4.3. Funció logarítmico-normal o equació de Mc Alister

Si obtenim l'elasticitat de la funció de freqüència de la funció de Pareto, com ja s'ha vist:

$f(x) = F'(x) = (\alpha \cdot A)/x^{\alpha+1}$, i l'elasticitat corresponent es constant i

menor que la unitat, ja que:

$$Ef(x)/Ex = \frac{df(x)}{dx} \bullet \frac{x}{f(x)} =$$

$$= -\frac{\alpha \bullet A \bullet (\alpha + 1) \bullet x^{\alpha}}{x^{2\alpha+2}} \bullet \frac{x \bullet x^{\alpha+1}}{\alpha \bullet A} = -\alpha - 1$$

Un altre model de distribució de la superfície podria ser aquell que té una elasticitat que és funció lineal del logaritme neperià de la superfície, (variable independent) això és:

$$Ef(x)/Ex = -m \cdot \ln x + n$$

El signe menys apareix ja que l'elasticitat mesura la variació percentual del nombre d'explotacions corresponent a una alteració percentual de la superfície i aquests moviments són, precisament, de sentit contrari. D'altra banda, és lògic que l'elasticitat depengui del nivell de superfície (x) o bé d'una funció dels mateixos (ln x).

Anem a calcular, ara, la f(x) a partir de l'elasticitat mitjançant integració:

$$Ef(x)/Ex = \frac{d \ln f(x)}{d \ln x} = - m \cdot \ln x + n \; ; \; d \ln f(x) = (-m \cdot \ln x + n) \, d \ln x$$

$$\ln f(x) = \int (- m \bullet \ln x + n) d\ln x = \int (- m \bullet \ln x + n) \bullet \frac{dx}{x} =$$

$$= \int \frac{n}{x} dx - m \int \frac{\ln x}{x} dx = n \cdot \ln x - \frac{m}{2} (\ln x)^2 + C \qquad (6)$$

Ara bé, si considerem la funció de densitat de la distribució normal del logaritme de la superfície, o sigui:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \bullet \cdot x \cdot \sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

i operant amb ella prenent logaritmes neperians o naturals, s'obté:

$$\ln f(x) = -\ln(\sigma \bullet \cdot x \cdot \sqrt{2\pi}) - (1/2\sigma^2) \cdot (\ln x - \mu)^2 =$$
$$= -\ln x - \ln(\sigma \bullet \sqrt{2\pi}) - (1/2\sigma^2) \cdot \left[\ln^2 x + \mu^2 - 2(\ln x)\mu\right] =$$
$$= \ln x\left[-1 + (\mu/\sigma^2)\right] + \ln^2 x(-1/2\sigma^2) - \left[(\mu^2/2\sigma^2) + \ln(\sigma\sqrt{2\pi})\right]$$

Com que μ i σ són constants (respectivament, mitjana aritmètica i desviació típica o "standard") per a la població en estudi, si anomenem:

$$\begin{cases} (-1 + \frac{\mu}{\sigma^2}) = n \\ \frac{1}{2\sigma^2} = \frac{m}{2}; \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{m}}; \\ -\left[\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \ln(\sigma\sqrt{2\pi})\right] = C \end{cases}$$

, ens queda la següent expressió:

$$\mathbf{\ln f(x) = n \cdot \ln x - (m/2) \cdot (\ln x)^2 + C}$$

que coincideix amb l'expressió (6) trobada abans per a la distribució que té l'elasticitat funció lineal de ln x; llavors aquella distribució és la logarítmico-normal.

La forma o configuració gràfica de la funció de freqüència d'aquesta distribució és, conseqüentment, campaniforme o gaussiana.