3. ÍNDEX DE CONCENTRACIÓ DE LORENZ

En qualsevol cas, i donada l'aparició de certa divergència entre les mesures o índexs de Gini i Williamson anteriorment tinguts en compte per a la nostra anàlisi, desenvoluparem el càlcul d'aquest nou índex des del mateix diagrama o corba del qual hem parlat a l'anterior epígraf 1 d'aquest mateix capítol (tal com s'ha vingut considerant, s'obtindran sempre corbes còncaves cap a les **y** positives, i que es troben situades per sota de la diagonal del quadrat que passa per l'origen de coordenades i pel punt 100,100).

Així, doncs, tindrem:

$$L = \frac{(a - q_1) + (2a - q_2) + ... + [(n-1)a - q_{n-1}]}{a + 2a + ... + (n-1)a} \qquad (1) ,$$

on **a** és la mitjana aritmètica dels percentatges de les superfícies de les explotacions corresponents a cada interval de classe, o sigui:

$$X_i = \frac{x_i \bullet n_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i \bullet n_i} \times 100 \qquad ; \qquad a = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{q_n}{n} \qquad ;$$

(en el nostre cas, sempre es té: n=6).

D'aquesta manera, es complirà també que:

$$q_1 = X_1$$
$$q_2 = X_1 + X_2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$q_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

o sigui: $q_i = \sum_{j=1}^{i} X_i$

que és justament el criteri que hem seguit per a l'elaboració de les taules corresponents a cada territori de l'annex núm.: 3 ("Altres determinacions estadístiques"). Malgrat això, aquí l'ordenació dels valors de les X_i cal fer-la de menor a major.

Desenvolupant l'expressió anterior (1), obtindrem:

$$L = \frac{a + 2a + ... + (n-1)a - (q_1 + q_2 + ... + q_{n-1})}{a + 2a + ... + (n-1)a} =$$

$$= 1 - \frac{q_1 + q_2 + ... + q_{n-1}}{a + 2a + ... + (n-1)a} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{\frac{n(n-1)}{2} a} =$$

$$= 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n} \quad ,$$

ja que: 1 + 2 + ... + (n-1) =n(n-1)/2 ,

com que es tracta de l'addició dels (n-1) primers termes consecutius d'una progressió aritmètica de raó igual a la unitat (demostrable per inducció completa), i a més: $n \cdot a = q_n$, per la pròpia definició que hem fet de la mitjana aritmètica **a**.

Vegem, aleshores, els valors que pren aquest nou índex en els casos extrems possibles. Efectivament, **si la concentració de la superfície és màxima**, tindrem:

$$X_1 = X_2 = X_{n-1} = 0, \quad i : q_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$L = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n} = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{0}{q_n} = 1 \quad ,$$

donat que: $\sum_{i=1}^{n-1} q_i = 0$.

Tanmateix, **si la concentració de la superfície és mínima**, o sigui, la distribució de la mateixa variable territorial és teòricament perfecta, es tindrà el següent:

$$X_1 = X_2 = ... = X_n = a,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} q_i = \frac{n(n-1)}{2} a$$

amb la qual cosa, l'índex de concentració de Lorenz esdevindrà:

$$L = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n} = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{n \bullet (n-1) \bullet a}{2 \bullet n \bullet a} = 1 - 1 = 0$$

De fet, aquests valors extrems de l'índex analitzat es corresponen amb similars valors de l'índex de Gini. Podem veure que, per al cas en el qual: L = 0 ($X_1=X_2=...=X_n=a$), succeeix justament que: $q_n=n\cdot a$, raó per la qual la corba pertinent és el segment recte coincident amb la diagonal del quadrat abans esmentada. En el cas de la concentració màxima: L=1 ($X_1=X_2=...=X_{n-1}=0$), la corba de Lorenz ve donada pels dos costats normals o perpendiculars del quadrat bastit per a traçar el diagrama en qüestió. Òbviament, quant més s'apropi la corba a la diagonal, més perfecta serà la distribució de la variable territorial en estudi.

Àdhuc, podem donar una interpretació geomètrica de l'índex de Lorenz d'aquesta manera: el numerador de la fórmula anterior (1) es pot considerar com l'addició de les àrees de (n-1) rectangles de base unitat i alçària: $(h\cdot a - q_h)$, $\forall h \in [1,2,...,(n-1)]$. El denominador, a l'ensems, és la suma de les àrees de (n-1) rectangles de base unitat i alçària: $h\cdot a$, $\forall h \in [1,2,...,(n-1)]$. Si observem allò que representen la suma d'aquests rectangles, deduirem que el numerador de l'expressió (1) és l'àrea compresa entre la corba de Lorenz i la diagonal del quadrat, mentre que el denominador és l'àrea de la meitat del quadrat[4].

Aquest índex és equivalent a l'anteriorment estudiat de Gini i obliga a la realització del càlcul de la figura superfície ratllada, compresa entre la diagonal i la corresponent corba o poligonal de Lorenz. Un valor aproximat és el que s'obté mitjançant l'aplicació de la fórmula basada en els percentatges acumulats (molt emprada en els treballs pràctics). En el nostre cas, la fórmula (1) prendrà la configuració simplificada (amb n=6 i q_n=100):

$$L = 1 - \frac{2}{5} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{100} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{5} q_i}{250}$$

Els resultats que, per a cadascun dels territoris estudiats, ofereix l'aplicació de la fórmula anterior, desenvolupant el seu procés de càlcul de manera exemplificant per a l'any 1989, són els següents, tot tenint en compte, com ja s'ha dit, que cal ordenar els valors de la variable territorial en estudi (superfície de les explotacions agràries) de menor a major, per tal d'aconseguir l'aplicació correcta de la fórmula:

[4] Així, doncs, l'índex de concentració de Lorenz serà més petit quant menor sigui l'àrea limitada per la diagonal i la pròpia corba poligonal.

a) ***Baix Ebre***:

X_i	q_i
3,3	3,3
10,0	13,3
12,4	25,7
14,2	39,9
20,4	60,3
39,7	100,0
$\sum_{i=1}^{6}=$ 100,0	242,5

Distribució a què correspon l'índex de Lorenz:

L = 1 - 142,5/250 = **0,4300**

b) ***Montsià***:

X_i	q_i
3,8	3,8
16,2	20,0
16,5	36,5
17,2	53,7
20,8	74,5
25,5	100,0
$\sum_{i=1}^{6}=$ 100,0	288,5

Distribució a què correspon l'índex de Lorenz:

L = 1 - 188,5/250 = **0,2460**

c) ***Ribera d'Ebre***:

X_i	q_i
7,3	7,3
10,3	17,6
10,7	28,3
18,1	46,4
24,9	71,3
28,7	100,0
$\sum_{i=1}^{6}=$ 100,0	270,9

Distribució a què correspon l'índex de Lorenz:

L = 1 -170,9/250 = **0,3164**

d) ***Terra Alta***:

X_i	q_i
3,1	3,1
7,1	10,2
10,5	20,7
19,4	40,1
26,4	66,5
33,5	100,0
$\sum_{i=1}^{6}=$ 100,0	240,6

Distribució a què correspon l'índex de Lorenz:

L = 1 - 140,6/250 = **0,4376**

e) ***Regió o vegueria de l'Ebre***:

X_i	q_i
6,9	6,9
11,9	18,8
13,1	31,9
16,4	48,3
20,6	68,9
31,1	100,0
$\sum_{i=1}^{6}=$ 100,0	274,8

Distribució a què correspon l'índex de Lorenz:

L = 1 - 174,8/250 = **0,3008**

f) ***Província de Tarragona***:

X_i	q_i
9,5	9,5
11,8	21,3
12,9	34,2
16,3	50,5
22,2	72,7
27,3	100,0
$\sum_{i=1}^{6}=$ 100,0	288,2

Distribució a què correspon l'índex de Lorenz:

L = 1 - 188,2/250 = **0,2472**

g) ***Conjunt de Catalunya***:

X_i	q_i
5,1	5,1
5,3	10,4
8,6	19,0
11,4	30,4
16,1	46,5
53,5	100,0
$\sum_{i=1}^{6}=$ 100,0	211,4

Distribució a què correspon l'índex de Lorenz:

L = 1 - 111,4/250 = **0,5544**

h) ***Resum i Conclusions***:

Una vegada calculat el valor de l'índex de Lorenz per a cadascun dels territoris que són objecte del nostre estudi referent als anys 1989, 1999 i 2009, tal com hem fet amb l'anterior índex de Williamson per a l'any 1989, podem establir el següent quadre comparatiu dels resultats obtinguts:

QUADRE Núm.: 3.5.
ÍNDEX DE CONCENTRACIÓ DE LORENZ

TERRITORI	L (1989)	L (1999)	L (2009)	Núm. ORDRE (2009)
BAIX EBRE	0,4300	0,3584	0,2072	4
MONTSIÀ	0,2460	0,3984	0,2048	3
RIBERA D'EBRE	0,3164	0,3496	0,2772	5
TERRA ALTA	0,4376	0,4376	0,4588	6
REGIÓ DE L'EBRE	0,3008	0,3472	0,2024	2
TARRAGONA	0,2472	0,3216	0,2004	1
CATALUNYA	0,5544	0,6420	0,5580	7

FONT: Elaboració pròpia.

Aquests resultats, en general, vénen a confirmar els deduïts del càlcul de l'índex de GINI, com a mesura objectiva del grau de concentració de la propietat de la terra, tal com es pot comprovar en efectuar també el càlcul d'aquest índex per als anys 1999 i 2009 (veure l'annex núm. 3).

A continuació, es pot veure un gràfic tipus histograma, referent als valors escaients, per a cada territori, del corresponent índex de Lorenz calculat per als tres anys 1989, 1999 i 2009 en què tingueren lloc els censos oficials agraris.

A saber:

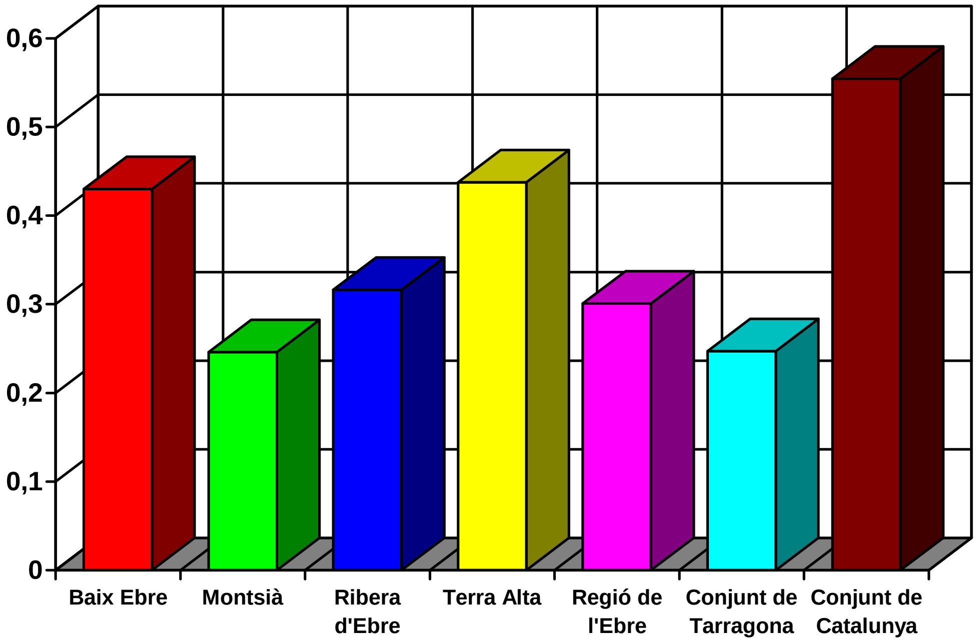

FIG. 3.6. Índex de Lorenz de l'any 1989.

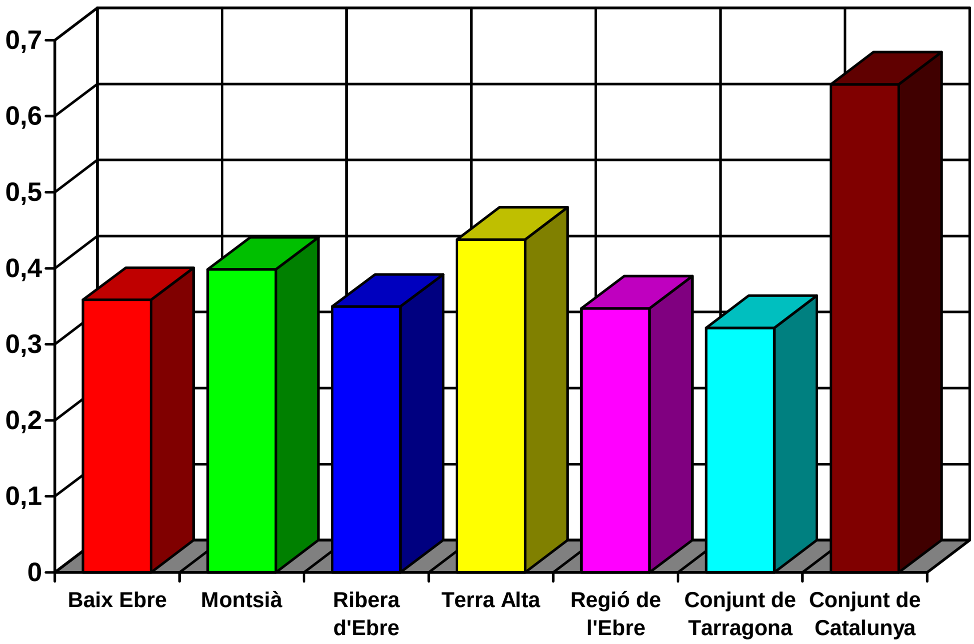

FIG. 3.7. Índex de Lorenz de l'any 1999.

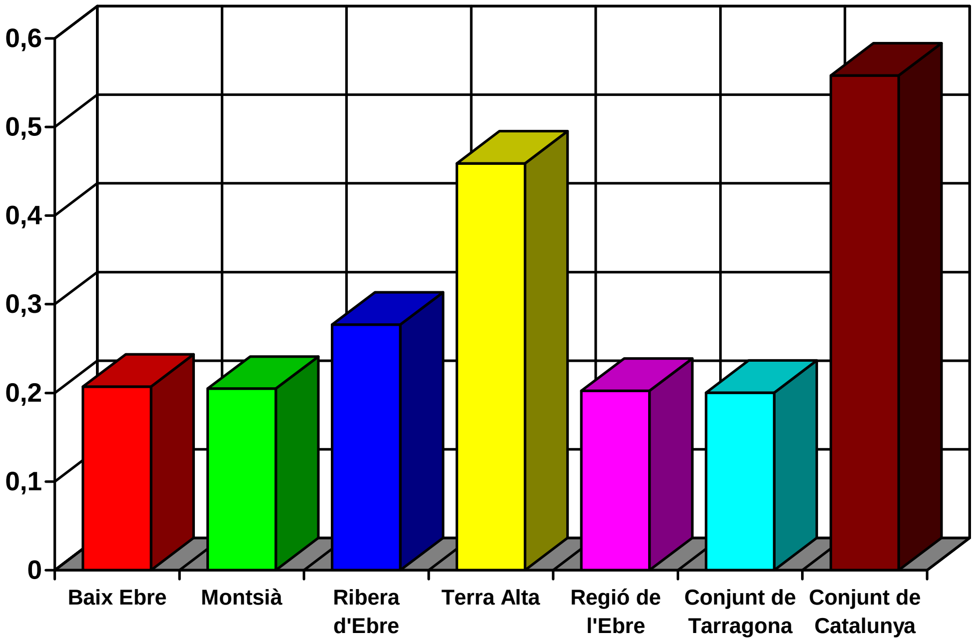

FIG. 3.8. Índex de Lorenz de l'any 2009.