4.3. Fila d'espera amb diversos punts de servei i nombre il·limitat de clients

La figura que ve a continuació representa esquemàticament aquesta situació. Anomenem:

S al nombre de punts de servei.
ν al nombre de clients en la fila d'espera.
j al nombre de clients que estan sent processats ($0 \leq j \leq S$).
n al nombre total d'unitats (clients) en el sistema, és a dir, en espera i essent processats, això ès: $n = \nu + j$.
ρ al nombre de punts de servei desocupats.
$\mathbf{t_f}$ al temps mitjà d'espera del client en la fila, abans de ser atès, que no ha de confondre's amb la *latència* de la resposta (que és el temps transcorregut, expressat en segons, entre la presentació del client i el començament de la resposta).

(Els valors mitjans corresponents es representaran, al llarg de tot el desenvolupament, amb un guió horitzontal situat sobre la variable en qüestió).

La situació apareix amb prou claredat. Mentre que $j < S$, és a dir, mentre que tots els punts de servei no estan ocupats, no hi ha files d'espera i qualsevol client que arribi és processat immediatament ($\nu = 0$). Per contra, si $j = S$, pot formar-se una fila d'espera i llavors $\nu \geq 0$.

La situació, gràficament, podria esquematitzar-se així:

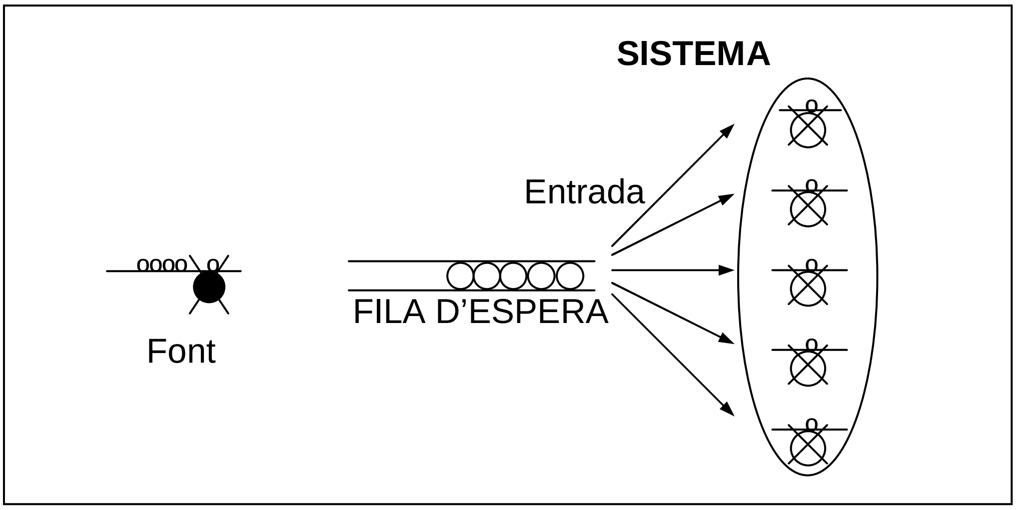

FIG. 9.17. Esquema d'arribades de clients a l'estació de servei.

En aquest cas, les arribades de clients a l'estació de servei cooperatiu són de naturalesa poissoniana i la seva taxa mitjana de processament és λ. Tots els punts de servei tenen igual taxa mitja de processament $\boldsymbol{\mu}$ que correspon a una mateixa distribució exponencial.

A la figura anterior no hem representat més que una sola fila d'espera. Podem considerar, igualment, que hi ha varies files, una davant de cada punt de servei del sistema; aquest últim cas serà equivalent al primer amb la condició de què els clients no tinguin cap prioritat ni preferència per cap punt de servei en particular i que qualsevol client actuï des de la fila més curta. En el cas de tractar-se de diverses estacions de servei de combustible, el problema podria multiplicar-se tantes vegades com calgués.

Les *equacions d'estat* que descriuen aquest fenomen d'espera s'estableixen fàcilment de la següent manera:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}p_0(t) = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t), \\ \dfrac{d}{dt}p_n(t) = \lambda \cdot p_{n-1}(t) - (\lambda + n\cdot\mu)p_n(t) + (n+1)\cdot\mu\cdot p_{n+1}(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, n / 1 \le n < S, \\ \dfrac{d}{dt}p_n(t) = \lambda\cdot p_{n-1}(t) - (\lambda + S\cdot\mu)p_n(t) + S\cdot\mu\cdot p_{n+1}(t), \quad \forall n \ge S. \end{cases}$$

Aquestes equacions no són més que un cas particular de les equacions següents, més generals, que defineixen el que es denomina un "procés de naixement i de mort" en el qual les arribades i el servei són poissonians:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}p_n(t) = \lambda_{n-1}\cdot p_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)\cdot p_n(t) + \mu_{n+1}\cdot p_{n+1}(t), \forall\, n > 0 \\ \dfrac{d}{dt}p_0(t) = -\lambda_0\cdot p_0(t) + \mu_1\cdot p_1(t) \end{cases}$$

on λ_n i μ_n són funcions de *n*.

Les equacions anteriors generalitzen nombrosos casos particulars dels fenòmens d'espera, per exemple, el d'una taxa de processament que sigui proporcional al nombre d'unitats en el sistema ($\lambda_n = \lambda$; $\mu_n = n\cdot\mu$).

Situem-nos ara en el cas de "règim permanent", és a dir, en el cas en què les probabilitats p_n, d'un nombre *n* d'unitats en el sistema, són independents del temps, amb la qual cosa:

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = 0, \text{per a qualsevol valor de n.}$$

Es posarà $\psi = \lambda/\mu$. La quantitat ψ/S, denominada "*intensitat de trànsit*", serà tal que $(\psi/S) < 1$, és a dir, $\psi < S$, sinó la fila es faria infinita, en ser el nombre mitja d'arribades de clients superior al de sortides.

a) *Probabilitat p_n que existeixin **n** unitats en el sistema.*

De les equacions d'estat es dedueixen immediatament les fórmules següents:

$$\left.\begin{array}{ll} p_n = p_0 \dfrac{\psi^n}{n!}; & 1 \le n < S, \\ p_n = p_0 \dfrac{\psi^n}{S!\cdot S^{n-S}}; & n \ge S; \end{array}\right\}$$

on:

$$p_0 = \frac{1}{\dfrac{\psi^S}{S!(1-\psi/S)} + 1 + \dfrac{\psi}{1!} + \dfrac{\psi^2}{2!} + \dots + \dfrac{\psi^{S-1}}{(S-1)!}}$$

$$\text{o també : } \quad p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = e^{-\psi}$$

En el cas particular que existeixi un únic punt de servei, o sigui, S = 1, es té:

$$p_0 = 1 - \psi,$$
$$p_n = (1-\psi)\cdot\psi^n$$

Es poden emprar igualment, per al càlcul de p_n, les fórmules de retorn o recurrència:

$$\left.\begin{array}{ll} p_n = \dfrac{\psi}{n} p_{n-1}, & 1 \le n < S \\ p_n = \dfrac{\psi}{S} p_{n-1}, & n \ge S \end{array}\right\}$$

En qualsevol cas, la determinació de la probabilitat p_n de què puguin existir n unitats de clients en el sistema (estació de servei cooperatiu), essent la taxa mitjana d'arribades λ i la taxa de servei proporcional al número de clients en el sistema, es porta a terme així:

Tornem a considerar les equacions generals del procés de naixement i mort:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}p_n(t) = \lambda_{n-1}\cdot p_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \mu_{n+1}\cdot p_{n+1}(t), \quad n > 0; \\ \dfrac{d}{dt}p_0(t) = -\lambda\cdot p_0(t) + \mu_1\cdot p_1(t). \end{cases}$$

Aquí, $\lambda_n = \lambda$ i: $\mu_n = n\cdot\mu$. En règim permanent, es tindrà:

$$0 = \lambda\cdot p_{n-1} - (\lambda + n\cdot\mu)p_n + (n+1)\mu\cdot p_{n+1}, \quad n > 0;$$
$$0 = -\lambda\cdot p_0 + \mu\cdot p_1,$$

o sigui:

$$(n+1)\mu\cdot p_{n+1} = -\lambda\cdot p_{n-1} + (\lambda + n\cdot\mu)p_n,$$
$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu}p_0,$$

com:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu}p_0,$$
$$2\mu\cdot p_2 = (\lambda + \mu)p_1 - \lambda\cdot p_0,$$
$$3\mu\cdot p_3 = (\lambda + 2\mu)p_2 - \lambda\cdot p_1,$$
$$4\mu\cdot p_4 = (\lambda + 3\mu)p_3 - \lambda\cdot p_2,$$
$$\Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda$$

d'on:

$$p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}p_0;$$

però:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1;$$

així doncs:

$$p_0 + p_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = 1,$$
$$p_n + p_0(e^{\lambda/\mu} - 1) = 1,$$
$$p_0 = e^{-\lambda/\mu};$$

i finalment:

$$p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n e^{-\lambda/\mu}}{n!} = \frac{p_0 \times \psi^n}{n!}$$

b) *Nombre mitjà d'unitats **n** en el sistema.*

Es calcularà l'esperança matemàtica o valor mitjà de *n* del següent mode:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n ,$$

$$\bar{n} = \left[\psi + 2\frac{\psi^2}{2!} + ... + S\frac{\psi^S}{S!} + \frac{(S+1)\psi^{S+1}}{S!(S-\psi)} + \frac{\psi^{S+2}}{S!(S-\psi)^2} \right] p_0 .$$

En particular, per a S = 1:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n = \frac{\psi}{1-\psi} = \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda};$$

, amb la qual cosa, el càlcul se simplifica notòriament.

c) *Nombre mitjà de clients* ***v*** *en la fila d'espera*.

Es calcularà l'esperança matemàtica de la variable aleatòria: $v = n - S$ (unitats esperant en la cua), tractant-se del cas d'un fenomen d'espera amb diversos punts de servei, o sigui:

$$\bar{v} = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S)p_n = \sum_{n=S+1}^{\infty} n \cdot p_n - S\sum_{n=S+1}^{\infty} p_n$$

$$\rightarrow \sum_{n=S+1}^{\infty} n \cdot p_n = p_0 \left[(S+1)\frac{\psi^{S+1}}{S!S} + (S+2)\frac{\psi^{S+2}}{S!S^2} + ... \right] =$$

$$= \frac{p_0 \cdot \psi}{S!} \left[(S+1)\frac{\psi^S}{S} + (S+2)\frac{\psi^{S+1}}{S^2} + ... \right]$$

Como succeeix que:

$$\frac{\psi^{S+1}}{S} + \frac{\psi^{S+2}}{S^2} + ... = \frac{\psi^{S+1}}{S}\left[1 + \frac{\psi}{S} + \frac{\psi^2}{S^2} + ... \right] =$$

$$= \frac{\psi^{S+1}}{S} \times \frac{1}{1 - \psi/S} = \frac{\psi^{S+1}}{S - \psi} \quad ,$$

derivant l'expressió anterior resulta que:

$$\frac{(S+1)(S-\psi)\psi^S + \psi^{S+1}}{(S-\psi)^2}$$

i també:

$$\sum_{S+1}^{\infty} n \cdot p_n = p_0 \left[\frac{(S+1)\psi^{S+1}}{S!(S-\psi)} + \frac{\psi^{S+2}}{S!(S-\psi)^2} \right]$$

$$\rightarrow S \sum_{n=S+1}^{\infty} p_n = p_0 \cdot S \left[\frac{\psi^{S+1}}{S!S} + \frac{\psi^{S+2}}{S!S^2} + \ldots \right] =$$

$$= \frac{p_0 \cdot \psi^{S+1}}{S!} \left[1 + \frac{\psi}{S} + \frac{\psi^2}{S^2} + \ldots \right] = \frac{p_0 \cdot \psi^{S+1}}{S!} \times \frac{1}{1 - \psi / S}$$

$$= p_0 \cdot S \frac{\psi^{S+1}}{S!} \times \frac{1}{S - \psi}.$$

D'on es dedueix que:

$$\overline{v} = p_0 \left[\frac{\psi^{S+1}}{S!(S-\psi)} + \frac{\psi^{S+2}}{S!(S-\psi)^2} \right] =$$

$$= p_0 \frac{S \cdot \psi^{S+1}}{S!(S-\psi)^2} = p_0 \frac{\psi^{S+1}}{S \cdot S!(1 - \psi / S)^2}$$

, arribant així a la fórmula cercada. En particular, per a S = 1, es tindrà

l'expressió simplificada:

$$\sum_{n=S+1}^{\infty} (n-1) p_n = \frac{\psi^2}{1-\psi}.$$

d) *Nombre mitjà ρ de punts de servei desocupats*.

$$\overline{\rho} = \sum_{n=0}^{S} (S-n) p_n = S - \psi;$$

Per a S = 1, es té:

$$\overline{\rho} = 1 - \psi .$$

Les mitjanes de les variables *n*, *v* i *ρ* estan lligades analíticament per la relació:

$$\overline{n} = \overline{v} + S - \overline{\rho} = \overline{v} + \psi.$$

e) *Probabilitat d' espera*.

La probabilitat d'una espera de qualsevulla durada o probabilitat d'espera, que serà expressada per *p*(> 0) és, senzillament, la probabilitat de què *n* sigui superior o igual a *S*. Així:

$$p(>0) = \Pr(n \geq S) = \sum_{n=S}^{\infty} p_n,$$

$$p(>0) = \frac{\psi^S}{S!(1-\psi/S)} p_0 .$$

f) *Temps mitjà d' espera t_f en la fila*:

En règim permanent, es té:

$$\bar{v} = \lambda \bar{t}_f ,$$

d'on:

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{\psi^S}{S \cdot S!\mu(1-\psi/S)^2} p_0 .$$

Existeixen al respecte uns àbacs que ofereixen els valors dels productes $\mu \cdot t_f$ per als diferents valors de S i ψ/S. Concretament, per a: $S = 1$, es tindrà:

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\psi}{1-\psi} = \frac{\bar{n}}{\lambda} .$$