"Decisiones de Consumo e Inversión en una Economía con Preferencias Heterogéneas".

Un análisis de la tasa subjetiva de descuento como variable aleatoria

Alumno: Alfredo Omar Palafox Roca
Director de tesis: Francisco Venegas Martínez

Resumen

Este trabajo presenta el supuesto de una tasa subjetiva de descuento con parámetro aleatorio; esto representa una alternativa con respecto a investigaciones anteriores. En particular, se estudia el caso de una función de utilidad con parámetro de aprendizaje en el consumo.

Abstract

This paper presents the assumption of a subjective discount rate with random parameter; this represents an alternative with respect to previous research. Particularly, the case of a utility function with a learning parameter in the consumption is studied.

1. Introducción

La tasa subjetiva de descuento (o factor subjetivo de descuento) es un concepto empleado con gran frecuencia en la literatura relacionada al problema de maximización de la utilidad del agente representativo. Este concepto estrechamente relacionado a la elección intertemporal es intuido por economistas como Adam Smith y John Rae, quienes buscan determinar las diferencias entre las riquezas de las naciones, es John Rae, al igual que Eugen von Böhm Bawerk quien contempla la posibilidad de que son factores psicológicos los que determinan la cantidad de bienes a producir de las naciones [Epstein, L. G., Hynes, J. A., (1983)].

Sin embargo, es Paul Samuelson quien propone el primer modelo de utilidad descontada, el cual perdura hasta nuestros tiempos, con pocas modificaciones. Samuelson, a diferencia de Rae y von Böhm Bawerk, establece las relaciones matemáticas que considera reflejan el comportamiento de los agentes, y asigna una constante como parámetro de descuento. El mismo Samuelson identifica una serie de anomalías que el modelo posee en forma inherente [Samuelson, P. (1937)]; a pesar de eso, los economistas de la época aceptaron favorablemente el modelo, principalmente, por su fácil uso, por las ventajas matemáticas por destacar algunos aspectos.

Nuevas modificaciones se han propuesto a lo largo de todo este tiempo. Tanto investigaciones empíricas donde se busca medir el nivel de impaciencia de los consumidores [Van Praag, B. M. S., Booij, A. S., (2003)] hasta análisis con formas funcionales alternas tal que se considera el consumo agregado [ver Epstein, L. G., Hynes, J. A., (1983)]. En el presente trabajo se asume que el parámetro que representa la tasa subjetiva de descuento es una variable aleatoria.

Mediante esta variable es posible que el consumidor pondere con base en su preferencia temporal entre el consumo presente y futuro, dicha preferencia está representada por una función de probabilidad. Esta función representa la experiencia, o aprendizaje, del consumo previo, o bien, la creencia de que algún evento ocurrirá de una forma específica aún cuando no exista información previa.

En particular se analizan los casos donde la tasa subjetiva de descuento se distribuye exponencial o gama, para ambas situaciones se asume la misma función de utilidad. En ambos escenarios se obtienen las soluciones al problema propuesto tal que todos los parámetros involucrados son conocidos por el consumidor, permitiendo de esta forma generar una senda de consumo óptima.

2. El Modelo

Primero, recordemos el modelo de utilidad descontada convencional con horizonte finito y con función de utilidad como sigue:

$$u(c_t) = -e^{-c_t}. \qquad (1)$$

El problema de maximización de la utilidad descontada es entonces

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^T u(c_t)e^{-\rho t}dt$$

$$\text{sujeto a} \quad \frac{y}{r}\left(\ -e^{-rT}\right) = \int_0^\infty c_t e^{-rt}dt.$$

Donde la dotación o ingreso inicial, que en este caso es constante, es igual al valor presente del consumo. La solución para este problema, es decir, la trayectoria de consumo óptima es

$$c_t = \frac{y}{r} + (r-\rho)\left\{t - \left[\frac{1-e^{-rT}(1+T)}{1-e^{-rT}}\right]\right\}. \tag{2}$$

A continuación se introduce el parámetro ρ de tal manera que tiene una función de probabilidad a priori asociada. La función de utilidad es como en (1). Supongamos que ρ se distribuye exponencial con media 1/α.

$$u(c_t;\theta) = -e^{-c_t}, \quad \alpha > 0$$

$$f_{\mathrm{P}}(\rho) = \alpha e^{-\alpha\rho}, \quad E[\mathrm{P}] = 1/\alpha, \quad \mathrm{Var}\,[\mathrm{P}] = 1/\alpha^2$$

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^\infty \left(\int_0^T u(c_t)e^{-\rho t}dt\right) f_{\mathrm{P}}(\rho)\,d\rho$$

$$\text{sujeto a} \quad \frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right) = \int_0^\infty c_t e^{\ rt} dt$$

El problema a resolver después de algunas simplificaciones se muestra a continuación, para ver a detalle el procedimiento véase el anexo 1.

$$\text{Minimizar} \quad \int_0^T \frac{e^{-c_t}}{t+\alpha}dt$$

$$\text{sujeto a} \quad \frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right) = \int_0^\infty c_t e^{-rt} dt$$

El consumo óptimo que se obtiene depende exclusivamente de parámetros conocidos para el consumidor, con excepción del tiempo t, el cual es definido con respecto al momento que se desee realizar el cálculo del consumo óptimo en ese instante del tiempo.

$$c_t = rt - \log(t+\alpha) + \frac{y}{r} + \left\{r\left[1 - e^{\ rT}(1+T)\right] - e^{r\alpha}\left[-\frac{1}{r}\log(T+\alpha)e^{-r(T+\alpha)} + \frac{1}{r}\log(\alpha)e^{\ r\ \alpha\ -}\right]\right.$$

$$\left. + e^{r\alpha}\left[\log|T+\alpha| - \log|\alpha|\right]\right\} \Big/ \left(1-e^{-rT}\right) \tag{3}$$

Esta expresión es más compleja que (2), pero incorpora más información. Para llegar a (3) se aplican algunos resultados del análisis matemático y de análisis real. El primer caso se aplica al tomar el límite que se menciona en el anexo 1, pues la serie alternante converge absolutamente. Para el intercambio de las integrales se hace uso del teorema de Fubini.

Por último, analizaremos el problema con una función de utilidad como se propone en Venegas Martínez, F. (2000). A diferencia de la investigación antes mencionada, r no representa la tasa subjetiva de descuento sino la tasa libre de riesgo, en este trabajo ρ es el parámetro relevante del nivel de impaciencia por el consumo, el cual es variable aleatoria. Ningún supuesto adicional a la función de utilidad es considerado.

Se supone que la función de utilidad toma la forma funcional $u(c_t;\theta) = -e^{-\theta c_t}$, $\theta > 0$.. El problema al que se enfrenta el consumidor se describe a continuación.

$$u(c_t;\theta) = -e^{-\theta c_t}, \quad \theta, \alpha, \lambda > 0$$
$$f_\Theta(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta}, \quad E[\theta] = 1/\lambda, \quad \text{Var}\,[\theta] = 1/\lambda^2$$
$$f_\text{P}(\rho) = \alpha e^{-\alpha\rho}, \quad E[\text{P}] = 1/\alpha, \quad \text{Var}\,[\text{P}] = 1/\alpha^2$$

Maximizar $\quad \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left(\int_0^T u(c_t;\theta) e^{-\rho t} dt \right) f_\Theta(\theta) d\theta \right) f_\text{P}(\rho) d\rho$

sujeto a $\quad \frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right) = \int_0^\infty c_t e^{-rt} dt$

La función de distribución del parámetro del aprendizaje del consumo es exponencial, en primera instancia. Al igual que para el problema del consumidor sin aprendizaje en el consumo pero con función de densidad para la impaciencia en el consumo, se hace uso del teorema de Fubini, sólo que se aplica dos veces.

Después de resolver un par de integrales el problema se transforma en

Minimizar $\quad \int_0^T \frac{1}{(t+\alpha)(c_t+\lambda)} dt$

sujeto a $\quad \frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right) = \int_0^T c_t e^{-rt} dt.$

La solución para la trayectoria óptima de consumo es

$$c_t = \frac{1}{r}(y+\lambda)\left(1-e^{-rT}\right) e^{\frac{r}{2}(t-\alpha)} \sqrt{\frac{r}{\pi(t+\alpha)}} \frac{1}{\left(\text{erf}\sqrt{r\sqrt{T+\alpha}} - \text{erf}\sqrt{r\sqrt{\alpha}}\right)} - \lambda$$

Como se puede apreciar, ρ no aparece en esta expresión, no obstante aparece α, que es parámetro de la función de densidad de $f_\text{P}(\rho)$. Las letras erf hacen referencia a una función de error. En el anexo (2) se muestran todos los pasos para llegar a la anterior expresión del consumo.

Un caso significativo es considerar $f_\text{P}(\rho)$ como una función de probabilidad gama, esto porque la exponencial es un caso particular de la familia gama, así pues estudiemos el problema en forma más general.

$$u(c_t;\theta) = -e^{-\theta c_t}, \quad \theta, \alpha, \lambda > 0$$
$$f_\Theta(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta}, \quad E[\theta] = 1/\lambda, \quad \text{Var}[\theta] = 1/\lambda^2$$
$$f_\text{P}(\rho;\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \rho^{\alpha-1} e^{-\beta\rho}, \quad E[\text{P}] = \alpha/\beta, \quad \text{Var}[\text{P}] = \alpha/\beta^2$$

El planteamiento del problema es similar a los casos anteriores. Obsérvese que en todas las situaciones presentadas la restricción no ha cambiado. Esto permite establecer comparaciones entre las diferentes propuestas, toda vez que el marco contextual permanece igual.

Maximizar $\quad \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left(\int_0^T u(c_t;\theta) e^{-\rho t} dt \right) f_\Theta(\theta) d\theta \right) f_\text{P}(\rho) d\rho$

sujeto a $\quad \frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right) = \int_0^\infty c_t e^{-rt} dt$

Una vez realizados los cálculos pertinentes se aprecia que el consumo se divide en tres casos, con requisitos específicos sobre los parámetros.

$$c_t = -\lambda + \frac{e^{rt/2}}{\sqrt{(t+\beta)^{\alpha+1}}}\frac{1}{2r}(y+\lambda)\left(1-e^{-rT}\right)e^{-\frac{r\beta}{2}}\begin{cases} \dfrac{(r/2)^{\alpha+1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} & (\alpha > -1, (r/2) > 0) \\ \left(\dfrac{2^{k+1}(r/2)^k}{(2k\text{-}1)!!}\right)\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}} & (\alpha = 2k,\ k \in \mathbb{Z}, (r/2) > 0) \\ \dfrac{2\left(\frac{r}{2}\right)^{k+1}}{k!} & (\alpha = 2k+1, k \in \mathbb{Z}, (r/2) > 0) \end{cases}$$

A medida que la complejidad de los planteamientos se incrementa, las soluciones también se complican, sin embargo ha sido posible encontrar explícitamente las mismas. Sin duda, la elección de la función de probabilidad dependerá del deseo de consumo intertemporal del individuo. Presentar estas alternativas abre la posibilidad para experimentos con nuevas funciones de densidad (y también de utilidad) tal que representen en forma más adecuada el comportamiento de los consumidores.

3. Conclusiones

Esta investigación se ha centrado en la representación de una nueva alternativa del modelo de utilidad descontada. Permitir que el parámetro de intensidad por consumir sea una variable aleatoria supone un reto mayor para el planteamiento del problema, así como para las soluciones que de éste se deriven. A pesar de esto, lo que se pierde en simplicidad se compensa con la posibilidad de modelar en mejor forma las decisiones intertemporales de los consumidores.

Las posibles aplicaciones de este modelo comprenden el análisis estadístico del consumo de los individuos; extensiones más generales; y el empleo directo para situaciones específicas como los seguros, pensiones para el retiro, etc.

ANEXO 1.

Ro con distribución exponencial, sin aprendizaje en el parámetro de consumo.

$$u(c_t;\theta) = -e^{-c_t}, \quad \alpha > 0$$

$$f_{\mathrm{P}}(\rho) = \alpha e^{-\alpha\rho}, \quad E[\mathrm{P}] = 1/\alpha, \quad \mathrm{Var}[\mathrm{P}] = 1/\alpha^2$$

Maximizar $\displaystyle\int_0^\infty \left(\int_0^T u(c_t)e^{-\rho t}dt\right) f_{\mathrm{P}}(\rho)\,d\rho$

sujeto a $\displaystyle\frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right) = \int_0^\infty c_t e^{-rt}dt$

$$\int_0^\infty\int_0^T -\alpha e^{-c_t}e^{-\rho t}e^{-\alpha\rho}\,dt\,d\rho = \int_0^T\int_0^\infty -\alpha e^{-c_t}e^{-\rho(t+\alpha)}\,d\rho\,dt$$

$$= \int_0^T -\alpha e^{-c_t}\int_0^\infty e^{-\rho(t+\alpha)}\,d\rho\,dt = \int_0^T -\alpha e^{-c_t}\left[-\frac{e^{-\rho(t+\alpha)}}{t+\alpha}\right]_0^\infty dt$$

$$= \int_0^T -\frac{\alpha e^{-c_t}}{t+\alpha}dt = -\alpha\int_0^T \frac{e^{-c_t}}{t+\alpha}dt$$

El problema a resolver tras estas simplificaciones se muestra a continuación

Minimizar $\int_0^T \frac{e^{-c_t}}{t+\alpha} dt$

sujeto a $\frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right) = \int_0^\infty c_t e^{-rt} dt$

$$\mathcal{L}\left(c_t\right) = \frac{e^{-c_t}}{(t+\alpha)} + \mu c_t e^{-rt}$$

$$\mathcal{L}_{c_t} = \frac{-e^{-c_t}}{(t+\alpha)} + \mu e^{-rt} = 0 \qquad e^{c_t - rt} = \frac{1}{\mu(t+\alpha)} \qquad c_t = rt + \log\left[\mu(t+\alpha)\right]^{-1}$$

$$\frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right) = \int_0^T \left(rt + \log\left[\mu(t+\alpha)\right]^{-1}\right) e^{-rt} dt$$

$$\frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right) = \int_0^T \left(rt - \log\mu - \log(t+\alpha)\right) e^{-rt} dt$$

$$= r\left[1-e^{-rT}\left(1+T\right)\right] - \log\mu\left(1-e^{-rT}\right) - \int_0^T \left(\log(t+\alpha)\right) e^{-rt} dt$$

Sea $u = t+\alpha$.

$$-\int_{\alpha}^{T+\alpha}(\log u)e^{-r(u-\alpha)}du=-e^{r\alpha}\int_{\alpha}^{T+\alpha}(\log u)e^{-ru}du=-e^{r\alpha}\left[-\frac{1}{r}(\log u)e^{-ru}\right]_{\alpha}^{T+\alpha}+e^{r\alpha}\int_{\alpha}^{T+\alpha}\frac{e^{-ru}}{u}du$$

$$=-e^{r\alpha}\left[-\frac{1}{r}\log(T+\alpha)e^{-r(T+\alpha)}+\frac{1}{r}\log(\alpha)e^{-r\alpha}\right]+e^{r\alpha}\left[\log|u|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(ru)^n}{n\cdot n!}\right]_{\alpha}^{T+\alpha}$$

Tomando lim n $\to\infty$

$$=-e^{r\alpha}\left[-\frac{1}{r}\log(T+\alpha)e^{-r(T+\alpha)}+\frac{1}{r}\log(\alpha)e^{-r\alpha}\right]+e^{r\alpha}\left[\log|T+\alpha|-\log|\alpha|\right]$$

$$\frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right)=r\left[1-e^{-rT}(1+T)\right]-\log\mu\left(1-e^{-rT}\right)-e^{r\alpha}\left[-\frac{1}{r}\log(T+\alpha)e^{-r(T+\alpha)}+\frac{1}{r}\log(\alpha)e^{-r\alpha}\right]$$
$$+e^{r\alpha}\left[\log|T+\alpha|-\log|\alpha|\right]$$

$$\log\mu\left(1-e^{-rT}\right)=-\frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right)+r\left[1-e^{-rT}(1+T)\right]-e^{r\alpha}\left[-\frac{1}{r}\log(T+\alpha)e^{-r(T+\alpha)}+\frac{1}{r}\log(\alpha)e^{-r\alpha}\right]$$
$$+e^{r\alpha}\left[\log|T+\alpha|-\log|\alpha|\right]$$

$$\log\mu=-\frac{y}{r}+\left\{r\left[1-e^{-rT}(1+T)\right]-e^{r\alpha}\left[-\frac{1}{r}\log(T+\alpha)e^{-r(T+\alpha)}+\frac{1}{r}\log(\alpha)e^{-r\alpha}\right]\right.$$
$$\left.+e^{r\alpha}\left[\log|T+\alpha|-\log|\alpha|\right]\right\}\Big/\left(1-e^{-rT}\right)$$

$$c_t=rt-\log(t+\alpha)+\frac{y}{r}+\left\{r\left[1-e^{-rT}(1+T)\right]-e^{r\alpha}\left[-\frac{1}{r}\log(T+\alpha)e^{-r(T+\alpha)}+\frac{1}{r}\log(\alpha)e^{-r\alpha}\right]\right.$$
$$\left.+e^{r\alpha}\left[\log|T+\alpha|-\log|\alpha|\right]\right\}\Big/\left(1-e^{-rT}\right)$$

ANEXO 2.

Ro con distribución exponencial, con aprendizaje en el parámetro de consumo.

$$u(c_t;\theta)=-e^{-\theta c_t},\quad \theta,\alpha,\lambda>0$$
$$f_{\Theta}(\theta)=\lambda e^{-\lambda\theta},\quad E[\theta]=1/\lambda,\quad \mathrm{Var}[\theta]=1/\lambda^2$$
$$f_{\mathrm{P}}(\rho)=\alpha e^{-\alpha\rho},\quad E[\mathrm{P}]=1/\alpha,\quad \mathrm{Var}[\mathrm{P}]=1/\alpha^2$$

Maximizar $\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\left(\int_0^{T}u(c_t;\theta)e^{-\rho t}dt\right)f_{\Theta}(\theta)d\theta\right)f_{\mathrm{P}}(\rho)d\rho$

sujeto a $\frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right)=\int_0^{\infty}c_te^{-rt}dt$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^T -\alpha\lambda e^{-\theta c_t}e^{-\rho t}e^{-\lambda\theta}e^{-\alpha\rho}\,dt\,d\theta\,d\rho=\int_0^T\int_0^\infty\int_0^\infty -\alpha\lambda e^{-\theta(c_t+\lambda)}e^{-\rho(t+\alpha)}\,d\rho\,d\theta\,dt$$

$$=\int_0^T\int_0^\infty -\alpha\lambda e^{-\theta(c_t+\lambda)}\int_0^\infty e^{-\rho(t+\alpha)}\,d\rho\,d\theta\,dt=\int_0^T\int_0^\infty -\alpha\lambda e^{-\theta(c_t+\lambda)}\left[-\frac{e^{-\rho(t+\alpha)}}{t+\alpha}\right]_0^\infty d\theta\,dt$$

$$=\int_0^T\int_0^\infty -\frac{\alpha\lambda e^{-\theta(c_t+\lambda)}}{t+\alpha}\,d\theta\,dt=\int_0^T -\frac{\alpha\lambda}{t+\alpha}\int_0^\infty e^{-\theta(c_t+\lambda)}\,d\theta\,dt$$

$$=\int_0^T -\frac{\alpha\lambda}{t+\alpha}\left[-\frac{1}{c_t+\lambda}e^{-\theta(c_t+\lambda)}\right]_0^\infty dt=-\alpha\lambda\int_0^T\frac{1}{(t+\alpha)(c_t+\lambda)}\,dt$$

El problema a resolver tras estas simplificaciones se muestra a continuación

Minimizar $\displaystyle\int_0^T\frac{1}{(t+\alpha)(c_t+\lambda)}\,dt$

sujeto a $\displaystyle\frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right)=\int_0^T c_t e^{-rt}\,dt$

$$\mathcal{L}(c_t)=\frac{1}{(t+\alpha)(c_t+\lambda)}+\mu c_t e^{-rt}$$

$$\mathcal{L}_{c_t}=\frac{-1}{(t+\alpha)(c_t+\lambda)^2}+\mu e^{-rt}=0$$

$$\frac{1}{(t+\alpha)(c_t+\lambda)^2}=\mu e^{-rt}\qquad (c_t+\lambda)^2=\frac{e^{rt}}{\mu(t+\alpha)}\qquad c_t+\lambda=\left(\frac{e^{rt}}{\mu(t+\alpha)}\right)^{1/2}\qquad c_t=\frac{e^{rt/2}}{\sqrt{\mu(t+\alpha)}}-\lambda$$

Sustituyendo en la restricción

$$\frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right)=\int_0^T -\lambda e^{-rt}\,dt+\int_0^T\frac{e^{-rt/2}}{\sqrt{\mu(t+\alpha)}}\,dt$$

$$=-\frac{\lambda}{r}\left(1-e^{-rT}\right)+\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^T\frac{e^{-rt/2}}{\sqrt{t+\alpha}}\,dt$$

$$\frac{1}{r}(y+\lambda)\left(1-e^{-rT}\right)=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^T\frac{e^{-rt/2}}{\sqrt{t+\alpha}}\,dt$$

Sea $\mathrm{u}=\sqrt{t+\alpha}$, $\quad \mathrm{u}^2=t+\alpha$, $\quad \mathrm{u}^2-\alpha=t$

$$d\mathrm{u}=\frac{1}{2\sqrt{t+\alpha}}\,dt$$

$$\frac{2}{\sqrt{\mu}}\int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{T+\alpha}} e^{\frac{-r(\mathrm{u}^2-\alpha)}{2}}d\mathrm{u}=\frac{2}{\sqrt{\mu}}e^{\frac{r\alpha}{2}}\int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{T+\alpha}} e^{\frac{-r\mathrm{u}^2}{2}}d\mathrm{u}=\frac{2}{\sqrt{\mu}}e^{\frac{r\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{4r}}\left(\operatorname{erf}\sqrt{r\sqrt{T+\alpha}}-\operatorname{erf}\sqrt{r\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\mu}}e^{\frac{r\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{r}}\left(\operatorname{erf}\sqrt{r\sqrt{T+\alpha}}-\operatorname{erf}\sqrt{r\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$\frac{1}{r}(y+\lambda)\left(1-e^{-rT}\right)=\frac{1}{\sqrt{\mu}}e^{\frac{r\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{r}}\left(\operatorname{erf}\sqrt{r\sqrt{T+\alpha}}-\operatorname{erf}\sqrt{r\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}=\frac{1}{r}(y+\lambda)\left(1-e^{-rT}\right)e^{-\frac{r\alpha}{2}}\sqrt{\frac{r}{\pi}}\frac{1}{\left(\operatorname{erf}\sqrt{r\sqrt{T+\alpha}}-\operatorname{erf}\sqrt{r\sqrt{\alpha}}\right)}$$

$$c_t=\frac{1}{r}(y+\lambda)\left(1-e^{-rT}\right)e^{\frac{r}{2}(t-\alpha)}\sqrt{\frac{r}{\pi(t+\alpha)}}\frac{1}{\left(\operatorname{erf}\sqrt{r\sqrt{T+\alpha}}-\operatorname{erf}\sqrt{r\sqrt{\alpha}}\right)}-\lambda$$

ANEXO 3.

Ro con distribución gamma, con aprendizaje en el parámetro de consumo.

$$u\left(c_t;\theta\right)=-e^{-\theta c_t},\quad \theta,\alpha,\lambda>0$$

$$f_\Theta\left(\theta\right)=\lambda e^{-\lambda\theta},\quad E\left[\theta\right]=1/\lambda,\quad \operatorname{Var}\left[\theta\right]=1/\lambda^2$$

$$f_\mathrm{P}\left(\rho;\alpha,\beta\right)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\rho^{\alpha-1}e^{-\beta\rho},\quad E\left[\mathrm{P}\right]=\alpha/\beta,\quad \operatorname{Var}\left[\mathrm{P}\right]=\alpha/\beta^2$$

$$\text{Maximizar}\quad \int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left(\int_0^T u\left(c_t;\theta\right)e^{-\rho t}dt\right)f_\Theta\left(\theta\right)d\theta\right)f_\mathrm{P}\left(\rho\right)d\rho$$

$$\text{sujeto a}\quad \frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right)=\int_0^\infty c_t e^{-rt}dt$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^T-\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\rho^{\alpha-1}\lambda e^{-\theta c_t}e^{-\rho t}e^{-\lambda\theta}e^{-\beta\rho}dtd\theta d\rho=\int_0^T\int_0^\infty\int_0^\infty-\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\rho^{\alpha-1}\lambda e^{-\theta c_t}e^{-\rho t}e^{-\lambda\theta}e^{-\beta\rho}d\rho d\theta dt$$

$$=\int_0^T\int_0^\infty-\lambda e^{-\theta(c_t+\lambda)}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\rho^{\alpha-1}e^{-\rho(t+\beta)}d\rho d\theta dt=\int_0^T\int_0^\infty-\lambda e^{-\theta(c_t+\lambda)}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\Gamma(\alpha)}{\left(t+\beta\right)^{\alpha+1}}\right)d\theta dt$$

$$=\int_0^T\frac{-\lambda\beta^\alpha}{\left(t+\beta\right)^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-\theta(c_t+\lambda)}d\theta dt=\int_0^T\frac{-\lambda\beta^\alpha}{\left(t+\beta\right)^{\alpha+1}(c_t+\lambda)}dt=-\lambda\beta^\alpha\int_0^T\frac{1}{\left(t+\beta\right)^{\alpha+1}(c_t+\lambda)}dt$$

Minimizar $\int_0^T \frac{1}{(t+\beta)^{\alpha+1}(c_t+\lambda)}dt$

sujeto a $\frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right)=\int_0^T c_t e^{-rt}dt$

$$\mathcal{L}(c_t)=\frac{1}{(t+\beta)^{\alpha+1}(c_t+\lambda)}+\mu c_t e^{-rt}$$

$$\mathcal{L}_{c_t}=\frac{-1}{(t+\beta)^{\alpha+1}(c_t+\lambda)^2}+\mu e^{-rt}=0$$

$$\frac{1}{(t+\beta)^{\alpha+1}(c_t+\lambda)^2}=\mu e^{-rt} \quad (c_t+\lambda)^2=\frac{e^{rt}}{\mu(t+\beta)^{\alpha+1}} \quad c_t+\lambda=\left(\frac{e^{rt}}{\mu(t+\beta)^{\alpha+1}}\right)^{1/2} \quad c_t=\frac{e^{rt/2}}{\sqrt{\mu(t+\beta)^{\alpha+1}}}-\lambda$$

Sustituyendo en la restricción

$$\frac{y}{r}\left(1-e^{-rT}\right)=\int_0^T -\lambda e^{-rt}dt+\int_0^T \frac{e^{-rt/2}}{\sqrt{\mu(t+\beta)^{\alpha+1}}}dt$$

$$=-\frac{\lambda}{r}\left(1-e^{-rT}\right)+\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^T \frac{e^{-rt/2}}{(t+\beta)^{\alpha+1/2}}dt$$

$$\frac{1}{r}(y+\lambda)\left(1-e^{-rT}\right)=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^T \frac{e^{-rt/2}}{(t+\beta)^{\alpha+1/2}}dt$$

Sea $\text{u}=(t+\beta)^{\alpha+1/2}$, $\text{u}^2=(t+\beta)^{\alpha+1}$, $\text{u}^{2/\alpha+1}-\beta=t$

$$d\text{u}=\frac{\alpha+1}{2(t+\beta)^{\alpha+1/2}}dt$$

Haciendo el cambio propuesto se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^T \frac{e^{-rt/2}}{(t+\beta)^{\alpha+1/2}}dt=\frac{2}{(\alpha+1)\sqrt{\mu}}\int_{\beta^{\alpha+1/2}}^{(T+\beta)^{\alpha+1/2}} e^{-\frac{r(\text{u}^{\frac{2}{\alpha+1}}-\beta)}{2}}d\text{u}$$

$$=\frac{2}{(\alpha+1)\sqrt{\mu}}e^{\frac{r\beta}{2}}\int_{\beta^{\alpha+1/2}}^{(T+\beta)^{\alpha+1/2}} e^{-\frac{r\text{u}^{\frac{2}{\alpha+1}}}{2}}d\text{u} \qquad \cdots\cdots(\text{a})$$

Sea $x^2=\text{u}^{\frac{2}{\alpha+1}}$, $x=\text{u}^{\frac{1}{\alpha+1}}$. Despejando, $x^{\alpha+1}=\text{u}$.

Derivando ambos lados de la última expresión $(\alpha+1)x^{\alpha}dx=d\text{u}$.

Luego,

$$\int_{\beta^{1/2}}^{(T+\beta)^{1/2}} e^{-\frac{rx^2}{2}}\,dx = (\alpha+1)\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{(r/2)^{\alpha+1/2}} & (\alpha > -1, (r/2) > 0) \\ \left(\dfrac{(2k\text{-}1)!!}{2^{k+1}(r/2)^k}\right)\sqrt{\dfrac{2\pi}{r}} & (\alpha=2k,\ k \in \mathbb{Z}, (r/2) > 0) \\ \dfrac{k!}{2\left(\frac{r}{2}\right)^{k+1}} & (\alpha = 2k+1, k \in \mathbb{Z}, (r/2) > 0) \end{cases}$$

Sustituyendo en (a)

$$\frac{2}{(\alpha+1)\sqrt{\mu}}e^{\frac{r\beta}{2}}\int_{\beta^{\alpha+1/2}}^{(T+\beta)^{\alpha+1/2}} e^{-\frac{ru^{\frac{2}{\alpha+1}}}{2}}\,du = \frac{2}{\sqrt{\mu}}e^{\frac{r\beta}{2}}\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{(r/2)^{\alpha+1/2}} & (\alpha > -1, (r/2) > 0) \\ \left(\dfrac{(2k\text{-}1)!!}{2^{k+1}(r/2)^k}\right)\sqrt{\dfrac{2\pi}{r}} & (\alpha=2k,\ k \in \mathbb{Z}, (r/2) > 0) \\ \dfrac{k!}{2\left(\frac{r}{2}\right)^{k+1}} & (\alpha = 2k+1, k \in \mathbb{Z}, (r/2) > 0) \end{cases}$$

$$\frac{1}{r}(y+\lambda)\left(1-e^{-rT}\right) = \frac{2}{\sqrt{\mu}}e^{\frac{r\beta}{2}}\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{(r/2)^{\alpha+1/2}} & (\alpha > -1, (r/2) > 0) \\ \left(\dfrac{(2k\text{-}1)!!}{2^{k+1}(r/2)^k}\right)\sqrt{\dfrac{2\pi}{r}} & (\alpha=2k,\ k \in \mathbb{Z}, (r/2) > 0) \\ \dfrac{k!}{2\left(\frac{r}{2}\right)^{k+1}} & (\alpha = 2k+1, k \in \mathbb{Z}, (r/2) > 0) \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}=\frac{1}{2r}(y+\lambda)\left(1-e^{-rT}\right)e^{-\frac{r\beta}{2}}\begin{cases}\dfrac{(r/2)^{\alpha+1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} & (\alpha>-1,(r/2)>0)\\ \left(\dfrac{2^{k+1}(r/2)^{k}}{(2k\text{-}1)!!}\right)\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}} & (\alpha=2k,\ k\in\mathbb{Z},(r/2)>0)\\ \dfrac{2\left(\frac{r}{2}\right)^{k+1}}{k!} & (\alpha=2k+1,k\in\mathbb{Z},(r/2)>0)\end{cases}$$

$$c_t=-\lambda+\frac{e^{rt/2}}{\sqrt{(t+\beta)^{\alpha+1}}}\frac{1}{2r}(y+\lambda)\left(1-e^{-rT}\right)e^{-\frac{r\beta}{2}}\begin{cases}\dfrac{(r/2)^{\alpha+1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} & (\alpha>-1,(r/2)>0)\\ \left(\dfrac{2^{k+1}(r/2)^{k}}{(2k\text{-}1)!!}\right)\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}} & (\alpha=2k,\ k\in\mathbb{Z},(r/2)>0)\\ \dfrac{2\left(\frac{r}{2}\right)^{k+1}}{k!} & (\alpha=2k+1,k\in\mathbb{Z},(r/2)>0)\end{cases}$$

Referencias

Epstein, L. G., Hynes, J. A., (1983) “The Rate of Time Preference and Dynamic Economic Analysis”, The Journal of Political Economy, Vol. 91, Issue 4, pp. 611-635.

Frederick, S., Loewenstein, G. and O’ Donoghue, Ted. (2002) “Time Discounting and Time Preference: A Critical Review”, Journal of Economic Literature, Vol. 40, No. 2, pp. 351-401.

Samuelson, P. (1937) “A Note on Measurement of Utility”, The Review of Economic Studies, Vol. 4, No. 2, pp. 155-161.

Van Praag, B. M. S., Booij, A. S., (2003) “Risk Aversion and the Subjective Time Discount Rate: A Joint Approach”, Tinbergen Institute Discussion Paper.

Venegas Martínez, F. (2000) “Utilidad, aprendizaje y estabilización”, Gaceta de Economía, Num. 10, pp 153-169.