4.4. Fila d'espera amb diversos punts de servei i nombre limitat de clients

Amb la hipòtesi $S < m$, on m es el número de clients, el fenomen pot definir-se de la manera següent: si $1 \leq n \leq S$, hi ha $(S - n)$ punts de servei desocupats; si $S < n \leq m$, hi ha S unitats que estan sent processades i $(n - S)$ en la fila d'espera. La situació, aleshores, es presenta esquemàticament a la figura següent 9.18.

a) *Probabilitat p_n de què hi hagi **n** unitats al sistema.*

Les equacions generals anteriorment exposades permeten d'obtenir:

$$P_n = C_m^n \psi^n p_0, \quad \forall\, n/ \quad 0 \leq n \leq S,$$

En aquest cas, la representació esquemàtica del procés és la següent:

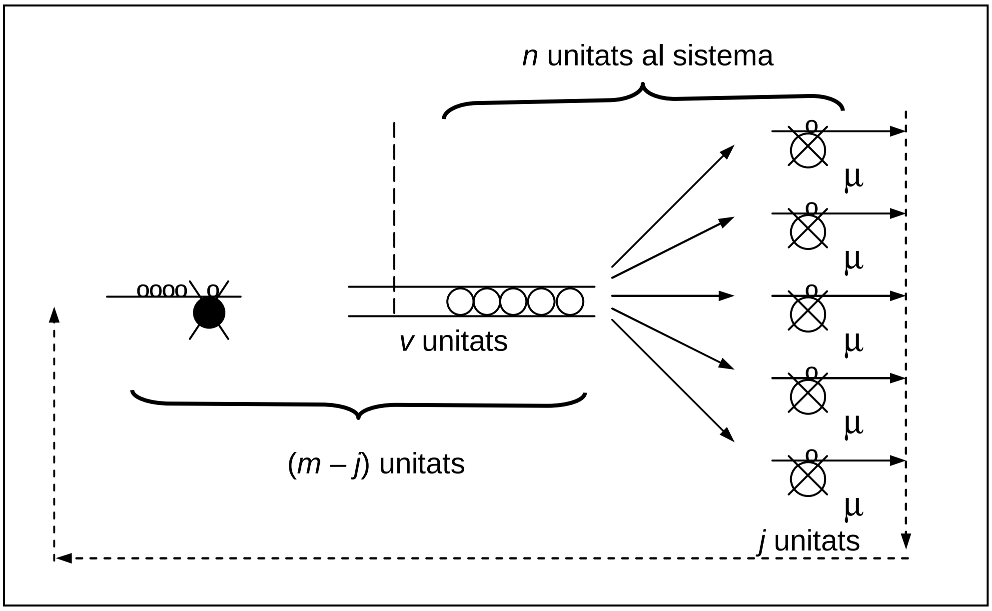


FIG. 9.18. Esquema d'arribades poissonianes de clients amb taxa mitjana λ per unitat de temps.

on es té el número de combinacions sense repetició de **m** elements presos de **n** en **n**, així:

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!};$$

$$p_n = \frac{n!}{S! \cdot S^{n-S}} C_m^n \cdot \psi^n \cdot p_0; \quad \forall S \leq n \leq m;$$

amb: $\sum_{n=0}^{m} p_n = 1$ (probabilitat total).

Es podran utilitzar, igualment, fórmules de recurrència. En efecte, fent:

$$a_n = p_n/p_0$$

es tindrà:

$$a_0 = 1$$

$$a_n = \frac{m-n+1}{n}\psi \cdot a_{n-1}, \qquad 1 \le n \le (S-1);$$

$$a_n = \frac{m-n+1}{S}\psi \cdot a_{n-1}; \qquad \forall\ S \le n \le m.$$

Es calcularà, a la fi:

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{m} a_n}$$

En el cas de l'existència d'un sol punt de servei de combustible, la qual cosa succeirà a les petites instal·lacions, les fórmules a utilitzar són:

$$p_n = \frac{m!}{(m-n)!}\psi^n \cdot p_0$$

amb:

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{m}\frac{m!\cdot\psi^n}{(m-n)!}}$$

i

$$\sum_{n=0}^{m} p_n = 1, \text{ (probabilitat total)}$$

o bé la fórmula de recurrència:

$$p_n = (m-n+1)\cdot\psi\cdot p_{n-1}, \qquad / \ \ 1 \le n \le m.$$

b) *Nombre mitjà de clients en la fila d'espera, de punts de servei desocupats i de clients en el sistema.*

Els valors mitjans de les variables *v*, ρ i *n* venen donats per les fórmules:

$$\bar{v} = \sum_{n=S+1}^{m} (n - S)p_n,$$

$$\bar{\rho} = \sum_{n=0}^{S} (S - n)p_n,$$

$$\bar{n} = S + \bar{v} - \bar{\rho}.$$

En el cas concret de l'existència d'un sol punt de servei (S = 1), aquí les fórmules a utilitzar són les següents:

$$\bar{v} = m - \frac{1+\psi}{\psi}(1 - p_0),$$

$$\bar{\rho} = p_0,$$

$$\bar{n} = m - \frac{1}{\psi}(1 - p_0).$$

c) *Probabilitat d'espera i temps mitjà d'espera en la fila*.

S'obtenen ambdós valors de les fórmules:

$$p(>0) = \Pr(n \geq S) = \sum_{n=S}^{m} p_n,$$

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda(m - \bar{n})} = \frac{1}{\lambda(m - \bar{n})} \sum_{n=S+1}^{m} (n - S)p_n = \frac{\bar{v}}{\mu(S - \bar{\rho})}$$

En el cas de la consideració d'un punt de servei únic (petita instal·lació), s'empraran les fórmules següents:

$$p(>0) = 1 - p_0,$$

$$\bar{t}_f = \frac{1}{\mu}\left(\frac{m}{1 - p_0} - \frac{1+\psi}{\psi}\right)$$

Per tal de concloure aquesta introducció direm que existeixen altres models temàtics que permeten tenir en compte els diversos aspectes que poden presentar els fenòmens d'espera, com ara: diverses files d'espera amb prioritats, distribucions de les entrades i de la durada del processament dels clients diferents de la llei de Poisson o de la llei exponencial, punts de servei en cascada, etc.
Convé, en cada cas que es presenti a la pràctica, estudiar les distribucions de les arribades i de la durada dels processaments per tal de tractar d'ajustar-les a les lleis de probabilitat clàssiques. Si això no fos

possible, es podrà tractar el problema per simulació (mètode de Monte-Carlo[11] o d'altres).

4.5. Exercicis d'aplicació

1) Sigui ara un fenomen d'espera per a l'omplida de combustible en una estació de servei cooperatiu, amb diversos punts de servei. La taxa mitjana d'arribades de clients, cada deu minuts, és: $\lambda = 8$. La durada mitjana del servei, que depèn de diverses circumstàncies com ara la quantitat de litres de carburant adquirit o la destresa de l'operador, és de cinc minuts. Es desitja calcular per a S (nombre de punts de servei de combustible) = 5, 6 i 7, el número mitjà v de clients situats en la fila d'espera i el temps mitjà d'espera t_f en la fila.

Solució:

Es tenen els següents valors:

$\lambda = 8$, μ (taxa mitjana de servei o coeficient de proporcionalitat) = **=** 10/5 = 2, $\psi = \lambda/\mu = 8/2 = 4$;

<u>Per a S = 5:</u>

Aquí es té que: $\psi/S = 4/5 = 0'8 < 1$.

$$\bar{v} = \frac{4^6}{5 \cdot 5!(1-4/5)^2} p_0 = \frac{\psi^{S+1}}{S \cdot S!(1-\psi/S)^2} \times p_0; \text{ amb:}$$

$$p_0 = \frac{1}{\dfrac{4^5}{5!(1-4/5)} + 1 + 4 + \dfrac{4^2}{2!} + \dfrac{4^3}{3!} + \dfrac{4^4}{4!}}.$$

D'on:

$$p_0 = \frac{1}{1.024/4 + 824/24} = \frac{1}{77} = e^{-\psi} = \frac{1}{e^{\psi}}$$

[11] El **mètode de Monte-Carlo** és un mètode no determinístic o estadístic numèric utilitzat per aproximar expressions matemàtiques complexes i costoses d'avaluar amb exactitud, i o bé s'atura i dóna el resultat, correcte o incorrecte, o bé s'atura sense donar cap resultat. El mètode es va anomenar així en referència al Casino de Montecarlo (Principat de Mònaco) per ser "la capital del joc d'atzar", en ser la ruleta un generador simple de nombres aleatoris. El nom i el desenvolupament sistemàtic dels mètodes de Monte-Carlo daten aproximadament de l'any 1944 i es van millorar enormement amb el desenvolupament de l'ordinador electrònic. L'ús dels mètodes de Monte-Carlo com a eina de recerca, prové del treball realitzat en el desenvolupament de la bomba atòmica durant la Segona Guerra Mundial (1939-45) al Laboratori Nacional de Los Álamos als EUA. Aquest treball comportava la simulació de problemes probabilístics de hidrodinàmica concernents a la difusió de neutrons en el material de fusió, la qual cosa té un capteniment eminentment aleatori. En l'actualitat és part fonamental dels algoritmes de traçat de raigs per a la generació d'imatges sintètiques.

i:

$$\bar{v} = \frac{4^6}{4!} \times \frac{1}{77} = \frac{4^5}{6} \times \frac{1}{77} = \frac{1.024}{6} \times \frac{1}{77} = 2'216\,.$$

<u>Per a S = 6:</u>

En aquest cas, es tindrà:

$$\psi/S = 4/6 = 0'67 < 1;$$

$$\bar{v} = \frac{4^7}{6 \cdot 6!(1 - 4/6)^2} p_0,$$

amb:

$$p_0 = \frac{1}{\frac{4^6}{6!(1-4/6)} + 1 + \frac{4}{1} + \mathrm{K} + \frac{4^5}{5!}}$$

D'on:

$$p_0 = \frac{1}{\frac{4^6}{2 \times 5!} + \frac{824}{24} + \frac{1.024}{120}} = \frac{1}{\frac{2.048}{120} + \frac{5.144}{120}} = \frac{1}{\frac{7.192}{120}}$$

i

$$\bar{v} = \frac{4^7}{5! \cdot 4} \times \frac{120}{7.192} = \frac{4^6}{7.192} = \frac{4.096}{7.192} = 0'569\,.$$

<u>Per a S = 7:</u>

En aquest cas, es tindrà:

$$\psi/S = 4/7 = 0'57 < 1;$$

$$\bar{v} = \frac{4^8}{7 \cdot 7!(1 - 4/7)^2} p_0,$$

amb:

$$p_0 = \frac{1}{\frac{4^7}{7!(1 - 4/7)} + 1 + \frac{4}{1} + \frac{4^6}{6!}}$$

D'on:

$$p_0 = \frac{1}{\frac{4^7}{6! \cdot 3} + \frac{5.144}{120} + \frac{4.096}{720}} = \frac{1}{\frac{121.264}{720 \times 3}}$$

i aleshores es tindrà que:

$$\bar{v} = \frac{4^8}{6!\cdot 3^2} \times \frac{720 \times 3}{121.264} = \frac{4^8}{3 \times 121.264} = \frac{65.536}{363.792} = 0'18$$

1) El temps mitjà d'espera vindrà donat per la fórmula:

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda}$$

Per a S = 5: $\bar{t}_f = \frac{2'216}{8} = 0'277$,

i com la unitat de temps és aquí la desena de minuts, resulta:

$$\bar{t}_f = 2 \text{ min. } 46 \text{ s.} = 2'77 \text{ min.} = 166 \text{ segons}$$

Per a S = 6:

$$\bar{t}_f = \frac{0'569}{8} = 0'07 \text{ , o sigui, } 0'7 \text{ min.} = 42 \text{ segons}$$

Per a S = 7:

$$\bar{t}_f = \frac{0'18}{8} = 0'022 \text{ , o sigui, } 0'22 \text{ min.} = 13'2 \text{ segons}$$

2) Calcular, en un fenomen d'espera per a la càrrega de combustible en una estació de servei cooperativa, on la taxa de servei és proporcional al número de clients en el sistema, el número mitjà de clients en el sistema, sabent que la taxa d'arribada és de λ = 6 i el coeficient de proporcionalitat és de μ = 2.

Solució:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = 6 \\ \mu = 2\end{array}\right\} \quad \psi = \lambda / \mu = 6/2 = 3;$$

Cal tenir en compte l'expressió general: $P_n = \frac{\psi^n}{n!} \times P_0$;

, i així es pot elaborar el següent quadre de probabilitats, la suma de les quals suposa, lògicament, la probabilitat absoluta o total:

$e^{-\psi} = P_0 = e^{-3} = 0'050$;

$$P_1 = 3 \times P_0 = 3 \times 0'05 = 0'150$$

$$P_2 = \frac{3^2}{2!} \times 0'05 = 0'225$$

$$P_3 = \frac{3^3}{3!} \times 0'05 = 0'225$$

$$P_4 = \frac{3^4}{4!} \times 0'05 = 0'169 \qquad = \boxed{\sum_{n=0}^{8} P_n = 1'000}$$

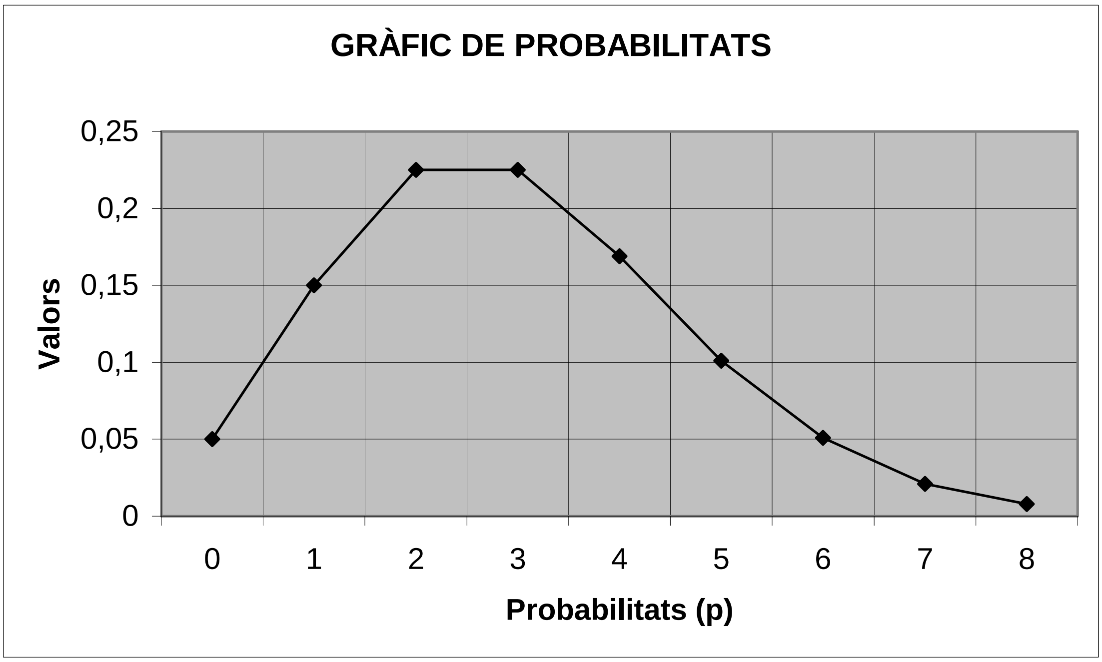
$$P_5 = \frac{3^5}{5!} \times 0'05 = 0'101$$

$$P_6 = \frac{3^6}{6!} \times 0'05 = 0'051$$

$$P_7 = \frac{3^7}{7!} \times 0'05 = 0'021$$

$$P_8 = \frac{3^8}{8!} \times 0'05 = 0'008$$

amb la següent representació gràfica:



D'on es deduirà fàcilment que:

$$\overline{n} = \sum_{n=1}^{8} n \cdot P_n = P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 + 5 \cdot P_5 + 6 \cdot P_6 + 7 \cdot P_7 + 8 \cdot P_8 =$$

$= 0'150 + 2 \cdot 0'225 + 3 \cdot 0'225 + 4 \cdot 0'169 + 5 \cdot 0101 + 6 \cdot 0'051 +$

$+7 \cdot 0'021 + 8 \cdot 0'008 = 0'150 + 0'450 + 0'675 + 0'676 + 0'505 + 0'306 +$

$+0'147 + 0'064 =$ **2'973 ≈ 3 clients en l'estació de servei**.

3) En una estació de servei cooperativa el número de pagesos que es presenten per hora és de 20 i el temps mitjà necessari per a prestar cada servei és de 6 minuts per client. S'admet que les arribades constitueixen un procés de Poisson i que la durada del procés és del tipus exponencial.

1) Quants punts de servei són suficients per tal d'evitar qualsevol embús en la recepció de clients?
2) La gerència de la cooperativa estudia la posada en pràctica d'un servei que sigui proporcional al nombre de clients. Quina és, en aquest cas, la probabilitat p_n de què hi hagi n clients en la fila d'espera? I el número mitjà de clients en el sistema?
3) El nombre de punts de servei, proporcional al número de clients, es limita a 4. Aleshores, quina és la probabilitat de què hagi d'entrar en acció altre punt de servei?

Solució:

1) Es tindrà que: $\lambda = 20$, $\mu = 10$, $\psi = \lambda/\mu = 2$.

Es necessiten, per conseqüent, més de dos punts de servei per tal d'evitar l'embús del sistema.

2) D'una manera general, es té:

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n)\cdot p_n(t) + \lambda_{n-1}\cdot p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}\cdot p_{n+1}(t)\,,$$
$$\frac{d}{dt}p_0(t) = -\lambda_0\cdot p_0(t) + \mu_1\cdot p_1(t)\,.$$

Però aquí:

$$\lambda_n = \lambda\ ,\ \mu_n = n\cdot\mu$$

d'on:

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = -(\lambda + n\mu)\cdot p_n(t) + \lambda\cdot p_{n-1}(t) + (n+1)\mu\cdot p_{n+1}(t)\,,$$
$$\frac{d}{dt}p_0(t) = -\lambda\cdot p_0(t) + \mu\cdot p_1(t)\,.$$

S’obté:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu}\cdot p_0\ ,$$
$$2\,\mu p_2 = (\lambda + \mu)\ p_1 - \lambda\cdot p_0\ ,$$
$$3\,\mu p_3 = (\lambda + 2\mu)\ p_2 - p_1\ ,$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

Es veu fàcilment que:

$$p_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0\ ,$$
$$p_3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0\ ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0\ .$$

Com també altrament:

$$\sum_0^\infty p_n = 1\,,$$

d’on:

$$p_0 + p_0\sum_1^\infty \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = 1$$

i emprant el desenvolupament exponencial:

$$p_0 + p_0\ (e^{\lambda/\mu} - 1) = 1.$$

Així:

$$p_0 = e^{-\lambda/\mu} \quad \text{i} \quad p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{e^{-\lambda/\mu}}{n!}$$

Aquí:

$$\boxed{p_n = \frac{1}{n!}2^n e^{-2} = 0'135\ \frac{2^n}{n!}}$$

La condició necessària de convergència d’aquesta sèrie numèrica exigiria que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0 \;;$$

vegem que això s'acompleix per l'aplicació de la fórmula de Stirling[12], en què:

$$n! \cong e^{-n} \times n^n \times \sqrt{2\pi n} \;;$$

En el nostre cas, es té que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \times e^n}{n^n \times \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2e}{n}\right)^n \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0 \times 0 = 0\,.$$

En tot cas, aquesta circumstància esdevé demostrada per l'aplicació del criteri de d'Alembert[13] o del quocient, ja que per a un terme general de la sèrie numèrica: $a_n = \frac{2^n}{n!}$, es té que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \times n!}{2^n \times (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1\,,$$

la qual cosa confirma el caràcter convergent de la sèrie que ens ocupa.

Aquesta convergència també queda corroborada per l'aplicació del primer criteri de Cauchy[14] ("criteri de l'arrel"), ja que:

---

[12] A la *Miscellanea Analytica* (1730) del matemàtic francès Abraham de Moivre (1667-1754) apareix, en la forma definitiva, la fórmula de Stirling, que James Stirling (matemàtic escocès) havia suggerit alguns mesos abans i que De Moivre fa servir el 1733 per descriure la llei normal com una aproximació de la distribució binomial. En una segona edició de l'obra, el 1738, De Moivre cita a Stirling en la millora de la fórmula. Hom deu a la ploma de De Moivre la primera aparició de la principal llei de la probabilitat (la llei normal o corba de Gauss) així com la primera forma, embrionària, del teorema central del límit, un dels dos principals teoremes, sens dubte, de la teoria de les probabilitats.

[13] Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), filòsof i matemàtic francès. La seva filosofia es va caracteritzar per la seva tolerància en general i el seu escepticisme en el camp de la religió i de la metafísica. Es va especialitzar en la filosofia natural i va redactar el discurs preliminar de l'*Encyclopédie* codirigida amb Denis Diderot. D'Alembert representa un nou tipus d'intel·lectual capaç de liderar la nova xarxa internacional d'instituciones científiques (d'altra banda molt vinculades als estats que les financen), alhora que exercir un assagisme independent i políticament compromès. Va abordar les matemàtiques a través de la física, amb el problema dels tres cossos (impossibilitat de trobar equacions de les trajectòries - inestabilitat del sistema), la precisió dels equinoccis (raó del lliscament de les estacions), les cordes vibrants (diferents maneres de vibració - aplicació a la música). Això li va dur a estudiar les equacions diferencials i les equacions en derivades parcials. També va inventar un criteri per a distingir una sèrie convergent d'una divergent, el conegut com a *criteri d'Alembert*, que aquí apliquem. La seva obra mestra va ser el tractat de dinàmica, on va enunciar el teorema que duu el seu nom (principi de d'Alembert). El teorema fonamental de l'àlgebra rep en alguns països el nom de teorema de d'Alembert-Gauss, atès que d'Alembert va ser el primer a donar una prova gairebé completa d'aquest teorema.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2e}{n\times\sqrt[2n]{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2e}{n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{2\pi n}} \;;$$

En qualsevol cas, per a la resolució del límit anterior del denominador de la segona fracció, també resulta aplicable el criteri de Stolz de l'arrel, en tractar-se d'una indeterminació del tipus ∞^0. Efectivament, es té que:

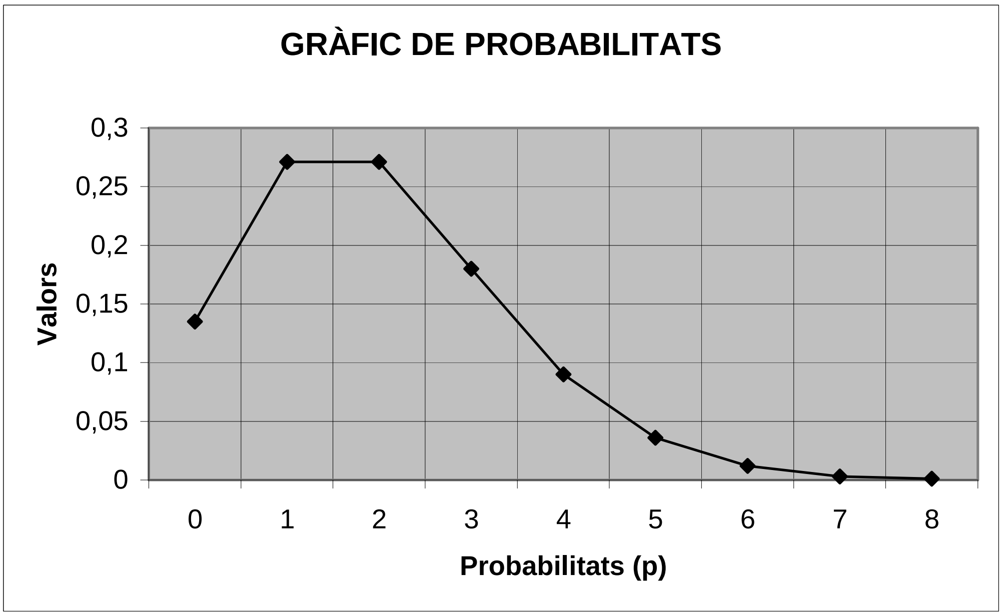
$$\lim_{n\to\infty} .\sqrt[2n]{2\pi n} = \lim_{n\to\infty} .\sqrt[2n-2(n-1)]{\frac{2\pi n}{2\pi(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} .\sqrt{\frac{n}{n-1}} = 1 \text{, o sigui:}$$

$\lim_{n\to\infty} .\sqrt[n]{a_n} = 0\times 1 = 0 < 1$, i la sèrie és CONVERGENT, tal com es pretenia demostrar.

Resulten, doncs, les següents probabilitats:

p_0 = 0'135	p_3 = 0'180	p_6 = 0'012
p_1 = 0'271	p_4 = 0'090	p_7 = 0'003
p_2 = 0'271	p_5 = 0'036	p_8 = 0'001

amb la següent representació gràfica:



[14] A. L. Cauchy (1789-1857), matemàtic i físic francès que va ser pioner en el camp de l'anàlisi matemàtica i la teoria de grups de permutacions. També va investigar la convergència i la divergència de sèries infinites, equacions diferencials, determinants, probabilitat, i física matemàtica. L'any 1814 va publicar la memòria de la integral definida, que va arribar a ser la base de la teoria de les funcions complexes. Gràcies a ell, l'anàlisi matemàtica va adquirir bases sòlides. Cauchy va precisar els conceptes de funció, límit i continuïtat en la forma actual, prenent el concepte de límit com a punt de partida de l'anàlisi.

Resulta fàcil comprovar, segons l'expressió:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{e^{-\lambda/\mu}}{n!} \ ,$$

que, en l'equilibri, es té un procés de Poisson tal que: $\bar{n} = \lambda/\mu$.

D'altra banda, amb els càlculs ja efectuats, s'acompleix que:

$$\sum_0^{\infty} p_n = 0'999 \approx 1$$

i el número mitjà de clients en el sistema, serà:

$$\bar{n} = \sum_0^{\infty} n \cdot p_n = 1'994 \approx 2 \text{ , ja que:}$$

$$\bar{n} = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 = 1'994.$$

Aquest número no és més que la suma de la sèrie:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n = \sum_{n=0}^{\infty} 0'135 \times \frac{2^n}{(n-1)!}$$

3) La probabilitat de què hagi d'entrar en acció un altre punt de servei de l'estació, serà:

$$\sum_{n=5}^{\infty} p_n = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 = 0'053 \equiv 5'3\%$$

$$\approx p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + \ldots = 0'052 + \ldots$$

4) Considerem ara un sistema continu amb dos estats (punt de servei desocupat / punt de servei ocupat), on la taxa poissoniana d'arribades dels clients a l'únic punt de servei és λ i la taxa exponencial de processament, μ. Si una arribada es produeix mentre s'està servint a un client, aquella es perd, si no, el servei al nou client comença immediatament.

Es tracta d'estudiar l'establiment del règim permanent.

Indicació. – Es podrà utilitzar per a la resolució d'aquest problema la transformació de Carson-Laplace.

Recordatori. – Sigui p_{ij} la probabilitat de transició de l'estat **i** a l'estat **j** durant el temps elemental dt. Si M és el número d'estats del sistema i $p_i(t)$ la probabilitat de què el sistema ocupi l'esta **i** en el temps **t**, es tindrà que :

$$\begin{cases} p_j(t+dt) = \sum_{i=1}^{M} p_i(t)\cdot p_{ij} \\ p_j(t+dt) - p_j(t) = \sum_{i=1}^{M} p_i(t)\left[p_{ij} - \delta_{ij}\right], \end{cases}$$

essent δ_{ij} el símbol de Krönecker (igual a 1 quan i només quan i = j, i igual a 0 en tots els altres casos).

Es té:

$$\lim_{dt\to 0}. \frac{p_j(t+dt) - p_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{M} p_i(t)\cdot \lim_{dt\to 0}. \frac{p_{ij} - \delta_{ij}}{dt}$$

d'on:

$$\frac{d\cdot p_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{M} p_i(t)\cdot a_{ij} ,$$

essent a_{ij} els elements de la matriu diferencial **A**, tal que:

$$a_{ij} = \lim_{dt\to 0}. \frac{p_{ij} - \delta_{ij}}{dt} .$$

Es té, doncs:

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t)A .$$

Considerem ara la transformació de Carson-Laplace (*) de la funció f(t), a saber:

$$F(p) = p\int_0^{\infty} e^{-pt}\cdot f(t)\cdot dt = L\cdot f(t) ;$$

acomplint-se que:

$$L \frac{df}{dt} = p\cdot F(p) - p\cdot f(0) .$$

Així doncs:

$$L \frac{d}{dt} P(t) = p\cdot \Pi(p) - p\cdot P(0)$$

i

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{\Pi}(p) \cdot \mathbf{A}$$

si **A** no depèn de t. D'on:

$$p \cdot \mathbf{II}(p) - p \cdot \mathbf{P}(0) = \mathbf{II}(p) \cdot \mathbf{A}.$$

$$\mathbf{II}(p)\,[p\cdot\mathbf{1} - \mathbf{A}] = p\cdot \mathbf{P}(0)$$

i aleshores:

$$\mathbf{II}(p) = p \cdot \mathbf{P}(0)\,[p \cdot \mathbf{1} - \mathbf{A}]^{-1}\,.$$

Solució:

a)

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} 1-\lambda dt & \lambda dt \\ \mu dt & 1-\mu dt \end{bmatrix}.$$

En efecte, segons l'enunciat del problema plantejat hi ha dos estats diferents: punt de servei desocupat i punt de servei ocupat. Aleshores, la taxa poissoniana de les arribades és λ i la taxa exponencial del servei és μ.

Es té:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

i

$$\mathbf{II}(p) = p \cdot \mathbf{P}(0)\left\{ p[1] - \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

Resultant, per tal d'efectuar el càlcul de la matriu inversa, que:

$$p\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+\lambda & -\lambda \\ -\mu & p+\mu \end{bmatrix}; \text{la seva matriu transposta serà :}$$

$$\begin{bmatrix} p+\lambda & -\lambda \\ -\mu & p+\mu \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} p+\lambda & -\mu \\ -\lambda & p+\mu \end{bmatrix},\ [\ ]^{p} = \begin{bmatrix} p+\mu & \lambda \\ \mu & p+\lambda \end{bmatrix}$$

I el valor del determinant: $\Delta = (p + \lambda) \cdot (p + \mu) - \lambda\cdot\mu = p\,(p + \lambda + \mu)$, d'on:

$$[\ ]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{p+\mu}{p(p+\lambda+\mu)} & \dfrac{\lambda}{p(p+\lambda+\mu)} \\ \dfrac{\mu}{p(p+\lambda+\mu)} & \dfrac{p+\lambda}{p(p+\lambda+\mu)} \end{bmatrix}$$

I fent operacions, es tindrà que:

$$\Pi(p) = P(0)\begin{bmatrix} \dfrac{p+\mu}{p+\lambda+\mu} & \dfrac{\lambda}{p+\lambda+\mu} \\ \dfrac{\mu}{p+\lambda+\mu} & \dfrac{p+\lambda}{p+\lambda+\mu} \end{bmatrix}$$

Se substitueix en una taula de transformacions inverses:

$$\frac{1}{p+a} \rightarrow \frac{1-e^{-at}}{a}; \quad \frac{p}{p+a} \rightarrow e^{-at};$$

d'on, per exemple:

$$\frac{p}{p+\lambda+\mu} + \frac{\mu}{p+\lambda+\mu} \rightarrow e^{-(\lambda+\mu)t} + \mu\left[\frac{1-e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}\right] =$$
$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Així, en el nostre cas quedarà la matriu:

$$P(t) = P(0)\begin{bmatrix} \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} + \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} - \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} - \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \end{bmatrix}$$

Es veu que, quan $t \rightarrow \infty$, **P** (t) tendeix cap a:

$$P(0)\begin{bmatrix} \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{bmatrix} = \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right] = [\pi_1, \pi_2]$$

, essent el vector d'estat: **P**(0) = [1,0].

b) Altre mètode de resolució més resumit condueix a:

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t) \cdot A \quad .$$

Si el règim és permanent: d/dt · **P**(t) = 0, d'on: **P**(t) · **A** = 0. Resultant que:

$-\lambda \cdot \pi_1 + \mu \cdot \pi_2 = 0$, o allò que és el mateix:

$$\lambda \cdot \pi_1 - \mu \cdot \pi_2 = 0 \ ,$$

amb:

$$\pi_1 + \pi_2 = 1.$$

De fet, doncs, es tracta de resoldre el sistema no homogeni (heterogeni) de dues equacions amb dues incògnites, compatible i determinat, següent:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda \cdot \pi_1 - \mu \cdot \pi_2 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{array}\right\}$$

Per aplicació de la coneguda regla de Cramer, es té:

$$\pi_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \lambda & -\mu \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \ ,$$

d'on:

$$\boxed{\pi_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \ , \ \pi_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}}.$$

Aquests resultats coincideixen òbviament amb els obtinguts per aplicació del mètode resolutiu indicat a l'apartat anterior a).

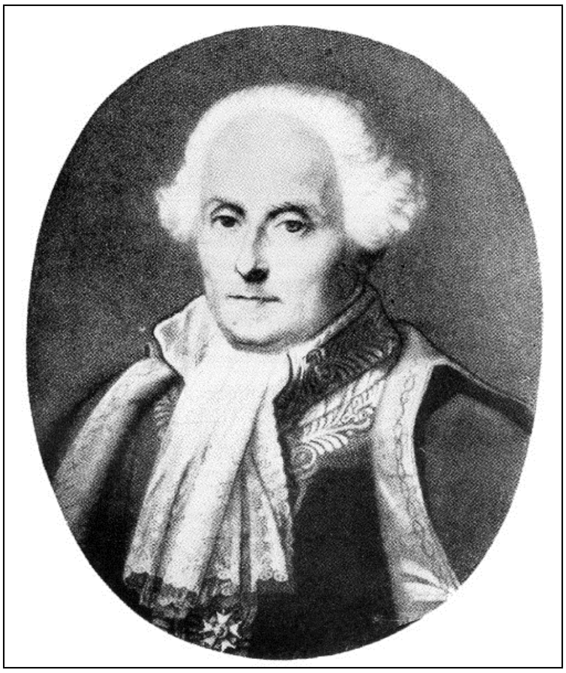


FIG. 9.19. Pierre Simon Laplace.

(*) La transformada de Laplace (1780), que és un operador lineal com tindrem ocasió de comprovar seguidament, pren el seu nom en honor del gran matemàtic francès Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Aquesta transformació suposa, genèricament, que y(x) és una funció continua en tot el semieix OX positiu, i suposem ara que el seu producte per e^{-px} sigui integrable entre 0 i ∞ en un cert camp de p. Doncs bé, la funció F del paràmetre p que aquesta integral defineix en aquest camp:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} \cdot y(x) \cdot dx$$

s'anomena *transformada Laplace* de y(x), mentre que la funció **y** s'anomenarà generatriu Laplace de F, i escriurem:

$$F(p) = L[y(x)] \quad ; \quad y(x) = L^{-1}[F(p)]$$

Totes dues transformacions, directa i inversa, són operacions lineals, és a dir, acompleixen aquestes dues propietats:

a) Són distributives en relació a l'adició:

$L[y_1+y_2] = L[y_1] + L[y_2]$, amb la qual cosa: $L^{-1}[F_1+F_2] = L^{-1}[F_1] + L^{-1}[F_2]$

b) Són permutables amb un factor independent de la variable:

$L[ay] = a \cdot L[y]$; $L^{-1}[aF] = a \cdot L^{-1}[F]$

Transformada d'una derivada. La propietat més interessant per a les aplicacions subsegüents és que: Al DERIVAR la funció y(x) la transformada Laplace queda MULTIPLICADA per la seva variable p i disminuïda en y(0). És a dir:

Si $L[y(x)] = F(p)$ és: $L[y'(x)] = p \cdot F[y] - y(0) = p \cdot F(p) - y(0)$ (1)

Evidentment se suposa que y'(x) segueix acomplint les condicions de integrabilitat exigides a y(x). En aquest supòsit resultarà, en efecte, que:

$$\int_0^\infty e^{-px} \cdot y'(x) \cdot dx = \left[e^{-px}\, y(x)\right]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px} \cdot y(x) \cdot dx = -y(0) + p \cdot F(p)$$

ja que la integrabilitat de la funció subintegral $[e^{-px} \cdot y(x)]$ entre els límits 0 i ∞ exigeix l'anulació d'aquesta funció per a $x \to \infty$.

L'aplicació reiterada de l'expressió anterior (1) ens oferirà:

$$L[y''(x)] = p \cdot L[y'] - y'(0) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot y(0) - y'(0)$$
$$L[y'''(x)] = p \cdot L[y''] - y''(0) = p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot y(0) - p \cdot y'(0) - y''(0)$$
. . . .

La transformada de la derivada enèsima d'una funció (que se suposa existent) és igual al producte de la transformada d'aquesta funció per p^n menys un polinomi en p de grau n-1 els coeficients del qual, convenientment ordenats segons les potències decreixents de p, són els valors inicials y(0), y'(0), ..., $y^{n-1}(0)$ de la funció i de les seves (n-1) primeres derivades. És a dir:

$$L[y^{(n)}(x)] = p^nF(p) – p^{n-1}y(0) – p^{n-2}y'(0) – ... – p\cdot y^{(n-2)}(0) – y^{(n-1)}(0)$$

Aquesta transformada integral posseeix una sèrie de propietats que la poden fer útil en l'anàlisi de sistemes lineals. Un dels avantatges més significatius radica en què la integració i la derivació en el Càlcul Infinitesimal clàssic esdevenen fàcilment en multiplicació i divisió. Això transforma les equacions diferencials i integrals en equacions polinòmiques, força més senzilles de resoldre.

Una altra aplicació important en els sistemes lineals rau en el càlcul de la senyal de sortida. Aquesta es pot calcular mitjançant la convolució de la resposta impulsiva del sistema amb la senyal d'entrada. La realització d'aquest càlcul en l'espai de Laplace converteix la convolució en una multiplicació, habitualment de resolució molt més senzilla. Quan es parla de la transformada de Laplace, generalment es refereix a la versió unilateral. També existeix, tanmateix, la transformada de Laplace bilateral.

La transformada de Laplace es troba estretament relacionada amb la Transformada de Fourier[15] i la Transformada Z. La transformada de Laplace és, de fet, una generalització de la Transformada de Fourier de Temps-Continu. Malgrat que les transformades de Laplace no se solen resoldre mitjançant integració si no per mitjà de taules i l'ús de computadors (per exemple *Matlab*), com veurem més endavant. Això defineix la transformada de Laplace i la seva inversa. Cal apreciar les similituds existents entre la transformada de Laplace i la seva inversa. Això ens oferirà, com a resultat, moltes de les simetries trobades a l'anàlisi de Fourier.

Per tal de resoldre les Transformades de Laplace es poden emprar diversos mètodes, a saber:

---

15 En matemàtica, la **transformada de Fourier** es correspon a una aplicació que fa correspondre a una funció *f* amb valors complexos i definida en la recta, una altra funció *g* definida de la manera següent:

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

, on *f* és L^1, o sigui *f* ha de ser una funció integrable en el sentit de la integral de Lebesgue. El factor, que acompanya la integral en definició facilita l'enunciat d'alguns dels teoremes referents a la transformada de Fourier. Encara que aquesta forma de normalitzar la transformada de Fourier és la més comunament adoptada, no és universal. A la pràctica, les variables x i ξsolen estar associades a dimensions (com l'espai -metres-, la freqüència -segons-1-, etc.) i a vegades és correcte utilitzar la fórmula alternativa:

$$g(\xi) - \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\beta\xi x} dx$$

, de manera que la constant beta cancel·la les dimensions associades a les variables obtenint un exponent sense dimensió. La transformada de Fourier així definida gaudeix d'una sèrie de propietats de continuïtat que garanteixen que pot estendre's a espais de funcions majors i fins i tot a espais de funcions generalitzades. A més, té una considerable multitud d'aplicacions en moltes àrees de la ciència i l'enginyeria: la física, la teoria dels números, la combinatòria, el processament de senyals (electrònica), la teoria de la probabilitat, l'estadística, l'òptica, la propagació d'ones i altres àrees. En processament de senyals, la transformada de Fourier sol considerar-se com descomposició d'un senyal en components de freqüències diferents, és a dir, *g* correspon a l'espectre de freqüències del senyal *f*. La branca de la matemàtica que estudia la transformada de Fourier i les seves generalitzacions és denominada *anàlisi harmònica*.

a) Resolent la Integral

Probablement, el mètode més difícil i menys emprat per trobar la Transformada de Laplace és resolent directament la integral. Encara que resulta tècnicament possible fer-lo d'aquesta manera, també és extremadament consumidor de temps, donada la facilitat dels següents dos mètodes per calcular-la. Les integrals estan essencialment per a entendre conceptualment la teoria i d'on s'originen els següents mètodes resolutius.

b) Usant una Computadora

L'ús d'una computadora per tal de trobar la transformada de Laplace resulta relativament senzill. *Matlab*, per exemple, té dues funcions, *laplace* i *ilaplace*, i totes dues formen part de les llibreries simbòliques, amb la qual cosa trobarem la transformada de Laplace i la seva inversa, respectivament. Aquest mètode resulta preferit generalment per a funcions més complicades. Funcions més senzilles i ideals usualment es resolen amb més rapidesa mitjançant les taules adients. En qualsevol cas, vegem que l'anàlisi i simulació de processos de *Mathcad* i *Matlab* explica el modelat de processos els paràmetres dels quals poden ésser globalitzats, així com la implementació d'aquests per tal de simular el capteniment o bé analitzar la seva estabilitat. De fet, aquests models constitueixen simplificacions de la realitat que permeten la resolució senzilla de molts problemes que es presenten a la vida real.

c) Usant Taules

Quan s'aprèn per primer cop la transformada de Laplace, les taules són, sens dubte, la forma més comuna per trobar-la. Amb suficient pràctica, no obstant això, les taules es fan innecessàries. La gran part del disseny d'aplicacions comença en el domini de Laplace i ofereixen, com a resultat, una solució en el domini del temps.