

Pronóstico con Modelos ARIMA para los casos del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) y la Acción de América Móvil (AM)

Rosa María Domínguez Gijón
Adriana Zambrano Reyes

Resumen

Se propone el uso de la metodología ARIMA para el estudio de las series de tiempo, las series analizadas en este proyecto son el IPC y la acción de América Móvil. Los objetivos principales de esta investigación son estudiar las propiedades de los modelos propuestos, proponer un modelo en particular para el caso de estudio y evaluar su desempeño.

Abstract

It is proposed the usage of the ARIMA methodology in order to study time series, the series analyzed in this project are IPC and the stock of América Móvil. The main goals of this research are studying the properties of the proposed models, proposing a particular model for the study case and evaluating its performance.

Introducción

En la presente investigación se muestra el desarrollo metodológico de algunos modelos ARIMA con la finalidad de pronosticar valores “a corto plazo” del Índice de Precios y Cotizaciones, y la acción de América Móvil. El creciente mercado financiero en México, como los principales mercados financieros a nivel mundial, requiere del conocimiento de modelos cuyo grado de sofisticación a nivel matemático, estadístico y econométrico aumenta con el paso del tiempo; esto último motiva a mostrar un trabajo que sea útil para aquellos lectores que comienzan su estudio, tanto en la teoría como en las aplicaciones, del problema de las series de tiempo financieras.

La experiencia ha mostrado que la mayoría de los fenómenos reales que se estudian en las finanzas, o en economía, poseen una naturaleza compleja. Cuando uno intenta explicar, modelar o pronosticar alguna variable económico-financiera, comúnmente, se enfrentará a una serie de inconvenientes, dígame los hechos estilizados, tales como la no estacionariedad de la serie. El actual trabajo pretende mostrar el uso de las herramientas básicas para lidiar con estos hechos, en este sentido se presentan los modelos ARIMA como una alternativa de solución.

Así pues, el principal objetivo de este proyecto de investigación será detallar la metodología de estos modelos, como ejemplo tomaremos al IPC y la acción de AM. La estrategia a emplear será la propuesta por Box y Jenkins, la cual consta de cuatro etapas: identificación de un modelo ARIMA, estimación de los parámetros, verificación del modelo y uso del modelo (pronóstico).

Discusión teórica

En 1970, Box y Jenkins desarrollaron un cuerpo metodológico destinado a identificar, estimar y diagnosticar modelos dinámicos de series temporales en los que la variable tiempo juega un papel fundamental, a estos modelos se les llamó ARIMA. La metodología empleada en los modelos ARIMA es sólo una pequeña parte de lo que se conoce normalmente como econometría de series temporales pero, sin duda alguna, una de las más utilizadas y germen de otros muchos desarrollos posteriores.

En ocasiones, al analizar los procedimientos se han contrapuesto a la llamada econometría estructural, es decir, a la especificación de modelos econométricos apoyada en las teorías subyacentes; sin embargo, hoy en día los conceptos y procedimientos que examinaremos constituyen más una herramienta para apoyar y complementar los conocimientos econométricos tradicionales que un modo alternativo de hacer econometría. Por otro lado, la utilización de modelos ARIMA se restringe a series largas y de alta frecuencia por ejemplo meses, semanas, días, etc. y su utilidad final los hace útiles para el pronóstico a corto plazo pero no para la comprensión estructural del fenómeno o la simulación de escenarios.

La ventaja de los mencionados modelos radica en el hecho de que no requieren distintas series de datos, es decir, otras variables referidas al mismo periodo de tiempo; esto a su vez implica un ahorro en la identificación y especificación del modelo en el sentido de la econometría tradicional, pues por decirlo de algún modo, la variable bajo estudio se explica así misma. Pudiendo existir variantes con respecto a cómo estructurar los pasos para el estudio de los modelos ARIMA, esta investigación se centra en los pasos sugeridos por Box-Jenkins; también se consideran algunas sugerencias útiles en la etapa del pronóstico.

Aspectos Metodológicos

Una serie de tiempo es por naturaleza un proceso estocástico, esto es, una familia de variables aleatorias asociadas a un conjunto índice de números reales, el tiempo (T) en nuestro caso, de tal forma que a cada elemento del conjunto le corresponde una y sólo una variable aleatoria. El hecho de que el proceso estocástico sea continuo o discreto no provee ninguna información adicional sobre las variables bajo estudio, pues éstas pueden ser continuas o discretas.

Uno de los principales problemas de las series de tiempo es que estas pueden ser no estacionarias. Sea Z_t , que represente el proceso estocástico; una serie es estacionaria (débilmente) si ni su media, μ , ni sus autocovarianzas, γ_j , dependen del tiempo t , donde:

$$\gamma_j = E(Z_t - \mu)(Z_{t-j} - \mu) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) \quad j \neq 0, \text{ dado la anterior.}$$

$$E(Z_t) = \mu \quad \forall t$$

$$E(Z_t - \mu)(Z_{t-j} - \mu) = \gamma_j \quad \forall t \text{ y } j$$

Aunado a lo anterior, también debemos considerar posibles transformaciones lineales a la serie, es decir, aplicarle alguna función tal que se preserve el orden de los elementos de nuestra serie, pero que disminuya en forma considerable el grado de dispersión de la misma; por ejemplo la aplicación de la función logaritmo. Una razón más para considerar dicha transformación es nuestro interés en los rendimientos del IPC y de la acción, y no tanto de su valor diario; es decir, mediremos su cambio con respecto a un periodo pasado.

Sea y_t la variable que represente al IPC, y x_t^* que representa la transformación del IPC. La variable a estudiar será una transformación de la siguiente forma:

$$x_t^* = \log \left(\frac{y_t}{y_{t-1}} \right) \quad \forall t \in T$$

La transformación propuesta para la serie de la acción de América Móvil es la misma.

A continuación introduciremos el uso de operadores y las ecuaciones de los modelos AR y MA. El primer operador en ser mencionado será el llamado operador de retraso denotado por la letra L (del inglés lag). Sea Z_t la variable aleatoria en el tiempo t en T.

$$\begin{aligned} LZ_t &= Z_{t-1} \quad \forall t \in T \\ L^2 Z_t &= L(LZ_t) = L(Z_{t-1}) = Z_{t-2} \\ &\vdots \\ L^k Z_t &= L(L^{k-1} Z_t) = Z_{t-k} \end{aligned}$$

El operador diferencia, representado por Δ , establece la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \Delta Z_t &= Z_t - Z_{t-1} = (1-L)Z_t \\ \Delta^2 Z_t &= (1-L)^2 Z_t = \Delta(\Delta Z_t) \\ \Delta(\Delta Z_t) &= \Delta Z_t - \Delta Z_{t-1} = Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-1} + Z_{t-2} \\ &\vdots \\ \Delta^k Z_t &= \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} (-1)^j Z_{t-j} \quad \forall t \in T, \quad k=1,2,\dots \end{aligned}$$

Las ecuaciones de los modelos AR y MA, respectivamente, son de la siguiente forma:

$$\bar{Z}_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \bar{Z}_{t-i} + a_t \quad \text{AR}(p)$$

$$\bar{Z}_t = a_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \bar{Z}_{t-i} \quad \text{MA}(q)$$

$$\bar{Z}_t = Z_t - \mu$$

Por último, un modelo ARIMA es la combinación de un AR y un MA, se define:

$$\phi(L)\Delta^d \bar{Z}_t = \theta(L)a_t$$

donde d es el nivel de integración.

Obtención y descripción de datos

Caso IPC: Los datos que se utilizan en esta investigación corresponden al valor de cierre diario del índice de precios y cotizaciones que es el principal indicador de la bolsa mexicana de valores en el periodo comprendido de noviembre de 8 de Noviembre de 1991 al 24 de abril del 2010, los cuales se presentan en la gráfica 1.

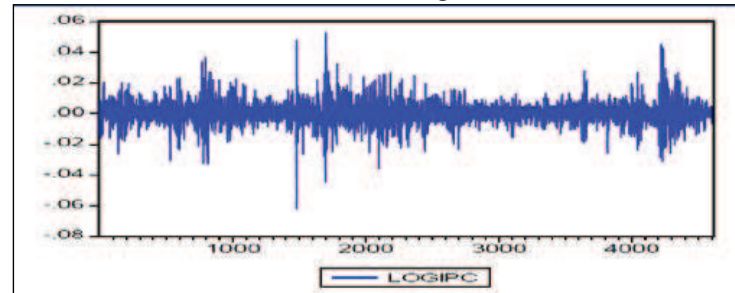
Gráfica 1 Comportamiento Histórico del Índice de Precios y Cotizaciones



Fuente: Elaboración propia

En la gráfica 2 se presenta el comportamiento del logaritmo del índice de precios y cotizaciones con un total de 4606 observaciones, se observa que la volatilidad tiene algunos puntos de alta volatilidad, pero en general, es una serie bien comportada.

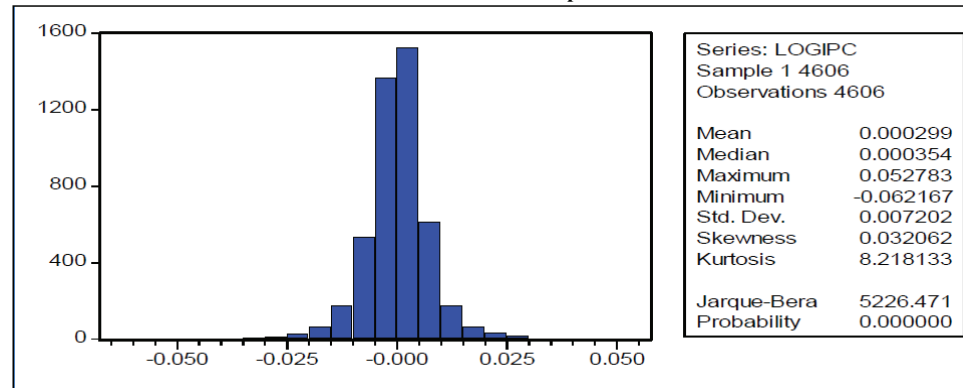
Gráfica 2 Transformación Logarítmica del IPC



Fuente: Elaboración propia

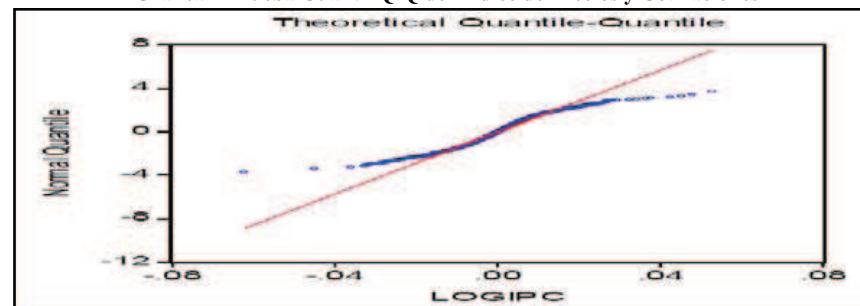
Al realizar un análisis de las principales características que se pueden apreciar en el IPC se observa la siguiente información: una media cercana al cero; un sesgo de 0.032, el cual también es cercano al cero; y el dato que representa un problema es la Curtosis, no obstante, esto nos indica una normal leptocúrtica.

Gráfica 3 Estadísticos Descriptivos del IPC



Fuente: Elaboración propia

Gráfica 4 Prueba Cuantil Q-Q del Índice de Precios y Cotizaciones



Fuente: Elaboración propia

La gráfica 4 muestra el ajuste de los datos empíricos del índice de precios y cotizaciones en contraste con la distribución teórica normal, se observa a través del gráfico de Cuantil Q-Q que la distribución teórica ajusta adecuadamente la información central pero no así en las colas inferior y superior.

Caso América Móvil: La base de datos corresponde al valor de cierre diario de América Móvil del periodo comprendido del 1 de marzo del 2001 al 31 de mayo del 2010 con un total de 2376 observaciones, el comportamiento de la serie se muestra en la gráfica 7.

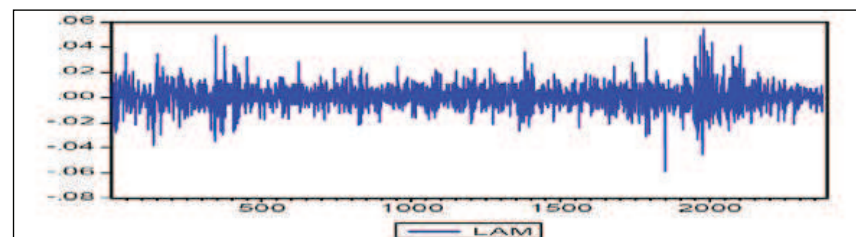
Gráfica 5 Comportamiento Histórico de América Móvil



Fuente: Elaboración propia

En la siguiente gráfica se aprecia que la transformación logarítmica propuesta disminuye considerablemente la dispersión de los datos, por tal motivo se tiene que en general las observaciones están mas cerca de su media. Cabe señalar que para esta serie se prescindió de los datos previos al 2001, y que llegarían hasta el 1 de marzo del 2000, la razón de tomar esta decisión radica en el hecho de que esas realizaciones no son representativas de la serie en general.

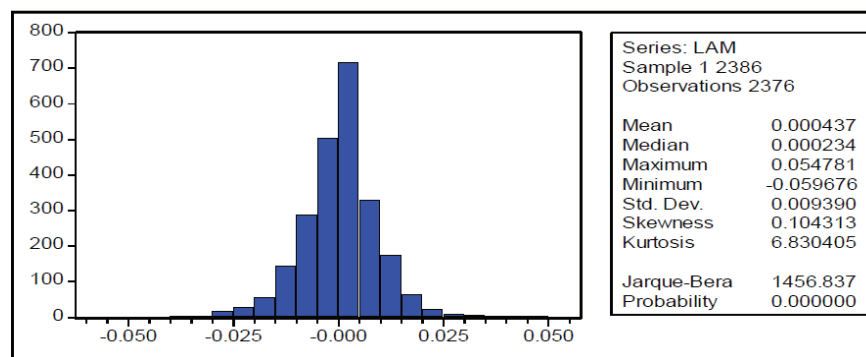
Gráfica 6 Transformación Logarítmica de América Móvil



Fuente: Elaboración propia

Al igual que para el caso del IPC se presenta una gráfica con información sobre la serie transformada (logaritmo) en primeras diferencias, estos datos indican que estamos ante la presencia de una función normal leptocúrtica, pues sólo tenemos problema con la Curtosis que debiera ser cercana a 3, sin embargo, ni la media ni el sesgo se desvían en gran medida de sus valores ideales: el cero en ambos casos.

Gráfica 7 Estadísticos Descriptivos de América Móvil



Análisis de Resultados

En general el esquema a seguir es el siguiente:

Primero nos preguntamos si la serie original es estacionaria (Identificación), en caso de ser afirmativo, procedemos al siguiente paso: la evaluación; pero si nuestra serie original no es estacionaria, entonces debemos transformarla de tal modo que cumpla con la estacionariedad, para ello se recurre a las transformaciones logarítmicas, de tendencia, de diferencia, etc. Posterior a esto, evaluamos el modelo, le realizamos prueba a los errores; y por último realizamos el pronóstico.

Caso IPC

Paso 1. Identificación

A la serie original del IPC se le hace la prueba de Raíces Unitarias (Estacionariedad):

Ho: IPC tiene raíz unitaria (No es estacionaria).

Ha: IPC no tiene raíces unitarias (Estacionaria).

El estadístico de la prueba, llamado el estadístico t de Dickey Fuller Aumentado debe ser superior a los valores críticos de la prueba, en sus respectivos niveles, todo esto considerando valores absolutos. En este caso se sigue que no se rechaza Ho, pues el estadístico t es menor que los mencionados valores; ver tabla 1.

Tabla 1 Cálculos de la Prueba de Dickey-Fuller Aumentada para el IPC

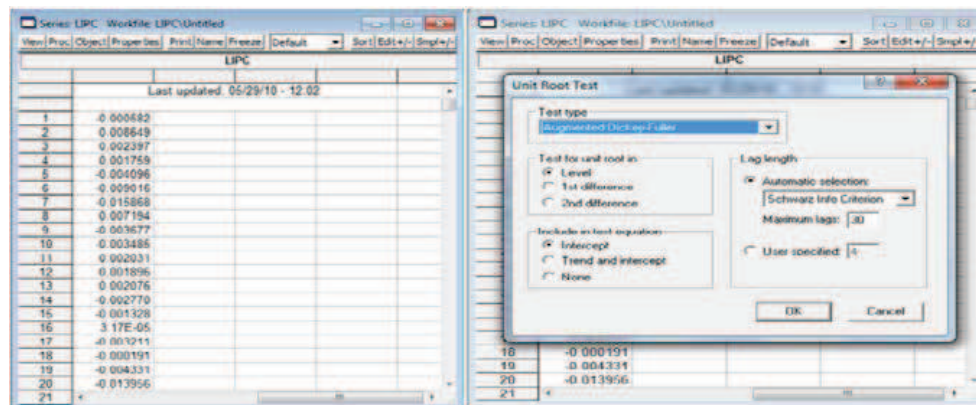
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	0.970432	0.9964
Test critical values:		
1% level	-3.431588	
5% level	-2.861972	
10% level	-2.567043	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Así pues, se realiza la misma prueba de Dickey-Fuller Aumentada a la serie transformada, llamada LIPC, recuérdese que la transformación está dada por x_t^* .

Ésta resulta ser estacionaria, es decir, no presenta raíces unitarias. Con ayuda del paquete Eviews generamos la serie LIPC, la cual contiene una observación menos que el IPC, pues al realizar la diferencia de logaritmos perdemos un dato. Una forma de crear esta serie es escribiendo en el editor de Eviews `show d(log(ipc))`, lo cual representa la transformación propuesta, una vez que aparecen los datos podemos nombrar a la serie como LIPC. Para aplicar la prueba de raíces unitarias seguimos las siguientes indicaciones: View - Unit Root Test-Augmented Dickey-Fuller – Lags presentadas en la tabla 2.

Tabla 2 Prueba de Dickey-Fuller Aumentada para el LIPC

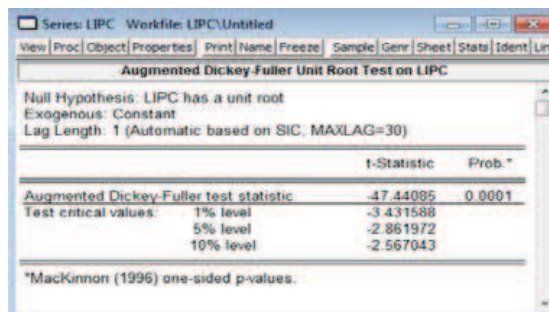


Ho: LIPC tiene raíz unitaria (No es estacionaria).

Ha: LIPC no tiene raíces unitarias (Estacionaria).

Dado que el valor absoluto de Augmented Dickey-Fuller (47.44) es mayor que el valor crítico (3.43, 2.86 y 2.56) se rechaza Ho por lo tanto el LIPC es estacionario, como se muestra en la tabla 3.

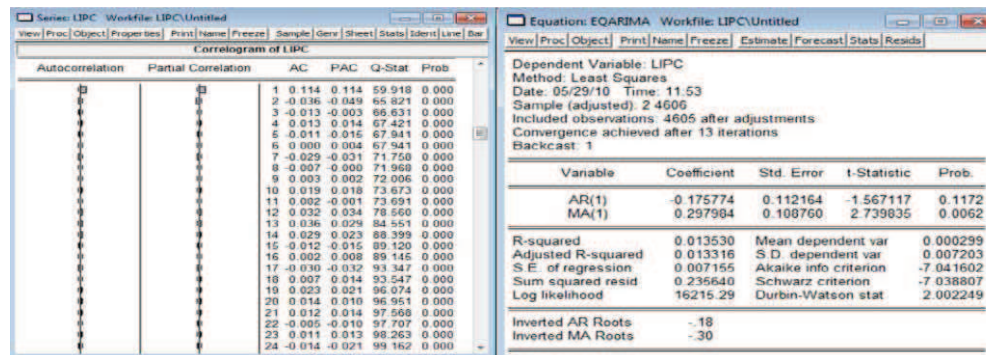
Tabla 3 Cálculos de la Prueba de Dickey-Fuller Aumentada para el LIPC



Paso 2. Estimación.

Ahora con la serie de LIPC en niveles se realiza el correlograma para lo cual se selecciona View-Correlogram-level, se toman los valores que se salen de las bandas de probabilidad para detectar problemas de autocorrelación y autocorrelación parcial en el modelo.

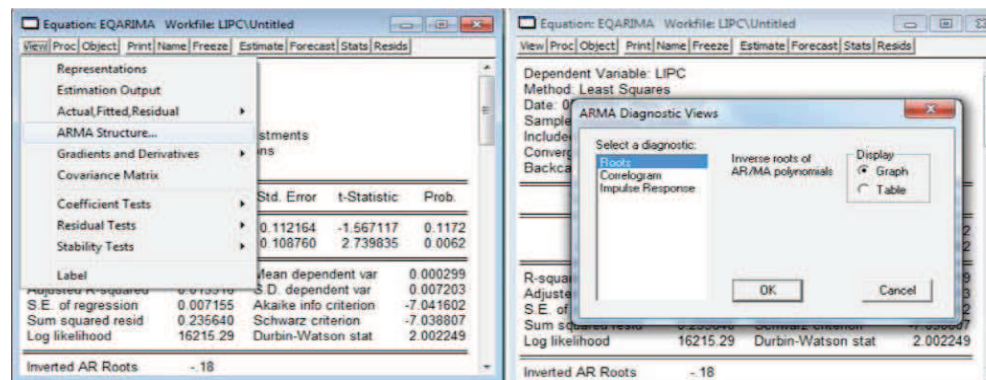
Tabla 4 Cálculo del Modelo ARMA (1,1)



Como se aprecia en los resultados en la tabla 4, mediante el análisis del correlograma observamos que estamos en presencia de un modelo AR (p) y MA (q), en particular ante un proceso ARMA (1,1), o bien, ARIMA (1,0,1) el cual se estima.

La tabla 5 muestra el proceso para acceder a una representación gráfica de las raíces del modelo ARMA (1,1). En el cuadro donde se despliegan los resultados del modelo, se selecciona la opción View - ARMA Structure - Roots - Graph. Ver gráfica 8.

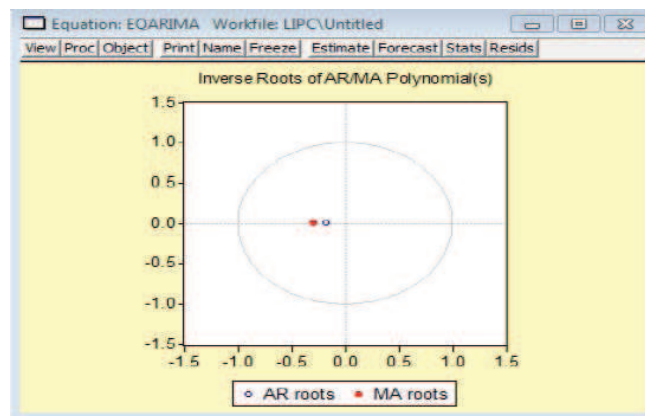
Tabla 5 Acceso al Gráfico de las Raíces



Paso 3. Evaluación

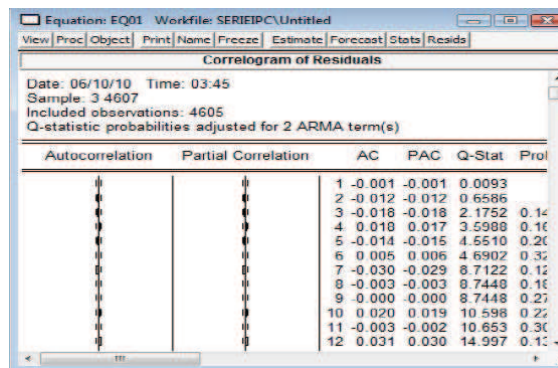
Los resultados encontrados muestran que no presenta raíces unitarias el modelo ARMA para el LIPC (-.18 y -.30) tal y como se aprecia en la gráfica 8, donde si los puntos observados no salen del círculo estos no representan raíces unitarias. Otro término estadístico a observar es la Durbin-Watson, mientras más cercano a 2 es mejor; en este caso se cumple la proximidad deseada.

Gráfica 8 Raíces del Modelo ARMA (1,1) del IPC



Es importante destacar que al modelo aquí propuesto se le realizó un análisis al correlograma de los errores, esto permite afirmar que nuestros errores no generan ningún problema, véase la tabla 6.

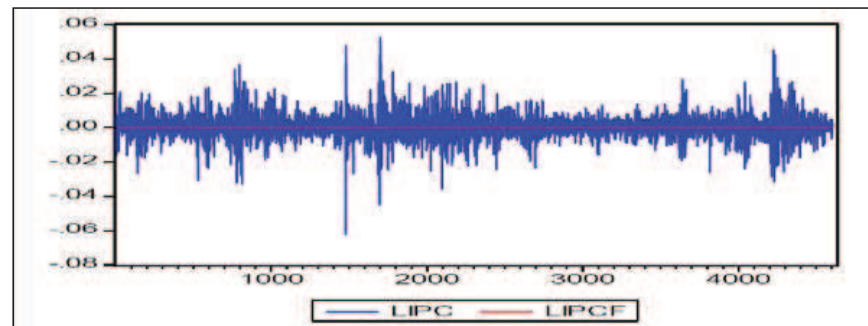
Tabla 6 Correlograma de los Residuos del Modelo



Paso 4. Pronóstico

El pronóstico para el LIPC se realizó para 20 observaciones donde se observa que la serie pronosticada, llamada LIPCF, tiende a un comportamiento lineal, no obstante debemos recordar que la serie que nos interesa pronosticar es el IPC. Luego, una vez que tenemos los datos de la serie LIPCF podemos integrar la serie del IPC, es decir, despejamos al IPC de la transformación que propusimos al inicio.

Gráfica 9 Pronóstico de LIPC



Fuente: Elaboración Propia

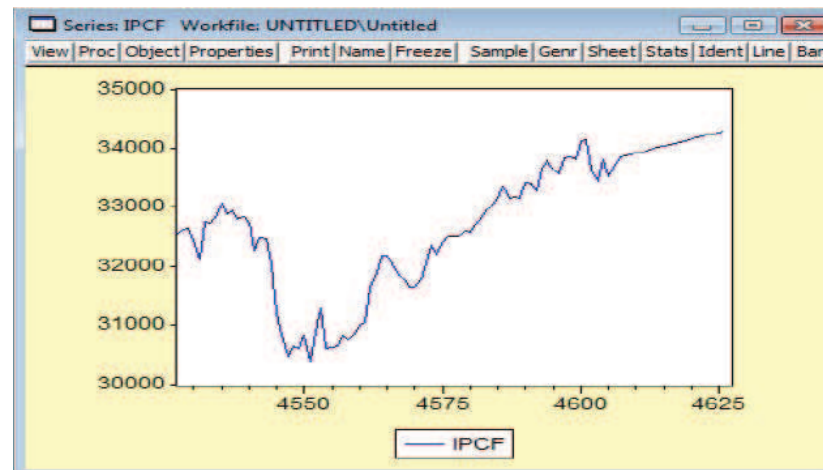
A continuación lo que se hace es generar los 20 datos pronosticados para el IPC, esto se hace a partir de los datos pronosticados de la serie LIPC, despejando IPC_{T+1} de la ecuación

$$LIPC_{T+1} = \log\left(\frac{IPC_T}{IPC_{T+1}}\right)$$

Cabe recordar que originalmente nuestros datos llegan hasta T, donde T representa el último dato conocido de la serie original, el IPC; luego al efectuar el despeje tenemos:

$$IPC_{T+1} = IPC_T (e^{LIPC_{T+1}})$$

Gráfica 10 Pronóstico del IPC



Fuente: Elaboración Propia

La gráfica 10 muestra el IPC desde el dato 4527 al 4627, es decir, incluye los últimos 80 datos conocidos y los 20 del pronóstico.

Caso América Móvil

Paso 1.- Identificación

El estudio para la serie de América Móvil, AM, se efectuó en forma similar al del IPC. Primero se hizo la prueba de raíces unitarias sobre la serie original, los resultados fueron adversos, es decir, no estacionaria; véase la tabla 7. Siendo así que se realiza la misma prueba sobre la transformación logarítmica aplicada a la serie de la acción, LAM.

Tabla 7 Prueba de Dickey-Fuller Aumentada a AM

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.569296	0.8748
Test critical values:		
1% level	-3.432912	
5% level	-2.862558	
10% level	-2.567357	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

En la siguiente tabla se muestran los resultados que se obtienen al aplicar la prueba de raíces unitarias a la serie LAM, aquí se puede identificar que se rechaza H_0 , y por lo tanto, la serie es estacionaria, o bien, no tiene raíces unitarias.

Tabla 8 Estimación del Estadístico t de Dickey-Fuller Aumentado de LAM

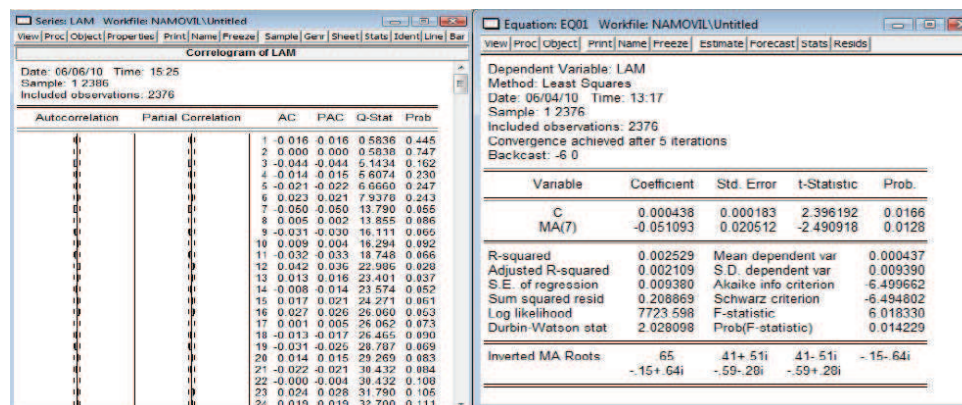
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-49.49027	0.0001
Test critical values:		
1% level	-3.432908	
5% level	-2.862556	
10% level	-2.567356	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Paso 2. Estimación.

Ahora con la serie de LAM, en niveles, se realiza el correlograma para lo cual se selecciona View - Correlogram - level se toman los valores que se salen de las bandas de probabilidad para detectar autocorrelación y autocorrelación parcial en el modelo.

Tabla 9 Cálculo del Modelo MA (7)

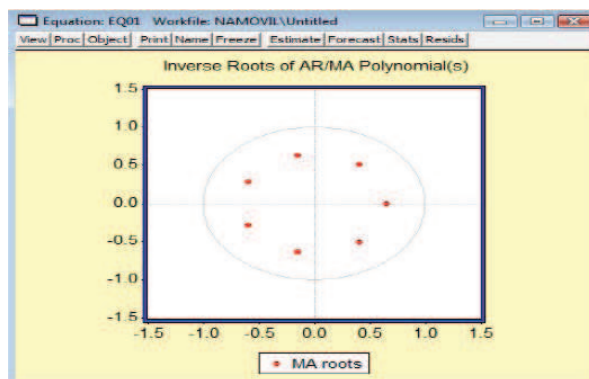


Los resultados en la tabla 9 muestran que estamos ante un proceso ARMA (0,7) el cual se estima.

Paso 3. Evaluación

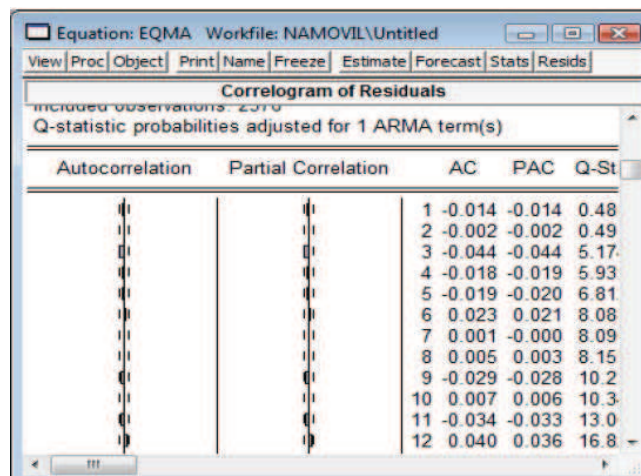
Los resultados encontrados muestran que no presenta raíces unitarias (-.18 y -.30), la gráfica 11 muestra la representación del círculo unitario. Otro término estadístico a observar es la Durbin-Watson presenta que existe autocorrelación serial mediante un esquema autorregresivo de orden 0, AR (0) y autorregresivo parcial de orden 7, MA (7).

Gráfica 11 Raíces del modelo MA (7) para América Móvil



En la tabla 10 se puede ver claramente que los errores se encuentran dentro de las bandas, lo que indica que los errores son estocásticos y estacionarios.

Tabla 10 Correlograma de los Residuos del Modelo



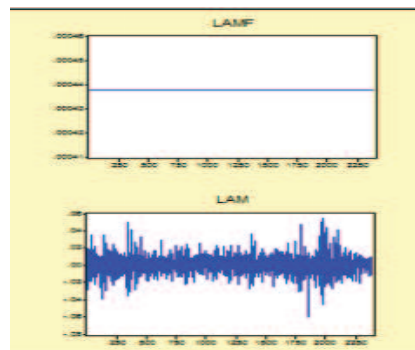
Paso 4. Pronóstico

La serie AM no es estacionaria, por tal motivo se recurre a la serie LAM para trabajar con una serie estacionaria y con un menor grado de inconveniente en las autocorrelaciones y las autocorrelaciones parciales. Como LAM no es la variable que en sí nos interesa pronosticar, pero sí contiene los datos pronosticados que nos permiten integrar la serie original de la acción generando 10 valores pronosticados. Para ello, análogamente al IPC, se despeja la serie original de su transformación, esto es:

$$LAM_{T+1} = \log \left(\frac{AM_T}{LAM_{T+1}} \right) \quad AM_{T+1} = AM_T (e^{LAM_{T+1}})$$

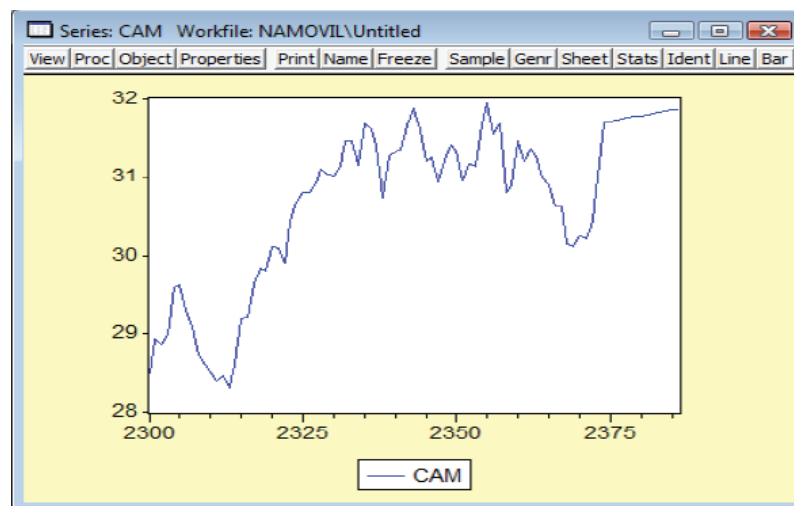
En la gráfica siguiente aparecen tanto la serie LAM como LAMF (el pronóstico de dicha serie), el comportamiento es lineal, y prácticamente constante. El siguiente paso es integrar a la serie AM a partir de este pronóstico.

Gráfica 12 Pronóstico de LAMF



Los últimos 87 datos de la serie de América Móvil son graficados en la gráfica 13, 10 datos representan el pronóstico y el resto son las últimas observaciones conocidas de la serie.

Gráfica 13 Pronóstico de AM



Conclusiones

Cada serie cuenta su propia historia, en términos de los modelos ARIMA; no obstante, saber interpretar a la serie requiere de práctica. Los modelos ARIMA representan una enorme ventaja en tanto que no se requiere de otras variables para explicar a un objeto de estudio. La metodología Box-Jenkins representa una herramienta sencilla y útil para la manipulación de series univariadas (como fueron nuestros casos de estudio).

A la transformación propuesta para cualquier serie se le debe poner atención para que ésta integre nuevamente a la original, por tal razón se debe asegurar la existencia de una función inversa que permita despejar a la variable en dicha transformación.

Los residuos proveen de gran información respecto al modelo, pues mientras mejor observemos que se comporta el correlograma, más seguros estaremos de no tener problemas de autorregresión. Si además estos errores tienen media cero, sesgo pequeño y una curtosis cercana a 3, estaremos ante la presencia de unos errores de tipo normal; en el presente trabajo, en ambas series la curtosis era elevada, pero aún así podríamos decir, dado que se cumplen dos de los tres parámetros, que tenemos una normal leptocúrtica en ambas series.

Los pronósticos para largo plazo no se debieran realizar con modelos ARIMA, pues estos se desempeñan mejor en el corto plazo; por otra parte, el principio de parsimonia siempre debiera ser considerado, pues un modelo con el menor número de parámetros que resulte eficiente será más sencillo de manipular y comprender, además es menos restrictivo pues quizás requiera de un menor número de cálculos, de un menor número de raíces, etc.

Por último, cabe señalar que la actualización de los modelos ARIMA se debiera realizar considerando las necesidades de su uso, pero siempre será bueno estar al tanto de cualquier shock que pudiera afectar a la serie, pues la serie, pasado un tiempo, pueda requerir modificaciones al modelo.

Apéndice

$$\text{Sea } y(i) = \frac{s(i) - s(i-1)}{s(i-1)}, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{y sea } x(i) = \ln \left(\frac{s(i)}{s(i-1)} \right).$$

Si los precios no son muy volátiles, la diferencia entre $y(i)$ y $x(i)$ será despreciable. A los retornos de una acción se les refiere usualmente como *logreturn*. Asumamos que las observaciones se realizan a tiempos equidistantes, lo que significa que $t_i - t_{i-1} = \Delta t$ para una constante Δt . Medir los tiempos en días, significaría que observamos el último precio que se comercializó de la acción cada día, y removemos las fines de semana y otros días de asueto. Además, se ignoran los días-calendario, y se opera solamente con los días de comercio, con un incremento en el tiempo $\Delta t = 1$. Muy seguido, el tiempo se mide en años, pero los precios son tomados en muestras con base diaria. Usando la convención de 252 días comercializables en un año, tenemos que $\Delta t = 1/252$, y los precios diarios $s(i)$ son observados en los tiempos $t_i = i/252$, $i = 0, 1, 2, \dots$. En $t_{252} = 1$, tenemos un año completo de días de comercio. Al contrario de los retornos $y(i)$, los retornos $x(i)$ son aditivos en el sentido de que la suma de n *logreturns* subsecuentes es igual al *logreturn* sobre todo el periodo de tiempo, esto es,

$$x(i) + \dots + x(i+n-1) = \ln \left(\frac{s(i+n-1)}{s(i-1)} \right) = \ln(s(i+n-1)) - \ln(s(i-1))$$

Ahora, un punto importante son las propiedades estadísticas de los logreturns descritos por el movimiento geométrico Browniano.

$$X(t_i) := \ln \left(\frac{s(t_i)}{s(t_{i-1})} \right) = \mu \Delta t + \sigma (B(t_i) - B(t_{i-1})), \quad i = 1, 2, \dots$$

Dada la definición del movimiento Browniano se tiene que $B(t_i) - B(t_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots$, son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con media cero y varianza $t_i - t_{i-1} = \Delta t$. Multiplicando cada incremento por una constante σ y añadiendo $\mu \Delta t$ implica que $X(t_i)$ se distribuye normal con media $\mu \Delta t$ y varianza $\sigma^2 \Delta t$.

Bibliografía

Guerrero, Victor Manuel. Análisis Estadístico de Series de Tiempo Económicas, segunda edición, 2003, Thomson.

Hernández Lerma, Onésimo. Elementos de Probabilidad y Estadística, segunda edición, 2003, Sociedad Matemática Mexicana.

Greene, William. Econometric Analysis, 1990, Macmillan.

Goldberger, Arthur. A Course in Econometrics, quinta edición, 2003, Harvard University Press.

Modelo de valuación de opciones bajo múltiples cambios de régimen y asimetría de la volatilidad: proceso GARCH-M de coeficientes flexibles aplicado a opciones sobre futuros del IPC, Switch-Add, 2009, Mexder.

Carrascal, Ursicño. Análisis Econométrico con Eviews, 2001, Alfaomega.

Espen Benth, Fred. Option Theory with Stochastic Analysis, primera edición, 2002, Springer.