II.4 MUESTRA DE EJERCICIOS PARA APLICAR DESDE LA PROPUESTA METODOLÓGICA

Objetivo: Recomendar las características de los ejercicios a realizar por los alumnos y algunas sugerencias para el profesor ante esta realización.

Al tratar aquí problemas de algebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo, no se pretende que el profesor aprenda matemática. Como se mencionó antes; para aplicar esta metodología es necesario que el profesor tenga amplios conocimientos de lo que está enseñando; de preferencia con conocimientos superiores al que se encuentra como docente. El único objetivo de abordar lo siguiente es transmitir algunas experiencias del autor; experiencias que en la práctica han dado resultados excelentes. El autor de este documento hace relación con estos problemas de matemática aplicada, porque es el área del conocimiento donde profesionalmente se ha desempeñado; pero el profesor de matemática que aplique esta metodología lo podrá relacionar con lo que sabe.

ÁLGEBRA

Material requerido por el alumno.- cuaderno de cuadrícula, libro de álgebra

Conocimientos previos.- sólo la aritmética.

Se considera que, por no ser necesario, no se incluirán ejemplos del total del contenido temático del álgebra y que se detallan en el Anexo 1;

Suma

Puede iniciar desarrollando en el pizarrón pequeñas sumas horizontales con números positivos, después números negativos, luego la combinación de positivos y negativos. Sugiera a sus alumnos que resuelvan problemas semejantes a los anteriores si los encuentra en su libro de texto; si no hay, entonces que sean de su creación. Todo esto será muy fácil para ellos.

13 + 6 +12 + 4 =

13 - 6 + 12 – 4 =

13 + 6 -12 + 4 =

8 + 9 +11 + 6 =

-8 – 9 – 11 + 6 =

No olvide, desde un principio use la terminología matemática **y los <u>problemas que usted realice a manera de ejemplo, déjelos en el pizarrón para que los alumnoslos usen como guía</u>.**

Cuando sus alumnos estén concentrados resolviendo algún problema, procure hasta donde sea posible no interrumpirlos.

Continúe con las sumas algebraicas paro ahora usando literales con exponente uno. Mezcle sumas con literales diferentes. Siempre resolviendo problemas, usted algunos en el pizarrón para ejemplo y ellos en su cuaderno. Probablemente pregunten por qué se usan letras y qué significan.

$6m + 2n - 4m + 5n + m - n =$

$-4m - 2n + 8m - 6n + 4m - n =$

$6x - 3y + 8x - 5y - 9x + y =$

$-11x - 12y + 2x - 5y + 4x - 6y =$

Después puede usar sumas algebraicas con literales y exponente diferentes de uno. Primero términos con literales y exponente iguales, incluyendo exponentes fraccionarios. Después combinando términos con literales y exponentes diferentes. Incluya también términos con radicales; lo anterior es para que ya se enteren de la existencia de estos. Por ejemplo:

$-6x^2 + 4x^2 - 3x^2 - 5x^2 - 3x^2 =$

$$4x^2y^5 + 8x^3y^4 + 7x^2y^5 + 12x^3y^4 =$$

$$7\frac{xy}{a} - 5\frac{xy}{a} + 6\frac{xy}{b} + 3\frac{xy}{b} + 8\frac{xy}{a} - \frac{xy}{b} =$$

$$3x^{2/3}y^{5/2} - 7x^{2/5}y^{1/3} - 4x^{2/3}y^{5/2} + 11x^{2/5}y^{1/3} =$$

$$3\sqrt{2x^2 - 3y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2x^2 - 3y^2} - 5\sqrt{x^2 + y^2} =$$

Recuerde; sus alumnos siempre deberán resolver gran cantidad de problemas. Siempre desde lo fácil a lo muy difícil.

<u>Multiplicación</u>

Explique y que el alumno comprenda, qué es la multiplicación, el por qué de la ley de los signos, si tienen dificultad para su interpretación, no se preocupe; que las aprendan sin saber el origen, cuando ellos generen más conocimiento, la vuelve a explicar y la interpretarán con facilidad. Por ejemplo:

$$(+)(-)(+)(-)(+) =$$

$(-)(-)(-)(-)(+)=$

$(-)(-)(+)(+)(-)(-)=$

En el pizarrón desarrolle horizontalmente pequeñas multiplicaciones primero con números positivos, luego con negativos y después con la combinación de ambos. Si en sus alumnos hay cansancio por resolver muchos problemas del mismo tema, pase a otro o que resuelvan algunos problemas de temas ya vistos. Al realizar la multiplicación en el pizarrón se sugiere que se haga explicando verbalmente y con flechas usando colores diferentes, o con gis; por ejemplo:

$(6)(-2)(-1)(-2)=$ $\quad$ $(3)(-1)(-1)(-1)=$

$(-2)(-5)(4)(-1)=$ $\quad$ $(-4a)(3)(-5)(-3)=$

Que resuelvan problemas

Ahora ya puede usar en las multiplicaciones literales con exponentes enteros, primero positivos y después negativos. Antes tendrá que explicar verbal y visualmente en el pizarrón la ley de los exponentes relacionada con esto; para explicar lo anterior primero utilice números como base y después hágalo con literales. Que sus alumnos resuelvan problemas sencillos, explique problemas con mayor grado de dificultad y que ellos resuelvan problemas relacionados, aumente el grado de dificultad y que continúen resolviendo problemas. **Recuerde que, los problemas que usted haga en el pizarrón, deben quedar en él para guía de sus alumnos cuando estén trabajando en su mesa banco**.

$(-a)(-b)(-c)=$

$(-2a)(-3b)(-4c)=$

$(-5a)(2b)(-3c)(-2c)=$

$3(a+b)=$

$4(x+y)=$

$2(3x+2y)=$

$6(-5x-4y)=$

$-3(-3x-4y)=$

$3x^{2/3}y^{1/2}\cdot 4x^{1/3}y^{3/2}=$

$4x^{-3/2}y^{4/3}\cdot x^{1/3}y^{-2/3}\cdot 2x^{4/5}y=$

$\left(2x^{1/3}-3y^{4/5}\right)\left(3x^{3/2}+5y^{1/5}\right)=$

$\left(a^{3/2}b^{1/3}c^{1/2}-2b^2c^3\right)\left(a^{3/2}c^{1/4}-3b^{3/5}\right)=$

Que realicen la multiplicación y reduzcan términos semejantes. Tal vez aquí sus alumnos hayan olvidado cómo reducir términos semejantes. Recuérdeselo.

$3(a+b)+5(a+b)+6(a+b)-3(a+b)-7(a+b)=$

$-5(3a-2b-4c)-4(3a-2b-4c)+7(3a-2b-4c)=$

$-5x(3a-2b-4c)-6x(3a-2b-4c)+9x(3a-2b-4c)=$

Productos notables

Primero con números

(5 + 3) (3 +2) = 15 + 10 + 9 + 6 = *(8 – 6) (-7 – 5) = -56 - 40 + 42 + 30 =*

Convine

(3x – 3) (5x + 4) = *(-2ax+3by)(ax-2y)=*

$(7x-2y)(2a+3b)=$ $(5x+3y)(6a+4b)=$

$3(5x+3y)(6a+4b)=$ $-3(6x-3y)(3a-2b)=$

Con exponentes enteros, positivos y negativos

$2x^2 y.\ xy.\ 3x^3 y=$ $3a^2 b^3.\ 2a^3 b^{-1}.\ 3a^{-1} b^{-4} =$

$x^4.\ x^{-2}.\ x^3.\ x^{-1} =$ $2a^2 b^3.\ 3ab^2.\ 4a^2 b =$

$3x^4.2x^{-2}.\ 3x.\ x^3 =$ $12a^3 b^3 c^3.\ 2ab^{-4} c^{-5}.\ 2a^{-3} b^{-5} c^{-6} =$

Con exponentes fraccionarios

$3x^{2/3}y^{1/2} \cdot 4x^{1/3}y^{3/2} =$

$4x^{-3/2}y^{4/3} \cdot x^{1/3}y^{-2/3} \cdot 2x^{4/5}y =$

$\left(2x^{1/3} - 3y^{4/5}\right)\left(3x^{3/2} + 5y^{1/5}\right) =$

$\left(a^{3/2}b^{1/3}c^{1/2} - 2b^2c^3\right)\left(a^{3/2}c^{1/4} - 3b^{3/5}\right) =$

Recuerde, que sus alumnos resuelvan gran cantidad de problemas de su libro de texto; primero lo que incluyen el resultado y después los de resultado no incluido

Sea creativo; probablemente aquí usted ya esté en posibilidades de ampliarse a manera de exploración un poco con otras cosas sin que éstas sean parte de la enseñanza en ese momento, se motivarán si lo comprenden aunque sea un poco.

Ecuaciones lineales en una variable

Explique por qué es una ecuación lineal

Este tipo de ecuaciones no los enseñe como tradicionalmente lo hacen algunos profesores, fácilmente se confunden; inclusive en algunos libros las presentan así:

4x + 10 = 1 - 2x

$4x + 10 + 2x - 10 = 1 - 2x + 2x - 10$

$6x = - 9$

$x = - 9/6$

Cuando se realiza matemática aplicada, nunca se hace eso.

Más fácil; primero inicie con ejemplos que tengan sólo números, explicando por qué cualquier cantidad cambia de signo al pasar a uno u otro lado del signo igual, por ejemplo:

$8 + 4 = 12$ luego entonces $8 = 12 – 4 = 8$ del mismo modo $4 = 12 – 8 = 4$

o también $8 + 4 - 12 = 0$ de igual manera $- 12 = - 4 - 8 = - 12$

Después combine números y literales

$8x – 3 = 5x + 6$	$12x - 6 – 3x = 8 + 2x$
$8x – 5x = 6 + 3$	$12x – 3x – 2x = 8 + 6$
$3x = 9$	$7x = 14$
$x = 9/3 = 3$	$x = 14 / 7 = 2$

Que resuelvan problemas semejantes a los anteriores

Realice ejemplos con más grado de dificultad y que resuelvan problemas

Recuerde; resuelva dos o tres problemas tipo y que queden en el pizarrón, para que sus alumnos los vean y se guíen por ellos.

Factorización

Inicie con factorización; son fáciles de aprender y de gran motivación para ellos. Una forma que se facilita mucho para factorizar es la siguiente:

$6x^2 – 13x + 6 = 0$		$2x^2 + 4ax – 6a^2$		$8a^3 + 36a^2 + 6a + 27$	
$2x$	$- 3 = 9x$	$2x$	$-2a = -2\,ax$	$4a^2$	$3 = 6a$
$3x$	$-2 = \underline{- 4x}$	x	$3a = \underline{6ax}$	$2a$	$9 = 36a$
	$- 13\,x$		$4ax$		$36a^2+6a$
$(2x – 3)\,(3x – 2)$		$(2x – 2a)\,(x + 3a)$		$(4a^2 + 3)\,(2a + 9)$	

Claro que el resultado final se obtendrá quizá después de proponer algunos factores, hasta que se encuentre la combinación correcta..

Aquí puede aprovechar para enseñarlos a resolver ecuaciones de segundo grado usando este método. Por ejemplo:

$6x^2 – 13x + 6 = 0$

$2x$ $\quad - 3 = - 9x$

$3x$ $\quad -2 = \underline{- 4x}$

$-13\,x$

$(2x – 3)\,(3x – 2) = 0$

(2x – 3) = 0   *(3x – 2) = 0*

Explique por qué cada factor se iguala a cero y despeje

Que resuelvan problemas de más alto grado de dificultad. Sea creativo, por ejemplo.

$2(a+b)-3a(a+b)=$

$a^2+4ab+4b^2+2+2b=$

$(a+b)^2+4(a+b)+4=0$

Que resuelvan problemas con más alto grado de dificultad

Factorización de diferencia de cuadrados

Haga la demostración del por qué de ese resultado. Primero con números.

(16 – 9) = 7   si factorizamos *(4 – 3)(4 + 3) = (1)(7)= 7*

$x^2 - 4 = \underline{(x-2)\,(x+2)} = x^2 + 2x - 2x - 4 = \underline{x^2 - 4}$

$x^2-y^2+2(x-y)=$

$$x^2-4xy+4y^2-a^2-2ab-b^2=$$

Factorización de suma y diferencia de cubos.-

Igual que en la diferencia de cuadrados, demuestre el por qué del resultado. Aquí se pueden presentar dificultades en la comprensión de esto. Que sus alumnos resuelvan problemas sencillos; después, si no pueden con problemas difíciles, entonces aborde algo ya visto o un tema nuevo que usted considere fácil. Por ejemplo: resolver ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general, sin aun demostrar la fórmula; puede usar ecuaciones factorizables para comprobar los resultados. Posteriormente, la fórmula general se verá más en detalle al tratar completando el trinomio cuadrado perfecto. Después regrese a factorización de suma y diferencia de cubos; probablemente ya tengan más habilidad para resolver problemas difíciles de este tema.

Primero explique con números

$8-27=-19=(2-3)(2^2+(2)(3)+3^2)=(-1)(19)=-19$

$8+27=35=(2+3)(2^2-(2)(3)+3^2)=(5)(7)=35$

Que resuelvan problemas como:

$(x^3-y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2-y^3=x^3-y^3$

$8a^3+64b^3=$

$27(a+1)^3+b^3=$

$x^6+64y^6=$

$\frac{8a^3}{27b^3}-\frac{27b^3}{8a^3}=$

Aplique problemas más difíciles

Factorización por factor común

De lo fácil a lo difícil. Problemas como:

$3(x-y)-b(x-y)=$

$x^2-y^2+2(x-y)=$

$8x^3(a-b)-64y^3(a-b)=$

Recuerde expresarse siempre con la terminología

Multiplicación y división de fracciones, reduciendo a términos mínimos.

Los tipos de factorización aprendidos anteriormente, se reforzarán al tratar este tipo de problemas.

Inicie con fracciones pequeñas utilizando primero números y después literales; que sus alumnos resuelvan problemas. Aumente el grado de dificultad. No incluya de su libro aquellos problemas que incluyan suma y diferencia de cubos, si es que sus alumnos aún tienen problemas con esta factorización. Déjelos para el final

Resolver este tipo de problemas se les facilita mucho y es de más motivación para ellos. Que sus alumnos que resuelvan problemas como los siguientes, pero antes que realicen problemas sencillos:

$$\frac{x^2+4xy-12y^2}{x^2+7xy+6y^2}\cdot\frac{x^2-6xy-7y^2}{x^2-xy-12y^2}\div\frac{x^2-9xy+14y^2}{x^2-xy-12y^2}=$$

$$\frac{3a^2-a-10}{8a^2-2a-3}\cdot\frac{10a^2+a-2}{3a^2+20a+25}\div\frac{5a^2+8a-4}{12a^2+11a-15}=$$

Adición de fracciones reduciendo a términos mínimos

Igual que en el caso anterior; aquí se reafirmará el conocimiento sobre los diversos tipos de factorización y adquirirán más habilidad en esto.

Inicie con fracciones pequeñas, utilizando primero números y luego literales; que resuelvan primero problemas sencillos y después provoque que sus alumnos resuelvan problemas con alto grado de dificultad.

Pida a sus alumnos que reduzcan a términos mínimos problemas como los siguientes:

$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}+\frac{2x}{y^2-x^2}=$$

$$\frac{1}{2a^2+3a+1}+\frac{5a}{2a^2-a-3}+\frac{a+2}{4a^2-4a-3}=$$

$$\frac{3a-1}{(a-1)(a+1)} - \frac{a+3}{(a+1)(a+2)} - \frac{1}{(a+2)} =$$

Fracciones complejas

Primero con números.

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}} =$$

$$\frac{7 - \frac{1}{3}}{\frac{4}{3} - 1} =$$

Después agregue problemas como los siguientes:

$$\frac{y - \frac{y^2 - 1}{2}}{\frac{2}{y} - \frac{2}{y^2}} =$$

$$\frac{\frac{6}{y^2 + y - 6} + 1}{\frac{9}{y^2 + 2y - 8} + 1}$$

Binomio al cuadrado

Demuéstrelo con número por ejemplo con:

$(3 + 2)^2 = (5)^2 = 25$ $\quad$ $(3 + 2)(3 + 2) = 9 + \mathbf{6 + 6} + 4 = 25 = 9 + 2(6) + 4 = 25$

$(1° + 2°)^2 = (1°)^2 + 2(1°)(2°) + (2°)^2$

$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Usted también lo puede demostrar geométricamente con la superficie de un cuadrado perfecto.

Aumente el grado de dificultad

$(a - b)^2 =$ $\quad$ $(2x + 3y)^2 =$ $\quad$ $(3^{a} - 2b)^2 =$

$(ax^2 + b^3y^2)^2 = (ax^2 + b^3y^2)(ax^2 + b^3y^2) = a^2x^4 + ab^3x^2y^2 + ab^3x^2y^2 + b^6y^4$

$= a^2x^4 + 2ab^3x^2y^2 + b^6y^4$

Incluya también fracciones y radicales, por ejemplo:

$$\left(\frac{2a^2}{3x} - \frac{4b}{5y^2}\right)^2 = \qquad \left(\sqrt{2x} - \sqrt{3y}\right)^2 =$$

Enséñeles a elaborar el triángulo de Pascal y que eleven binomios a la “n” potencia. También podrán elevar polinomios al cuadrado; el poder realizar esto, es muy motivante para ellos.

Recuerde; el buen aprendizaje se obtiene al resolver problemas con alto grado de dificultad.

Binomio al cubo

Proceda como en el caso anterior

Ecuaciones lineales en dos variables

Que sus alumnos primero aprendan a graficar, obteniendo una serie de puntos; o bien, obteniendo las intersecciones de la recta con los ejes X e Y. Que sus alumnos aprendan a identificar cuando son rectas paralelas; para esto tendrá que aplicar algunos principios de Geometría Analítica. Aquí es un momento oportuno para que aprendan a graficar curvas.

Al tratar los métodos de eliminación por suma o resta, igualación y sustitución; que aprendan a despejar y luego a despejar mentalmente; esto es de mucha motivación para el alumno. Recuerde; es necesario que los alumnos resuelvan gran cantidad de problemas.

Aproveche que ya dominan los métodos mencionados en el párrafo anterior para aplicarlos en resolver un par de ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas o una ecuación cuadrática y una ecuación lineal

Se sugiere que aquí no se traten los problemas en palabras que están incluidos en este apartado; se considera que a este nivel aun no están en posibilidades de realizarlas. Esto se puede abordar cuando se tenga un avance en la Trigonometría. Pero si usted desea intentarlo, hágalo.

Exponentes

A este nivel los estudiantes ya tendrán algún conocimiento en el manejo de los exponentes, adquiridos cuando se trato la multiplicación.

Las leyes de los exponentes explíquelas y demuéstrelas utilizando números y después con literales. Por ejemplo:

$2^4 = 2^1 . 2^1 . 2^1 . 2^1 = 2^4 = 2^2 . 2^2 = 2^4 = 2^1 . 2^3 = 2^4$

$(2^2)^3 = 2^2 . 2^2 . 2^2 = 2^6 = 64$ también $(2^2)^3 = 2^{2 . 3} = 2^6 = 64$

$(2 . 3)^4 = 6^4 = 2^4 . 3^4 = 16 . 81 = 1296$

$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$ $\frac{x^4}{x^6} = x^{4-6} = x^{-2}$

Que sus alumnos resuelvan problemas relacionados con los anteriores; si no es necesario esto porque les es muy fácil, entonces aumente el grado de dificultad.

Que simplifiquen cada expresión, dejando los resultados libres de exponentes negativos o nulos.

$\left(\frac{p^{-3}r^{-2}}{4^0 p^2 r^{-1}}\right)^{-5} =$ $\frac{x^{-1}y^2 + x^2y^{-1}}{x^{-1} + y^{-1}} =$ $\left(\frac{4^{-1/3}x^{1/2}y^{5/2}}{5^{1/3}x^{-5/2}y^{-3/2}}\right)^{-3} =$

A esta altura del curso el maestro ya debe tener un buen dominio de la técnica; por lo tanto pasaremos a lo siguiente:

TRIGONOMETRÍA

Material requerido por el alumno.- cuaderno de cuadrícula, libro de texto de trigonometría y calculadora científica. Ver anexo 2

Conocimientos previos.- algebra

Es probable que el alumno haya olvidado algunas cosas de álgebra, es natural; el profesor debe recordárselas.

La solución de problemas de triángulos, identidades trigonométricas y ecuaciones trigonométricas, requiere del conocimiento del álgebra elemental. En este nivel de estudio, el alumno ya debe tener un buen dominio de ésta; casi seguro que algunos aspectos de la misma estarán olvidados, sin embargo, ellos lo recordarán con facilidad.

Siempre que sea posible, al abordar un tema incluya la comprobación de los teoremas y las derivaciones de las fórmulas. No considere como muy necesario que el alumno aprenda el dominio total de la comprobación y deducción.

Al iniciar la trigonometría, el estudiante ya habrá empezado a aprender a relacionar los conocimientos adquiridos en algebra; pero es aquí donde él aprende a hacer una buena relación de esos conocimientos; para esto es fundamental la participación del profesor.

Si el profesor conduce bien al alumno en el estudio de la trigonometría, con toda seguridad originará en él una gran motivación y alegría por aprender; en el estudio de ésta es donde el alumno puede empezar a jugar alegremente con los problemas que resuelve; para esto es necesario que los problemas que resuelva originen y hagan crecer la imaginación de él. (ver los problemas que se anexan)

Igual que en el estudio del álgebra; es necesario iniciar los temas resolviendo problemas sencillos, aumentando gradualmente la dificultad hasta la resolución de problemas complejos.

En trigonometría el profesor debe guiar al alumno a que aprenda a analizar un problema, a relacionar los datos con otros, a buscar caminos para hallar la solución, con ese objeto hay que ayudarlo planteándole una serie de preguntas de acuerdo al problema, por ejemplo: *¿qué es lo que el problema plantea* ?, *¿cuáles son los datos con los que se cuenta?, ¿cuáles son las incógnitas?, ¿qué relación hay entre los datos que pueden ayudarle a encontrar la o las soluciones?, ¿cómo, lo que plantea el problema lo puede relacionar con el conocimiento que ya se tiene?*. *También, el alumno puede hacer gráficas o esquemas del problema; explicar o analizar la solución encontrada; elaborar un diagrama y explicar la conveniencia de seguir o no sus ramificaciones*. **El profesor tiene el deber de guiar al alumno a que aprenda a realizar lo anterior.**

Cuando el alumno realice gráficas o esquemas, de preferencia que no se auxilie de material de dibujo. Es de gran motivación para ellos adquirir esta destreza.

Muchos de los problemas de trigonometría tienen varias formas de resolver; resuélvalo usted de una manera e invite a sus alumnos a que encuentren la otra u otras. **Nunca impida o limite a sus alumnos a que exploren, descubran y construyan.**

Resolver problemas en los que solamente se hace aplicación directa de alguna fórmula, no conducen a una construcción del conocimiento. Por el contrario, se deben resolver problemas donde se tengan que hacer igualaciones, sustituciones, despejes, gráficas, etc.

Algo muy necesario en trigonometría es que los alumnos aprendan a cómo obtener las identidades trigonométricas fundamentales.

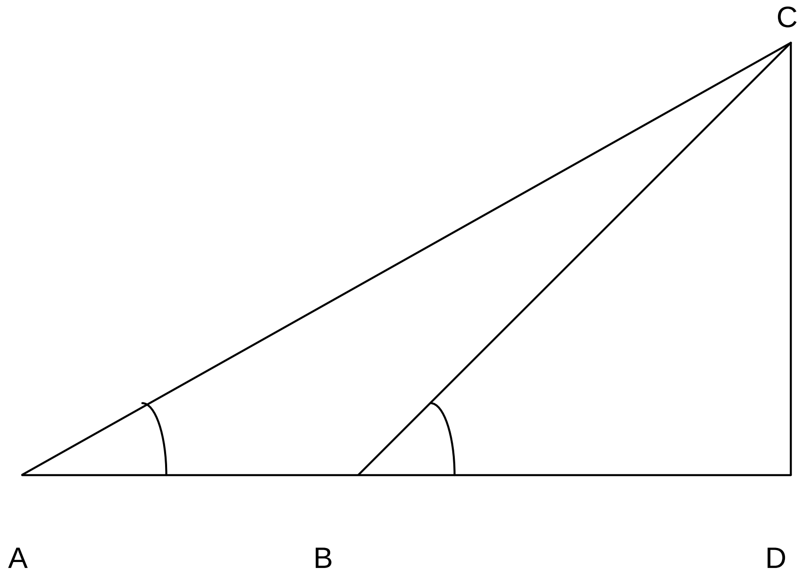
Cuando sus alumnos estén concentrados resolviendo algún problema, procure hasta donde le sea posible no interrumpirlos; en ocasiones se molestan.

Ensaye.- pida a sus alumnos que un determinado tema nuevo, en su libro lo lean, analicen e interpreten la deducción de la fórmula; si lo realizan, entonces que analicen los problemas resueltos del tema en estudio. Después que resuelvan problemas y que comparen el resultado obtenido con el que proporciona el autor.

Las primeras aplicaciones de las funciones trigonométricas fueron para topografía, navegación e ingeniería; por lo mismo, generalmente la mayoría de los libros de texto son escritos por personas relacionadas con estas actividades. Estos libros contienen gran cantidad de problemas resueltos y por resolver que involucran aspectos relacionados con las actividades antes mencionadas. Si hay problemas que no contengan algunas de estas actividades, usted los puede transformar, haciéndolos más atractivos para sus alumnos. *Es necesaria mucha creatividad de parte del profesor.*

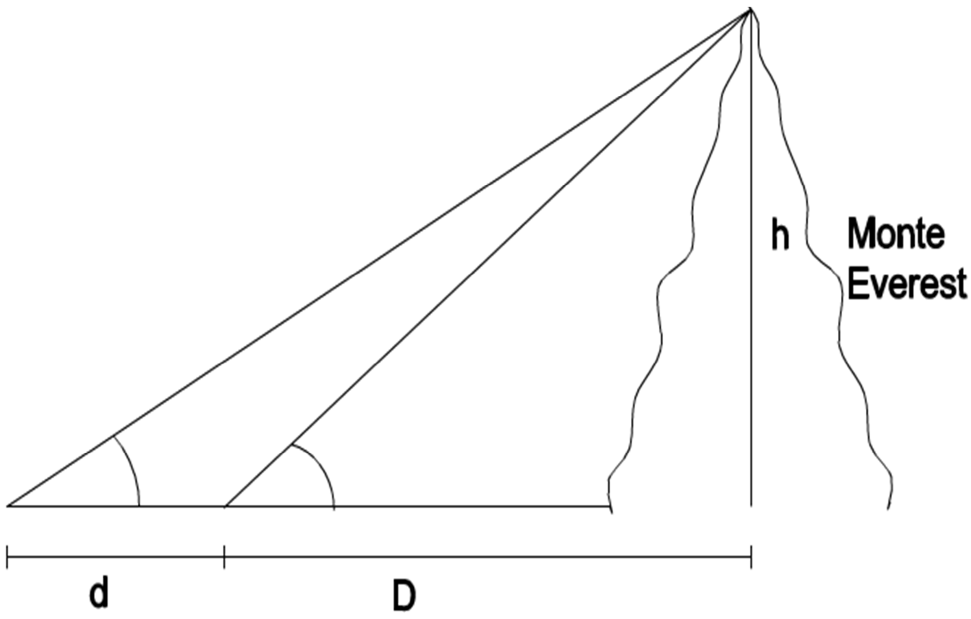
Un problema que se presenta a continuación frecuentemente los libros lo incluyen de la manera siguiente.

En la figura, dados los ángulos A y B y la longitud del segmento AB del triangulo, encuentre la longitud del lado CD y BD.



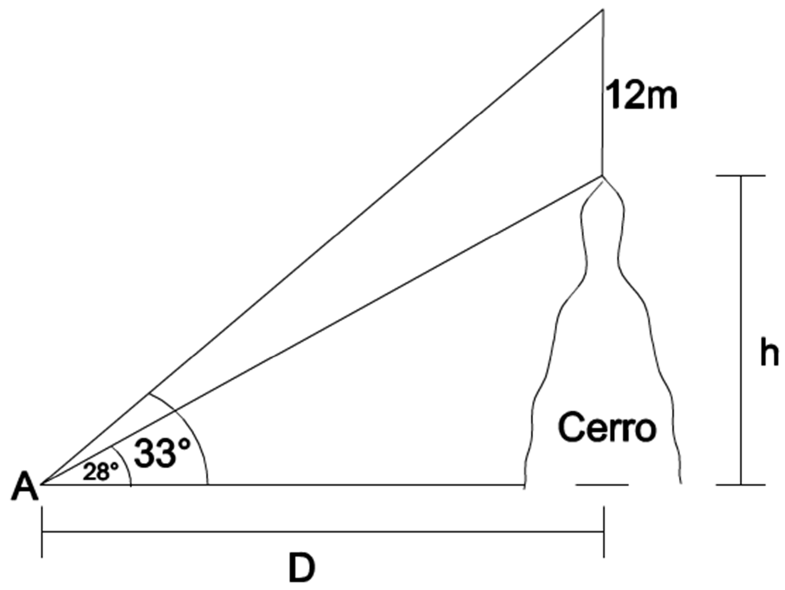
Por qué mejor no transformarlo de la manera siguiente y resultará más interesante para el estudiante:

1.- Dados los valores de los ángulos marcados en la figura, así como la distancia **d,** encuentren la altura (h) del Monte Everest. Para elaborar este problema el profesor tendrá que investigar la verdadera altura de ese monte, luego asignar valores a los ángulos para determinar la distancia AB y proporcionar esta información a sus alumnos.



El problema anterior tiene varias formas diferentes de resolver, pida a sus alumnos que las encuentren; pero no sólo la altura del Monte Everest, sino todos los lados y ángulos de los triángulos. Desde luego que el profesor debe saber cuándo es el momento oportuno de solicitar esto. Porque aquí el estudiante va a emplear las funciones trigonométricas, las leyes de los senos y otras.

2.- Una antena de microondas de 12 metros de altura se encuentra en la cima de una montaña; un observador se encuentra ubicado en el punto A, desde el cual se miden los ángulos (invéntelos); por ejemplo 33° y 28° respectivamente. Calcular la altura de la montaña *h*, así como la distancia horizontal que hay ente el observador y la vertical que baja de la antena.



Este problema, igual que el anterior, tiene varias formas de resolver; pida a sus alumnos que encuentren los demás lados y ángulos de los triángulos.

Si sus alumnos ya han aprendido a calcular superficies de triángulos oblicuángulos; pueden aquí recordarlo calculando las superficies en todos los triángulos de las figuras de los dos problemas anteriores. Si aun no ha sido tratado ese tema: cuando lo trate, pida a sus alumnos que repitan nuevamente los cálculos realizados en los dos problemas anteriores, pero ahora incluyendo las superficies. Si el tiempo y el espacio lo permiten, en un lugar adecuado (por ejemplo un patio de casa o escuela) organice una práctica de campo resolviendo los problemas anteriores; si hay espacio suficiente haga secciones triangulares; si no tiene cinta, mida los lados aunque sea a pasos tomando en cuenta la medida de un paso…sea creativo. Diga a sus alumnos que, para medir aproximadamente longitudes o superficies de grandes terrenos donde no se requiere exactitud y si rapidez, si no se cuenta con material adecuado para la medición, para tal fin se puede contar el número de postes de la cercas límites y multiplicar por la separación entre los mismos; o bien, usar el número de postes de energía eléctrica, si los hay…hay otras maneras de realizar rápidamente las mediciones.

En los libros de trigonometría busque o invente problemas como los que se mencionan a continuación. Problemas como estos provocan la imaginación de los alumnos y la motivación por aprender

3.- Sobre un peñasco situado en la orilla del mar se encuentra un faro de 125 pies de altura. Desde lo alto del faro, el ángulo de depresión a un submarino situado en la superficie del mar es de 28°40’ y desde la base del faro, el ángulo de depresión al mismo submarino es de 18°20’. Calcule la distancia horizontal al submarino y la altura del peñasco

El problema siguiente es muy semejante al anterior.

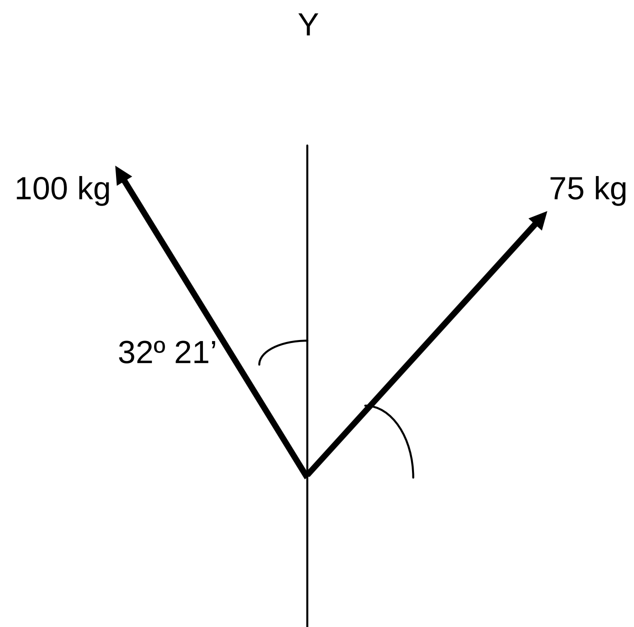
4.- Un destructor navega hacia el este, cuando observa un faro con una orientación N62°10’E. Después de que el destructor ha navegado 2250 metros, el faro se encuentra a N48°25’E. Si el curso se mantiene igual; ¿cuál será la menor distancia entre el destructor y el faro?.

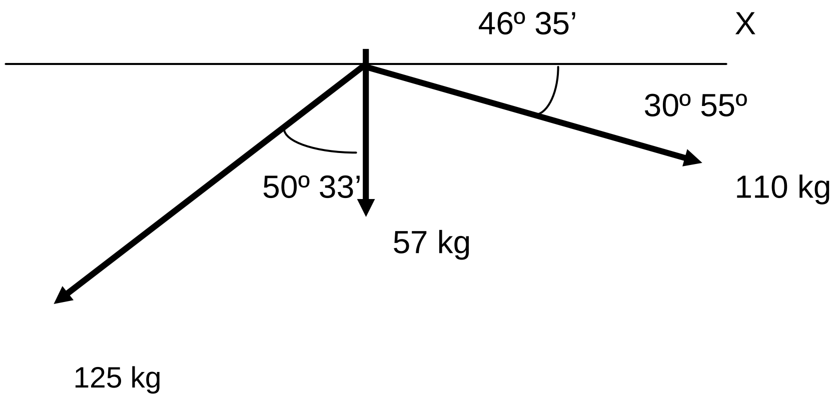
5.- Un piloto vuela desde el punto A una distancia de 125 km/h en la dirección N38°20’O y regresa. Por un error el piloto vuela los 125 km/h de regreso en la dirección S51°40’E; ¿a qué distancia quedó de A, y en qué dirección debe volar para regresar al punto de partida?.

Probablemente el profesor no tenga conocimiento de cómo se miden los rumbos; lo puede investigar en cualquier libro de topografía, internet o suprima esos problemas e invente otro

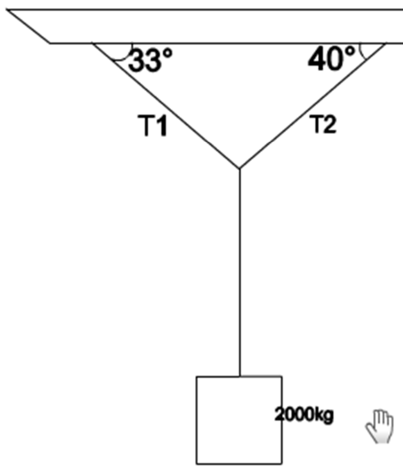
El profesor puede hacer para el alumno de más motivación su aprendizaje, pidiéndoles que resuelvan ciertos problemas de física que estén muy relacionados con la trigonometría; por ejemplo los siguientes:

6.- Encontrar la magnitud, ubicación y ángulo de inclinación de la resultante del sistema de fuerzas siguiente.



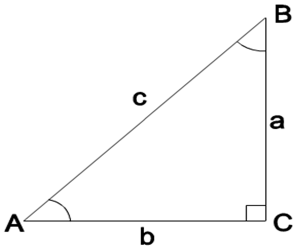


7.- Con la información que se proporciona, calcule las tensiones T_1 y T_2 de los cables marcados en la figura siguiente:



Es muy importante que el alumno aprenda muy bien a deducir las identidades trigonométricas fundamentales. Es muy importante que aprendan esto ya que tiene mucha aplicación en integración por sustitución trigonométrica; deduzca algunas y pida a los alumnos que hagan lo mismo con las demás. Por ejemplo:

En el triángulo rectángulo siguiente:



Usando el Teorema de Pitágoras; deduzca

$a^2 + b^2 = c^2$ dividiendo todo sobre c^2, tenemos:

$sen^2\, A + cos^2\, A = 1$ o $cos^2\, B + sen^2\, B = 1$

Pida a los alumnos que continúen; ahora ellos que dividan entre a^2 *y* b^2

De igual modo, usando las funciones trigonométricas, deduzca

$\frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b} = \tan A \quad \frac{senA}{\cos A} = \tan A$ o $\frac{a}{b}\frac{b}{a} = \tan A \cot A = 1 \qquad \cot A = \frac{1}{\tan A}$

Pueden continuar haciendo más deducciones.

GEOMETRIA ANALITICA

Material requerido por el alumno.- cuaderno de cuadrícula, libro de Geometría Analítica, calculadora científica, y probablemente papel milimétrico. Ver anexo 3

Conocimientos previos.- algebra y trigonometría.

Tal vez el alumno ya haya olvidado algunas cosas de álgebra.

Igual que en trigonometría, siempre que sea posible, al abordar un tema incluya las deducciones de las fórmulas. No considere como muy necesario que el alumno aprenda con dominio total de la comprobación y deducción.

Al tratar la geometría analítica, el alumno ya debe tener un buen dominio de análisis y razonamiento; sin embargo, el profesor debe continuar guiando al alumno a que aprenda a analizar un problema, a relacionar los datos con otros, a buscar caminos para hallar la solución, con ese objeto hay que ayudarlo planteándole una serie de preguntas de acuerdo al problema, por ejemplo: *¿qué es lo que el problema plantea ?, ¿cuáles son los datos con los que se cuenta?, ¿cuáles son las incógnitas?, ¿qué relaciones entre los datos pueden ayudarle a encontrar la o las soluciones?, ¿cómo, lo que plantea el problema lo puede relacionar con el conocimiento que ya se tiene?.* También, el alumno puede hacer gráficas o esquemas del problema; explicar o analizar la solución encontrada; elaborar un diagrama y explicar la conveniencia de seguir o no sus ramificaciones.

Resuelva usted algunos problemas de ejemplo

Recuerde.- siempre hay que ir de lo muy fácil a lo muy difícil.

Cuando sus alumnos estén concentrados resolviendo algún problema, procure hasta donde le sea posible no interrumpirlos.

Ensaye.- pídales a sus alumnos que un determinado tema nuevo, en su libro lo lean, analicen e interpreten la deducción de la fórmula; si lo realizan, entonces que analicen los problemas resueltos del tema en estudio. Después que resuelvan problemas y que comparen el resultado obtenido con el que proporciona el autor.

Resolver problemas en lo que solamente se hace aplicación directa de alguna fórmula, no conducen a una construcción del conocimiento. Por el contrario, se deben resolver problemas donde se tengan que hacer gráficas, despejes, igualaciones, sustituciones, etc. Por ejemplo:

1.- Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -4 y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y – 8 = 0$ y $3x – 2y - + 9 = 0$

Pida a sus alumnos que primero grafiquen el par de ecuaciones para ubicar el punto de intersección; después que comprueben resolviendo el par de ecuaciones por los diversos métodos que hay y luego que continúen con el razonamiento siguiente.

2.- Hallar la superficie del trapecio formado por las rectas $3x – y – 5 = 0,$ $x – 2y = 0$ $x – 2y + 5 = 0$ y $x + 3y – 20 = 0$

3.- Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $x^2 + 8y = 0$ que ese paralela a la recta $3x + 4y -7 = 0$

4.- Hallar los radios vectores del punto (3, 7/4) que está sobre la elipse $7x^2 + 16y^2 =12.$

5.- Una circunferencia tiene su centro en el punto (0, - 2) y es tangente a la recta $5x – 12y + 2 = 0.$ Hallar su ecuación.

6.- Una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, está sobre la recta cuya ecuación es $x – 7y + 25 = 0$. Hallar la longitud de la cuerda.

7.- En cada una de las ecuaciones siguientes, hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de los lados rectos de la elipse dada; $9x^2 + 4y^2 = 36,$ $x^2 + 3y^2 = 6,$ $16x^2 + 25y^2 = 400.$

8.- Hallar el lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que su distancia siempre es la misma a otro punto llamado centro.

Existen problemas en geometría analítica que también pueden ser resueltos aplicando las derivadas de cálculo diferencial. Se sugiere que, aunque aún el alumno desconoce lo anterior, a manera de ejemplo el profesor resuelva algunos problemas por derivación; esto es de gran motivación para el alumno. Marque en su libro, aquellos problemas que se resuelven así, y que sus alumnos los traten cuando sepan derivar.

Sugerencia para profesores con alumnos escolarizados.- puesto que resolver problemas es la mejor manera de realizar un buen aprendizaje de la matemática. Esto lo pueden realizar sus alumnos en el salón de clases y en sus casas. Marque en su libro aquellos problemas que usted ha resuelto en el pizarrón y no los incluya en el examen; informe a sus alumnos lo anterior y dígales que el examen sólo se incluirá problemas que ellos resolvieron en el aula o en sus casas.

CALCULO DIFERENCIAL

Material requerido por el alumno.- cuaderno de cuadrícula, libro de geometría analítica y calculadora científica. Es recomendable que sus alumnos tengan que usar papel milimétrico. Ver anexo 4.

Conocimientos previos.- algebra, trigonometría, y geometría analítica.

Muy probablemente el profesor tendrá que recordar a sus alumnos algunos aspectos de álgebra, trigonometría y geometría analítica.

El aprendizaje del cálculo diferencial no debe ser sólo sobre derivadas, sino resolver problemas como los siguientes.

SUGERENCIA.- en el cálculo diferencial, cuando se estudie el tema, "aplicaciones de la derivada"; incluya problemas como los siguientes:

1.- Hallar la ecuación de la normal a la parábola $y = 5x + x^2$ que forma un ángulo de 45° con el eje de las X.

2.- Hallar las ecuaciones de las tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 58$ que son paralelas a la recta $3x – 7y = 19$.

3.- Hallar las ecuaciones de las normales a la hipérbola $4x^2 – y^2 = 36$, paralelas a la recta $2x + 5y = 4$.

4.- Hallar el ángulo de intersección del par de curvas siguiente: $y^2 = x + 1$ y $x^2 + y^2 = 13$.

5.- Un agricultor dispone de 3000 metros de malla para cercar un predio de forma rectangular contiguo a un rio de curso rectilíneo. Sabiendo que el lado adyacente al río no se requiere cercar; determine cuales son las dimensiones del predio de mayor área que se puede cercar.

6.- Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un círculo de 1 metro de diámetro.

En problemas como los anteriores, al resolverlos, se tiene que aplicar el álgebra, la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo diferencial; los conocimientos anteriores se estarán reafirmando. Además resolverlos, a los alumnos produce gran satisfacción al ver lo que son capaces de realizar.

No es necesario abordar el cálculo integral; porque se considera que a este nivel, el lector profesor de matemática ya debe tener una idea muy clara de la aplicación de la metodología.

Generalmente, por lo menos así sucede en México, la enseñanza de la matemática se realiza con el aprendizaje de leyes, teoremas, axiomas, etc. y muy escasa actividad en la resolución de problemas. En los años que se tiene de estar primero experimentando y después trabajando con esta metodología con grupos de adolescentes; los alumnos han comentado que esta metodología de enseñanza aprendizaje se les hace divertida, contrario a lo que sucede en sus escuelas. Además, los planes y programas de estudio de educación básica proporcionados por la Secretaría de Educación Pública en México, contienen gran cantidad de temas en donde no hay o hay muy poca relación en aplicaciones posteriores; estos temas son los que en ocasiones contribuyen a originar el rechazo a tan hermosa ciencia. En lo detallado en álgebra, trigonometría, geometría analítica, etc de este documento se puede observar que no se menciona la Geometría Euclidiana; sin embargo, los conceptos de ella que se necesitan, se explican con detalle en el momento que es necesario.