y + I = c\cdot Y + v\cdot\Delta Y$; de donde:

$\frac{\Delta Y\cdot v}{Y} = 1 - c$; $g = \boxed{\frac{1-c}{v} = \frac{s}{v} = \frac{0'2}{4} = 0'05}$, luego el ritmo de crecimiento es del 5%.

b) En este caso:

$Y_t = c\cdot Y_t + v(Y_{t+1} - Y_t) = c\cdot Y_t + v\cdot Y_{t+1} - v\cdot Y_t =$
$= Y_t(c - v) + v\cdot Y_{t+1}$; $v\cdot Y_{t+1} = Y_t - Y_t(c - v) = Y_t(1 - c + v)$; entonces:
$Y_{t+1} = Y_t(\frac{1}{v} - \frac{c}{v} + 1) = Y_t(1 + \frac{s}{v})$, y se tendrá la siguiente ecuación en diferencias finitas: $Y_{t+1} - (1 + \frac{s}{v})\cdot Y_t = 0$, cuya ecuación característica es:

$r - (1 + \frac{s}{v}) = 0$, y la solución general de la ecuación buscada es:

$$Y_t = c\cdot(1 + \frac{s}{v})^t$$

La renta inicial será: $Y_0 = c$, o sea: $Y_t = Y_0\cdot(1 + \frac{s}{v})^t$, que es la fórmula del interés compuesto, luego el ritmo de crecimiento es de:

$$g = \boxed{\frac{s}{v} = \frac{0'2}{4} = 0'05}\text{, o sea, del 5\%.}$$

c) En este caso:

$Y_t = c\cdot Y_t + v(Y_t – Y_{t-1}) = c\cdot Y_t + v\cdot Y_t – v\cdot Y_{t-1} =$
$= Y_t(c + v) - v\cdot Y_{t-1}$; $v\cdot Y_{t-1} = Y_t(c + v) - Y_t = Y_t(c + v - 1) = Y_t(v – s)$;
$Y_{t-1} = Y_t(1 - \frac{s}{v})$, y se tendrá la siguiente ecuación en diferencias finitas:
$(1 - \frac{s}{v})\cdot Y_t – Y_{t-1} = 0$, cuya ecuación característica es:
$(1 - \frac{s}{v})\cdot r - 1 = 0$, y la solución general de la ecuación buscada es:

$$Y_t = c\cdot\left(\frac{v}{v-s}\right)^t$$

La renta inicial será: $Y_0 = c$, o sea: $Y_t = Y_0\cdot(\frac{v}{v-s})^t = Y_0\cdot(1 + \frac{s}{v-s})^t$, que es la fórmula del interés compuesto, luego el ritmo de crecimiento es aquí de:

$$g = \boxed{\frac{s}{v-s} = \frac{0'2}{4-0'2} = 0'053}\text{, o sea, del 5'3\%,}$$

que resulta ligeramente superior que en los dos casos anteriores.

2.4. FINANZAS

Ejemplo 1

Suponga que alguien invierte 100 € el último día del mes a una tasa anual de 6%, compuesto mensualmente. Si invierte 50 € adicionales el último día de cada mes subsiguiente, ¿cuánto dinero tendría después de cinco años?.

Solución:

Modelaremos esta situación usando una ecuación en diferencias finitas.

Aquí y_n representa la cantidad total de dinero (€) al fin del mes *n*. Por lo tanto, y_0 = 100 €. Dado que el 6% de interés se compone mensualmente, la cantidad de dinero existente al final del primer mes es igual a la suma de y_0 y la cantidad generada durante el primer mes, que es de: 100(0'06/12) = 0'50 € (dividimos por 12 porque estamos componiendo mensualmente). De aquí se deduce que: y_1 = (100 + 0'50 + 50) €, pues agregamos 50 € al final de cada mes. Vemos que $y_1 = y_0 + 0'005y_0 + 50 = 1'005\cdot y_0 + 50$.

Trabajando sobre la ecuación anterior, vemos que: $y_2 = 1'005\cdot y_1 + 50$. Y así sucesivamente, por lo que, en general, nuestra ecuación en diferencias finitas se convierte en: $y_{n+1} - 1'005\cdot y_n = 50$, con la condición inicial $y_0 = 100$.

La ecuación característica de la homogénea es: r – 1'005 = 0, con lo que se deduce la raíz real: r = 1'005, y nos queda la solución: $y_n^* = k\cdot 1'005^n$.

Ahora tantearemos la solución particular de la completa del tipo: $y_p = C$. Substituyendo en la ecuación anterior resulta que:

$$C - 1'005\cdot C = 50 = C(1 - 1'005) = -0'005\cdot C \ ; \ \ C = -50/0'005 = -10.000,$$

o sea, se tendrá la solución general: $y_n = y_n^* + y_p = k\cdot 1'005^n - 10.000$.

Pero la condición inicial dada exige que: $y_0 = k - 10.000 = 100$, con lo que k = 10.100, y se tendrá la solución particular:

$$y_n = 10.100\cdot 1'005^n - 10.000,$$

ecuación que nos ofrece la cantidad de dinero acumulada al cabo de *n* meses.

Por último, al cabo de 5 años (5 × 12 = 60 meses), se tendrá que:

$$\boxed{y_{60} = 10.100\cdot 1'005^{60} - 10.000 = 3.623'39\ €.}$$

CAPÍTULO 9
COMPLEMENTOS

1. TEORÍA MATRICIAL ELEMENTAL

1.1. CONCEPTOS GENERALES SOBRE MATRICES

El concepto de “matriz” se fraguó a lo largo de los siglos XVIII y XIX con el objetivo de sistematizar los métodos de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales con numerosas incógnitas. En la actualidad, la teoría de matrices se ha convertido en una poderosa herramienta al servicio de muchas disciplinas científicas, desde la física y las ciencias naturales hasta la economía, como podemos comprobar por lo que se refiere a su utilidad en la resolución de los problemas de ecuaciones diferenciales y recurrentes, así como en sus sistemas.

Las matrices surgen del estudio de la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. Sea el sistema de ecuaciones lineales genérico siguiente, de *m* ecuaciones con *n* incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

Los coeficientes de las incógnitas de este sistema se pueden escribir, por convenio, de esta forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \;\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \;\dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \;\dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se trata, pues, de un conjunto de N números dispuestos en m filas y n columnas, tal que $m \times n = N$.

Una matriz se suele representar por una letra mayúscula y los elementos de dicha matriz se representan por la correspondiente letra minúscula con dos subíndices que indican la fila y columna que denotan la posición del elemento. Por ejemplo la matriz A y el elemento a_{12} (elemento de la fila 1, columna 2).

En esencia, una *matriz* se define como un conjunto de números o expresiones numéricas que se ordenan como una tabla de líneas denominadas *filas* y *columnas*. Cada una de las intersecciones de filas o columnas se denomina *elemento* de la matriz, y contiene un número o una expresión funcional.

En sentido genérico, los elementos de la matriz se simbolizan por a_{ij}, siendo *i* el número de fila y *j* el número de columna que ocupan. Las matrices también se representan por la notación A = (a_{ij}), con i = 1, 2, 3, ..., m, y j = 1, 2, 3, ..., n.

Una matriz formada por m filas y n columnas se dice que tiene *orden* o *dimensión* (m x n). Dos matrices del mismo orden se consideran iguales cuando son iguales, dos a dos, los elementos que ocupan el mismo lugar.

Así pues, se denomina *matriz* a todo conjunto de números o expresiones dispuestos en forma rectangular, formando filas y columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Así pues, cada uno de los números de que consta la matriz se denomina *elemento*. Un elemento se distingue de otro por la posición que ocupa, es decir, por la fila y la columna a las que pertenece.

1.2. CLASES DE MATRICES

En términos generales, una matriz tiene m filas y n columnas, siendo m x n. En tal caso, la matriz se llama *rectangular*. Ahora bien, cuando el número de filas y el de columnas coinciden, la matriz es *cuadrada*, con dimensión n x n; en este caso, los elementos de la matriz de subíndices a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn} ocupan la llamada *diagonal principal* de la matriz y sus elementos se denominan *principales*. Esta diagonal adquiere importancia en la resolución de los *determinantes* que contemplaremos con posterioridad. Los elementos que conforman la diagonal perpendicular a la anterior son los *secundarios* y forman la *diagonal secundaria*. Los elementos a_{ij} y a_{ji} son "conjugados o simétricos" respecto de la diagonal principal.

La *matriz rectangular* tiene, pues, distinto número de filas que de columnas, siendo su *dimensión m x n*. Ejemplo (2 x 3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La *matriz cuadrada* tiene el mismo número de filas que de columnas. Los elementos de la forma $\mathbf{a_{ii}}$ constituyen la *diagonal principal* (la que va desde el ángulo superior izquierdo al ángulo inferior derecho). La *diagonal secundaria* (la que va del ángulo superior derecho al ángulo inferior izquierdo) la forman los elementos con i + j = n + 1. Puede verse, al respecto, el siguiente ejemplo en una matriz de dimensiones (3 x 3), o sea, de tercer orden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada se denomina *triangular* cuando todos los elementos situados por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos.

Una matriz se denomina *diagonal* cuando todos los elementos, excepto los de la diagonal principal, son cero. Así tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \text{(Matriz diagonal)}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \text{(Matriz triangular)}$$

Otro concepto importante en la teoría de matrices es el de matriz *traspuesta* o bien *transpuesta*. Dada una matriz **A** de orden m x n, su traspuesta, denotada por $\mathbf{A^t}$, es otra matriz de dimensiones n x m, donde se han intercambiado las filas de la primera matriz por columnas y las columnas por filas. Así pues, dada una matriz cualquiera **A**, se llama *matriz traspuesta* de **A** a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas, como por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

, con las siguientes propiedades de la transposición de matrices:

$$\begin{cases} (A^t)^t = A \\ (A + B)^t = A^t + B^t \\ (\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t \\ (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \end{cases}$$

En la teoría de homomorfismos, es de notar que si **A** describe una aplicación lineal respecto a dos bases, entonces la matriz $\mathbf{A}^t$ describe la transpuesta de una aplicación lineal respecto a las bases del espacio dual.

Otros conceptos relevantes en la teoría de matrices son los siguientes:

a) Matriz fila

Una *matriz fila* está constituida por una sola fila. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Matriz columna

La *matriz columna* tiene una sola columna. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Las matrices fila y columna se denominan habitualmente *vectores fila o columna*, respectivamente.

c) Matriz nula

En una *matriz nula* **0** todos los elementos son ceros. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Matriz triangular superior

En una *matriz triangular superior* los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e) Matriz triangular inferior

En una *matriz triangular inferior* los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

f) Matriz escalar

Una *matriz escalar* es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son todos iguales. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

g) Matriz identidad o unidad

Una *matriz identidad* **I** es una matriz diagonal y escalar en la que los elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

h) Matriz regular

Una *matriz regular* es una matriz cuadrada que tiene inversa, puesto que su determinante es diferente de 0.

i) Matriz singular o no regular

Una *matriz singular* no tiene matriz inversa. Constituye el caso contrario de la anterior, con su determinante nulo.

j) Matriz idempotente

Una matriz, A, es *idempotente* si es simétrica y cumple que su cuadrado es la propia matriz, con lo que:

$$\left.\begin{array}{l} A^t = A \\ A^2 = A \end{array}\right\} A^t = A^2$$

k) Matriz involutiva

Una matriz, A, es involutiva si: $A^2 = I$.

l) Matriz simétrica

Una matriz *simétrica* es una matriz cuadrada que, al ser igual a su traspuesta, verifica: $A = A^t$.

m) Matriz antisimétrica, hemisimétrica o alternada

Una matriz *antisimétrica, hemisimétrica o alternada* es una matriz cuadrada que verifica: $A = -A^t$.

n) Matriz ortogonal

Una matriz es ortogonal si verifica que: $A \cdot A^t = I$.

o) Matriz adjunta

Es la matriz que se obtiene al substituir cada elemento por su adjunto correspondiente. O sea:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

p) Matriz nilpotente

Es la matriz de orden n tal que: $A^n = 0$.

q) Matriz de permutación

Es aquella que en cada fila y columna tiene un elemento igual a 1, y los demás son iguales a 0. Un ejemplo sería la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3. DIMENSIÓN DE UNA MATRIZ

El número de filas y columnas de una matriz se denomina *dimensión* de una matriz. Así, una matriz será de dimensión: 2x4, 3x2, 2x5,... Si la matriz tiene el mismo número de filas que de columnas (matriz cuadrada), se dice que es de orden: 2, 3, ... n.

El conjunto de matrices de m filas y n columnas se denota por $\mathbf{A_{mxn}}$ o bien $\mathbf{(a_{ij})}$, y un elemento cualquiera de la misma, que se encuentra en la fila i y en la columna j, se representa por $\mathbf{a_{ij}}$.

1.4. MATRICES IGUALES

Dos matrices son *iguales* cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas (homólogos), son iguales.

1.5. OPERACIONES CON MATRICES

1.5.1. Suma algebraica de matrices

Dadas dos matrices de la misma dimensión o equidimensionales,
$\mathbf{A = (a_{ij})}$ y $\mathbf{B = (b_{ij})}$, se define la matriz suma como: $\mathbf{A + B = (a_{ij} + b_{ij})}$.

La matriz suma se obtiene, pues, sumando algebraicamente los elementos de las dos (o más) matrices que ocupan la misma posición (elementos homólogos). Así, por ejemplo, se desea obtener la suma y la diferencia de las matrices A y B:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2+1 & 0+0 & 1+1\\ 3+1 & 0+2 & 0+1\\ 5+1 & 1+1 & 1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 1\\ 6 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2-1 & 0-0 & 1-1\\ 3-1 & 0-2 & 0-1\\ 5-1 & 1-1 & 1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & -1\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Otro ejemplo podría ser el siguiente:

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 3\\ 2 & -2 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

1.5.2. Propiedades de la suma de matrices

a) Ley de composición interna, propiedad uniforme o conjunto cerrado:
La suma de dos matrices de orden m x n es otra matriz dimensión m x n.

b) Asociativa:
A + (B + C) = (A + B) + C

c) Elemento neutro:
A + 0 = A
Donde **0** es la matriz nula de la misma dimensión que la matriz A.

d) Elemento opuesto o simétrico:
A + (−A) = 0
La matriz opuesta es aquella en que todos los elementos están cambiados de signo. Sumada algebraicamente a la matriz inicial nos ofrece el elemento neutro.

e) Conmutativa:
A + B = B + A

Este conjunto de propiedades hacen que, respecto de la operación adición, el conjunto de las matrices equidimensionales constituye un GRUPO CONMUTATIVO O ABELIANO.

Todo ello puede resumirse en el siguiente cuadro:

PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES	
Propiedad	Expresión y significado.
Conmutativa	A + B = B + A.
Asociativa	A + (B + C) = (A + B) + C.
Elemento neutro	A + 0 = 0 + A = A, siendo 0 la matriz nula, aquella que, con el mismo orden que A, tiene todos sus elementos iguales a cero.
Elemento opuesto o simétrico	A + (-A) = (-A) + A = 0, donde la matriz (-A) se llama opuesta de la matriz A, y 0 corresponde a la matriz nula para la dimensión de A.

1.5.3. Producto de un escalar por una matriz

Dada una matriz **A = (a_{ij})** y un número real **k ∈ R**, se define el producto de un número real por una matriz: a la matriz del mismo orden que A, en la que cada elemento está multiplicado por k. Así: $k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$, o sea:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Con las siguientes propiedades:

-Asociativa:
$a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A, \forall A \in M_{mxn}$, y: $a, b \in \mathbb{R}^2$

-Distributiva respecto a la adición de matrices:
$a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B, \forall A,B \in M_{mxn}$, y: $a \in \mathbb{R}$

-Distributiva respecto a la adición de parámetros:
$(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A, \forall A \in M_{mxn}$, y: $a, b \in \mathbb{R}^2$

-Elemento neutro:
$1 \cdot A = A \cdot 1 = A, \forall A \in M_{mxn}$

-Compatibilidad:
Si $A = B \Rightarrow a \cdot A = a \cdot B$

Luego el sistema lineal $\{M_{mxn}\}$ tiene estructura de espacio vectorial[1].

[1] Un *espacio vectorial* (o *espacio lineal*) es el objeto básico de estudio en la rama de la matemática llamada "álgebra lineal". A los elementos de los espacios vectoriales se les llama "vectores". Sobre los vectores pueden realizarse dos operaciones: la multiplicación por escalares (ley de composición externa) y la adición (operación interna: una asociación entre un par de objetos). Estas dos operaciones se tienen que ceñir a un conjunto de axiomas que generalizan las propiedades comunes de las tuplas de números reales así como de los vectores en el espacio euclídeo. Un concepto importante es el de *dimensión del E.V.* Históricamente, las primeras ideas que condujeron a los espacios vectoriales modernos se remontan al siglo XVII: geometría analítica, matrices y sistemas de ecuaciones lineales. La primera formulación moderna y axiomática se debe a Giuseppe Peano, a finales del siglo XIX. Los siguientes avances en la

1.5.4. Producto de matrices

Dos matrices A y B son “multiplicables” o “conformes” si el número de columnas de A (mxn) coincide con el número de filas de B (nxp). El resultado es otra matriz producto C (mxp) que tiene el mismo número de filas que la matriz multiplicando y el mismo número de columnas de la matriz multiplicador. Así:

$$\mathbf{A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}}$$

El elemento $\mathbf{c_{ij}}$ de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de la matriz A por cada elemento de la columna j de la matriz B y sumándolos, siguiendo la denominada REGLA DE BINET-CAUCHY.

En definitiva, la matriz resultante C = (c_{ij}) se calcula de forma que cada uno de sus términos c_{ij} es igual a la suma ordenada de los productos de los elementos de la fila i de A por los de la columna j de B: primer elemento de la fila i de A por primer elemento de la columna j de B; más el segundo de la fila i por el segundo de la columna j, y así sucesivamente.

Ejemplo:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot1 & 3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot0 \\ 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 5\cdot0+1\cdot2+0\cdot1 & 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Con las siguientes propiedades:

-Ley de composición interna, propiedad uniforme o conjunto cerrado:
el producto de matrices es otra matriz.
-Asociativa:
$\mathbf{A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C}$
-Elemento neutro:
$\mathbf{I_n \cdot A = A \cdot I_m = A}$
, donde $\mathbf{I_n}$ **e** $\mathbf{I_m}$ son las matrices identidad o unidad cuadradas con su orden respectivo.
-No es Conmutativa necesariamente:
$\mathbf{A \cdot B \neq B \cdot A}$, por lo que hay que distinguir entre la “premultiplicación” (producto por la izquierda) y la “postmultiplicación” (producto por la derecha).

teoría de espacios vectoriales provienen del análisis funcional, principalmente de los espacios de funciones.

-Distributiva del producto respecto de la suma, por la derecha y por la izquierda:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C} \\ \mathbf{(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C}\end{array}\right\}$$

De todo ello se deduce que el conjunto de las matrices cuadradas tiene estructura de ANILLO UNITARIO NO CONMUTATIVO con respecto a las dos operaciones internas "+" y "·".

-Otra propiedad, que resulta como consecuencia inmediata de las anteriores, es que:

$$\mathbf{0 \cdot A = A \cdot 0 = 0}$$

1.5.5. Potencia de una matriz

Como ampliación del concepto de producto, puede definirse la *potencia enésima de una matriz* como el producto de ésta por sí misma *n* veces. Para que una matriz pueda multiplicarse por sí misma tiene que ser cuadrada. Es decir:

$$A^n = A \cdot A \cdot A \cdot \overset{n)}{\ldots\ldots} \cdot A.$$

1.6. DETERMINANTES

1.6.1. Definición

A toda matriz cuadrada le corresponde, mediante una aplicación inyectiva (a dos elementos distintos del primer conjunto corresponden dos elementos distintos del segundo conjunto) un número real; a esta aplicación la denominamos "determinante"

El determinante de la matriz cuadrada de segundo orden A se designa por |A|, o sea:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

El valor del determinante de esta matriz, que tiene dos términos (uno positivo y otro negativo) es: $a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$, por aplicación de la denominada *Regla de Sarrus*. Así mismo, en el caso de una matriz cuadrada de tercer orden:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

En este caso, el valor del determinante de esta matriz, que tiene seis términos en su desarrollo (tres positivos y tres negativos) es: $a_{11} \times a_{22} \times a_{33} + a_{21} \times a_{32} \times a_{13} + a_{31} \times a_{12} \times a_{23} - a_{13} \times a_{22} \times a_{31} - a_{23} \times a_{32} \times a_{11} - a_{33} \times a_{21} \times a_{12}$, por aplicación de la Regla mencionada. En general, el determinante de una matriz cuadrada de orden *n* tiene precisamente *n!* términos en su desarrollo, la mitad positivos y la otra mitad negativos[2].

1.6.2. Propiedades

1) Los determinantes de una matriz y de su transpuesta son iguales, esto es:

$$|A| = |A^t|.$$

O sea, que todo determinante es igual a su traspuesto. Ello es así porque al aplicar la regla de Sarrus obtenemos el mismo desarrollo.

2) Si en una matriz se intercambian de posición dos filas o dos columnas (dos líneas paralelas), el valor del determinante cambia de signo, pero no de valor absoluto. En efecto, puesto que al aplicar la regla de Sarrus veamos que a cada término positivo del primer determinante le corresponde uno negativo en el segundo determinante.

3) Si se multiplican todos los elementos de una fila (o de una columna) por un número, el determinante queda multiplicado por ese número, puesto que cada término del desarrollo del determinante queda multiplicado por dicho número, al que podemos sacar en factor común.

4) Si dos filas (o dos columnas) de una matriz son iguales, el determinante es cero. En efecto, puesto que si el determinante vale Δ al cambiar entre sí las dos líneas paralelas iguales se obtendrá $-\Delta$, pero como son iguales, resulta que:

$$\Delta = -\Delta \ ; \ 2\Delta = 0 \ \Rightarrow \Delta = 0, \text{ c.s.q.d.}$$

5) Si dos filas (o dos columnas) de una matriz son proporcionales (múltiplos o divisores), el determinante es cero. Ello se deduce de las propiedades anteriores

6) Si descomponemos en dos sumandos cada número de una fila (o de una columna) de una matriz, la suma de los determinantes de las dos matrices obtenidas con la descomposición en sumandos, es igual al determinante de la matriz original.

7) Si una fila (o columna) es combinación lineal de las otras filas (o columnas) de una matriz, el determinante es cero.

[2] Por medio de la combinatoria, las factoriales intervienen en el cálculo de las probabilidades. Intervienen también en el ámbito del análisis matemático, en particular a través del desarrollo polinomial en serie de las funciones (fórmulas de Taylor y de MacLaurin). Se generalizan a los números reales y hasta a los complejos con la función gamma, de gran importancia en el campo de la aritmética. Existe un equivalente, cuando *n* tiende al infinito, del factorial *n*, dado por la fórmula de Stirling, de gran aplicación en el cálculo de límites de sucesiones, cuya ventaja reside en que no precisa inducción y por lo tanto permite evaluar *n*! tanto más rápidamente cuanto mayor sea *n*.

8) Si cambiamos una fila (o una columna) por la obtenida por la suma de esa fila más el producto de otra fila (o columna) por una constante, el valor del determinante no varía.

9) Se pueden hacer transformaciones, siguiendo las reglas anteriores, en una matriz, de tal forma que, todos los elementos de una fila (o columna) sean ceros y el determinante no varíe (lo que se denomina regla de "condensación").

1.6.3. Menor complementario

Menor complementario del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz formada al suprimir la fila y la columna en la que se halla el elemento a_{ij}.

El menor complementario de a_{ij} se representa como m_{ij}.

1.6.4. Adjunto o cofactor de un elemento

Es el determinante de la matriz formada aplicando esta fórmula: $(-1)^{i+j}m_{ij}$.

Se llama *adjunto o cofactor* del elemento a_{ij} al menor complementario anteponiendo el signo correspondiente, según que:

$$\begin{cases} \text{El signo es + si } (i+j) \text{ es par.} \\ \text{El signo es - si } (i+j) \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ejemplo de aplicación: El determinante adjunto del elemento a_{21} será el siguiente cambiado de signo, puesto que la suma de sus subíndices es impar: 2 + 1 = 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \boxed{2} & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

cuyo valor es: -(4 – 6) = 2, por aplicación simple de la regla de Sarrus anteriormente expresada.

Una propiedad interesante para el desarrollo de un determinante es que el "valor de un determinante es igual a la suma de productos de los elementos de una línea (fila o columna) por sus adjuntos correspondientes". Esto es:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \ldots + a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots \end{vmatrix}$$

Así, por ejemplo, desarrollando el determinante por los elementos de su primera fila, obtendremos que:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}' - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

como puede verse en el siguiente ejemplo sencillo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(8+5) - 2(0-10) + 1(0+4) = 39 + 20 + 4 = 63$$

1.7. MATRIZ INVERSA

La matriz inversa de **A** se designa por $\mathbf{A^{-1}}$, y su empleo reviste utilidad en la resolución de ciertos problemas de sistemas de ecuaciones diferenciales o recurrentes que tratamos en la presente monografía, razón por la cual efectuaremos aquí una sucinta conceptualización de la misma.

Para calcular la inversa de una matriz, primero se calcula su determinante, siguiendo el procedimiento que detallaremos en primer lugar. Si el determinante es cero la matriz no tiene inversa o no es invertible, por lo tanto, debe tratarse de una matriz regular (no singular). A continuación, se calculan los adjuntos de cada elemento de la matriz. Después se divide cada adjunto por el determinante de la matriz. Por último, se forma la matriz inversa poniendo los valores obtenidos correspondientes a la posición ij en la posición ji.

El producto de una matriz por su inversa es igual a la *matriz identidad*. Esto es:

$$\mathbf{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$$

Con las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} \mathbf{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}} \\ \mathbf{(A^{-1})^{-1} = A} \\ \mathbf{(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}} \\ \mathbf{(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}} \end{cases}$$

Se puede calcular la matriz inversa por dos métodos diferentes, a saber:

1º. Cálculo de la matriz inversa por determinantes

Se tienen, al respecto, las siguientes definiciones:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^{*}\right)^{t}$$

A^{-1}	Matriz inversa
$\lvert A\rvert$	Determinante de la matriz
A^{*}	Matriz adjunta
$\left(A^{*}\right)^{t}$	Matriz traspuesta de la adjunta

Ejemplo 1. Se trata de hallar la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

, para lo cual se llevan a cabo los siguientes pasos:

1. Calculamos el determinante de la matriz; en el caso que el determinante sea nulo la matriz no tendrá inversa (no será "invertible").

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

2. Hallamos la matriz adjunta, que es aquella en la que cada elemento se sustituye por su determinante adjunto o cofactor. Así:

$$A^{*} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calculamos la transpuesta de la matriz adjunta.

$$\left(A^{*}\right)^{t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. La matriz inversa es igual al inverso del valor de su determinante multiplicado por la matriz transpuesta de la adjunta.

En efecto, se cumple que:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2. Vamos ahora, como ejemplo de este procedimiento, a calcular la inversa de la siguiente matriz A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

El valor del determinante, como puede comprobarse, es: |A| = 5 y la matriz inversa buscada A^{-1} será:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3. Como hemos visto en las propiedades anteriormente enunciadas, la inversa del producto de dos matrices es el producto de las matrices inversas cambiando el orden. Así:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Procedamos, en base a la aplicación de esta propiedad, al cálculo de la inversa de la siguiente matriz A:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa de la matriz anterior, primero calculamos el valor del determinante |A|:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 2 - 3 + 1 - 6 - 10 = -6 \neq 0$$

Al ser dicho determinante diferente de cero (se trata de una matriz regular, no singular), la matriz resulta invertible.

Después calculamos separadamente cada uno de los determinantes adjuntos o cofactores, esto es:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5-3 = 2 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(-5+1) = 4 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3+1 = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(-10-3) = 13 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 10+1 = 11 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2-1 = -3 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2+1) = -3 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-2 = 0$$

Y por tanto :

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ 4 & 11 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación :

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ 4 & 11 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= I_3$,   c.s.q.d.

2º. Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

La eliminación gaussiana, eliminación de Gauss[3] o eliminación de Gauss-Jordan, llamadas así debido a los matemáticos a Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan[4], son algoritmos del álgebra lineal concebidos para determinar

3 No es exagerado este título póstumo, *Príncipe de los Matemáticos*, acuñado en una moneda, con que el rey Jorge V de Hannover honró a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) tras su muerte en Gotinga. Según E.T. Bell, y es una opinión compartida por la mayoría de los historiadores de la ciencia, Gauss junto a Arquímedes y Newton ocuparía el podium de los grandes genios de las matemáticas a lo largo de la Historia de la humanidad. No se puede entender el avance y la revolución de las matemáticas del siglo XIX sin la mítica figura de Gauss. Su figura ilumina de forma completa y estelar la primera mitad del siglo. Sus aportaciones se producen en todos los campos de las matemáticas, tanto puras – Teoría de Números, Análisis, Geometría – como aplicadas – Astronomía, Geodesia, Teoría de errores – y en Física –Magnetismo, Óptica, Teoría del potencial... Este gran matemático alemán llevó las Matemáticas del siglo XIX a cumbres insospechadas unas décadas antes y elevó la Aritmética Superior a la cima de las Matemáticas, pues citando sus propias palabras ***"las matemáticas son la reina de las ciencias y la aritmética la reina de las matemáticas****"*. Gauss fue un niño prodigio, de quien existen muchas anécdotas acerca de su asombrosa precocidad. Hizo sus primeros grandes descubrimientos mientras era apenas un adolescente y completó su magnum opus, *Disquisitiones Arithmeticae* a los veintiún años (1798), aunque no sería publicado hasta 1801. Fue un trabajo fundamental para que se consolidara la teoría de los números y ha moldeado esta área hasta los días presentes.

4 **Wilhelm Jordan** (1842–1899) fue un geodesta alemán que hizo trabajos de topografía en Alemania y África. Es recordado entre los matemáticos por su algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan, que aplicó para resolver el problema de los mínimos cuadrados. Esta técnica algebraica apareció en su *Handbuch der Vermessungskunde* (1873). Wilhelm Jordan, en su trabajo sobre topografía, usó el método de mínimos cuadrados de forma habitual. Como en astronomía, cuando se realizan observaciones geodésicas, existe una redundancia en medidas de ángulos y longitudes. No obstante, existen relaciones que conectan las

las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales y encontrar matrices inversas.

Un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Gauss cuando se obtienen sus soluciones mediante la reducción del sistema dado a otro equivalente en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior. Cuando se aplica este proceso, la matriz resultante se conoce como "forma escalonada". El método fue presentado por el matemático Luis Berrocal, pero se conocía anteriormente en un importante libro matemático chino llamado *Jiuzhang suanshu* o *Nueve capítulos del arte matemático*.

A mediados de la década de 1950, la mayoría de las referencias al método de Gauss-Jordan se encontraba en libros y artículos de métodos numéricos aunque en las décadas más recientes ya aparece en los libros elementales de álgebra lineal. Sin embargo, en muchos de ellos, cuando se menciona el método, no se referencia al inventor del mismo.

Sea **A** una matriz cuadrada de orden n. Para calcular la matriz inversa de **A**, que denotaremos, como se sabe, por $\mathbf{A}^{-1}$, seguiremos los siguientes pasos:

1. Construir una matriz del tipo **M = (A | I)**, es decir, **A** está en la mitad izquierda de **M** y la matriz identidad **I** en la derecha.

Consideremos ahora una matriz 3x3 arbitraria cualquiera, a saber:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

medidas, y se pueden escribir como un sistema lineal sobre-determinado (con más ecuaciones que incógnitas), al cual se le aplica el método. El propio Jordan participó en trabajos de geodesia a gran escala en Alemania como en la primera topografía del desierto de Libia. En 1873 fundó la revista alemana *Journal of Geodesy* y ese mismo año publicó la primera edición de su famoso *Handbuch*. Como los métodos de mínimos cuadrados eran tan importantes en topografía, Jordan dedicó la primera sección de su *Handbuch* a este asunto. Como parte de la discusión, dio una detallada presentación del método de eliminación de Gauss para convertir el sistema dado en triangular. Entonces mostró cómo la técnica de substitución hacia atrás permitía encontrar la solución cuando se conocían los coeficientes. Sin embargo, anota que *si se realiza esta substitución no numéricamente, sino algebraicamente*, se pueden obtener las soluciones de las incógnitas con fórmulas que involucran a los coeficientes del sistema. En la primera y segunda edición (1879) de su libro, simplemente dio estas fórmulas, pero en la cuarta edición (1895), ofreció un algoritmo explícito para resolver un sistema de ecuaciones con matriz de coeficientes simétrica, que son las que aparecen en los problemas de mínimos cuadrados. Este algoritmo constituye, en efecto, el método de Gauss-Jordan. Aunque Jordan no usó matrices como lo hacemos actualmente, realizaba el trabajo sobre tablas de coeficientes y explicaba cómo pasar de una fila a la siguiente, como muchos textos hacen hoy en día. La mayor diferencia entre su método y el actual es que Jordan no hacía el pivote de cada fila igual a 1 durante el proceso de solución. En el paso final, simplemente expresaba cada incógnita como un cociente con el pivote como denominador. El *Handbuch* se convirtió en un trabajo estándar en el campo de la geodesia, llegando hasta producir diez ediciones en alemán y traducciones a otras lenguas. Incluso la octava edición de 1935 contenía la primera sección con la descripción del método de Gauss-Jordan. En la edición más reciente, publicada en 1961, ya no aparece. Por supuesto, en esa edición gran parte de lo que Jordan había escrito originalmente había sido modificado más allá de lo reconocible por los editores.

La ampliamos u orlamos con la matriz identidad de orden 3 (I_3), con lo que resultará:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. Utilizando el método de Gauss-Jordan vamos a transformar la mitad izquierda, A, en la matriz identidad, que ahora está a la derecha, y la matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa buscada: A^{-1}**.** Para ello realizaremos diferentes operaciones con las filas que se trasladarán automáticamente a la parte derecha, esto es:

$F_2 - F_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_3 + F_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$F_2 - F_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$F_1 + F_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(-1) F_2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz inversa buscada es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo que queda eficazmente resuelto el problema planteado.

3º. Aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

La teoría general de matrices encuentra, sin duda, una de sus aplicaciones más inmediatas en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con múltiples incógnitas. Aunque después fue objeto de un extenso desarrollo teórico, este campo de las matemáticas surgió en realidad como un instrumento de cálculo para facilitar las operaciones algebraicas complejas.

Un procedimiento rápido para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el empleo de matrices es el llamado *método de la matriz inversa*. Esta técnica consiste en multiplicar por la izquierda los dos miembros de la expresión matricial del sistema de ecuaciones por la matriz inversa de la de los coeficientes (si existe). De este modo, se tiene que: $X = A^{-1} \cdot B$. Cuando la matriz de los coeficientes no es invertible, el sistema no tiene solución (resulta incompatible). En cualquier caso, un procedimiento alternativo también muy utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices es el llamado *método de eliminación gaussiana* que consta de los siguientes pasos:

- Se forma la matriz ampliada del sistema incorporando a la de los coeficientes, por la derecha, una nueva columna con los elementos de la matriz de los términos independientes.
- Se aplican operaciones elementales sobre las filas de esta matriz ampliada, hasta lograr que por debajo de la diagonal principal de la matriz todos los términos sean nulos.
- Se obtiene entonces un sistema equivalente de ecuaciones de resolución inmediata.

Este método, a su vez, permite también realizar una rápida discusión del sistema, a saber:

- Si la última fila de la matriz resultante de la transformación de la ampliada produce una ecuación del tipo 0x + 0y + 0z = k, con k ¹ 0, el sistema es *compatible determinado* (tiene una solución única).
- Cuando esta última fila corresponde a una ecuación del tipo 0x + 0y + 0z = k, el sistema es *incompatible* (carece de solución).
- Si esta última fila se traduce en una ecuación del tipo 0x + 0y + 0z = 0, el sistema será *compatible indeterminado* (con infinitas soluciones).

Se puede aplicar además el método de la matriz inversa para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles que tengan más ecuaciones que incógnitas. Para ello, basta con obtener un sistema equivalente al inicial eliminando las ecuaciones superfluas o dependientes (proporcionales, nulas o que sean combinación lineal de otras). También se puede aplicar el método de la matriz inversa para resolver sistemas de ecuaciones lineales que sean compatibles indeterminados.

El procedimiento a seguir es el siguiente: supongamos que tenemos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, siendo m > n, tal que: rango (A) = rango (A*) = k < n. Por lo tanto, sobran (m – k) ecuaciones y, además, hay (n – k) incógnitas no principales. Para averiguar cuáles son las ecuaciones de las que podemos prescindir, y cuáles son las incógnitas no principales, basta con encontrar en la matriz de los coeficientes (A) un menor de orden k distinto de cero, por ejemplo, el que utilizamos para averiguar el rango de la matriz (A). Las filas que intervienen en este menor son las que corresponden a las ecuaciones principales o independientes. Las restantes ecuaciones las podemos suprimir. Las columnas que figuran en dicho menor corresponden a las incógnitas principales. Las incógnitas no principales las pasamos al otro miembro y pasan a formar un único término junto con el término independiente.

Se obtiene, de este modo, un sistema de k ecuaciones lineales con k incógnitas, cuyas soluciones van a depender de (n – k) parámetros (correspondientes a las incógnitas no principales). Veamos, al respecto, de lo hasta aquí expuesto, el siguiente ejemplo representativo:

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{cases} 2x - 2x + z = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ -x + 3y + 5z = -4 \end{cases}$$

La inversa de la matriz de coeficientes la hemos calculado antes. Pongamos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Y multiplicamos ambos lados de la igualdad por la matriz inversa de la matriz de coeficientes, tenemos:

$$-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ 4 & 11 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ 4 & 11 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Operando, queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ 4 & 11 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Y operando de nuevo, queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad ; \quad y = 1 \quad ; \quad z = -1$$

4º. Aplicación a la resolución de las ecuaciones matriciales

Sea la ecuación matricial :

$$2A = AX + B$$

siendo :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

despejamos y queda :

$$AX = 2A - B$$

$$2A - B = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -2 \\ -2+3 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calculamos la inversa de A y la multiplicamos, por la izquierda (recuerda que el producto de matrices no es conmutativo), a ambos lado de la igualdad, obtenemos la matriz X.

Inversa de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{11} = 1 \quad A_{12} = -(-1) = 1 \quad A_{21} = 0 \quad A_{22} = 1 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}(B - 2A) \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1.8. RANGO O CARACTERÍSTICA DE UNA MATRIZ

Menor de una matriz: dada una matriz cualquiera, se pueden obtener, suprimiendo algunas filas y columnas, otras matrices que se llaman *submatrices*. Si la submatriz es cuadrada y tiene k filas (también tendrá k columnas), a su determinante se le llama *menor de orden k* de la matriz dada. Si el menor de orden k es distinto de cero, y todos los menores de orden k + 1 son cero, o no existen, a ese menor se le llama *menor principal de orden k*.

Rango o característica de una matriz: es el número de líneas de esa matriz (filas o columnas) que son linealmente independientes. También puede definirse como el orden del mayor determinante menor complementario no nulo, o sea, que el rango es el orden de la mayor submatriz cuadrada no nula. Utilizando esta última definición se puede calcular el rango usando determinantes.

Una línea es *linealmente dependiente* de otra u otras cuando se puede establecer una combinación lineal entre ellas.

Una línea es *linealmente independiente* de otra u otras cuando no se puede establecer una combinación lineal entre ellas.

El rango de una matriz A se simboliza así: **rang(A)** o **r(A)**. Se puede calcular el rango de una matriz por dos métodos diferentes, a saber:

1º. Cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss

Podemos descartar una línea si:

-Todos sus coeficientes son ceros.
-Hay dos líneas iguales.
-Una línea es proporcional a otra.
-Una línea es combinación lineal de otras.

Veamos ahora el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{cases} F_3 = 2F_1 \\ F_4 \text{ es nula} \\ F_5 = 2F_2 + F_1 \\ r(A) = 2. \end{cases}$$

En general, este procedimiento consiste en hacer nulas el máximo número de líneas posible, y el rango será el número de filas no nulas.

Sea, por ejemplo, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Hacemos:

$$\begin{cases} F_2 = F_2 - 3F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1 \end{cases}$$

Con lo que resultará la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se tiene que: r(A) = 3.

2º. Cálculo del rango de una matriz por determinantes

El rango buscado es el orden de la mayor submatriz cuadrada no nula**.**

Sea, por ejemplo, la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Podemos descartar una línea si:

-Todos sus coeficientes son ceros.
-Hay dos líneas iguales.
-Una línea es proporcional a otra.
-Una línea es combinación lineal de otras.

Suprimimos la tercera columna porque es combinación lineal de las dos primeras: $\mathbf{c_3 = c_1 + c_2}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 17 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Comprobamos si tiene rango 1, para ello se tiene que cumplir que al menos un elemento de la matriz no sea cero y por tanto su determinante no será nulo.

$$|2|=2\neq 0$$

3. Tendrá rango 2 si existe alguna submatriz cuadrada de orden 2, tal que su determinante no sea nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{1 \neq 0}$$

4. Tendrá rango 3 si existe alguna submatriz cuadrada de orden 3, tal que su determinante no sea nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 17 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Como todos los determinantes de las submatrices son nulos no tiene rango 3, por tanto r(B) = 2.

5. Si tuviera rango 3 y existiera alguna submatriz de orden 4, cuyo determinante no sea nulo, tendría rango 4. De este mismo modo se trabaja para comprobar si tiene rango superior a 4.

1.9. VALORES Y VECTORES PROPIOS

1.9.1. Conceptualización

Para la resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y en diferencias finitas, como ya se ha visto, se emplea eficazmente la teoría matricial de los valores y vectores propios, por lo que desarrollaremos aquí algunos conceptos teóricos previos que resultan de utilidad a este fin junto con algún ejemplo de aplicación al caso.

Un vector X_i (distinto de cero) es un *vector propio* de la matriz A si se cumple la expresión $A \cdot X_i = \lambda \cdot X_i$ (por la derecha) o bien $X_i^t \cdot A = \lambda \cdot X_i^t$ (por la izquierda). El número λ se llama *valor propio*, y puede pertenecer al conjunto de los números reales o al de los complejos (imaginarios puros o mixtos). Los vectores propios también se llaman *autovectores* o *vectores característicos* y los valores propios *autovalores*. Al conjunto de los valores y vectores propios $\{\lambda_i, X_i\}$ se le denomina "autosistema".

Sea A una matriz cuadrada de orden n, y siendo sus elementos tal que $\forall a_{ij} \in R$, se tiene el determinante:

$$\begin{cases} |\lambda \cdot I - A| \rightarrow \text{polinomio característico de A.} \\ |\lambda \cdot I - A| = 0 \rightarrow \text{ecuación característica o secular de A.} \end{cases}$$

Las raíces de la ecuación anterior, que pueden ser simples o múltiples, se denominan "raíces características o latentes, valores característicos, valores propios o autovalores".

Desarrollando la expresión $A \cdot X_i = \lambda_i \cdot X_i$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array}\right\}$$

Surgen, al respecto, las siguientes proposiciones:

Proposición 1:

"Si ASB (relación de semejanza entre matrices cuadradas de orden m), tienen el mismo polinomio característico".

Proposición reflexiva $\Rightarrow \lambda \cdot I_n = N \cdot (\lambda \cdot I_n) \cdot N^{-1}$; o sea:

$ASB \Rightarrow B = N \cdot A \cdot N^{-1}$

$\lambda \cdot I_n - B$ = (substituyendo) = $N \cdot (\lambda \cdot I_n) \cdot N^{-1} - N \cdot A \cdot N^{-1} = N \cdot (\lambda \cdot I_n - A) \cdot N^{-1}$

Tomando determinantes:

$$|\boldsymbol{\lambda \cdot I_n - B}| = |N \cdot (\lambda \cdot I_n - A) \cdot N^{-1}| = |N| \cdot |\lambda \cdot I_n - A| \cdot |N^{-1}| = |\boldsymbol{\lambda \cdot I_n - A}|$$, c.s.q.d.

Proposición 2:

"Si A = $\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ y λ_i son los valores propios de A, se cumple que:

a) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$;

b) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$. "

Demostraciones respectivas:

a) Como consecuencia de ello, podemos escribir:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0.... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0.... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0.... & \lambda_n \end{pmatrix}$$, entonces:

$$|\lambda \cdot I_n - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0.... & 0 \\ 0 & \lambda & 0.... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0.... & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0.... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0.... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0.... & \lambda_n \end{pmatrix} \right| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)....(\lambda - \lambda_n); \quad (1)$$

Por otro lado:

$$|\lambda \cdot I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & ... & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & ... & -a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -a_{n1} & ... & ... & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2)$$

El desarrollo del anterior determinante por la primera fila, sería:

$$(\lambda - a_{11}) \cdot A_{11} + (-a_{12}) \cdot A_{12} + \ldots + (-a_{1n}) \cdot A_{1n}$$

En A_{1h} ($n \geq h > 1$), la mayor potencia de λ es n – 2. Pero en el desarrollo de A_{11} aparece el sumando λ^{n-1}, luego en el desarrollo de $|A|$ aparecerá el sumando: $- a_{11} \cdot \lambda^{n-1}$.

Haciendo análogo razonamiento con las demás filas, llegamos a que el coeficiente de λ^{n-1} en el desarrollo de $|A|$ es:

$$-(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$$

Pero en (1) el coeficiente de λ^{n-1} es: $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$ y queda probado que $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = tr(A)$, c.s.q.d.

b) Si hacemos $\lambda = 0$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} |-A| = (-1)^n \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_n \\ \text{y cómo: } |-A| = (-1)^n \cdot |A| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathbf{A}| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_i$$

Proposición 3:

“Si A es una matriz simétrica, λ_1 y λ_2 / $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son dos valores propios de la matriz A, y X_1 y X_2 dos vectores propios de dicha matriz $\Rightarrow$ X_1 y X_2 son ortogonales.” (O sea: $X^t_1 \cdot X_2 = X_1 \cdot X^t_2 = 0$).

Demostración:

Tenemos que:

$$A \cdot X_1 = \lambda_1 \cdot X_1 \quad , \quad A \cdot X_2 = \lambda_2 \cdot X_2$$

luego,

$$X^t_2 \cdot A \cdot X_1 = X^t_2 \, (\lambda_1 \cdot X_1) = \lambda_1 X^t_2 \cdot X_1$$

y análogamente:

$$X^t_1 \cdot A \cdot X_2 = \lambda_2 X^t_1 X_2 \qquad (3)$$

Como $\lambda_1 X^t_2 X_1$ es una matriz de dimensión (1 x 1) será igual a su transpuesta. Luego:

$$X^t_2 A X^t_1 = (X^t_2 A X_1)^t = X^t_1 \cdot A^t \cdot X_2 = X^t_1 A X_2 \qquad (4)$$

pues al ser A simétrica, se tiene que: $A = A^t$.

De (3) y (4) se deduce que: $\lambda_1 X^t_2 X_1 = \lambda_2 X^t_1 \cdot X_2$, o sea:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \, X^t_2 \cdot X_1 = 0 \qquad (5)$$

y como $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$, de la expresión anterior (5) se deduce que: $X^t_2 \cdot X_1 = 0$, es decir, que los autovectores X_1 y X_2 son ortogonales, c.s.q.d.

Proposición 4:

"Los valores propios de una matriz simétrica A son números reales".

Proposición 5:

"Si A es simétrica, podemos seleccionar **n** vectores propios ortonormales, que constituyen una base ortonormal".

1.9.2. Ejemplo

a) Hallar los autovalores, forma diagonal y autovectores de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Demostrar que se cumplen las proposiciones anteriormente enunciadas (2, 3, 4 y 5).

c) Obtener A^3 y la exponencial de dicha matriz.

Respectivamente, se tiene que:

a)
- *Autovalores:*

Ecuación característica o secular. $|\lambda \cdot I_n - A| = 0$;

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix};$$

si $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$; desarrollando el determinante, se tiene:

$$(\lambda^2+1+2\lambda)\cdot(\lambda-2) - 4\lambda + 8 = 0 \text{ ; } \lambda^3 + \lambda + 2\lambda^2 - 2\lambda^2 - 2 - 4\lambda - 4\lambda + 8 = 0 \text{ ;}$$

$$\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0\text{; con lo que: } \boldsymbol{\lambda = 1}$$

Aplicando la regla de Ruffini[5], se obtiene la ecuación de 2º grado cuya solución nos aportará las otras dos raíces características o latentes:

[5] En álgebra, la *Regla de Ruffini* (debida al matemático italiano Paolo Ruffini, 1765-1822) nos permite dividir un polinomio entre un binomial de la forma ($x - r$), siendo r un número entero. También nos

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, que ofrece las dos soluciones reales:

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} \mathbf{2} \\ \\ \mathbf{-3} \end{cases}$$

- *Forma diagonal:*

Como todos los autovalores son distintos, y además la matriz es simétrica, la forma diagonal será:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

La forma diagonal también podría hallarse del siguiente modo. Tomaríamos la matriz de "paso" o "modal":

$$M = P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$, que tiene por columnas los vectores propios

asociados, y entonces: $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$; postmultiplicando: $A \cdot P = P \cdot \Lambda$. Y ahora, premultiplicando por la matriz inversa: $P^{-1} \cdot A \cdot P = \Lambda$; o sea:

$$\Lambda = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3/2 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \text{c.s.q.d.}$$

Por otra parte, la "matriz ortogonal de paso" surgirá de la base ortonormal, con lo que:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- *Autovectores:*

Debe cumplirse la ecuación vectorial: $A \cdot X_i = \lambda_i \cdot X_i$ (por la derecha);

permite localizar las raíces de un polinomio y factorizarlo en binomios de la forma $(x - r)$ (siendo r un número entero).

$$\textbf{Para } \lambda \textbf{ = 1} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \; ;$$

$$\left.\begin{array}{lllll} -x_1 & & +2x_3 & = x_1 \\ & 2x_2 & & = x_2 \\ 2x_1 & & -x_3 & = x_3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{llll} x_1 & & -x_3 & = 0 \\ & x_2 & & = 0 \\ x_1 & & -x_3 & = 0 \end{array}\right\}$$

Se trata de un sistema homogéneo de dos ecuaciones y tres incógnitas;

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$; Rango matriz coeficientes < número de incógnitas

(r<p) 2<3, luego es COMPATIBLE INDETERMINADO, con lo que tiene ∞ soluciones, y una solución cualquiera será:

$$k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \textbf{AUTOVECTOR}$$

Del mismo modo:

$$\textbf{Para } \lambda \textbf{ = 2} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} \; ;$$

$$\left.\begin{array}{lllll} -x_1 & & +2x_3 & = 2x_1 \\ & 2x_2 & & = 2x_2 \\ 2x_1 & & -x_3 & = 2x_3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{llll} -3x_1 & & +2x_3 & = 0 \\ & 0 & & = 0 \\ 2x_1 & & -3x_3 & = 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$ 2<3 (tiene ∞ soluciones, y una solución cualquiera será)

$$\rightarrow k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \textbf{AUTOVECTOR}$$

Por último:

$$\textbf{Para } \boldsymbol{\lambda} \textbf{ = 3} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 \\ -3x_2 \\ -3x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{rrrl} -x_1 & & +2x_3 & = -3x_1 \\ & 2x_2 & & = -3x_2 \\ 2x_1 & & -x_3 & = -3x_3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rrrl} x_1 & & +x_3 & = 0 \\ & 5x_2 & & = 0 \\ x_1 & & +x_3 & = 0 \end{array}\right\}$$

Como en los casos anteriores, se trata de un sistema homogéneo de dos ecuaciones y tres incógnitas, que nos permite formar el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$ 2<3 (tiene ∞ soluciones, y una solución cualquiera será)

$$\rightarrow k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \textbf{AUTOVECTOR}$$

b)
-Cumplimiento de la proposición 2:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

a) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ = tr(A) → 1 + 2 - 3 = 0 ; tr(A) = -1 + 2 - 1 = 0 ;

b) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A| \rightarrow 1 \cdot 2 \cdot (-3) = -6 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6$; c.s.q.d.

- Cumplimiento de la proposición 3:

En este caso, veamos que A es simétrica.

En efecto, los autovectores son ortogonales 2 a 2, puesto que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad [1,0,1] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$ … etc. (en todos los casos).

- Cumplimiento de la proposición 4:

Como A es una matriz simétrica, sus valores propios o “autovalores” son números reales. En efecto: (1, 2, -3) $\in \{\Re\}$.

- Cumplimiento de la proposición 5:

Como A es simétrica, podemos seleccionar tres vectores propios que sean ortogonales entre sí y de módulo igual a 1 (ortonormales). Para ello, introduciríamos la condición de “ortonormalidad”[6], a saber:

$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1$; con lo que la base ortonormal sería la formada por los vectores:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

c) Así mismo, se tiene que ($A^n = P \cdot \Lambda^n \cdot P^{-1}$):

$$\mathbf{A^3} = P \cdot \Lambda^3 \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & -3^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -27 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 27 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 0 & 14 \\ 0 & 8 & 0 \\ 14 & 0 & -13 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, la exponencial pedida de la matriz A, será:

$$\mathbf{e^A} = P \cdot e^{\Lambda} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e & 0 & e^{-3} \\ 0 & e^2 & 0 \\ e & 0 & -e^{-3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e + e^{-3} & 0 & e - e^{-3} \\ 0 & e^2 & 0 \\ e - e^{-3} & 0 & e + e^{-3} \end{bmatrix}.$$

---

[6] Como se ha dicho, un conjunto de vectores es *ortonormal* si es a la vez un conjunto ortogonal y la norma o módulo de cada uno de sus vectores es igual a 1. Esta definición solo tiene sentido si los vectores pertenecen a un espacio vectorial en el que se ha definido un producto interno, como sucede en los espacios euclídeos E^n donde el producto interno puede definirse en términos de distancias y proyecciones perpendiculares de vectores. En espacios vectoriales más abstractos donde puedan definirse más de un producto interno, un conjunto podría ser ortonormal respecto al primer producto interno, pero no ser ortonormal respecto al segundo producto interno. Además, dada una base ortogonal de un espacio resulta trivial hallar una base ortonormal a partir de la primera dividiendo cada vector de la base ortogonal original por el valor de su norma.

2. NÚMEROS COMPLEJOS

2.1. DEFINICIÓN Y OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Definición axiomática. Llamamos *conjunto de los números complejos*[7] y lo denotamos con la letra {C} al conjunto de los pares de números reales (a,b) en el cual definimos las siguientes operaciones:

Suma: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

Multiplicación: $(a,b)\,(c,d)=(ac-bd\,,\;ad+bc)$

En el número complejo expresado en forma de par (a,b) llamaremos a *a* la *parte real* y a *b* la *parte imaginaria*. Nótese que la suma y el producto de pares no está definida en $\{C\}^2$.

Dos propiedades interesantes que cumplen los pares de números reales y que se mantienen para los complejos son las siguientes:

Igualdad: $(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c \;\;\wedge\;\; b=d$

Multiplicación por un escalar: $\alpha(a,b)=(\alpha a,\alpha b)$ donde $\alpha\in\{\Re\}$.

Veamos, a continuación, algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Dados (2,1) y (0,3), veamos las siguientes operaciones (suma y multiplicación) que se pueden realizar con ellos:

a) $(2,1)+(0,-3)=(2+0,1+(-3))=(2,-2)$

b) $(2,1)(0,-3)=(2(0)-1(-3),\;2(-3)+1(0))=(3,\;-6)$

c) $(2,1)(0,-3)-2(-1,1)=(3,-6)+(2,-2)=(5,-8)$

Como los números complejos son pares de números reales podemos efectuar una representación de los mismos como puede verse en la figura siguiente.

En esta representación se le dice *eje real* (*Re*) al eje de las *x* y *eje imaginario* (*Im*) al eje de las *y*.

[7] As well as their use within mathematics, complex numbers have practical applications in many fields, including physics, chemistry, biology, economics, electrical engineering, and statistics. The Italian mathematician Gerolamo Cardano (1501-1576) is the first known to have introduced complex numbers. He called them "fictitious" during his attempts to find solutions to cubic equations in the 16th century, but complex numbers are no more or less "fictitious" or "imaginary" than any other kind of number. In this way the complex numbers contain the ordinary real numbers while extending them in order to solve problems that cannot be solved with real numbers alone.

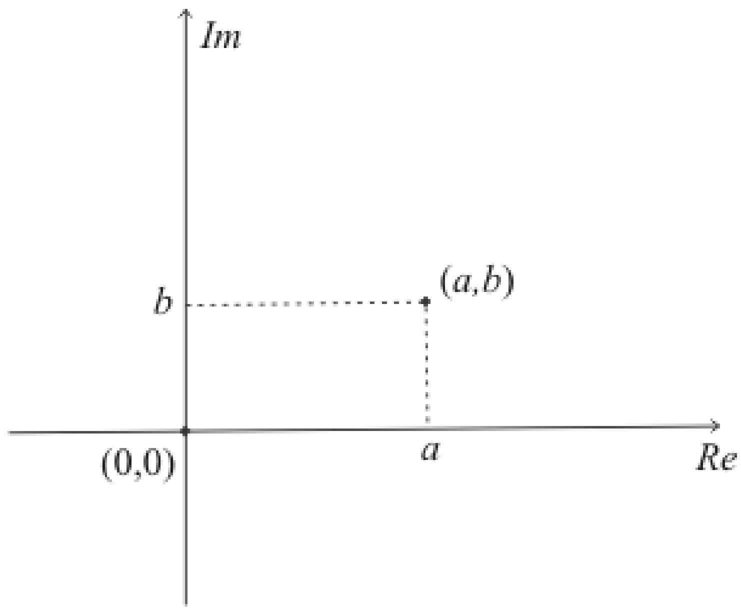


FIG. 9.1. Representación gráfica del número complejo (a,b).

Podemos considerar que los números reales están contenidos en los números complejos puesto que en el plano de definición el número complejo (a,0) coincide con el número real a. De este modo tenemos que a = (a,0). Los números complejos de la forma (0,b) son llamados *imaginarios puros* (pues el coeficiente de la parte real es 0) y el resto son *imaginarios mixtos* (en ellos, ambos coeficientes, de las partes real e imaginaria, existen y son diferentes de 0).

Vamos a demostrar la propiedad de la multiplicación por un escalar $\alpha \in \Re$:

$$\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$$

Para eso escribimos el número real α en la forma $(\alpha,0)$ y aplicamos la definición de multiplicación, con lo que:

$$\alpha(a,b) = (\alpha,0)(a,b) = (\alpha a - 0b\ ,\ \alpha b + 0a) = (\alpha a, \alpha b).$$

Denotaremos el número complejo (0,1) con la letra *i* y lo llamaremos *unidad imaginaria*. Es fácil demostrar que: $i^2 = -1$; efectivamente:

$$i^2 = (0,1)^2 = (0,1)(0,1) = \big(0(0) - 1(1)\,,\, 0(1) + 1(0)\big) = (-1,0) = -1$$

Ahora ya estamos en condiciones de resolver la sencilla ecuación:

$$x^2 + 1 = 0\ ;\ x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = i^2 \Rightarrow x = \pm i$$

Por lo que se refiere a las potencias sucesivas de la unidad imaginaria, veamos que $i^2 = -1$. Ahora bien, las siguientes son:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$
$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1$$
$$i^7 = i^6 \cdot i = -i$$
$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$$

produciéndose, como puede observarse, una cadencia de repetición de 4 en 4. Así pues, será necesario dividir el exponente de la potencia a calcular por 4, que será igual a la potencia elevada al resto de la división.

Ejemplo 2

Calcular i^{74}.

Solución:

$$i^{74} = i^2 = -1$$

En este caso, la división (74:4) ofrece un cociente de 18 y un resto de 2.

2.2. FORMA BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea: z = (a,b) un número complejo. Entonces podemos escribirlo en la forma:

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

Pero como (1,0) = 1 y (0,1) = i, entonces (a,b) = a + bi. En este caso, la expresión: *a + bi* se llama *forma binómica o binomia* del número complejo.

2.3. SUMA Y MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS EN LA FORMA BINÓMICA

Suma:
$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$, puesto que a, b, c, d son todos números reales.

Multiplicación:
$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$, porque, como sabemos: $i^2 = -1$.

Ahora observemos que los resultados son los mismos que las definiciones de suma y producto dados al inicio; por lo que la realización de las operaciones de suma y multiplicación con números complejos se puede llevar a efecto en la forma de pares o bien en la forma binómica**,** con la ventaja a favor de la forma binómica que se trabaja con las reglas del álgebra y no es necesario memorizar nada nuevo.

Ejemplo 1

Si $z_1 = (3,2)$ y $z_2 = (4,-1)$, hallar: $z_1 + z_2$ y $z_1 \cdot z_2$.

Solución:

Respectivamente, se tendrá que:

$$z_1 + z_2 = (3,2) + (4,-1) = (3+2i) + (4-i) = 7 + i$$

$$z_1\, z_2 = (3,2)\,(4,-1) = (3+2i)(4-i) = 12 - 3i + 8i - 2i^2 = (12+2) + (-3+8)i = 14 + 5i$$

2.4. CONJUGADO, MÓDULO Y ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Si z = x + yi es un número complejo llamaremos *conjugado del número z*, al número $\bar{z}$ = x - yi, es decir, al número complejo que tiene la misma parte real que z pero la parte imaginaria de signo opuesto. Del mismo modo, llamaremos *opuesto del número z*, al número –z = -x – yi, es decir, aquel que tiene cambiados de signo los coeficientes de la parte real e imaginaria del número complejo en cuestión.

Si z = 3 + 4i, entonces $\bar{z}$ = 3 – 4i y si z = 3 - 4i, entonces $\bar{z}$ = 3 + 4i.

Sea ahora: z = (a,b) = a + bi un número complejo cualquiera. Llamaremos *módulo* del número complejo z, al número real dado por la expresión: $\sqrt{a^2 + b^2}$ y lo denotaremos por $|z|$. El módulo se interpreta geométricamente como la distancia al origen del número z (ver gráfica siguiente).

Por otra parte, llamaremos *argumento* del número complejo z = a + bi, al ángulo comprendido entre el eje OX y el radio vector que determina a $|z|$. El argumento de z se denota por arg(z) = θ y se calcula mediante la expresión:

$$\theta = \arg(z) = \text{arc tg } \frac{b}{a}$$

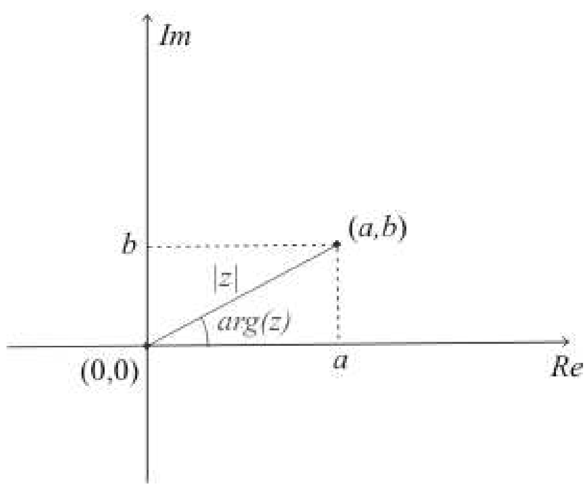


FIG. 9.2. Módulo y argumento de un número complejo.

Una propiedad interesante de los números complejos es la siguiente: $z\,\overline{z} = |z|^2$.

Demostración:

$$z\,\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - y^2 i^2 =$$
$$= \left(a^2 + b^2\right) + \left(-ab + ab\right) i = a^2 + b^2 + 0i = a^2 + b^2 = |z|^2$$

2.5. DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

La división de números complejos se realiza mediante la multiplicación y división por el conjugado del denominador, así:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{|z_2|^2}$$

Ejemplo 1

Dados $z_1 = 2-3i$ y $z_2 = -1+2i$, hallar: (a) $\overline{z}_2$ y (b) $\frac{z_1}{z_2}$.

Solución:

(a) Como $z_2 = -1+2i$ entonces: $\overline{z}_2 = -1-2i$

(b) Para hallar $\frac{z_1}{z_2}$ multiplicamos y dividimos por el conjugado $\overline{z}_2$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{-1+2i} = \frac{2-3i}{-1+2i} \cdot \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{(2-3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}$$
$$= \frac{-2-4i+3i+6i^2}{(-1)^2+(2)^2} = \frac{-8-i}{5} = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5} i$$

Por otra parte, el inverso de un número complejo se deduce así:

$z^{-1} = (a + bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)\cdot(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$, de donde se deduce que:

$$z^{-1} \cdot z \cdot \overline{z} = a - bi$$

2.6. RAÍCES COMPLEJAS DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Si el discriminante $\Delta = (b^2 - 4ac)$ de la ecuación general cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$, $\forall$ a, b, c $\in \{\Re\}$ y a $\neq 0$ es negativo ($\Delta < 0$), debe substituirse el signo negativo por i^2 y de esa forma se obtienen las raíces complejas de la ecuación. Hay tres casos posibles, a saber:

a) Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ raíz real doble.
b) Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ raíces reales distintas.
c) Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ raíces complejas conjugadas.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $x^2 - 2x + 6 = 0$.

Solución:

Aplicando la fórmula clásica de la ecuación cuadrática, se tendrá:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4-24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

Se puede ver que el valor del discriminante es -20, el cual puede escribirse como 20·i^2. Por lo tanto, se tendrá que:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}\,i}{2} = 1 \pm \sqrt{5}\,i$$

Así, las dos raíces complejas conjugadas de la ecuación son: $x_1 = 1 - \sqrt{5}\,i$ y $x_2 = 1 + \sqrt{5}\,i$, con los coeficientes: $\alpha = 1$ y $\beta = \sqrt{5}$.

2.7. FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

La forma trigonométrica o polar de un número complejo se establece observando el triángulo sombreado de la figura siguiente:

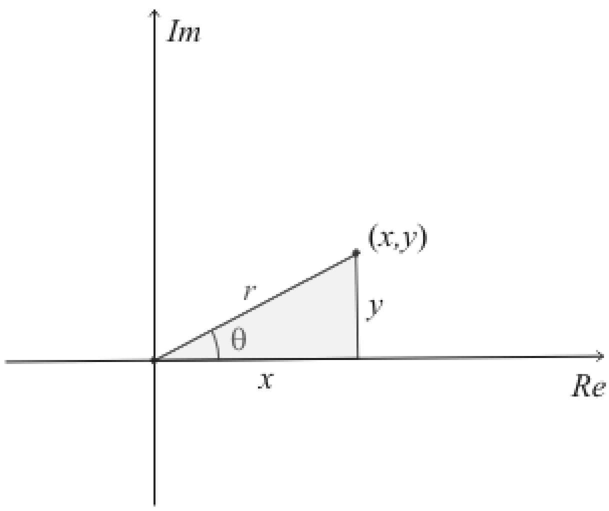


FIG. 9.3. Forma trigonométrica de un número complejo.

En este caso, se tiene que el módulo es: $r = |z| = |(x, y)|$, y que el argumento es: $\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$. Luego:

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{y}{r} \;\Rightarrow\; y = r\sin\theta \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} \;\Rightarrow\; x = r\cos\theta \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$z = (x, y) = x + yi = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Ésta es la llamada *forma trigonométrica o polar* del número complejo, la cual está expresada en términos del módulo y del argumento. Se denota, abreviada y comúnmente, por: $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$.

Ejemplo 1

Hallar la forma trigonométrica de: z = 1 - i.

Solución:

Hallemos $r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ y $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

Nótese que, en este caso, θ está en el cuarto cuadrante del círculo. Por lo tanto:

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\ \mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

2.8. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS EN SU FORMA TRIGONOMÉTRICA

Sean en su forma trigonométrica: $u = r\,\mathrm{cis}\,\alpha$ y $v = s\,\mathrm{cis}\,\beta$; entonces, se cumple que: $u\,v = (rs)\,\mathrm{cis}(\alpha + \beta)$. O bien expresado en otros términos:

$$uv = (rs)\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right)$$

La demostración de ello se realiza a continuación:

$$\begin{aligned}
u\,v &= r\,\text{cis}\,\alpha\cdot s\,\text{cis}\,\beta = \\
&= (rs)(\text{cis}\,\alpha\,\text{cis}\,\beta) = \\
&= (rs)(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \\
&= (rs)\left(\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta\right) = \\
&= (rs)\left(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\right) = \\
&= (rs)\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right) = \\
&= (rs)\,\text{cis}(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

, como queríamos demostrar. Por lo tanto, la multiplicación de dos números complejos en su forma trigonométrica o polar da como resultado un número complejo cuyo módulo es igual al producto de sus módulos y cuyo argumento es igual a la suma de los argumentos.

Del mismo modo, se demuestra fácilmente, por lo que a la división de números complejos se refiere, que:

$$u/v = (r/s)\cdot[\cos(\alpha-\beta) + i\cdot\text{sen}(\alpha-\beta)] = (r/s)\cdot\text{cis}(\alpha-\beta)$$

Por lo tanto, la división de dos números complejos en su forma trigonométrica o polar da como resultado un número complejo cuyo módulo es igual al cociente de sus módulos y cuyo argumento es igual a la diferencia de los argumentos.

Ejemplo 1

Sea: $u = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $v = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\,sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\,cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Hallar u·v y u/v.

Solución:

Entonces, se tendrá que: $u\,v = 6\,\text{cis}(0) = 6\left(\cos(0) + i\sin(0)\right) = 6$.

Así mismo: $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}\cdot\text{cis}(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{2}) = \frac{2i}{3}$

2.9. FÓRMULA DE MOIVRE Y FORMA EXPONENCIAL

Se cumple que: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ **.**

Esta expresión constituye la llamada *fórmula de Moivre*[8]*.*

[8] While the formula was named after Abraham De Moivre (1667-1754), he never explicitly stated it in his works. The formula is important because it connects complex numbers (*i* stands for the imaginary unit ($i^2 = -1$)) and trigonometry. The expression cos *x* + *i* sin *x* is sometimes abbreviated to cis *x*. By expanding the left hand side and then comparing the real and imaginary parts under the assumption that *x* is real, it is

Vamos seguidamente a asumir que se siguen cumpliendo, como sucede en los números reales, los conceptos de función, derivadas, series, etc. Vamos a demostrar, de entrada, la *fórmula de Euler* (1748):

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\cdot \text{sen}\,\theta,\ \forall\theta\in\{\Re\} \quad (1)$$

, y tomando como argumento (-θ), también se obtiene que:

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\cdot\text{sen}(-\theta) = \cos\theta - i\cdot\text{sen}\,\theta \qquad (2)$$

Empleemos, para ello, el desarrollo en serie de potencias de la función $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, suponiendo que sea válido para cuando la variable *x* es un número complejo z.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+.....+\frac{z^n}{n!}+...$$

Si tomamos: z = i·θ, nos quedará que:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!} = 1+\frac{(i\theta)}{1!}+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+.....+\frac{(i\theta)^n}{n!}+... \\ &= 1+i\frac{\theta}{1!}+i^2\frac{\theta^2}{2!}+i^3\frac{\theta^3}{3!}+i^4\frac{\theta^4}{4!}+i^5\frac{\theta^5}{5!}+... \\ &= 1+i\frac{\theta}{1!}-\frac{\theta^2}{2!}-i\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+i\frac{\theta^5}{5!}+.... \end{aligned}$$

Agrupando términos tendremos:

$$e^{i\theta} = \left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}+....\right)+i\left(\frac{\theta}{1!}-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+....\right)$$

Estos paréntesis son los desarrollos en serie de las funciones trigonométricas cos θ y sen θ, respectivamente. Así que se cumple que:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\cdot\text{sen}\,\theta, \text{ c.s.q.d.}$$

Sea ahora $z = r(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\,\theta)$ un número complejo donde *r* es su módulo y θ su argumento. Entonces, mediante el empleo de la fórmula de Euler, se obtiene la expresión:

possible to derive useful expressions for cos(*nx*) and sin(*nx*) in terms of cos *x* and sin *x*. Furthermore, one can use a generalization of this formula to find explicit expressions for the *n*th roots of unity, that is, complex numbers *z* such that $z^n = 1$. De Moivre's formula does not, in general, hold for non-integer powers. Non-integer powers of a complex number can have many different values, see failure of power and logarithm identities. However there is a generalization that the right-hand side expression is one possible value of the power.

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$, cuyo logaritmo neperiano ofrece:

$$\ln z = \ln r + i\cdot\theta$$

Esta expresión es la llamada *forma exponencial* del número complejo. Nótese que la forma exponencial resulta equivalente a la trigonométrica pues ambas dependen de los mismos elementos: módulo y argumento del número complejo z. Esta forma resulta muy cómoda en la operativa, pues podemos efectuar la multiplicación, división y potenciación empleando las leyes del álgebra.

Si ahora sumamos las anteriores expresiones (1) y (2), se tiene que: $2\cdot\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$, de donde se deduce que:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{(1ª fórmula de Euler)}$$

Si ahora restamos (2) de (1), se obtendrá que:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{(2ª fórmula de Euler)}$$

, y ambas fórmulas nos permiten llevar a cabo la *linealización* de las funciones trigonométricas.

2.10. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS EN SU FORMA EXPONENCIAL

Sean $u = re^{i\alpha}$ y $v = se^{i\beta}$. Entonces:

$$u\,v = re^{i\alpha}\,se^{i\beta} = (rs)\,e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{re^{i\alpha}}{se^{i\beta}} = \left(\frac{r}{s}\right)e^{i(\alpha-\beta)}$$

Ejemplo 1

Sean los números complejos: $u = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $v = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$. Hallar (u·v) y (u/v).

Solución:

Entonces se tendrá que:

$$u\,v = 18e^{i\frac{\pi}{2}} = 6i \quad \text{y también:} \quad \frac{u}{v} = 2e^{i(0)} = 2\,.$$

2.11. RAÍCES *n*-ÉSIMAS DE UN NÚMERO COMPLEJO

En la forma binómica de un número complejo la representación es única, mientras que en la forma trigonométrica o exponencial un mismo número complejo tiene infinitas representaciones diferentes, $z = r\, e^{i(\theta + 2k\pi)}$ con k∈{$\Re$}.

Para cada valor de k habrá una representación diferente del número complejo z.

Definamos la radicación como la operación inversa de la potenciación, esto es:

$$z = \sqrt[n]{w} \Leftrightarrow z^n = w.$$

Supóngase que: $w = re^{i\theta}$ es un número complejo de módulo r y argumento θ y que $z = se^{i\phi}$ un número complejo de módulo s y argumento ϕ. Entonces $z^n = w$ equivale a:

$$z^n = s^n e^{i\,n\phi} = re^{i\theta} = r\, e^{i(\theta + 2k\pi)} = w.$$

De esta manera se tendrá que:

(1) $s^n = r$

(2) $n\phi = \theta + 2k\pi$

Por lo tanto, $z = se^{i\phi}$, donde $s = \sqrt[n]{r}$ y $\phi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, con $k = 1, 2, \ldots, n$.

Estas son las fórmulas generalmente empleadas para hallar las *n* raíces *n*-ésimas de cualquier número complejo. Compruébese que para todo otro valor de k, con k∈{$\Re$}, se obtienen las mismas *n* raíces que para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ejemplo 1

Hallar: a) $\sqrt{1+\mathrm{i}}$, b) $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$.

Solución:

a) El radicando se puede expresar así: $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$. Por lo tanto, el módulo será $s = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$ y el argumento: $\phi = \dfrac{\pi/4 + 2k\pi}{2}$, con k ∈ (0,1). Entonces, en su forma exponencial, las dos raíces obtenidas son:

$$\begin{cases} \text{Para k = 0, tenemos: } z_0 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{8}}. \\ \text{Para k = 1, tenemos: } z_1 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{9\pi}{8}}. \end{cases}$$

La representación gráfica correspondiente es la siguiente:

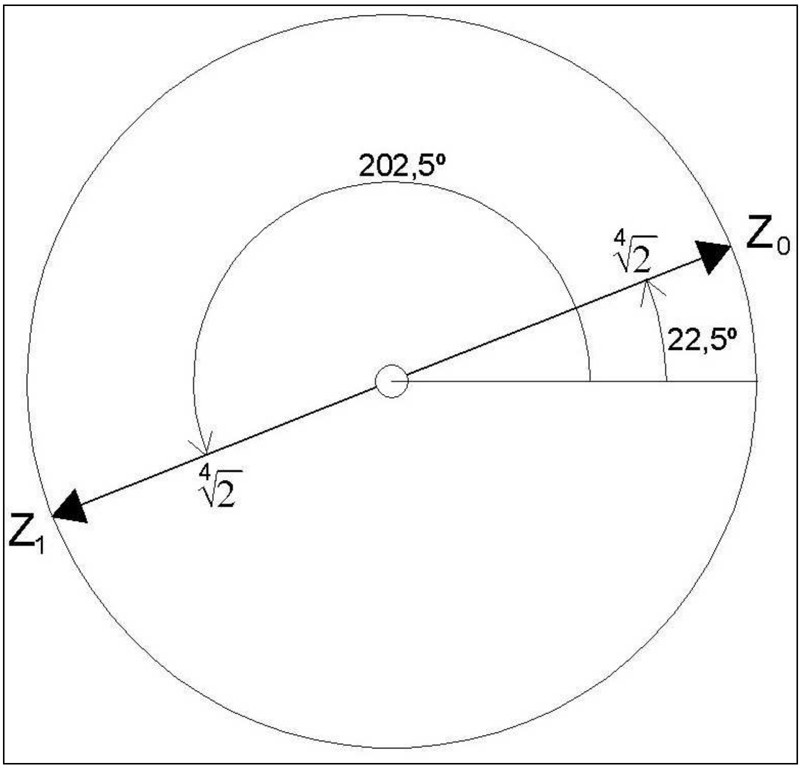


FIG. 9.4. Representación gráfica de las dos raíces.

b) Se trata ahora de resolver la ecuación: $z^3 = (1, 1)$

Se tiene:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ , \quad \theta = \text{arctg } 1 = \left\langle \begin{matrix} 45º \\ 225º \end{matrix} \right.$$

Por estar en el primer cuadrante del círculo, seleccionamos el caso: **θ = 45º**, con lo que:

$$s = \sqrt[n]{r} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}\ ; \quad \phi = \frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n} = \frac{45º}{3} + k\cdot 120º = 15º + 120º\cdot k\ ;$$

[siendo s(cos ϕ + i sen ϕ) la raíz n-ésima de r(cos θ + i sen θ), o sea:

$\sqrt[n]{r(\cos\theta + i\cdot \text{sen}\theta)} = s(\cos\phi + i\cdot\text{sen}\phi)$]; dando ahora valores $k \in (0,1,2)$, se tiene que:

RAÍCES	FORMA FACTORIAL	FORMA EXPONENCIAL	FORMA POLAR
z_0 (k=0)	$\sqrt[6]{2}(\cos 15^{o}+i{\cdot}\mathrm{sen}\,15^{o})$	$\sqrt[6]{2}{\cdot}e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}$	$(\sqrt[6]{2})_{15^{o}}$
z_1 (k=1)	$\sqrt[6]{2}(\cos 135^{o}+i{\cdot}\mathrm{sen}\,135^{o})$	$\sqrt[6]{2}{\cdot}e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$	$(\sqrt[6]{2})_{135^{o}}$
z_2 (k=2)	$\sqrt[6]{2}(\cos 255^{o}+i{\cdot}\mathrm{sen}\,255^{o})$	$\sqrt[6]{2}{\cdot}e^{i\cdot\frac{17\pi}{12}}$	$(\sqrt[6]{2})_{255^{o}}$

La representación gráfica correspondiente es la siguiente:

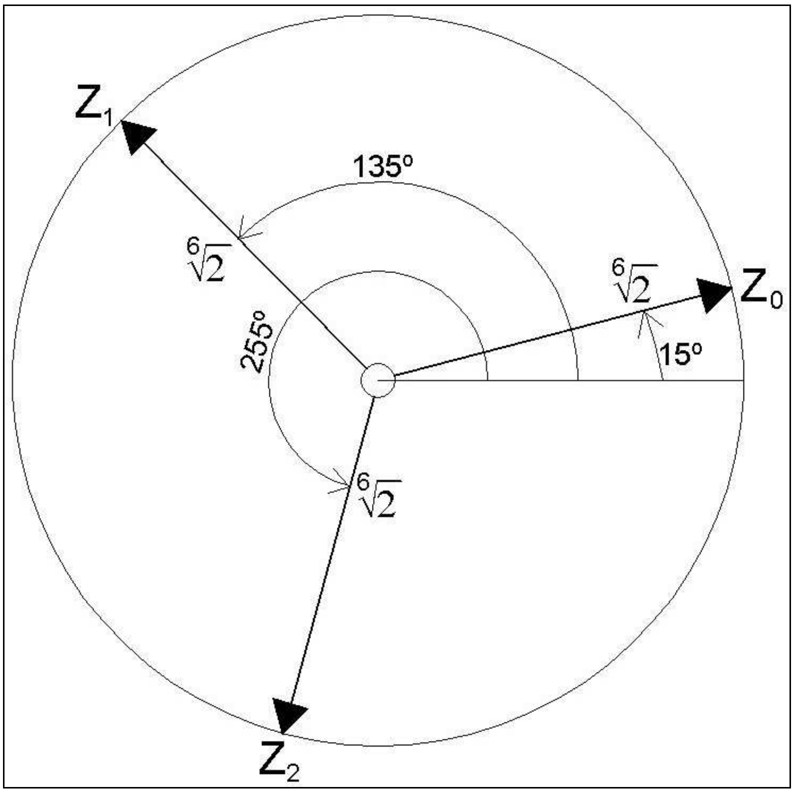


FIG. 9.5. Representación gráfica de las tres raíces.

En forma binómica o algebraica, dichas raíces son las siguientes:

$$z_0 \begin{cases} a = s\cdot\cos\phi = \sqrt[6]{2}\cdot\cos 15^{o} = 1'084215 \\ b = s{\cdot}\mathrm{sen}\phi = \sqrt[6]{2}{\cdot}\mathrm{sen}15^{o} = 0'2905145 \end{cases} \Rightarrow \textit{1'084215 + 0'2905145i}$$

$$z_1 \begin{cases} a = s\cdot\cos\phi = \sqrt[6]{2}\cdot\cos 135^{o} = -0'7937004 \\ b = s{\cdot}\mathrm{sen}\phi = \sqrt[6]{2}{\cdot}\mathrm{sen}135^{o} = 0'7937004 \end{cases} \Rightarrow \textit{-0'7937004 + 0'7937004i}$$

$$z_0 \begin{cases} a = s\cdot\cos\phi = \sqrt[6]{2}\cdot\cos 255^{o} = -0'2905145 \\ b = s{\cdot}\mathrm{sen}\phi = \sqrt[6]{2}{\cdot}\mathrm{sen}255^{o} = -1'084215 \end{cases} \Rightarrow \textit{-0'2905145 - 1'084215i}$$

2.12. LOGARITMO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Al igual que sucede para los números reales, vamos a definir el logaritmo de un número complejo como la operación inversa de la exponencial, esto es:

$$z = \ln w \leftrightarrow e^z = w$$

Supóngase que $w = re^{i\theta}$ es un número complejo de módulo r y argumento θ, entonces se tiene que:

$$e^z = r\,e^{i(\theta+2k\pi)} = w \Leftrightarrow z = \ln r + i\,(\theta + 2k\pi)\,.$$

Ejemplo 1

Sea $1 = 1\cdot e^{i(0)}$. Por tanto: $\ln(1) = \ln(1) + i(2k\pi) = 2k\pi i = 0$.

2.13. ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON COEFICIENTES COMPLEJOS

Sea: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, / $\alpha, \beta, \gamma \in \{C\}$, $\forall\ \alpha \neq 0$;

Primero se calcula el "discriminante" complejo:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma\,,$$

después sus dos raíces cuadradas (que serán complejas opuestas) $\left\langle \begin{array}{l} \delta \\ -\delta \end{array} \right.$

Las dos raíces buscadas de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{-\beta+\delta}{2\alpha}; \quad x_2 = \frac{-\beta-\delta}{2\alpha};$$

Si $\Delta = 0 \Rightarrow \delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ (raíz doble) $= -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

La descomposición factorial es la siguiente:

Si un polinomio es: $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_0$, $\forall\ \alpha_i \in \{C\}$; que admite las raíces complejas: γ_i, $\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$, se puede descomponer así:

$$\boxed{P(x) = \alpha_n(x-\gamma_1)\cdot(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n)}$$

2.14. SUCESIONES DE NÚMEROS COMPLEJOS

La sucesión de complejos (Z_n), con $Z_n = u_n + i\cdot v_n$ converge al número complejo a + bi si las sucesiones de reales (u_n) y (v_n) convergen a los coeficientes **a** y **b**, respectivamente. O sea:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty}(u_n + i\cdot v_n) = a + bi$$

2.15. DERIVACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

2.15.1. Introducción

La existencia de la derivada de una función compleja de variable compleja, tiene consecuencias muy importantes en lo que se refiere a las propiedades estructurales de la función. Precisamente, la investigación de esas consecuencias constituye el tema central o nuclear de la teoría de funciones de variable compleja.

2.15.2. Propiedad

"Si $w = f(z)$ *es derivable en* z_0*, entonces* $f(z)$ *es continua en* z_0*"*

Demostración:

Sea: $f(z)$ derivable en z_0. Entonces se cumple que:

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \Delta z$$

Luego: $\lim\limits_{\Delta z \to 0} [f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)] = f'(z_0) \lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta z = 0$, es decir,

$\lim\limits_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$. Luego f es continua en z_0, c.s.q.d.

Hay que tener en cuenta, al respecto, que el recíproco de esta propiedad no es cierto, en general. Así: $f(z) = |z|^2$ es continua en ***C*** y sin embargo, solo es derivable en: $z = 0$.

2.15.3. Operaciones con funciones analíticas

- Si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones derivables en z_0, lo son también las

$$\text{siguientes funciones:} \begin{cases} f(z) + g(z) \\ \lambda f(z) \\ f(z) g(z) \\ \dfrac{f(z)}{g(z)} \quad \text{si} \quad g(z_0) \neq 0 \end{cases}$$

y sus derivadas vienen dadas por las mismas reglas de derivación que las funciones reales de variable real.

- Análogamente si $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en un dominio D lo son $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ en D y también f/g, si $g(z) \neq 0$, $\forall z \in D$.
- Si $w = f(z)$ es analítica en un dominio D y $g(w)$ lo es un dominio que contiene la imagen de D por f, entonces la *función compuesta* $h(z) = g[f(z)]$ es analítica en D y $h'(z) = g'[f(z)] . f'(z)$, $\forall z \in D$.

- Si $w = f(z)$ es analítica en un dominio D y f establece una biyección entre D y otro dominio D' en el plano w, existe entonces la *función inversa* y es analítica en D'. Además su derivada es: $\frac{1}{f'(z)}$.
- Las demostraciones de los apartados anteriores son formalmente idénticas al caso de funciones reales de variable real, dado que la definición formal de límite y de derivada resultan idénticas en ambos casos.

2.15.4. Condiciones de Cauchy-Riemann

Sea $w = f(z)$ definida en un cierto dominio D. Se supondrá escrita en la forma $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Se trata de saber las condiciones que deben cumplir $u(x,y)$, $v(x,y)$ para que f sea derivable en un punto $z_0 \in D$.

a) *Condiciones necesarias de derivabilidad*

- Teorema 1:

Condición necesaria para que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *sea derivable en el punto* $z = x + iy \in D$ *es que existan las cuatro derivadas parciales* $\boldsymbol{u_x, u_y, v_x, v_y}$ *en* (x,y) *y cumplan en dicho punto las condiciones de Cauchy-Riemann* $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$.

Si f es derivable, se verifica, además, que:

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$$

Demostración:

Supongamos que existe $f'(z)$. Entonces, por la propia definición de derivada: $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$. Este límite habrá de ser necesariamente el mismo cualquiera que sea el camino por el que $\Delta z \to 0$. Hagamos tender a cero el $\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$ de dos formas distintas concretas. Los resultados, pues, habrán de coincidir.

- Hacemos tender a cero Δz por valores reales, o sea $\Delta z = \Delta x$

  Entonces resultará que:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}$$

Y tomando, ahora, límites cuando $\Delta x \to 0$, resulta que:

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$$

- Hacemos ahora tender a cero Δz por valores imaginarios: $\Delta z = i\cdot\Delta y$
  Entonces análogamente, se cumple que:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y} + i\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}$$

Y tomando límites cuando: $\Delta z = i\cdot\Delta y \to 0$, $\Rightarrow f'(z) = v_y(x,y) - i\cdot u_y(x,y)$. Por tanto, se han obtenido dos expresiones diferentes para la derivada $f'(z)$. Esto es:

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$$

Igualándolas resultará que: $\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases}$, c.s.q.d.

b) *Ejemplo*

- La función $f(z) = \overline{z} = x - i\cdot y$ no es derivable en ningún punto. Ahora comprobamos que, en efecto: $u_x = 1$ y $v_y = -1$ son distintas $\forall(x,y)\in$ ***C.***

- Se sabe que: $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ solo es derivable en $z = 0$. Ahora vemos que: $u_x = 2x$, $u_y = 2y$, $v_x = v_y = 0$. Y solo se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en $(0,0)$, único punto donde dicha función podrá ser derivable. De hecho, el cumplimiento de las condiciones de Cauchy-Riemann en un z, no resulta suficiente para la derivabilidad de $f(z)$ en z. Existen funciones que verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en un punto y no son derivables en él. Pero pueden añadirse condiciones adicionales a las condiciones de Cauchy-Riemann de tal forma que se obtengan condiciones suficientes de derivabilidad.

c) *Condiciones suficientes de derivabilidad*

Sea: $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ una función definida en un cierto dominio $\boldsymbol{D}$. Admitiremos, sin demostración, que una condición suficiente para que $f(z)$ sea derivable en el punto $z = x + i\cdot y \in D$, es que existan las derivadas parciales: $\boldsymbol{u_x}$, $\boldsymbol{u_y}$, $\boldsymbol{v_x}$, $\boldsymbol{v_y}$, en (x,y), que sean continuas en (x,y) y que cumplan, en dicho punto, las expresadas condiciones de Cauchy- Riemann.

2.15.5. Lemas importantes

Considérese ahora el operador: $L[y] = ay'' + by' + cy$, donde *a*, *b* y *c* son constantes reales.

a) Lema 1. Se cumple que:

$$L[ue^{(\alpha+i\beta)x}] = [au''+p'(\alpha+i\beta)u'+p(\alpha+i\beta)u]\cdot e^{(\alpha+i\beta)x},$$

donde u = u(x) es una función dos veces derivable y p(r) es el polinomio característico: $p(r) = ar^2 + br + c$, y $p'(r) = 2ar + b$ su derivada.

En efecto se tiene que, llamando por: $\sigma = \alpha + i\beta$:

$$\begin{cases} y = u{\cdot}e^{\sigma x} \\ y' = u'e^{\sigma x} + \sigma u e^{\sigma x} = (u' + \sigma u)e^{\sigma x} \\ y'' = u''e^{\sigma x} + u'\sigma e^{\sigma x} + \sigma u' e^{\sigma x} + \sigma^2 u e^{\sigma x} = (u'' + 2\sigma u' + \sigma^2 u)e^{\sigma x} \end{cases}$$

Luego también: $L[ue^{\sigma x}] = a(ue^{\sigma x})'' + b(ue^{\sigma x})' + c(ue^{\sigma x}) =$

$$= (au'' + 2a\sigma u' + a\sigma^2 u + bu' + b\sigma u + cu)e^{\sigma x} = (au'' + (2a\sigma + b)u' + (a\sigma^2 + b\sigma + c)u)e^{\sigma x}$$

b) Lema 2. Sea $z(x) = u(x) + i{\cdot}v(x)$ una solución compleja de: $L[y] = ay'' + by' + cy = f(x) + i{\cdot}g(x)$. Entonces $L[u] = f(x)$ y $L[v] = g(x)$.

Veamos que: $\begin{cases} z'(x) = u'(x) + i{\cdot}v'(x) \\ z''(x) = u''(x) + i{\cdot}v''(x) \end{cases}$

$$az''(x) + bz'(x) + cz(x) = a(u''(x) + iv''(x)) + b(u'(x) + iv'(x)) + c(u(x) + iv(x)) =$$
$$= (au''(x) + bu'(x) + cu(x)) + i(av''(x) + bv'(x) + cv(x))$$

Se sigue que: $L[z] = L[u(x) + i{\cdot}v(x)] = L[u(x)] + i{\cdot}L[v(x)]$
, de donde: $L[u(x)] + i{\cdot}Lv[(x)] = f(x) + i{\cdot}g(x) \Leftrightarrow L[u(x)] = f(x) \,\&\, L[v(x)] = g(x)$.

2.16. INTEGRACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

2.16.1. Introducción

El desarrollo de la teoría de funciones de una variable compleja sigue un camino muy distinto al usado en la teoría de funciones de variable real. En esta última teoría, tras estudiar las funciones derivables, se estudian las funciones que admiten derivadas de órdenes superiores, luego las indefinidamente derivables y, por último, las que admiten un desarrollo de Taylor en serie de potencias.

En la teoría de funciones de variable compleja se comienza estudiando las funciones analíticas. Forman éstas una clase tan restringida que automáticamente admiten derivadas de cualquier orden en cada punto en que sean analíticas. Más aún, admiten desarrollo en serie de Taylor en un entorno de cada punto de analiticidad.

Pero supuesta f(z) analítica en un dominio, no ha sido posible demostrar la existencia de derivadas de órdenes superiores, sin recurrir a la integración compleja. En el desarrollo de Cauchy de la teoría de funciones de variable compleja, todo se hace depender del cálculo integral complejo, incluso en cuestiones que aparentemente solo se refieren al cálculo diferencial. Por tanto, constituye una parte muy importante de la teoría de funciones de variable compleja, la teoría de las integrales curvilíneas, junto con la de las series de potencias. Se caracterizan ambas por su elegancia y por su gran utilidad en la matemática, tanto la pura como la aplicada.

2.16.2. Integral definida de una función compleja de variable real

Se trata de una generalización inmediata de la integral simple real.

a) *Definiciones previas*

- Una *función compleja de variable real* es una función de la forma:

$$f(t) = u(t) + i \cdot v(t) \text{ ó } z(t) = x(t) + i \cdot y(t), \text{ con } t \in I = [a,b]$$

- Dicha función se dice *continua* en I, si lo son x(t) e y(t). Obsérvese que una *tal función define una curva* Γ *en el plano complejo*, recorrida en un sentido determinado.

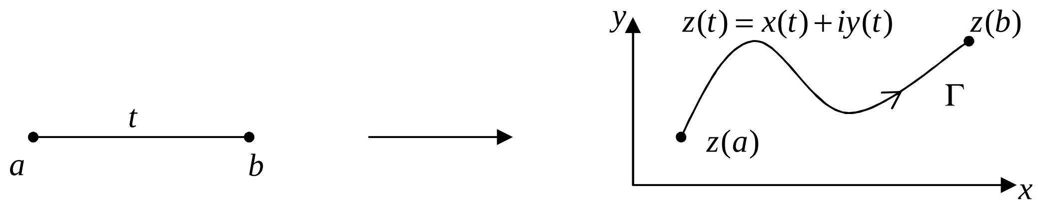


FIG. 9.6. Función compleja de variable real.

- La función anterior se dice *continua a trozos* en I, si x(t) e y(t) son continuas a trozos en I (esto es, acotadas y continuas en I excepto en un número finito de puntos de discontinuidad de primera especie).

- Se dice que: z(t) = x(t) + i·y(t) es *derivable a trozos* en I si lo son x(t) e y(t). Se define entonces la *función derivada* como:

$$z'(t) = x'(t) + i \cdot y'(t)$$

- Se dice que: z(t) = x(t) + i·y(t) es *regular* en I, o que lo es la correspondiente curva Γ, si existen x´(t) e y´(t) y son continuas y no nulas ambas en I.

- Se dice que: z(t) = x(t) + i·y(t) es *regular a trozos* en I, o que lo es la correspondiente curva Γ, si x(t) e y(t) son continuas en I, existiendo y siendo continuas, x´(t) e y´(t) en I, excepto a lo sumo en un número finito de puntos en los que deben existir y ser continuas las derivadas laterales.

- *Un contorno* es una curva Γ regular a trozos y simple o de Jordan[9].

[9] **Marie Ennemond Camille Jordan** (1838 – 1922) was a French mathematician, known both for his foundational work in group theory and for his influential *Cours d'analyse*. He was born in Lyon and educated at the École polytechnique. He was an engineer by profession; later in life he taught at the École polytechnique and the Collège de France, where he had a reputation for eccentric choices of notation. He

b) *Definición*

Dada la función compleja de variable real: z(t) = x(t) + i·y(t), continua a trozos en [a,b], se define la integral definida de z(t) sobre [a,b] como:

$$\int_a^b z(t)\cdot dt = \int_a^b x(t)\cdot dt + i\int_a^b y(t)\cdot dt$$

c) *Propiedades*

De la definición y de las propiedades de la integral definida de funciones reales de variable real, se deduce de forma inmediata, siendo z(t), z_1(t), z_2(t), continuas a intervalos en I = [a,b]:

- $\int_a^b z(t)\cdot dt = -\int_b^a z(t)\cdot dt$ (inversión de los límites de integración)
- $\int_a^b [z_1(t) + z_2(t)]\cdot dt = \int_a^b z_1(t)\cdot dt + \int_a^b z_2(t)\cdot dt$ (descomposición)
- $\int_a^b z(t)\cdot dt = \int_a^c z(t)\cdot dt + \int_c^b z(t)\cdot dt$ (adición del intervalo de integración)

También se cumple que:

- $\mathrm{Re}\int_a^b z(t)\cdot dt = \int_a^b \mathrm{Re}[z(t)]\cdot dt$
- $\int_a^b \alpha\cdot z(t)\cdot dt = \alpha\cdot\int_a^b z(t)\cdot dt$, para todo $\alpha\in\mathbb{C}$

- Si la función compleja de variable real Z(t) verifica que: Z´(t) = z(t), entonces se cumple que:

$$\int_a^b z(t)\cdot dt = Z(b) - Z(a)$$

Se verifica también que: $\left|\int_a^b z(t)\cdot dt\right| \le \int_a^b |z(t)|\cdot dt$

Demostración: Sea: $\int_a^b z(t)\cdot dt = R.e^{i\theta}$. Entonces:

$$\left|\int_a^b z(t)\cdot dt\right| = R = e^{-i\theta}\int_a^b z(t)\cdot dt = \int_a^b e^{-i\theta} z(t)\cdot dt$$

is remembered now by name in a number of foundational results. Jordan's work did much to bring Galois theory into the mainstream. He also investigated the Mathieu groups, the first examples of sporadic groups. His *Traité des substitutions*, on permutation groups, was published in 1870; this treatise won for Jordan the 1870 *prix Poncelet*. The asteroid 25593 Camillejordan and Institute of Camille Jordan are named in his honour.

Si: $f(t) = u(t) + i\cdot v(t)$ verifica que: $\int_a^b f(t)\cdot dt$ es real, entonces:

$\int_a^b f(t)\cdot dt = \int_a^b \mathrm{Re}[f(t)]\cdot dt$. La integral: $\int_a^b e^{-i\theta} z(t)\cdot dt$ es real por ser igual a R.

$$\text{Luego: } \left|\int_a^b z(t)\cdot dt\right| = \int_a^b e^{-i\theta} z(t)\cdot dt = \int_a^b \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta} z(t)\right]\cdot dt$$

Ahora, el integrando o función subintegral es una función real de variable real y además se tiene que:

$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\theta} z(t)\right] \leq \left|e^{-i\theta} z(t)\right| = |z(t)|$$

Luego, aplicando la correspondiente propiedad del caso real, se tiene que:

$$\left|\int_a^b z(t)\cdot dt\right| = \int_a^b \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta} z(t)\right]\cdot dt \leq \int_a^b |z(t)|\cdot dt$$

3. ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

3.1. INTRODUCCIÓN Y FORMA GENERAL

En el Cálculo Infinitesimal, una *ecuación en derivadas parciales* (a veces se emplea abreviado el término correspondiente como EDP) es una relación existente entre una función matemática o variable dependiente *u* de varias variables independientes o explicativas *x,y,z,t,...,* y las derivadas parciales de *u* respecto de esas mismas variables. Las ecuaciones en derivadas parciales se emplean en la formulación matemática de procesos de la física, la economía y otras ciencias que suelen estar distribuidos en el espacio y el tiempo. Problemas típicos son la propagación del sonido o del calor, la electrostática, la electrodinámica, la dinámica de fluidos, los modelos económicos[10], la

[10] Un *modelo económico* es una teoría la cual representa un proceso económico bajo determinadas variables y estableciendo una secuencia lógica. Es decir, es lo que se espera que resulte en un proceso bajo condiciones ideales. Los modelos económicos se desarrollan bajo suposiciones y técnicas matemáticas, y permiten saber cómo responderá la economía ante un escenario determinado. Sin embargo, es importante señalar que los modelos son idealizados y no por ello significa que siempre se pueda esperar esa respuesta. Existen dos tipos de modelos económicos, estos son:

*a) Cuantitativos***.** Los cuales a su vez se subdividen en:

> *Estocásticos***.** Se basan en estudios estadísticos para formular hipótesis; algunos modelos de esta categoría son el ARCH (*Autoregressive moving average model*) y el GARCH (*Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*) que modelan el flujo de los precios en el mercado.
>
> *No estocásticos***.** Se enfocan a funciones sociales y su correlación económica, como pueden ser los flujos de demandas en relación al precio. Por lo general, son gráficas de dos variables.

elasticidad, la mecánica cuántica y muchos otros. Se las conoce también como *ecuaciones diferenciales parciales*. Participaron notablemente en su estudio D'Alembert, Fourier y otros diversos matemáticos de la época napoleónica[11].

Una ecuación en derivadas parciales (EDP) para la función $u(x_1, \ldots, x_n)$ tiene la siguiente forma:

$$F(x_1, \cdots x_n, u, \frac{\partial}{\partial x_1}u, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}u, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1}u, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}u, \cdots) = 0$$

, donde F es una función lineal de **u** y sus derivadas si:

$$F(u+w) = F(u) + F(w) \text{ y } F(ku) = k \cdot F(u)$$

Si F es una función lineal de **u** y sus derivadas, entonces la EDP es lineal. Ejemplos comunes de EDPs son la ecuación del calor, la ecuación de onda y la ecuación de Pierre-Simon Laplace[12], que se usan ampliamente como modelos que tratan con el flujo de calor, la ingeniería civil y la acústica, por nombrar solo tres áreas de singular relevancia. Las definiciones de *orden* y *linealidad* son exactamente las mismas que en le caso de las EDO, con la salvedad que clasificamos a las EDP como "casi lineales" si las derivadas de los órdenes mayores son lineales, pero no lo son las derivadas de los órdenes menores.

---

*b) Cualitativos***.** Todos los modelos poseen un grado de estudio cualitativo, pero así se denomina cuando es el aspecto central del modelo. Por lo general se trata de estudios sin números como puede ser la respuesta de las personas ante un escenario determinado (aprobación, descontento, etc.).

[11] **Jean-Baptiste le Rond d'Alembert**. Científico y pensador francés de la Ilustración (París, 1717-1783). Sus investigaciones en matemáticas, física y astronomía le llevaron a formar parte de la Academia de Ciencias con tan solo 25 años de edad, y resultaron de tal relevancia que aún conservan su nombre un principio de física que relaciona la estática con la dinámica y un criterio de convergencia de series matemáticas.
Jean-Baptiste Joseph Fourier (21 de marzo de 1768 en Auxerre - 16 de mayo de 1830 en París), fue un matemático y físico francés conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas *series de Fourier*, método con el cual consiguió resolver la ecuación del calor. La transformada de Fourier recibe tal nombre en su honor. Curiosamente, fue el primero en dar una explicación científica al efecto invernadero en un tratado. Se le dedicó un asteroide que lleva su nombre y que fue descubierto en 1992.

[12] Matemático y astrónomo francés (1749-1827) que a los 24 años se le llamó "el Newton de Francia" por algunos de sus descubrimientos. Entre 1799 y 1825 su gran obra, "Traité du Mécanique Céleste", la cual, como su propio autor estableció "ofrece una completa solución al gran problema mecánico que presenta el sistema solar", apareció en cinco volúmenes, y fue publicado en París. En su segunda gran obra "Exposition du système du monde", París 1796, apareció su famosa "hipótesis nebular", cuyo origen él parece atribuir a Buffon, aparentemente no sabe que Immanuel Kant se le había adelantado parcialmente en su obra "Allgemeine Naturgeschichte", Historia General de la Naturaleza, publicada en 1755. Laplace, resumió en un cuerpo de doctrina los trabajos separados de Newton, Halley, Clairaut, d'Alembert y Euler acerca de la gravitación universal, y concibió, acerca de la formación del sistema planetario, la teoría que lleva su nombre. Sus trabajos sobre física, especialmente los estudios sobre los fenómenos capilares y el electromagnetismo, le permitieron el descubrimiento de las leyes que llevan su nombre. Se interesó también por la Teoría de la Probabilidad ("Teoría Analítica de las Probabilidades") y por la Teoría de las funciones potenciales, demostrando que algunas de ellas eran soluciones de ecuaciones diferenciales.

Una ecuación en derivadas parciales muy simple puede ser la siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

donde *u* es una función de *x* e *y*. Esta relación implica que los valores de *u*(*x*, *y*) son completamente independientes de *x*. Por lo tanto la solución general de esta ecuación diferencial es: *u (x,y) = f (y)*, donde *f* es una función arbitraria de *y*.

La ecuación diferencial ordinaria o EDO (similar a la EDP, pero con funciones de una variable) análoga es:

$$\frac{du}{dx} = 0,$$

que tiene, como ya sabemos, la siguiente solución: u(x) = c, donde *c* es cualquier valor constante (independiente de *x*). Estos dos ejemplos ilustran que las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales ordinarias se mantienen con constantes, pero las soluciones de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales generan funciones arbitrarias. Una solución de una ecuación en derivadas parciales generalmente no es única; de esta forma se tienen que proporcionar condiciones adicionales de contorno capaces de definir la solución de forma única. Por ejemplo, en el caso sencillo anterior, la función f(y) puede determinarse si **u** se especifica sobre la línea x = 0.

Toda ecuación en derivadas parciales de primer orden posee una solución dependiente de una función arbitraria, que se denomina usualmente *solución general* de la EDP. En muchas aplicaciones físicas esta solución general es menos importante que las llamadas *soluciones completas*, que frecuentemente pueden obtenerse por el método de separación de variables. De cualquier modo, para la resolución de este tipo de problemas existe una gran variedad de métodos muy sofisticados. Sin embargo, un conjunto de métodos relativamente sencillo, y que se puede aplicar en un gran número de casos, son los métodos de resolución mediante diferencias finitas o ecuaciones recurrentes que también tratamos en el presente libro.

Una solución completa es una *solución particular* de la EDP que contiene tantas constantes arbitrarias independientes como variables independientes intervienen en la ecuación. Por ejemplo, la integración de las ecuaciones del movimiento de un sistema mecánico mediante el método basado en la ecuación de Hamilton-Jacobi[13] requiere una integral completa,

[13] La *ecuación de Hamilton-Jacobi* es una ecuación diferencial en derivadas parciales usada en mecánica clásica y mecánica relativista que permite encontrar las ecuaciones de evolución temporal o de "movimiento". La ecuación de Hamilton-Jacobi (EHJ) permite una formulación alternativa a la mecánica lagrangiana y la mecánica hamiltoniana (y por tanto a la mecánica newtoniana, basada en el intento de integración directa de las ecuaciones de movimiento). El empleo de la ecuación de Hamilton-Jacobi resulta ventajoso cuando se conoce alguna integral de movimiento. Además, la formulación basada en EHJ es la única formulación de la mecánica en la que el movimiento de una partícula y el de una onda se describen en los mismos términos. Es por esto que la EHJ constituye una meta largamente perseguida de la física teórica, desde que Johann Bernouilli en el siglo XVIII buscó una analogía entre la propagación

mientras que la solución general resulta menos interesante desde el punto de vista físico.

Veamos, en fin, que aunque el asunto de la existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias tiene una respuesta muy satisfactoria resumida en el teorema de Picard-Lindelöf[14], el mismo asunto para las ecuaciones en derivadas parciales hállase lejos de estar satisfactoriamente resuelto, si bien existe un teorema general, el denominado "teorema de Cauchy-Kovalevskaya" [15], que afirma que para una EDP que es analítica en la función incógnita y sus derivadas tiene una única solución analítica. Pese a este resultado que parece establecer la existencia y unicidad de la soluciones, existen ejemplos de EDP de primer orden cuyos coeficientes tienen derivadas de cualquier orden (aunque sin ser analíticas) pero que no tienen solución. Incluso si la solución de una EDP existe y es única, ésta puede tener propiedades francamente indeseables.

Un ejemplo de comportamiento patológico es la secuencia de problemas de Cauchy[16] dependientes del parámetro *n* para la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{, con las condiciones iniciales:}$$

$$u(x,0) = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\text{sen } nx}{n}\,,$$

donde *n* es un número entero. La derivada de *u* con respecto a *y* se aproxima a 0 uniformemente en *x* a medida que *n* se incrementa, pero la solución es:

de ondas y partículas. Esta razón fue la que llevó a Schrödinger a buscar una ecuación para la "mecánica ondulatoria" o mecánica cuántica generalizando la ecuación de Hamilton-Jacobi (en lugar de usar los otros enfoques alternativos de la mecánica clásica). Incluso la primera ecuación para mecánica cuántica relativista, la ecuación de Klein-Gordon, se basó en la EHJ relativista en lugar de explorar otros enfoques alternativos.

[14] El *teorema de Picard-Lindelöf* (muchas veces llamado simplemente *teorema de Picard*, otras *teorema de Cauchy-Lipschitz* o bien *teorema de existencia y unicidad*) es un resultado matemático de gran importancia dentro del estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Establece bajo qué condiciones puede asegurarse la existencia y unicidad de solución de una EDO dado un problema de Cauchy (problema de valor inicial o PVI). Ver capítulo 1 de este mismo libro.

[15] Uno de los resultados generales de la teoría de EDP, que se aplica tanto a los casos lineales como no lineales, es el siguiente teorema debido a Cauchy y Kovalevskaya, al cual nos referiremos como teorema CK. El teorema nos garantiza la existencia y unicidad locales de una solución analítica de un problema de Cauchy con datos iniciales, siempre que se verifique que la EDP es normal y que tanto la EDP como los datos iniciales dependan analíticamente de de las variables independientes. Existe una clara analogía entre este resultado y los teoremas de existencia básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Diremos, en fin, que una EDP es normal-analítica si es normal y satisface una condición de analiticidad del expresado teorema CK.

[16] **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857) fue pionero en el análisis matemático y la teoría de grupos de permutaciones, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y la física matemática.

$$u(x,y) = \frac{(\text{senh } ny)(\text{sen } nx)}{n^2}.$$

Esta solución se aproxima a infinito si *nx* no es un entero múltiplo de π para cualquier valor de *y*. El problema de Cauchy para la ecuación de Laplace se considera *mal propuesto* o *mal definido*, puesto que la solución no depende continuamente de los datos del problema. Estos problemas mal definidos no resultan usualmente satisfactorios para las aplicaciones físicas.

Repárese que, según los resultados obtenidos, existen infinitas soluciones posibles de la EDP. Pero ahora la arbitrariedad de la solución general viene dada en términos de funciones, apareciendo tantas como el orden de la ecuación.

Desde el punto de vista estricto de la Matemática, puede parecer más preciso obtener, en cualquier caso, la solución general; sin embargo, en las aplicaciones se van a buscar soluciones dentro del campo de la Física, la Ingeniería o la Economía, por lo que solo interesará una solución particular concreta. Estas soluciones particulares van a satisfacer unas determinadas condiciones de contorno y de valor inicial. Es decir, se va a tratar de obtener la solución de una cierta EDP que verifique unas condiciones en el contorno del dominio en que está definida (condiciones de contorno), y si además una variable fundamental es el tiempo "t" (caso de los modelos dinámicos) las condiciones en t = 0 se darán como dato del problema planteado (condiciones iniciales).

Por último, y por lo que respecta a su clasificación, cuando cada término de la ecuación diferencial contiene la función o sus derivadas esta ecuación se dice “homogénea”.

3.2. INTEGRACIÓN DE LAS DE PRIMER ORDEN

Sea una ecuación de la forma:

$$F_1 \frac{du}{dx} + F_2 \frac{du}{dx} + F_3 \frac{du}{dz} = F_4;$$

siendo las F_i funciones de x, y, z, u; para integrarlas se pone el sistema:

$$\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3} = \frac{du}{F_4},$$

que es el de ecuaciones simultáneas correspondiente y se sabe ya (ver el Capítulo 4 de nuestro libro referente a los sistemas de ED) que si obtenemos las expresiones: $C_1 = \alpha(x, y, z, u)$, $C_2 = \beta(x, y, z, u)$ y por último $C_3 = \gamma(x, y, z, u)$, la integral general de la ecuación con derivadas parciales propuesta es:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

siendo φ una función arbitraria. Este procedimiento es conocido como el "método de Jacobi".

3.3. TIPOS ESPECIALES DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

1. Tipo $\frac{d^m z}{dx^m} = f(x,y)$, la integral es:

$$z = Y_1 + Y_2 x + ... + Y_m x^{m-1} + \int^{(m)} dx \int dx \int f(x,y) \cdot dx \,,$$

que se integran considerando a *y* como constante. Además, $Y_1, \ldots, Y_m$ son funciones arbitrarias de *y*.

2. Tipo $\frac{d^{m+n} z}{dx^m dy^n} = f(x,y)$; éste se reduce al tipo anterior

haciendo: $\frac{d^n z}{dy^n} = u$, lo que nos convertirá la ecuación dada en: $\frac{d^m u}{dx^m} = F(x,y)$, que nos da mediante su integración:

$$u = Y_1 + ... + Y_m x^{m-1} + \int^{(m)} dx \int dx ... \int F(x,y) \cdot dx \,,$$

y luego se deduce *z* por substitución de: $u = \frac{d^n z}{dy^n}$.

3. Tipo $\frac{d^m z}{dx^m} + A \frac{d^{m+n} z}{dx^m dy^n} + ... + U \frac{dz}{dx} + V \frac{dz}{dy} + Wz = 0$.

En este caso, se hace $z = C \cdot e^{\alpha x + \beta y}$ y queda una ecuación de grado *m* en α y β y de ella se saca:

$$\beta = \varphi_1(\alpha),\ \beta = \varphi_2(\alpha),\ \ldots,\ \beta = \varphi_m(\alpha),$$

y la integral será:

$$z = \sum C_1 \cdot e^{\alpha x + \varphi_1(\alpha) y} + \sum C_2 \cdot e^{\alpha x + \varphi_2(\alpha) y} + \ldots$$

Si todas las φ_i son de primer grado, $\beta = \alpha_i x + b_i$, o sea:

$$\beta = \alpha_1 x + b_1,\ \beta = \alpha_2 x + b_2,\ \ldots,\ \beta = \alpha_m x + b_m,\ \forall\, i \in (1, 2, \ldots, m)$$

la integral general es:

$$z = e^{b_1 y} \cdot F_1(x + a_1 y) + e^{b_2 y} \cdot F_2(x + a_2 y) + \ldots + e^{bmy} \cdot F_m(x + a_m y)$$

siendo las F completamente arbitrarias.

3.4. INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE DIVERSAS SUPERFICIES

3.4.1. Superficies cilíndricas

Se llaman así a las engendradas por una recta que se mueve conservándose paralela a una dada y cumpliendo otra condición que, generalmente, es la de apoyarse en una línea o ser tangente a una superficie denominada *directriz*. De aquí resulta que un cilindro no es otra cosa que un cono cuyo vértice es impropio.

Directriz $\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,x)=0 \end{cases}$ Generatriz paralela a $\begin{cases} x=az \\ y=bz \end{cases}$

Ecuación diferencial: $a\dfrac{dz}{dx}+b\dfrac{dz}{dy}=1$, y la integral general es:

$$y - bz = \varphi(x - az).$$

3.4.2. Superficies cónicas

Se llaman así a las superficies engendradas por una recta que pasa constantemente por un punto llamado *vértice* y cumple otra condición.

Directriz $\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,x)=0 \end{cases}$ Vértice (α, β, γ)

Ecuación diferencial: $z-\gamma=\dfrac{dz}{dx}(x-\alpha)+\dfrac{dz}{dy}(y-\beta)$.

Integral general: $\dfrac{y-\beta}{z-\gamma}=\varphi\left(\dfrac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)$.

3.4.3. Superficies desarrollables

Las superficies regladas se dividen en dos grandes grupos, según que el plano tangente sea el mismo en todos los puntos de una cualquiera de sus generatrices rectilíneas, o bien que a cada punto corresponda un solo plano tangente, llamándose las primeras *desarrollables* y las segundas *alabeadas*. Según esta definición, las superficies cónicas y las cilíndricas son también desarrollables.

Arista de retroceso $\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}$

Generatriz = tangente a la arista de retroceso.

Ecuación diferencial: $\left(\dfrac{d^2z}{dx \cdot dy}\right)^2 - \dfrac{dz^2}{dx^2} \cdot \dfrac{dz^2}{dy^2} = 0$.

3.4.4. Superficies conoides

Plano director: el oxy; directriz rectilínea $\begin{cases} x = az \\ y = bz \end{cases}$

Ecuación diferencial: $\dfrac{dz}{dx}(x - az) + \dfrac{dz}{dy}(y - bz) = 0$.

Integral general: $z = \varphi\left(\dfrac{y - bz}{x - az}\right)$.

3.4.5. Superficies de revolución

Llámanse así a las engendradas por una línea que gira en torno de una recta llamada *eje*. Las intersecciones de la superficie con los planos perpendiculares al eje son, por lo tanto, circunferencias cuyos centros están situados en dicha recta, las cuales se denominan *paralelos* de la superficie, y de éstos los de radio máximo o mínimo reciben los nombres respectivos de *ecuadores* o *círculos de garganta*. Los planos que pasan por el eje se llaman *meridianos* y sus intersecciones con la superficie se denominan *meridianas*, todas las cuales son evidentemente iguales entre sí.

De aquí se deduce que puede tomarse como generatriz de la superficie uno de los paralelos y, entonces, aparece engendrada por una circunferencia que se mueve de tal modo que su centro describe una recta, su plano se conserva perpendicular o normal a esta recta, y variando el radio según una cierta ley que puede determinarse por la condición de apoyarse sobre una línea, la cual es, de ordinario, la meridiana.

Eje: el oz; Generatriz $\begin{cases} z = \alpha \\ x^2 + y^2 = \beta \end{cases}$

Ecuación diferencial: $\dfrac{dz}{dx}y - \dfrac{dz}{dy}x = 0$.

Integral general: $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

3.4.6. Otras superficies

Existen otras superficies cuya integración de sus ecuaciones diferenciales obviamos por razones de espacio y oportunidad (alabeadas, helicoidales, de translación, homotéticas, inversas, envolventes, …).

4. CAMBIO DE VARIABLE

Se presenta con cierta frecuencia, en la resolución de las ecuaciones diferenciales que son objeto del presente libro, la conveniencia de llevar a cabo cambios de variable que faciliten, precisamente, este proceso.

El problema, bastante frecuente, puede presentarse del siguiente modo: siendo x = f(t), y = g(t), se trata de calcular las derivadas sucesivas de *y* respecto de *x*, en función de las derivadas de *x* e *y* respecto a *t*.

Se tiene: dx = x'(t)·dt, dy = y'(t)·dt, de dónde: $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

A partir de aquí, se tendrá que:

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{x'y''-y'x''}{x'^2}\cdot\frac{1}{x'} = \frac{x'y''-y'x''}{x'^3}$$, y también:

$$y'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{x'(x'y'''-y'x''')-3x''(x'y''-y'x'')}{x'^5}$$

Como caso particular de estas expresiones, se encuentran las fórmulas, que cambian la función por la variable y viceversa, pues basta hacer y' = 1; y'' = y''' = … = 0, de donde se deduce que:

$$D_x y = \frac{1}{x'};\quad D_{x^2} y = -\frac{x''}{x'^3}\ \text{etc.}$$

También, de las fórmulas anteriores, se desprende el método a seguir para cambiar de variable.

Sea la expresión de una EDO:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

que se quiere transformar en:

$$G\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dt^n}\right) = 0$$

esto es, cambiar de variable independiente, manteniendo la misma función, mediante la relación x = f(t). Usando las fórmulas anteriores y teniendo en cuenta que:

x = f(t) ; x' = f'(t) ; x'' = f''(t) ; x''' = f'''(t), …

$$y = y \; ; \quad y' = \frac{dy}{dt} \; ; \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$$

se obtiene que:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{f'(t)} \; ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{f'(t) \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - f''(t) \cdot \frac{dy}{dt}}{[f'(t)]^3} \; ; \text{etc.}$$

Si en la expresión anterior se desea cambiar únicamente la función mediante y = g(u), se obtendría:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{du}{dx} = g'(u) \cdot \dfrac{du}{dx} \\ y''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = g''(u)\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2 + g'(u)\dfrac{d^2u}{dx^2} \end{cases}$$

y así sucesivamente.

Finalmente, si se pretendiese cambiar simultáneamente de función y de variable independiente, se procedería de forma similar, a partir de las desigualdades que definen el cambio, esto es:

$$x = f(t,u) \; ; \quad y = g(t,u)$$

que derivadas con respecto a t, ofrecen:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{du}{dt} \\ x'' = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \cdot \partial u} \cdot \dfrac{du}{dt}\right) + \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \cdot \partial t} \cdot \dfrac{du}{dt} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{d^2u}{dt^2}\right] = \\ = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial t \cdot \partial u} \cdot \dfrac{du}{dt} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{d^2u}{dt^2} \\ x''' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

… y así sucesivamente, así como análogas expresiones para la *y*, que substituidas en las fórmulas inicialmente, resuelven con eficacia el problema planteado.

En cualquier caso, las fórmulas generales de aplicación de la regla de la cadena, hasta la cuarta derivada, pueden verse sintetizadas en el cuadro de la página siguiente:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2f}{dg^2}\left(\frac{dg}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dg}\frac{d^2g}{dx^2}$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} = \frac{d^3f}{dg^3}\left(\frac{dg}{dx}\right)^3 + 3\frac{d^2f}{dg^2}\frac{dg}{dx}\frac{d^2g}{dx^2} + \frac{df}{dg}\frac{d^3g}{dx^3}$$

$$\frac{d^4f}{dx^4} = \frac{d^4f}{dg^4}\left(\frac{dg}{dx}\right)^4 + 6\frac{d^3f}{dg^3}\left(\frac{dg}{dx}\right)^2\frac{d^2g}{dx^2} + \frac{d^2f}{dg^2}\left\{4\frac{dg}{dx}\frac{d^3g}{dx^3} + 3\left(\frac{d^2g}{dx^2}\right)^2\right\} + \frac{df}{dg}\frac{d^4g}{dx^4}$$

………………………………………………………………………………….

Si ahora hacemos f(x) = y(x); g(x) = t(x) en el cuadro anterior, se deduce que efectuando el cambio de variable: $x = e^t$; $dx = e^t \cdot dt$; $t = \ln \cdot x$; se tendrán las siguientes expresiones que resultan de gran utilidad para la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias de orden *n* y coeficientes variables, como las de Euler-Cauchy. Esto es:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{e^t \cdot dt} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t};$$

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2t}{dx^2} =$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right);$$

$$y'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{1}{x^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{2}{x^3} =$$

$$= \frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{1}{e^{3t}} - 3\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{e^{3t}} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{2}{e^{3t}} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2dy}{dt}\right);$$

$$y^{IV}(x) = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^4y}{dt^4} \cdot \frac{1}{x^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{d^2y}{dt^2}\left(4\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x^3} + 3\frac{1}{x^4}\right) - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{6}{x^4} =$$

$$= \frac{d^4y}{dt^4} \cdot \frac{1}{x^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{1}{x^4} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{11}{x^4} - 6\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^4} =$$

$$= e^{-4t}\left(\frac{d^4y}{dt^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} + 11\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt}\right);$$

… y así sucesivamente.

5. ECUACIONES INTEGRALES E INTEGRO-DIFERENCIALES

5.1. INTRODUCCIÓN Y DEFINICIONES

Una *ecuación integral* es una ecuación en que la función incógnita aparece dentro de una integral sin que aparezcan derivadas involucradas en la ecuación. Para dar solución a este problema se hace uso del mismo procedimiento empleado para solventar una ecuación diferencial ordinaria, donde debe encontrarse primero la función en términos de *s* y luego, a través de la correspondiente transformada inversa, encontrar la función en *t* que es incógnita. Como nos hallamos frente a una integral, debemos hacer uso del teorema de la convolución al objeto de encontrar la transformada de Laplace de dicha integral. En efecto, así como las ecuaciones diferenciales ligan una función incógnita de una o varias variables con sus derivadas totales o parciales, las ecuaciones integrales que aquí presentaremos someramente relacionan la función incógnita con una integral en cuyo integrando (o función subintegral) aparece la susodicha función. Se presentan tales ecuaciones en un buen número de cuestiones técnicas o económicas, proporcionando métodos que, en ocasiones, resultan más ventajosos que los usuales empleados en la teoría de las ecuaciones diferenciales que acabamos de estudiar, especialmente en la resolución de ciertos tipos de problemas en cuyo planteamiento intervienen condiciones de contorno.

Los tipos de ecuaciones integrales más frecuentes son los lineales, es decir, aquellos en que la función incógnita aparece linealmente bajo el signo de integración y se llaman *ecuaciones de Fredholm o de Volterra* (en honor de estos eminentes matemáticos, aunque su auténtico descubridor fue Abel[17]), según que los límites de la integral sean fijos o variables, y se clasifican en ecuaciones de *primera especie* y de *segunda especie* según que dicha función incógnita aparezca solamente en el integrando o también fuera de él.

Existe una conexión estrecha entre las ecuaciones integrales y las ecuaciones diferenciales, y de hecho algunos problemas pueden formularse como ecuación diferencial o equivalentemente como ecuación integral. Ver por ejemplo el modelo de Maxwell[18] de viscoelasticidad.

[17] El nombre de **Niels Henrik Abel** (1802-1829) tiene un lugar privilegiado en el Olimpo Matemático, al lado de nombres como Newton, Euler, Gauss, Cauchy o Riemann. A lo largo de su corta vida, realizó numerosas contribuciones matemáticas tan importantes como significativas. Aunque sus estudios se centraron fundamentalmente en el álgebra y el cálculo integral, su nombre será siempre asociado a algunas ramas del análisis, particularmente a la teoría de las ecuaciones integrales, cuyo desarrollo sistemático llevaron a cabo Volterra, Fredholm y Hilbert setenta años después de sus descubrimientos.

[18] **James Clerk Maxwell** (Edimburgo, Escocia, 13 de junio de 1831 – Cambridge, Inglaterra, 5 de noviembre de 1879). Físico escocés conocido principalmente por haber desarrollado la teoría electromagnética clásica, sintetizando todas las anteriores observaciones, experimentos y leyes sobre electricidad, magnetismo y aun sobre óptica, en una teoría consistente. Las ecuaciones de Maxwell demostraron que la electricidad, el magnetismo y hasta la luz, son manifestaciones del mismo fenómeno: el campo electromagnético. Desde ese momento, todas las otras leyes y ecuaciones clásicas de estas disciplinas se convirtieron en casos simplificados de las ecuaciones de Maxwell. Su trabajo sobre electromagnetismo ha sido llamado la "*segunda gran unificación en física*", después de la primera llevada a cabo por Newton. Además se le conoce por la estadística de Maxwell-Boltzmann en la teoría cinética de los gases. Maxwell fue una de las mentes matemáticas más preclaras de su tiempo, y muchos físicos lo

El tipo de ecuación integral más sencillo es el de una *ecuación de Fredholm* de primera clase o especie, a saber:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Donde:

φ es una función desconocida o incógnita,
f es una función conocida y
K es una función de dos variables también conocida, llamada "núcleo de la ecuación integral", que se supone continua y, por tanto, acotada en el intervalo completo de integración [a,b], lo mismo de la variable **x** que de la variable **t**.

Nótese que los límites de integración son constantes; esto precisamente es lo que caracteriza a una *ecuación de Fredholm*. Si la función incógnita aparece también fuera de la integral, entonces se tiene una ecuación de Fredholm de segunda clase o especie, esto es:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Como sucede con las ecuaciones diferenciales, aquella ecuación se llamará *homogénea* cuando f(x) ≡ 0, y *completa* en caso contrario. El parámetro representado por la letra griega *lambda* de la segunda ecuación es un número real desconocido que desempeña el mismo papel que el de un valor propio en una expresión del álgebra lineal que ya hemos visto, por cierto, en el presente capítulo.

Si un límite de integración es variable, entonces se tiene una *ecuación de Volterra*. Las ecuaciones de Volterra, de primer y segundo tipo o especie, vienen dadas por la expresión:

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$
$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

En todo lo anterior, si la función *f* es idénticamente nula, la ecuación integral se llama *ecuación integral homogénea*. Si *f* no es cero, entonces se trata de una *ecuación integral inhomogénea*.

consideran el científico del siglo XIX que más influencia tuvo sobre la física del siglo XX habiendo hecho contribuciones fundamentales en la comprensión de la naturaleza. Muchos consideran que sus contribuciones a la ciencia son de la misma magnitud que las de Isaac Newton y Albert Einstein. En 1931, con motivo de la conmemoración del centenario de su nacimiento, Albert Einstein describió el trabajo de Maxwell como «el más profundo y provechoso que la física ha experimentado desde los tiempos de Newton».

5.2. CLASIFICACIÓN

Las ecuaciones integrales que aquí tratamos se clasifican según tres criterios dicotómicos que, combinados entre sí, dan hasta ocho tipos de ecuaciones diferentes, a saber:

- Límites de integración:
  - Ambos fijos: Ecuación integral de Fredholm.
  - Uno de ellos variable: Ecuación integral de Volterra.

- Lugar donde aparece la función incógnita:
  - Únicamente dentro de la integral: ecuación integral de primera clase.
  - Tanto dentro de la integral como fuera de la misma: ecuación integral de segunda clase.

- Homogeneidad, según *f* sea o no nula:
  - Si *f* es idénticamente nula: ecuación integral homogénea.
  - Si *f* no es nula: ecuación integral inhomogénea.

Las ecuaciones integrales son importantes, como ya hemos señalado, en numerosas aplicaciones. Los problemas en los que aparecen ecuaciones integrales incluyen los problemas de transferencia de energía por radiación, el problema de vibraciones de una cuerda o una membrana, los problemas de viscoelasticidad, los modelos económicos y algunos problemas de campos electromagnéticos. Algunos de estos otros problemas, como hemos visto, también pueden plantearse en términos de ecuaciones diferenciales. Tanto las ecuaciones de Fredholm como las de Volterra, son ejemplos de ecuaciones integrales lineales, debido a la linealidad de la integral respecto a la función incógnita φ(x) situada bajo la integral. Un ejemplo de ecuación integral de Volterra no-lineal tendría la forma general:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, F(x,t,\varphi(t))\, dt.$$

, donde *F* es una función conocida y en que su dificultad de tratamiento sube de punto según la naturaleza de *F*.

5.3. ECUACIONES INTEGRALES COMO ECUACIONES DE VALORES PROPIOS

Algunas ecuaciones integrales lineales homogéneas pueden entenderse como el límite continuo de un problema de valores propios. Usando la notación de índices, una ecuación de valores propios, en un espacio vectorial de dimensión finita, puede escribirse como (véase el primer epígrafe del presente capítulo de nuestro libro):

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij} v_j = \lambda v_i, \quad o \qquad \mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

, donde **M** es una matriz y **v** uno de sus vectores propios o autovector asociado al valor propio o autovalor λ.

Haciendo el límite continuo mediante el cambio de los índices discretos *i* y *j* por los índices continuos *x* e *y*, se tiene:

$$\int \mathrm{d}y\, K(x,y)\varphi(y) = \lambda\varphi(x)$$

, donde la suma sobre *j* ha sido substituida por una integral sobre *y*, y la matriz M_{ij} y el vector v_i han sido substituidos por el "núcleo integral" *K(x,y)* y la autofunción φ *(y)* (los límites de la integral son fijos de manera análoga a la suma sobre *j*).

En general, *K(x,y)* puede ser una distribución o función generalizada, más que una función ordinaria. Si la distribución *K* tiene soporte solo en el punto x = y, entonces la ecuación integral se reduce a una ecuación diferencial de autovalores.

5.4. ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIDAS A ECUACIONES INTEGRALES

La formulación de muchos problemas matemáticos y físicos o económicos puede plantearse directamente en forma de ecuación integral. Incluso, en ocasiones, puede interesar convertir una ecuación diferencial, como las que venimos estudiando en nuestro libro, en una ecuación integral equivalente, con la ventaja de que la ecuación integral, aparte de incluir las condiciones de contorno, maneja un operador acotado (de hecho, frecuentemente, un operador compacto), mientras que el operador diferencial era, en general, no acotado. Esto último permite echar mano de varios resultados conocidos para operadores compactos con el fin de resolver un problema planteado en términos de ecuaciones integrales con mayor facilidad.

Ese estrecho parentesco existente entre los problemas relativos a las ecuaciones diferenciales con otros equivalentes en ecuaciones integrales no se desprende de simples transformaciones formales, si no que tiene su raíz en la propia esencia física de los problemas que pueden plantearse directamente en una u otra forma, según el punto de vista que se adopte en cada caso. El principio físico de superposición de efectos de causas concomitantes puede traducirse expresando la suma de efectos infinitesimales, con lo que obtendremos ecuaciones integrales, o bien restando efectos, es decir, hallando incrementos infinitesimales, con lo que obtendremos entonces ecuaciones diferenciales. A la dualidad de planteamientos de un mismo fenómeno corresponderá, pues, una dualidad de lenguaje matemático para expresarlo. Un ejemplo sencillo de ello lo constituye el problema físico de la cuerda vibrante.

Veamos, en fin, que toda función continua de dos variables *K(x,t)* puede aproximarse cuanto se desee mediante un polinomio entero *P(x,t)* el cual constituye siempre un núcleo degenerado, entendiendo como tal el que puede descomponerse en suma de productos de funciones con las variables separadas. El método anterior es, pues, aplicable para resolver una ecuación de Fredholm de 2ª especie. Si la aproximación se efectúa mediante desarrollos en serie de Taylor, precisa exigir la analiticidad del núcleo o, por lo menos, su derivabilidad hasta el orden necesario a la aproximación. Si la aproximación se efectúa en media en el intervalo [a,b] de integración (lo que resulta harto más ventajoso, especialmente para intervalos grandes) se manejarán desarrollos en polinomios ortogonales y se precisará tan solo la integrabilidad del núcleo y de su cuadrado.

Un paso al límite en este proceso conduce a la determinación de los autovalores y autofunciones resolviendo sistemas lineales de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas. La ecuación en λ que define los valores propios viene entonces expresada mediante un determinante infinito. Tales tipos de determinantes se presentaron lo mismo a Fredholm que a Hilbert[19] al querer fundamentar la teoría de las ecuaciones integrales lineales por métodos diversos y que no podemos desarrollar aquí por obvias razones de espacio y complejidad.

5.5. EJERCICIOS

5.5.1. Problemas de ecuaciones integrales

Se resolverán, en todos los casos, por aplicación del método de las transformadas de Laplace.

Ejemplo 1

Sea resolver la ecuación integral: $f(T) + \int_0^T (T-\tau)\cdot f(\tau)\cdot d\tau = T$.

Solución:

$$L\{f(T)\} + L\left\{\int_0^T (T-\tau)\cdot f(\tau)\cdot d\tau\right\} = L\{T\};\ F(S) + \frac{F(S)}{S^2} = \frac{1}{S^2};\ F(S)\left(1+\frac{1}{S^2}\right) = \frac{1}{S^2};$$

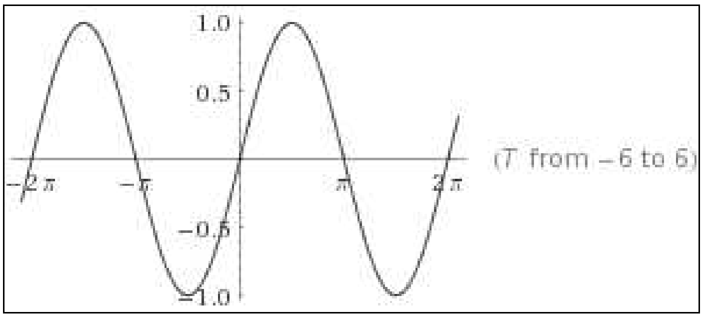
$$F(S) = \frac{S^2}{S^2(S^2+1)} = \frac{1}{S^2+1}$$, y la solución buscada será:

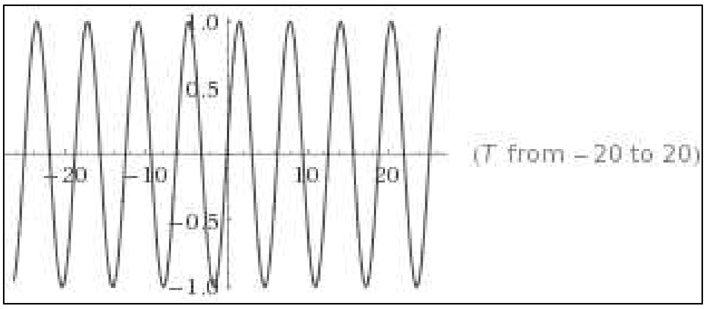
$$\boxed{y(T) = L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2+1}\right\} = \text{sen}\,T}$$

La representación gráfica de esta solución, que es evidentemente una función trigonométrica directa, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

---

[19] Durante los años veinte del pasado siglo, la teoría espectral de operadores tuvo sorprendentes aplicaciones a problemas únicamente planteados en espacios de Hilbert. La aparición, en el año 1932 del libro de John von Neumann "Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik" y de "Linear Transformations in Hilbert Spaces and Applications in Analysis" de Marshall Stone mostraron la aparición de la teoría de operadores (en espacios de Hilbert) como una parte propia pero íntimamente relacionada con lo que se conoce ahora por Análisis Funcional Lineal. Por aquellos años, dicho Análisis experimentó su primer gran desarrollo. Muchas de las ideas empleadas cristalizaron en principios generales que se formularon y demostraron. Varias técnicas evolucionaron para aplicarlas a problemas lineales más generales que los planteados en espacios de Hilbert.





Ejemplo 2

Sea resolver la ecuación integral: $f(T) = 2T - 4\int_0^T \text{sen}\tau \cdot f(T-\tau) d\tau$.

Solución:

$$F(S) = \frac{2}{S^2} - 4\left(\frac{1}{S^2+1}\right)F(S);\ F(S)\left(1+\frac{4}{S^2+1}\right) = \frac{2}{S^2};$$

$$F(S)\left(\frac{S^2+1+4}{S^2+1}\right) = F(S)\left(\frac{S^2+5}{S^2+1}\right) = \frac{2}{S^2} \Rightarrow F(S) = \frac{2S^2+2}{S^2(S^2+5)}$$

Por aplicación del método de los coeficientes indeterminados, se tendrá:

$$\frac{A}{S} + \frac{B}{S^2} + \frac{CS+D}{S^2+5} = \frac{2S^2+2}{S^2(S^2+5)}$$

$$AS(S^2+5) + B(S^2+5) + (CS+D)S^2 = 2S^2+2$$

$$AS^3 + 5AS + BS^2 + 5B + CS^3 + DS^2 = 2S^2 + 2$$

, de donde se deduce que:

$$A + B = 0;\ \ B + D = 2$$

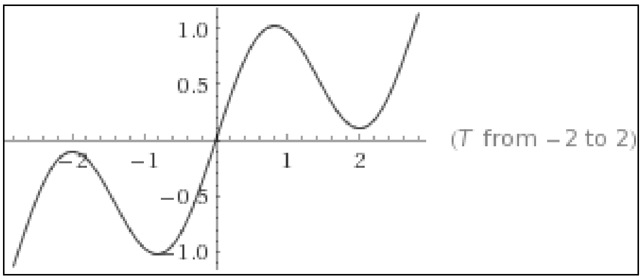
$$5A = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow C = 0$$

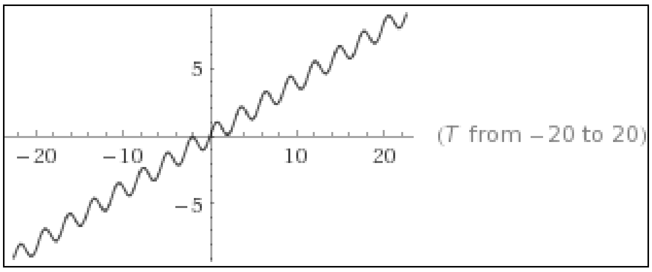
$$5B = 2 \Rightarrow B = 2/5 \Rightarrow D = 8/5$$

y la solución buscada será:

$$\boxed{y(T) = \frac{2}{5}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2}\right\} + \frac{8}{5\sqrt{5}}\ L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{5}}{S^2+5}\right\} = \frac{2}{5}T + \frac{8}{5\sqrt{5}}\text{sen}\sqrt{5}T}$$

La representación gráfica de esta solución, que es evidentemente una función trigonométrica directa más una recta, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 3

Sea resolver la ecuación: $f(T)+2\int_0^T f(\tau)d\tau \cdot \cos(T-\tau)d\tau = 4e^{-T} + \operatorname{sen} T$.

Solución:

$$F(S)+2F(S)\left(\frac{S}{S^2+1}\right)=\frac{4}{S+1}+\frac{1}{S^2+1}$$

$$F(S)\left(\frac{S^2+2S+1}{S^2+1}\right)=\frac{4}{S+1}+\frac{1}{S^2+1}\Rightarrow F(S)\left(\frac{(S+1)^2}{S^2+1}\right)=\frac{4}{S+1}+\frac{1}{S^2+1}$$

$$F(S)=\frac{4(S^2+1)}{(S+1)(S+1)^2}+\frac{S^2+1}{(S^2+1)(S+1)^2}=\frac{4S^2+4}{(S+1)^3}+\frac{1}{(S+1)^2}$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados, se tendrá:

$$\frac{A}{S+1}+\frac{B}{(S+1)^2}+\frac{C}{(S+1)^3}=\frac{4S^2+4}{(S+1)^3}$$

$$A(S+1)^2+B(S+1)+C=4S^2+4$$

$$A=4, B=-8, C=8$$

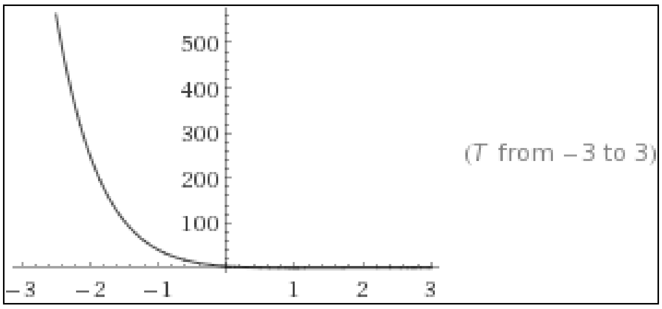
De donde se deduce que:

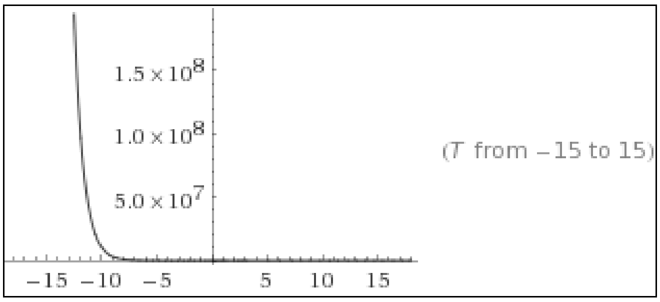
$$y(T)= L^{-1}\left\{\frac{4}{S+1}\right\}- L^{-1}\left\{\frac{8}{(S+1)^2}\right\}+ L^{-1}\left\{\frac{8}{(S+1)^3}\right\}+ L^{-1}\left\{\frac{1}{(S+1)^2}\right\}$$

y la solución buscada será:

$$\boxed{y(T) = 4e^{-T}-7Te^{-T}+4T^2e^{-T}=e^{-T}(4T^2-7T+4)}$$

La representación gráfica de esta solución, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 4

Sea resolver la ecuación del tipo de convolución:

$$y(x) = x + \int_0^x y(t)\cdot \text{sen}(x-t)\cdot dt\,.$$

Solución:

Veamos que esta ecuación integral se puede escribir, teniendo en cuenta la definición de la convolución de las dos funciones *y(x)* y *sen x*, como: y(x) = x + y(x)∗sen x. Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de esta ecuación y aplicando el teorema de convolución (véase epígrafe 3 del capítulo 5 de este mismo libro), se tendrá que:

$$L(y) = L(x) + L(y)\cdot L(\text{sen } x) =$$

$$\frac{1}{S^2} + \frac{L(y)}{S^2+1} = \frac{S^2+1}{S^2(S^2+1)} + \frac{S^2\cdot L(y)}{S^2(S^2+1)} = \frac{S^2+1+S^2\cdot L(y)}{S^4+S^2}\text{, de donde:}$$

$$L(y)\cdot(S^4 + S^2) = S^2 + 1 + S^2\cdot L(y) = S^4\cdot L(y) + S^2\cdot L(y)\text{, y entonces:}$$

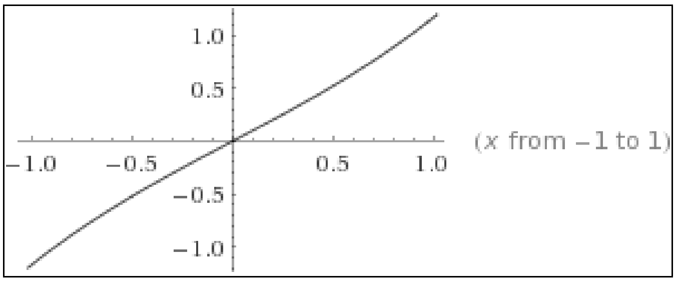
$$L(y) = \frac{S^2+1}{S^4} = \frac{1}{S^2} + \frac{1}{S^4}\text{, de donde: } \boxed{y(x) = x + \frac{x^3}{3!} = x + \frac{x^3}{6}},$$

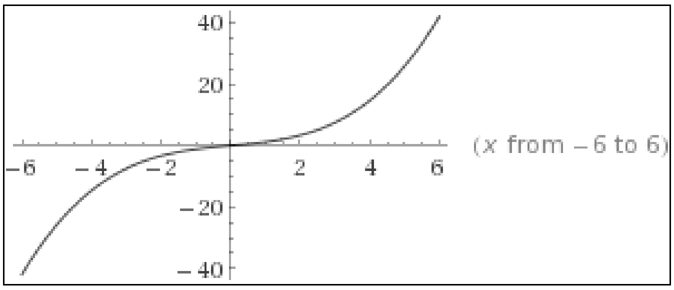
que es, por cierto, la solución buscada, tal como se puede verificar por substitución directa como sigue:

$$y(x) = x + \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{6}\right)\cdot \text{sen}(x-t)\cdot dt = x + \left[\frac{t^2}{6}[3\cdot \text{sen}(x-t) + t\cdot\cos(x-t)]\right]_0^x = x + \frac{x^3}{6}$$

, que puede comprobarse mediante la resolución de esta integral trigonométrica aplicando las fórmulas de integración por partes y de reducción pertinentes.

La representación gráfica de esta solución, que es evidentemente una parábola cúbica, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 5

Sea resolver la ecuación del tipo de convolución: $y(x) = 2 - \int_0^x y(t)\cdot e^{x-t}\cdot dt$.

Solución:

Aquí tenemos que: $y(x) = 2 - y(x)*e^x$. Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de esta ecuación y aplicando el teorema de convolución (véase el epígrafe 3 del capítulo 5 de este mismo libro), se tendrá que:

$$L(y) = L(2) - L(y)\cdot L(e^x) = \frac{2}{S} - L(y)\cdot\frac{1}{S-1};$$

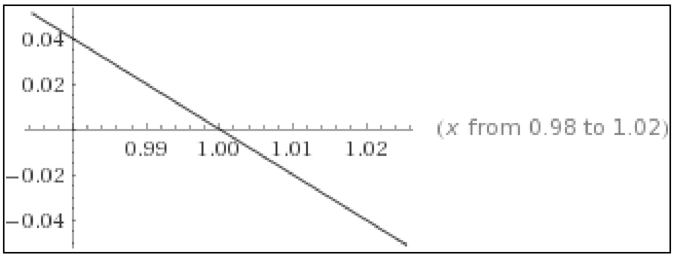
$$L(y) = \frac{2(S-1)}{S(S-1)} - \frac{S\cdot L(y)}{S(S-1)} = \frac{2S-2-S\cdot L(y)}{S^2-S};$$

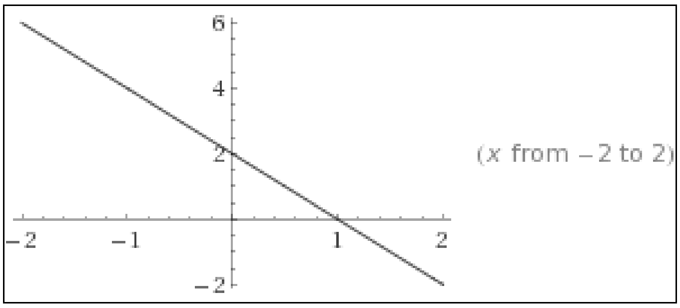
$$L(y)\cdot(S^2 - S) = 2S - 2 - S\cdot L(y) = S^2\cdot L(y) - S\cdot L(y), \text{ y de aquí:}$$

$$L(y) = \frac{2S-2}{S^2} = \frac{2}{S} - \frac{2}{S^2}, \text{ de donde se obtiene la solución buscada:}$$

$$\boxed{y(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)}$$

La representación gráfica de esta solución, que es evidentemente una recta decreciente, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 6

Sea resolver la ecuación del tipo de convolución: $y(x) = x^3 + \int_0^x 4y(t)\cdot dt$.

Solución:

Aquí tenemos que: $y(x) = x^3 + 4 * y(x)$. Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de esta ecuación y aplicando el teorema de convolución (véase epígrafe 3 del capítulo 5 de este mismo libro), se tendrá que:

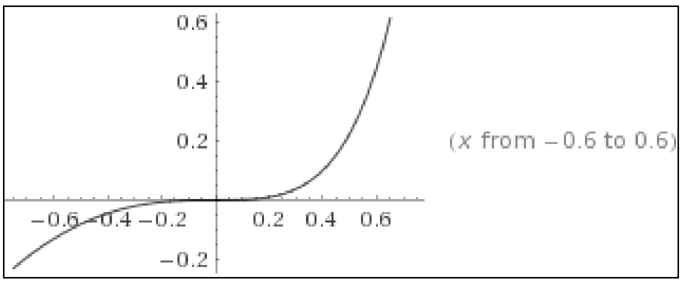
$$L(y) = L(x^3) + L(4)\cdot L(y) = \frac{3!}{S^4} + L(y)\cdot\frac{4}{S};$$

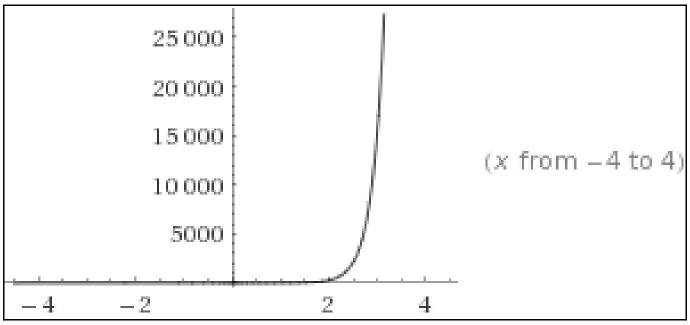
$$L(y) = \frac{6}{S^4} + \frac{4 L(y)}{S} = \frac{6 + 4 S^3 \cdot L(y)}{S^4}, \text{ de donde: } L(y)\cdot S^4 = 6 + 4\cdot S^3\cdot L(y);$$

$$L(y)\cdot(S^4 - 4S^3) = 6;\ L(y) = \frac{6}{S^4 - 4S^3}, \text{ lo que ofrece la solución buscada:}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{32}(e^{4x} - 8x^2 - 4x - 1)}$$

La representación gráfica de esta solución, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





5.5.2. Problemas de ecuaciones integro-diferenciales

Hemos visto la definición y el método de resolución de las ecuaciones integrales. Pues bien, las ecuaciones integro-diferenciales se denominan así porque constan de operaciones diferenciales e integrales en su expresión. Se resolverán también aquí, en todos los casos, por aplicación del método de las transformadas de Laplace. A saber:

Ejemplo 1

Sea resolver la ecuación integro-diferencial: $\frac{dy}{dT} + 6y(T) + 9\int_0^T y(\tau)\cdot d\tau = 1$, con la condición inicial: $y(0) = 0$.

Solución:

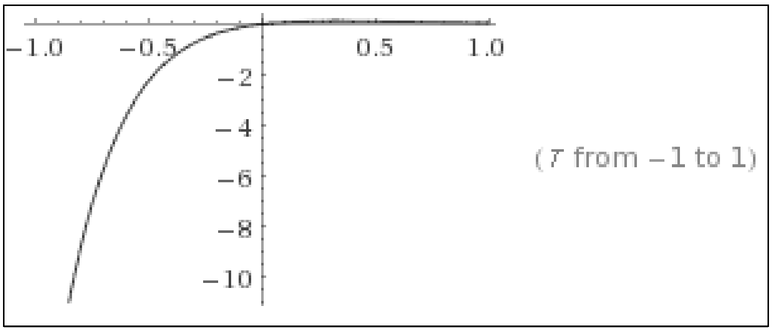
$$Sy_s - y(0) + 6y_s + 9\frac{y_s}{S} = \frac{1}{S}$$

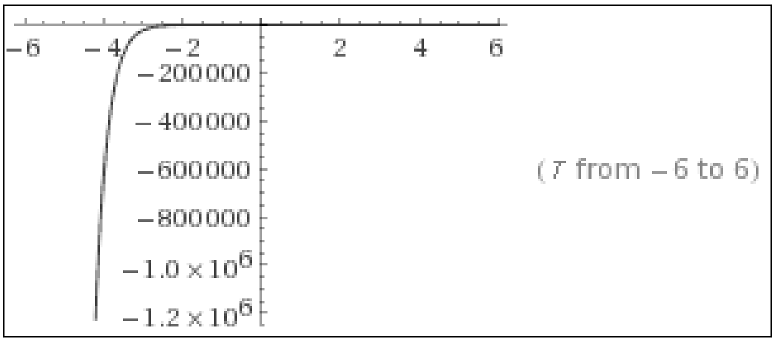
$$y_s\left(S + 6 + \frac{9}{S}\right) = \frac{1}{S} \Rightarrow y_s = \frac{S}{S(S^2 + 6S + 9)} = \frac{1}{(S+3)^2}$$

y la solución buscada será:

$$\boxed{y(T) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(S+3)^2}\right\} = T\cdot e^{-3T}}$$

La representación gráfica de esta solución, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 2

Sea resolver la ecuación integro-diferencial: $y' = 1 - \operatorname{sen} T - \int_0^T y(\tau)\, d\tau$, con la condición inicial: $y(0) = 0$.

Solución:

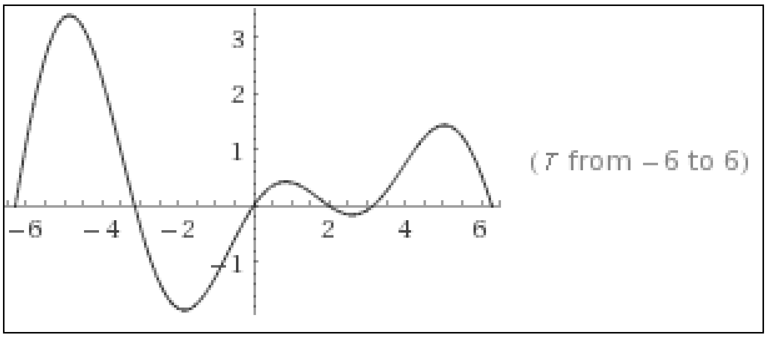
$$Sy_s - y(0) = \frac{1}{S} - \frac{1}{S^2+1} - \frac{y_s}{S}$$

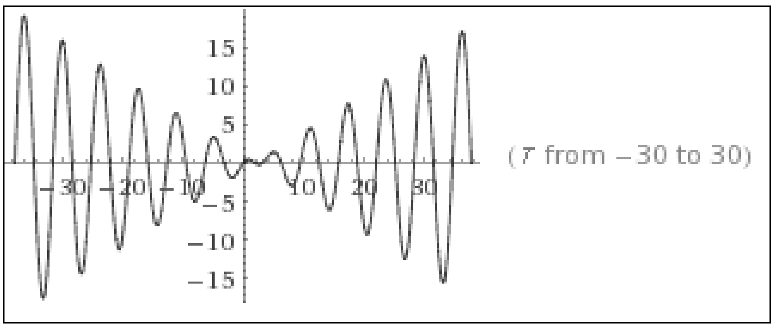
$$y_s\left(S + \frac{1}{S}\right) = \frac{1}{S} - \frac{1}{S^2+1} \Rightarrow y_s = \frac{1}{S^2+1} - \frac{S}{\left(S^2+1\right)^2}$$

y la solución buscada será:

$$\boxed{y(T) = \operatorname{sen} T - \frac{1}{2} T \operatorname{sen} T = \operatorname{sen} T(1 - \frac{T}{2})}$$

La representación gráfica de esta solución, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





5.6. PROBLEMAS DE CONTORNO

En el campo de las ecuaciones diferenciales, un *problema de valor de frontera (PVF) o contorno* se denomina al conjunto de una ecuación diferencial y a las *condiciones de frontera o contorno*. Una solución de un problema de condiciones de frontera (c.f.) es una solución de una ecuación diferencial que también satisface condiciones de frontera. Una iniciación a este tipo de problemas ya se ha visto en el capítulo 3 de este mismo libro.

Los problemas de condiciones de frontera aparecen en muchos aspectos de la física, como, v. gr., en las ecuaciones diferenciales que explican ciertos problemas físicos. Los problemas que involucran la ecuación de onda son comúnmente problemas de condiciones de frontera. Muchas clases de problemas de valores de frontera importantes son los problemas de Sturm-Liouville[20], a los que nos referiremos posteriormente. El análisis de estos problemas involucra funciones propias y operadores diferenciales.

Las condiciones de contorno (c.c.) de una ecuación diferencial son los valores restringidos que toma la función para determinados valores particulares de la variable independiente. Por ejemplo, si la ecuación implica a la velocidad, la condición de contorno podría ser la velocidad inicial, esto es, la velocidad al tiempo t = 0. Con objeto de obtener una solución completa, debe haber una condición de contorno para cada orden de la ecuación -dos condiciones de contorno para una ecuación de segundo orden, una sola condición para una ecuación diferencial de primer orden, etc.-. Si se encuentra una solución de la ecuación diferencial que satisfaga todas las condiciones de contorno, entonces esa es la única solución a esa ecuación; es lo que se llama el “teorema de la singularidad”. Por lo tanto, un enfoque razonable para la búsqueda de soluciones a las ecuaciones diferenciales en los problemas físicos o socioeconómicos, es utilizar una solución de prueba y tratar de forzarla para que se ajuste a las condiciones de contorno. Si tiene éxito este enfoque, es que se trata de la única solución posible.

En las ecuaciones diferenciales aplicables a problemas físicos, a menudo es posible comenzar con una forma general de solución y luego forzarla para adaptarse a las condiciones físicas de contorno del problema. Este tipo de enfoque ha sido posible por el hecho de que hay una y solo una solución a la ecuación diferencial, es decir, la solución de la ecuación

[20] Joseph Liouville (1809-1882) graduated from the *École Polytechnique* in 1827. After some years as an assistant at various institutions including the *École Centrale* de Paris, he was appointed as professor at the *École Polytechnique* in 1838. He obtained a chair in mathematics at the *Collège de France* in 1850 and a chair in mechanics at the *Faculté des Sciences* in 1857. In mathematical physics, Liouville made one fundamental contribution: the Sturm–Liouville theory, which was joint work with Charles François Sturm (1803-1855), and is now a standard procedure to solve certain types of integral equations by developing into eigenfunctions, and the fact (also known as Liouville's theorem) that time evolution is measure preserving for a Hamiltonian system. His work on boundary value problems on differential equations is remembered because of what is called today Sturm-Liouville theory, which is used in solving integral equations. This theory, which has major importance in mathematical physics, was developed between 1829 and 1837. Sturm and Liouville examined general linear second order differential equations and examined properties of their eigenvalues, the behaviour of the eigenfunctions and the series expansion of arbitrary functions in terms of these eigenfunctions.

diferencial es única (véanse los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones en el capítulo 1 de este mismo libro).

Expresando ello en términos de una ecuación diferencial de primer orden, para simplificar, veamos que si el problema:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \text{donde} \quad y(x_0) = y_0}$$

cumple la condición tal que f(x, y) y la derivada de y es continua en un rectángulo de valores determinados (x, y), entonces hay una y solo una solución a la ecuación que satisfaga las condiciones de contorno.

Muchos de los primeros problemas de valor de frontera han sido estudiados mediante los problemas de Dirichlet, o bien buscando una función armónica (solución de una ecuación de Laplace) cuya solución viene dada por el principio de Dirichlet.

Así pues, en multitud de problemas de Física y Matemáticas se dan ciertas mediciones que luego sirven para determinar las constantes que intervienen en la ecuación diferencial (se trata, sin duda, de una definición demasiado amplia de un determinado fenómeno).

Las condiciones anteriores, o condiciones de contorno, restringen y definen el fenómeno general a nuestro caso particular según el siguiente esquema:

(Definición General) ED $\rightarrow$ IG + CC $\rightarrow$ (IP) cc (Solución fenómeno concreto)

Para la resolución general de los problemas de contorno se emplea el siguiente método: dada una ecuación diferencial cualquiera, que casi siempre será de segundo orden, pues éste es el caso que más frecuentemente se nos presenta en los problemas técnicos y económicos, se halla su integral general y de ella se encuentran las integrales particulares que verifiquen las condiciones de contorno.

Se dice que el problema con valores en la frontera es “homogéneo” si tanto la ecuación diferencial como las condiciones en la frontera son homogéneas; de otro modo, el problema es “no homogéneo”.

Las condiciones reseñadas pueden venir definidas por:

- el valor de la función en dos puntos del intervalo, o bien
- el valor de la función en un punto y el valor de su derivada.

Tendremos, pues, el siguiente esquema metodológico:

$$A_0(x)y'' + A_1(x)y' + A_2(x)y = F(x)$$

$$\left.\begin{matrix} l_1(y) = u_1 \\ l_2(y) = u_2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Desarrollando el anterior producto de matrices, tendremos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = u_1 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = u_2 \end{matrix}\right\}$$

Los números reales α_1, α_2, α_3, α_4, β_1, β_2, β_3, β_4 son cualesquiera; únicamente existe la restricción de que en la matriz que formen no haya tantos ceros que anulen a y(a) ó y'(a) y a y(b) ó y'/b) pues, en este caso, el problema no sería de contorno o frontera (PVF) y las condiciones serían entonces condiciones iniciales (PVI). Resumiendo lo expuesto hasta aquí, veamos que el proceso general de resolución consiste en:

1) Hallar la IG.
2) Hallar la IP que cumpla las c.c.

Existen casos en los cuales el cálculo de la IG resulta un problema muy difícil de resolver, y entonces intentamos calcular las IP sin pasar necesariamente por la obtención previa de la IG. Esto es:

$$ED \longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow IG \xrightarrow{\text{c.c.}} IP$$

Método especial

c.c.

Los problemas de Sturm-Liouville (S-L) tienen características deseables que no son compartidas con problemas de valor propio más generales. Sus propiedades son las siguientes:

a) Los valores propios de un problema de S-L son todos reales y no negativos.
b) Los valores propios de un problema de S-L se pueden arreglar para formar una sucesión infinita estrictamente creciente, es decir: $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ Además, $\lambda_n \to \infty$ mientras que $n \to \infty$.
c) Para cada valor propio de un problema de S-L existe una y solo una función propia linealmente independiente. Por ello, le corresponde a cada valor propio λ_n una única función propia con el principal coeficiente unitario.

A continuación, en la página siguiente, veamos los diferentes tipos de problemas de contorno que, usualmente, se pueden presentar.

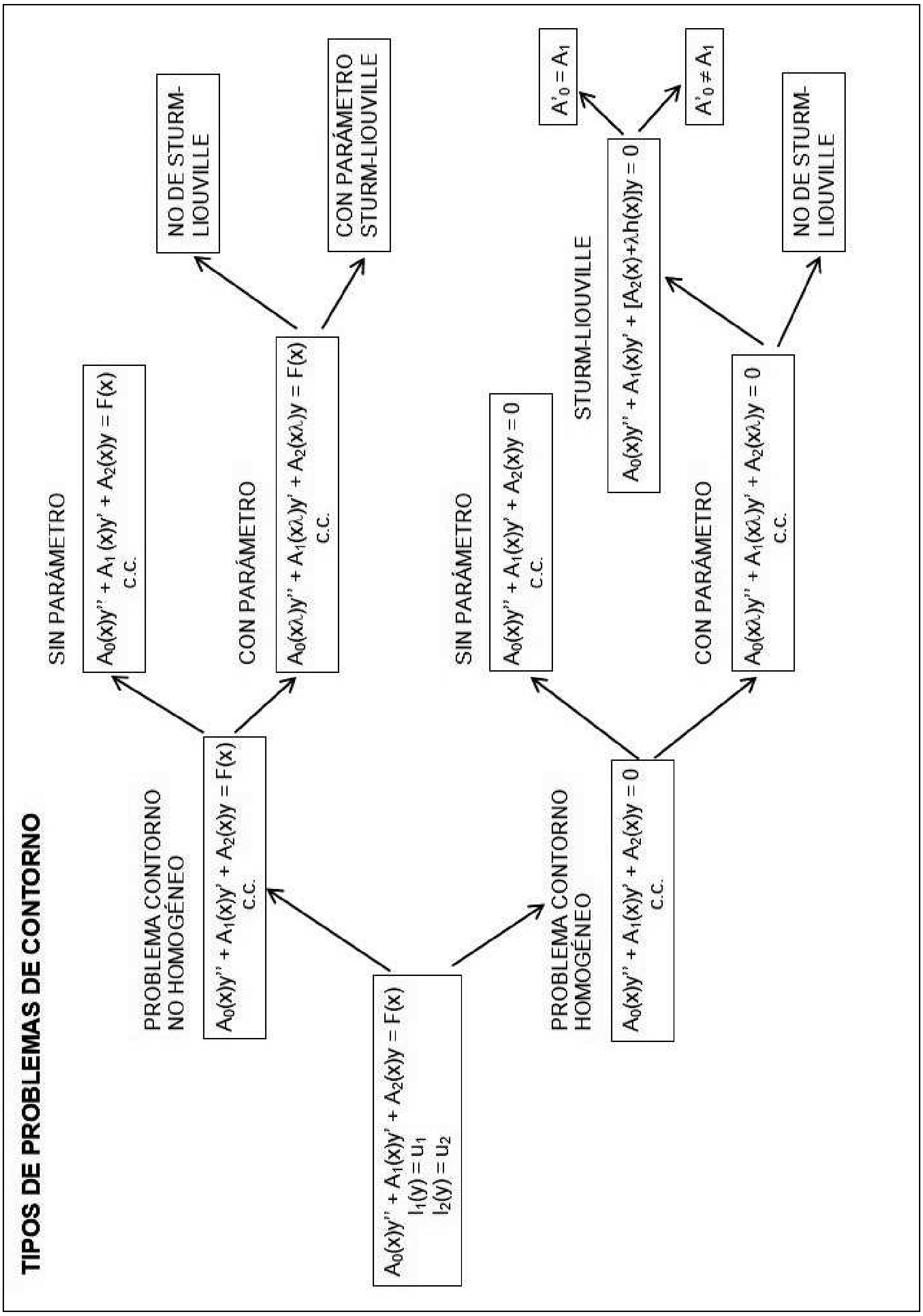


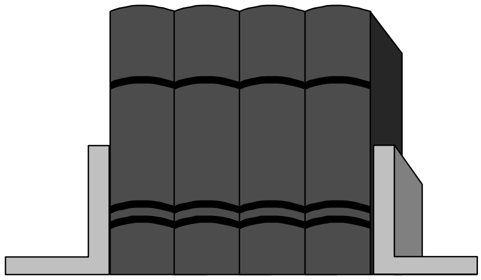
FIG. 9.7. Diferentes tipos de problemas de contorno.

ABREVIATURAS Y SIGLAS

%	Porcentaje (tanto por ciento)
...	Puntos suspensivos (etcétera)
ºC	Grados centígrados
€	Euros
arctg	Arcotangente
CAD	*Computer Aided Design* (diseño asistido por ordenador)
Cap.	Capítulo
c.c.	Condiciones de contorno
c.f.	Condiciones de frontera
CK	Cauchy-Kovalevskaya
cm.	Centímetro
c.s.q.d.	Como se quería demostrar
CU	Coeficiente de Uniformidad
CV	Coeficiente de Variación de Pearson
DM	Desviación media absoluta (respecto a la media aritmética)
Dr.	Doctor
D-W	Durbin-Watson
E	Este
E-C	Euler-Cauchy
Ed.	Editorial
ED	Ecuación Diferencial
EDF	Ecuación en Diferencias Finitas
EDO	Ecuación Diferencial Ordinaria
EDP	Ecuación en Derivadas Parciales
EEUU	Estados Unidos
EHJ	Ecuación de Hamilton Jacobi
EI	Ecuación Integral
EID	Ecuación Integro-Diferencial
erf	Función error
erfi	Función imaginaria de error
et alt.	*Et altri*
etc.	Etcétera
EV	Espacio vectorial
Fig.	Figura
ft	*Feet*
GI	*General Integral*
g.l.	Grados de libertad
Ha.	Hectárea
Hg.	*Hidrargirium* (Mercurio)
hPA	Hectopascal
I.G. (IG)	Integral General
I.P. (IP)	Integral Particular
I.S. (IS)	Integral Singular
Jr.	Júnior
Kg.	Kilogramo

Kp.	Kilopondio
lb	Libra
ln o Ln	Logaritmo neperiano o natural
log.	Logaritmo decimal o de Briggs
m.	Metro
máx	Máximo
m^2	Metro cuadrado
m^3	Metro cúbico
m.a.s.	Movimiento armónico simple
mbar	Milibar
MC	Mínimos cuadrados
mg.	Miligramo
m.l.	Metro lineal
mm.	Milímetro
m.s.n.m.	Metros Sobre el Nivel del Mar
m.v.a.s.	Movimiento vibratorio armónico simple
N	Norte
N	Newton
nº	Número
ODE	*Ordinary Differential Equation*
Pa	Pascal
pág.	Página
PC	*Personal Computer*
PI	*Particular Integral*
PVF	Problema de Valor Frontera
PVI	Problema de Valor Inicial
RLM	Regresión Lineal Múltiple
RLS	Regresión Lineal Simple
S	Sur
sec.	Second
seg.	Segundo
SE	Sistema Exterior
SF	Sistema Físico
SG	Sistema Gestor
S-L	Sturm-Liouville
tg	Tangente
Tn.	Tonelada métrica
UNED	Universidad Nacional de Educación a Distancia
U.S.A.	*United States of America*
VE	Variables de entrada
VS	Variables de salida
VI	Variables internas o intermedias
VA	Variables de acción
VES	Variables esenciales
v.gr.	*Verbi gratia*
W	Oeste

****



BIBLIOGRAFÍA Y FONDOS DOCUMENTALES

(*) Bibliografía local.
(**) Bibliografía general.
(***) Bibliografía recomendada.

1.-AITKEN, A.C. *Determinants and Matrices*. Interscience. New York, 1951. (**).

2.-ALCAIDE INCHAUSTI, A. *Estadística (Introducción). Unidades Didácticas. Uned.* Ed. Gráficas Torroba. Madrid, 1974.(**).

3.-ALCAIDE INCHAUSTI, A.; INFANTE MACÍAS, R.; GARCÍA SESTAFE, J.V. *Matemáticas. Unidades Didácticas. Uned.* Ed. Gráficas Torroba. Madrid, 1974.(**).

4.-ALCAIDE INCHAUSTI, A. *Matemáticas para economistas y matemáticas empresariales.* Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid, 1981. 476 pág. (**).

5.-ALCAIDE, A.; RODRÍGUEZ, J.; PRIETO, E; ÁLVAREZ, A.; MARTÍN, D. *Números complejos. Introducción a las ecuaciones recurrentes. Teoría y ejercicios.* Editorial San Julián, S.L. Madrid, 1993. 122 pág. (**).

6.-ALLEN, R.G.D. *Mathematical Analysis for Economists*. Macmillan, Londres, 1938. (**).

7.-ÁLVAREZ VALDÉS, L. *Memento de matemáticas*. Editorial Dossat. Madrid, 1921. 375 pág. (**).

8.-BALBÁS, A.; GIL J.A.; GUTIÉRREZ, S. *Análisis Matemático para la Economía II: Cálculo integral y sistemas dinámicos*. Ed. Thomson-Paraninfo-AC. Madrid, 2005. 372 pág. (**).

9.-BELTRÁN, J.C. *Ejercicios resueltos de ecuaciones diferenciales*. On line: http://ed21d.webcindario.com/ (**).

10.-BIRKHOFF, G.; MACLANE, S. *A Survey of Modern Algebra*. Ed. revisada, Macmillan. New York, 1953. (***).

11.-BRONSON, R.; COSTA, G. *Ecuaciones diferenciales*. Ed. McGraw-Hill Interamericana. Colección Schaum. México, 2008. 385 pág. (***).

12.-BROSS, I.D.J. *La decisión estadística*. Ed. Aguilar. Madrid, 1958. (***).

13.-CASTAÑEDA, J. *Lecciones de Teoría Económica*. Editorial Aguilar. Madrid, 1968. 739 pág. (***).

14.-COUNRANT, R. *Differential and Integral Calculus*. Blackie. Londres, 1934. (**).

15.-DESBAZEILLE, G. *Ejercicios y problemas de investigación operativa.* Ediciones ICE, Selecciones de economía de la empresa. Madrid, 1969. 358 pág. (**).

16.-FERRER FIGUERAS, L. *La teoría de sistemas, instrumento básico en la evolución adaptativa de Ciencia, Estado y Sociedad, en el marco del ecosistema*. Escuela de Investigación Operativa. Universidad de Valencia. Valencia, 1972. (***).

17.-FINE, H.B. *Calculus*. Macmillan. New York, 1937. (***).

18.-FRANK AYRES, JR. *Theory and problems of Differential and Integral calculus*. Schaum Publishing Company. New York, 1950. 346 pág. (**).

19.-FRANQUET BERNIS, J.M. *Anàlisis territorial.* CADUP-Estudios. Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 1990-91. 574 pág. (**).

20.-FRANQUET BERNIS, J.M. *Teoría, diseño y construcción de terrazas-voladizo.* Associació d'Enginyers Agrònoms de Catalunya. Tortosa, 1995. 780 pág. (**).

21.-FRANQUET BERNIS, J.M. *El estudio operativo de la psicología. Una aproximación matemática.* CADUP-Estudios. Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 2008. 372 pág. (**).

22.-GARCÍA CAMOYANO, P. *Formulario de Matemáticas Superiores*. Manuales Técnicos Koel. Editorial Tesoro. Madrid, 1967. 470 pág. (**).

23.-GARCÍA SESTAFE, J.V. *Matemáticas para economistas.* Confederación Española de Cajas de Ahorro. Libros de Ejercicios. Madrid, 1978. 270 pág. (**).

24.-GARCÍA SESTAFE, J.V.; RODRIGUEZ RUIZ, J. *Ciencias Económicas y Empresariales. Curso de matemáticas en forma de problemas.* Centro de Estudios Universitarios "Ramón Areces". Editorial Ceura. Madrid, 1986. 604 pág. (**).

25.-GOLDBERG, S. *Introduction to Difference Equations.* New York, Wiley, 1958. (***).

26.-GONZÁLEZ, T. *Ejercicios Resueltos de Transformada de Laplace de Ecuaciones Diferenciales*. UNET (Universidad Nacional Experimental del Táchira). Dpto. de Ingeniería Electrónica, Núcleo de Instrumentación y Control. San Cristóbal, 2009. (***).

27.-GOURSAT, E. *A Course in Mathematical Analysis*, vol. I. Boston, Ginn, 1904. (***).

28.-HENDERSON, J.M.; QUANDT, R.E. *Teoría microeconómica.* Ediciones Ariel. Esplugues del Llobregat (Barcelona), 1962. 334 pág. (**).

29.-HERNÁNDEZ, H.; NÚÑEZ, L. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales.* Universidad de Los Andes, Mérida. On line: http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/hector/prontuario/metodos2/S06_C18.pdf (**).

30.-HÜTTE, ACADEMIA. *Manual del Ingeniero*. Tomo I. Ed. Gustavo Gili. Barcelona, 1938. 1.444 pág. (**).

31.-JIMÉNEZ, P.; GARCÍA, A.; MORÁN, F. *Hormigón armado*. Ed. Gustavo Gili, S.A. Barcelona, 2000. 844 pág. (**).

32.-LENTIN, A.; RIVAUD, J. *Éléments d'algèbre moderne*. Ed. Librairie Vuibert. París, 1963. 334 pág. (**).

33.-MARTÍNEZ LASHERAS, J.L. *Ejercicios de Teoría Económica I*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos. Cátedra de Economía y Política Agraria. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, 1969. 182 pág. (**).

34.-MARTÍNEZ LASHERAS, J.L. *Ejercicios de Política Agraria*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, 1970. 114 pág. (**).

35.-MILNE-THOMPSON, L.M. *The calculus of Finite Differences*. Macmillan. Londres, 1933. (***).

36.-MIRANDA, J.L.; *Telesilla para paso de ríos*. Ediciones Deportivas ALG. Madrid, 1964. 22 pág. (**).

37.-NIETO OSTOLAZA, M.C. *Matemáticas para economistas*. Confederación Española de Cajas de Ahorro. Libros de Lecturas. Madrid, 1976. 600 pág. (**).

38.-NIJ PATZÁN, E.F. *Matemática Aplicada 1*. Escuela de Ciencias. Facultad de Ingeniería. Universidad de San Carlos de Guatemala, 2003. (**).

39.-OSGOOD, W.F. *Advanced Calculus*, 3ª. ed. Macmillan, New York, 1935. (**).

40.-PEREZ WHITE, T. *Resistencia de materiales.* Gráficas Europa. Salamanca, 1976. 594 pág. (**).

41.-PERLIS, S. *Theory of Matrices*. Addison-Wesley. Cambridge, Mass., 1952. (***).

42.-PRIETO, E; RODRÍGUEZ, J.; GARCÍA, C.; GUTIÉRREZ, P.; VELASCO, J.R. *Matemáticas 2. Economía y Empresa. Ejercicios resueltos.* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A. Madrid, 1991. 518 pág. (**).

43.-PUIG ADAM, P. *Curso Teórico Práctico de Ecuaciones Diferenciales aplicado a la Física y Técnica*. Nuevas Gráficas, S.A. Madrid, 1965. 432 pág. (**).

44.-RICHARDSON, H. W. *Economía regional*. Ed. Vicens-Vives. Barcelona, 1973. (**).

45.-RODRÍGUEZ RUIZ, J.; PRIETO SÁEZ, E.; HERNÁNDEZ MORALES, V.; GÓMEZ TOLEDANO, M.P.; *Matemáticas 2. Economía y Empresa. Teoría.* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A. Madrid, 1991. 484 pág. (**).

46.-SALIGER, R. *El hormigón armado*. Editorial Labor, S.A. Barcelona, 1943. 742 pág. (**).

47.-VEGAS PUEBLA-COLLADO, M. *Elementos de geometría analítica*. Establecimiento tipográfico de sucesor de J. Peláez. Toledo, 1922. (**).

48.-WOODS, F.S. *Advanced calculus*. Nueva edición, Boston, Ginn, 1934. (**).

ÍNDICE GENERAL

Pág.

Pág.

Pág.

Pág.

Pág.

Pág.

Pág.

(EN CD ANEXO, presentaciones en Microsoft PowerPoint):

1. ECUACIONES DIFERENCIALES I
2. ECUACIONES DIFERENCIALES II
3. ECUACIONES DIFERENCIALES III
4. ECUACIONES DIFERENCIALES IV
5. ECUACIONES DIFERENCIALES V
6. ECUACIONES DIFERENCIALES VI
7. ECUACIONES DIFERENCIALES VII
8. ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS I
9. ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS II
10. ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS III

ÍNDICE DE FIGURAS

Pág.

Capítulo 9.

* * * * * *