

## Aplicaciones de la distribución weibull en ingeniería de confiabilidad

Raquel Salazar Moreno<sup>1</sup>  
Abraham Rojano Aguilar<sup>2</sup>  
Esther Figueroa Hernández<sup>3</sup>  
Francisco Pérez Soto<sup>4</sup>

### 1. INTRODUCCIÓN

La calidad de los productos y sistemas es un concepto muy amplio que incluye: confiabilidad, desempeño inicial, durabilidad, fácil de usar, reputación, seguridad, compatibilidad con diferentes ambientes. De todos estos aspectos, la confiabilidad es la característica más importante de un producto, expresado por la probabilidad de que realizará sus funciones, bajo determinadas condiciones, durante un periodo específico de tiempo. Se debe hacer la distinción entre la confiabilidad actual de un sistema, la cual solo puede ser calculada durante el uso del producto y la confiabilidad predicha, la cual se calcula utilizando datos de laboratorio (Kececioglu, 1991).

El significado de la confiabilidad en la “vida” de una máquina, se puede comparar con el significado de la salud en la vida de una persona. La utilidad o la “calidad de vida” de una persona la determinan muchas propiedades: inteligencia, rasgos de carácter, dedicación al trabajo, su aspecto físico, etc. Sin embargo, la salud es la propiedad más importante de todas, porque de la misma, depende la manifestación de otras de sus cualidades. La persona saludable se enferma menos y puede realizar más trabajo, también se necesitan menores gastos materiales, financieros y de tiempo para su descanso y recuperación.

En este sentido, la confiabilidad de la máquina es su “salud” y las fallas o la pérdida de capacidad de trabajo son sus “enfermedades”. La máquina que posee mayor confiabilidad con menos frecuencia pierde su capacidad de trabajo. La medida cuantitativa de la confiabilidad es la tasa de falla, tasa a la cual se espera que un componente falle bajo condiciones conocidas.

La medición de la confiabilidad es de suma importancia en el mercado competitivo actual, ya que involucra dinero, prestigio y los negocios futuros. La teoría de la confiabilidad desarrolla métodos para determinar lo que está funcionando mal en un sistema, como se puede prevenir lo que no está funcionando bien y si algo está funcionando mal como puede recuperarse el sistema y minimizar las consecuencias (Dhillon, 1999).

Cuando las metodologías de la confiabilidad se toman a la ligera pueden producir resultados desastrosos. Un ejemplo claro de ello fue la falla catastrófica del Challenger en 1986. Esta nave espacial explotó después de 73 segundos de ser lanzada en el Centro espacial Kennedy en Florida. Los oficiales de la NASA afirmaban que la probabilidad de falla era aproximadamente .001% con un nivel de confianza del 50%. El error fue que los oficiales de la NASA interpretaron que las naves espaciales enviadas anteriormente con éxito era indicación de seguridad. Gran parte de los datos que se utilizaron para estimar la probabilidad de falla fueron a temperaturas de lanzamiento mayores a los 65° F, y el cálculo de la probabilidad de falla a 31° F (temperatura a la cual Challenger fue lanzado) fue de al menos 13%.

La lección que se aprendió después de esta catastrófica falla en donde murieron 7 astronautas, fue que las incertidumbres relacionadas con la calidad de los datos y la selección del modelo frecuentemente tienen que ser compensadas haciendo elecciones conservativas de los modelos y parámetros, para disminuir la invalidez de algunos supuestos, previendo factores de seguridad. No debe olvidarse que la alta confiabilidad depende de la buena ingeniería (Nash, 1999).

1 Universidad Autónoma Chapingo, Km 38.5 Carr. México-Texcoco, Chapingo Edo. México.  
raquels85@yahoo.com.mx. perezsotof@hotmail.com.

2 Universidad Autónoma Chapingo, Km 38.5 Carr. México-Texcoco, Chapingo Edo. México.  
raquels85@yahoo.com.mx. perezsotof@hotmail.com.

3 Universidad Autónoma del Estado de México. Texcoco, Estado de México. esfigue\_3@yahoo.com.mx

4 Universidad Autónoma Chapingo, Km 38.5 Carr. México-Texcoco, Chapingo Edo. México.  
raquels85@yahoo.com.mx. perezsotof@hotmail.com

## 2. TEORÍA DE FALLAS

El término falla se refiere a cualquier incidente o condición que cause la degradación de un producto, proceso o material de tal forma que ya no pueda realizar las funciones de una manera segura, confiable y a un costo razonable para las que fue concebido. Las fallas ocurren de manera incierta y son influenciadas por el diseño, manufactura o construcción, mantenimiento y operación, así como factores humanos; algunas de ellas pueden llegar a ser catastróficas, como la falla de un puente, o de un avión, que implica la muerte de personas. No existen formas en que las fallas puedan ser eliminadas del todo, cualquier objeto llega a fallar algún día sin importar que tan bien haya sido diseñado, lo único que se puede hacer es reducir la incidencia de tales fallas dentro de cierto límite de tiempo, con la integración efectiva de buena ingeniería y manejo de dichos objetos. Un puente al que no se le da un mantenimiento apropiado o se permite que sea sobrecargado, puede llegar a colapsarse a pesar de haya sido bien diseñado y construido (Nash, 1999).

### Curva Típica de Flujo de Fallas

Es una curva que representa los diferentes tipos de falla que un equipo o componente del mismo sufre durante el periodo de tiempo desde su puesta en operación hasta que termina su ciclo de vida útil. La Figura 1 representa los tres componentes que forman la curva típica de flujo de fallas:

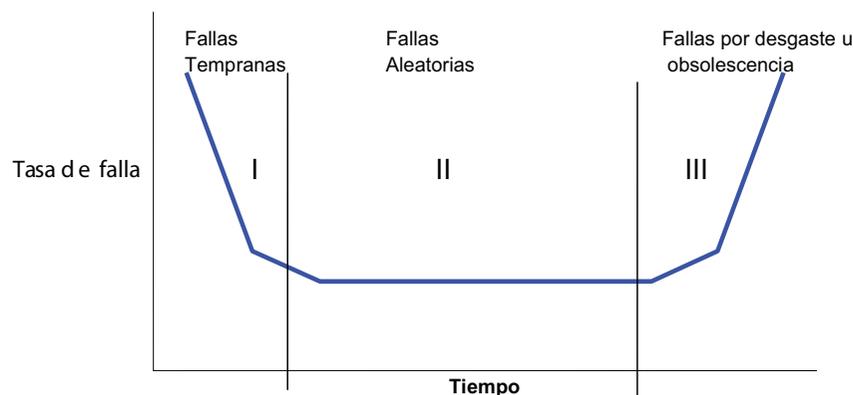


Figura 1. Curva típica de flujo de fallas

#### Fallas tempranas

Se representan por la primera parte de la curva, las tasas de falla están asociadas con equipo nuevo y pueden ser causadas por partes faltantes, falta de capacitación de las personas que instalan el equipo, daño causado a los aparatos o dispositivos, o fallas por defectos de fabricación de las máquinas y por insuficiente asentamiento de las piezas y uniones.

#### Fallas aleatorias

Este tipo de fallas son inesperadas y pueden surgir por sobrecargas o averías, causadas por factores externos que generan las fallas aún de las piezas mejor construidas (región II de la gráfica de la Figura 1. A este tipo de fallas se les llama fallas aleatorias y se representan por una línea horizontal, quiere decir que cada miembro de la población de componentes tiene la misma probabilidad de sufrir una falla.

#### Fallas por desgaste u obsolescencia

Se representan por la tercera parte de la gráfica de la Figura 1. Son las fallas debido a obsolescencia, por la edad, fatiga, corrosión, deterioro mecánico, eléctrico, hidráulico, o por el bajo nivel de mantenimiento y reparación.

Existe cierta similitud entre la curva típica de flujo de fallas y las tasas de mortalidad y sobre vivencia humana.

### 3 DISTRIBUCIÓN WEIBULL

En 1930, el ingeniero y matemático suizo Waloddi Weibull propuso una función de distribución de tres parámetros cuyas características para su época eran difíciles de manejar. Al principio, las expectativas de dicha propuesta, presentaban dificultades que radicaban en el manejo de las no linealidades, para encontrar los parámetros de ajuste. Sin embargo, con el tiempo el desarrollo tecnológico ha permitido hacer un uso intensivo de dicha distribución sobre todo empezando por el medio industrial; y ahora también ha habido un crecimiento explosivo de aplicaciones en el área de las ciencias agrícolas.

La versatilidad de dicha función radica en las diferentes formas que adopta dependiendo de los valores que toman sus parámetros. Las implicaciones físicas, teóricas, algebraicas, y gráficas son algunos aspectos interesantes que generan y dan lugar a una gran cantidad de trabajos diversos.

Físicamente, los valores extremos de la función Weibull están ligados a la vida útil de los productos en estudio, y han generado toda una filosofía o iniciativas de perfeccionamiento relacionado con los círculos de calidad, o de cero-falla entre otros. Teóricamente, podemos observar que los cambios de los parámetros generan una familia de distribuciones cuyos casos específicos coinciden con otras distribuciones como la exponencial, gaussiana, o chi-cuadrada, entre muchas otras.

Algebraicamente, la función de distribución Weibull, así como su acumulada son formas cerradas desde el punto de vista matemático, sin embargo encontrar sus parámetros requiere estrategias algebraicas no tan triviales, de índole no lineal que trae como consecuencia el uso de algoritmos especializados del tipo Newton. Gráficamente, también se han desarrollado estrategias para encontrar los parámetros de la función Weibull haciendo uso de escalas logarítmicas, sin embargo poco a poco los métodos computacionales han ido ganando más terreno en el ajuste de curvas (Wallace et al. 2000).

#### Características generales de la Distribución Weibull

La función Weibull de densidad está dada por

$$f(T) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{T-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left( \frac{T-\gamma}{\eta} \right)^{\beta}} \quad (1)$$

$\beta$  - parámetro de forma – es indicador del mecanismo de falla

$\eta$  - parámetro de escala – vida característica

$\gamma$  - parámetro de localización – la vida mínima

La Figura 2 muestra el comportamiento de la distribución Weibull para diferentes valores del parámetro de forma  $\beta$ .

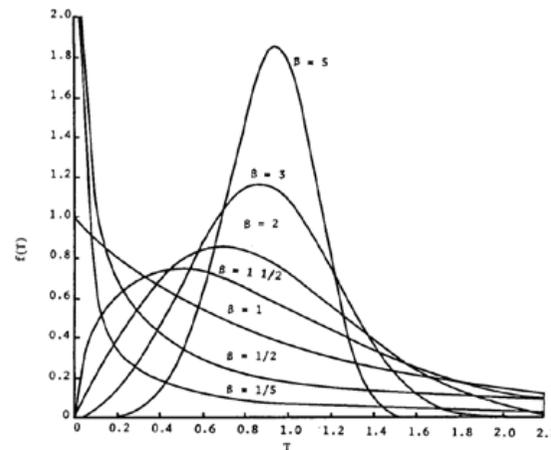


Figura 2. Función de densidad de probabilidad Weibull para varios valores de  $\beta$

1) Para  $0 < \beta < 1$ ,  $f(T)$  decrece monótonamente y es convexa

2) Para  $\beta = 1$  se obtiene la función exponencial con 2 parámetros

$$f(T) = \frac{1}{\eta} e^{-\left(\frac{T-\gamma}{\eta}\right)} \quad \text{donde} \quad \eta = \frac{1}{\lambda}$$

$$f(T) = \lambda e^{-\lambda(T-\gamma)} \quad \gamma \geq 0 \quad t \geq \gamma \quad \eta > 0$$

3) Para  $\beta > 1$   $f(T)$  asume formas parecidas a la distribución normal, cuyas aplicaciones son para la de tasa de falla de componentes que han sufrido desgaste

Para  $2.6 < \beta < 5.3$  se aproxima a la distribución normal siempre que  $\eta = 1$   $\gamma = 0$ .

4) Un cambio en el parámetro de escala  $\eta$  tiene el mismo efecto en la distribución que un cambio de escala de la abscisa, esto es, para un mismo valor de  $\beta$  y  $\gamma$  en una distribución normal, si  $\eta$  se incrementa la distribución se contrae y si  $\eta$  disminuye la distribución se expande.

5) El parámetro de localización  $\gamma$  sirve para ubicar el inicio de la distribución a lo largo del eje x.

6) La media  $\bar{T}$  es

$$\bar{T} = \eta \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[ \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (2)$$

7) Respecto a las unidades, el parámetro  $\beta$  es un número adimensional, pero los parámetros  $\eta$  y  $\gamma$  tienen las mismas unidades que  $T$ , tales como horas, ciclos, miles, etc. Asimismo,  $\gamma$  con valor negativo indica fallas antes del inicio de la prueba.

(Kececioglu, 1991).

#### Características de la función de confiabilidad Weibull

La función de confiabilidad Weibull se expresa en la ecuación (3).

$$R(T) = e^{-\left(\frac{T-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (3)$$

La Figura 3 muestra la función de confiabilidad para diferentes valores de  $\beta$  y  $\eta$

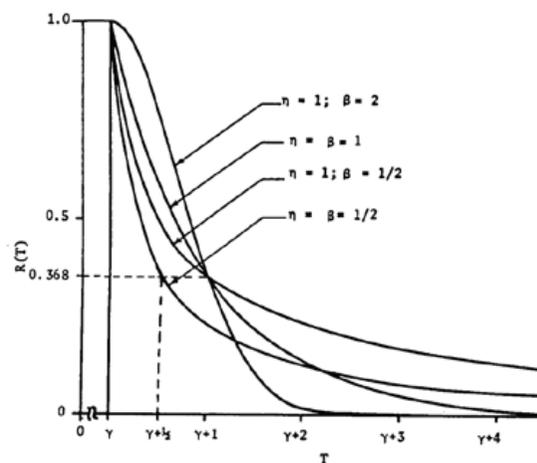


Figura 3 Función de confiabilidad Weibull para varios valores de  $\beta$

La función de confiabilidad Weibull se inicia en 1, dado que se supone que al iniciar la misión todos los equipos se encuentran en buenas condiciones y conforme pasa el tiempo la confiabilidad va disminuyendo como se muestra en la figura, para valores de  $\beta$  menores de 1 la función de confiabilidad disminuye de manera asintótica. Al igual que la función de densidad, para valores de  $\beta=1$  la función de confiabilidad asume la forma exponencial,

Propiedades de la función de confiabilidad Weibull

1- Para  $\beta = 1$  la curva decrece monótonamente más rápido que para  $0 < \beta < 1$ .

2- La confiabilidad para una misión  $(\gamma + \eta)$  empezando la misión a la edad cero es

$$R(T) = e^{-\left(\frac{\gamma + \eta - T}{\eta}\right)^\beta} = e^{-1} = 0.368 \quad (5)$$

Lo anterior significa que para una misión de duración  $(\gamma + \eta)$ , únicamente el 36.8% de los equipos sobrevivirán.

3- La función de confiabilidad condicional

$$R(T, t) = \frac{R(T+t)}{R(T)} = \frac{e^{-\left(\frac{T+t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}}{e^{-\left(\frac{T-\gamma}{\eta}\right)^\beta}} \quad (6)$$

$$R(T, t) = e^{-\left[\left(\frac{T+t-\gamma}{\eta}\right)^\beta - \left(\frac{T-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right]} \quad (7)$$

(Kececioglu, 1991).

La ecuación (7) proporciona la confiabilidad de una nueva misión de duración  $t$  habiendo acumulado  $T$  horas de operación al iniciar la nueva misión.

**Vida Confiable**

La vida confiable  $T_R$ , para una confiabilidad específica, es definida empezando la misión a la edad de cero como

$$R(T) = e^{-\left(\frac{T-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$$

$$-\left(\frac{T-\gamma}{\eta}\right)^\beta = \ln R(T)$$

$$\frac{T_R - \gamma}{\eta} = [-\ln R(t)]^{1/\beta}$$

$$T_R = \gamma + \eta[-\ln R(t)]^{1/\beta} \tag{8}$$

La ecuación (8) representa la vida para la unidad que estará funcionando exitosamente con probabilidad  $R(T_R)$ ; si  $RTR=0.50$ , entonces  $T_R = \bar{T}$  es la vida media

**Función de tasa de falla Weibull**

La función de tasa de falla Weibull se muestra en la ecuación (9) y la Figura (4)

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{T-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} = \frac{f(T)}{R(T)} \tag{9}$$

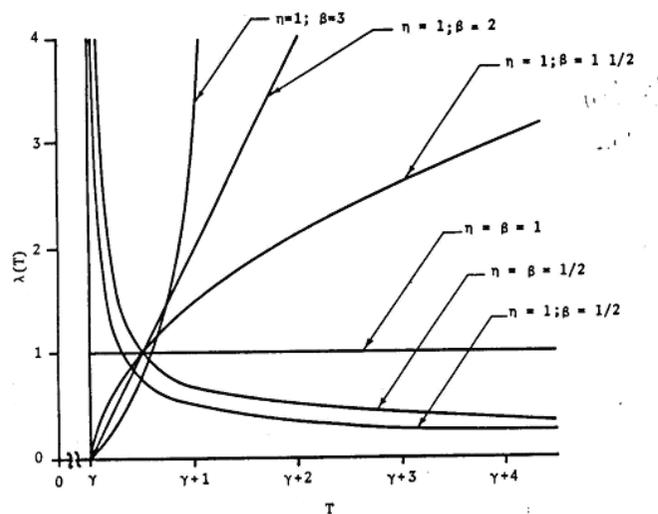


Figura 4 Función tasa de falla Weibull para varios valores de  $\beta$

La tasa de falla Weibull para  $0 < \beta < 1$  se inicia en  $\infty$  cuando  $T = \gamma$ , después decrece monótonamente cuando  $T \rightarrow \infty$  y  $\lambda \rightarrow 0$ . Este comportamiento de la distribución Weibull la hace viable para utilizarse en unidades que exhiben tasas de falla que decrecen con la edad, es decir se identifica con la parte I de la curva típica de fallas.

Para  $\beta = 1 \rightarrow$  la función representa la tasa de falla constante de la vida útil de las unidades que corresponde a la zona II de la curva típica de fallas, para este valor coincide con la función exponencial.

$$\lambda(T) = \frac{1}{\eta} = \lambda \quad (10)$$

Para  $\beta > 1$ ,  $\lambda(T)$  crece cuando  $T$  se incrementa y se puede utilizar para representar la falla de unidades exhibiendo fallas por desgaste, corresponde a la zona III de la curva típica de fallas.

Para  $1 < \beta < 2$  la curva es cóncava, y la tasa de falla se incrementa a una tasa decreciente

Para  $\beta = 2$  se tiene el caso de la distribución Raleigh, en donde la tasa de falla es:

$$\lambda(T) = \frac{2}{\eta} \left( \frac{T - \gamma}{\eta} \right) \quad (11)$$

Para  $2.6 < \beta < 5.3$  se aproxima a la tasa de falla normal siempre que  $\eta = 1$   $\gamma = 0$ , también utilizada para modelar las fallas debido a la edad u obsolescencia.

#### 4. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE LA DISTRIBUCIÓN WEIBULL PARA UN CASO ESPECÍFICO

El método de máxima verosimilitud es uno de los más robustos y poderosos para obtener una aproximación de confiabilidad. La evaluación por el método de máxima verosimilitud permite encontrar los valores más probables de los parámetros de una distribución de densidad de probabilidad para un conjunto de datos; Lo cual se logra usando métodos iterativos para estimar los valores de los parámetros que maximicen la función de verosimilitud, que puede resultar difícil y tomar tiempo, particularmente cuando se trate de una distribución de tres parámetros.

$$f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad (12)$$

Donde  $x$  son los datos (tiempo de falla);  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  son los parámetros que se estiman y  $k$  el número de parámetros a evaluar. Para un conjunto de datos la función de verosimilitud es un producto de la función de la densidad de la probabilidad, con un elemento por cada punto en el conjunto de datos (13).

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k | x_1, x_2, \dots, x_R) = L = \prod_{i=1}^R f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad (13)$$

$i = 1, 2, \dots, R$

Donde  $R$  es el número de observaciones independientes que corresponden al tiempo de falla,  $x_i$  el  $i$ ésimo tiempo de falla. Matemáticamente, es más fácil manipular esta función tomando su logaritmo (14).

$$\Lambda = \ln L = \sum_{i=1}^R \ln f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad (14)$$

Los valores de los parámetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  que maximizan  $L$  ó  $\Lambda$  se obtienen tomando la derivada parcial de la ecuación de  $\Lambda$  para cada uno de los parámetros e igualándolos a cero:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (15)$$

Esto resulta en igual número de ecuaciones y variables, las cuales pueden resolverse simultáneamente. Si existen las soluciones de forma cerrada para las derivadas parciales la solución puede ser relativamente simple. En otras situaciones, se emplean algunos métodos numéricos.

El método de estimación de máxima verosimilitud tiene varias propiedades que hacen atractiva su aplicación: es consistentemente, asintótico. Lo anterior significa que mientras el tamaño de muestra aumenta, las estimaciones convergen a los valores correctos. Además, para conjuntos de datos grandes produce estimaciones más exactas. La distribución de las estimaciones es normal, si el conjunto de datos es bastante grande. Desafortunadamente, el tamaño necesario de la muestra para alcanzar estas características debe ser bastante grande: desde 30 hasta cientos de muestras de tiempos exactos de falla, dependiendo de la aplicación.

La ecuación (16), muestra la función de verosimilitud de una función de la densidad de la probabilidad exponencial, con lambda  $\lambda$  como parámetro a estimar. Esta ecuación diferencial está en forma cerrada, debido a la naturaleza misma de la función de la densidad de probabilidad exponencial.

$$\begin{aligned} L(\lambda|t_1, t_2, \dots, t_n) &= \prod_{i=1}^n f(t_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda t_i} \\ &= \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \end{aligned} \tag{16}$$

Tomamos el logaritmo natural de la función de verosimilitud:

$$\Lambda = \ln(L) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n t_i \tag{17}$$

Derivando la ecuación con respecto a  $\lambda$  e igualando a cero se obtiene:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n t_i = 0 \tag{18}$$

Reordenando los términos o resolviendo para  $\lambda$  la expresión queda:

$$\tilde{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i} \tag{19}$$

Obviamente, este es el ejemplo más sencillo, pero sirve para ilustrar el proceso. La metodología es más compleja para distribuciones con múltiples parámetros en donde no exista una solución cerrada.

**Superficie de la función de verosimilitud:** Es una representación tridimensional de la función logarítmica de verosimilitud para dos parámetros, los parámetros están en los ejes Y y X, y los valores logarítmicos de la verosimilitud en el eje Z. La Figura 5, es un ejemplo de la superficie de una función de verosimilitud para una distribución Weibull de dos parámetros. En esta gráfica “la cima” de la superficie corresponde a los valores de los parámetros que maximizan la función de verosimilitud.

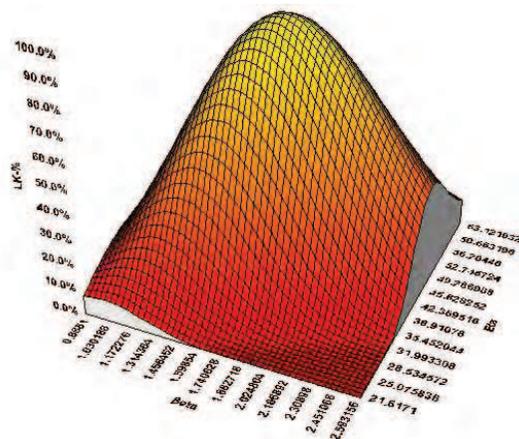


Figura 5. Función de verosimilitud en tres dimensiones.

#### Algoritmo de Nelder-Mead.

La función de densidad de probabilidad Weibull, se utiliza como el modelo que rige el comportamiento de la longitud y ancho máximo del grano de avena, como parte del entendimiento estadístico de sus dimensiones y que permitirá implementarlo en los procesos de selección, clasificación y limpieza del mismo, en su procesamiento e industrialización.

El procedimiento para tomar la muestra de 100 granos de avena, híbrido cosechado en el ciclo primavera verano 2003, en la zona de influencia de la Universidad Autónoma Chapingo fue el siguiente: se tomaron 10 costales con aproximadamente 35 kg de grano cada uno, tomando tres muestras aleatorias de cada costal y se midieron con un calibrador las dimensiones mostradas en la Figura 6.

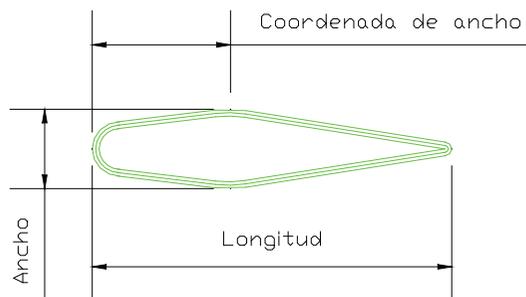


Figura 6. Dimensiones de grano de avena.

**El Cuadro 1, muestra los datos obtenidos al medir las dimensiones del grano de avena**  
**Cuadro 1. Muestra de grano de avena.**

Dimensiones de grano de avena (mm)														
L	A	C	L	A	C	L	A	C	L	A	C	L	A	C
13.0	3.0	4.0	14.5	3.0	4.0	13.0	3.0	5.0	12.0	2.5	5.0	14.0	3.5	7.0
13.0	3.0	5.5	12.5	3.0	4.0	14.0	3.0	7.0	11.5	3.0	7.5	12.0	2.5	6.0
11.5	3.0	5.5	12.5	3.0	4.5	12.0	2.5	4.0	10.0	2.0	5.0	12.5	3.0	5.5
11.0	3.5	4.0	13.0	3.5	5.0	10.0	3.0	4.5	12.0	3.5	5.0	11.5	3.0	4.0
09.0	2.5	4.5	11.0	3.5	3.5	11.0	3.0	4.5	11.5	3.0	5.0	10.5	3.0	5.0
09.0	2.5	4.5	08.0	2.5	5.0	12.0	2.5	4.0	12.0	3.0	4.5	13.0	3.0	4.0
10.0	2.5	6.0	09.0	2.5	4.0	13.5	3.0	5.5	12.0	4.0	5.0	12.5	2.5	6.0
10.0	2.5	4.0	08.5	2.5	5.0	11.0	2.0	4.5	09.0	2.5	5.0	11.0	2.5	5.0
12.0	3.0	6.0	10.0	2.5	5.0	10.5	3.0	4.0	08.5	2.5	4.0	11.0	3.0	5.0
12.0	2.5	5.0	11.5	3.0	6.0	09.5	2.5	5.0	11.5	2.5	5.5	11.0	3.0	5.0
09.5	3.5	6.0	14.0	2.5	4.5	10.0	2.5	5.5	13.5	3.0	5.0	08.5	2.5	5.0
09.0	2.5	4.5	11.0	2.5	5.0	10.0	2.5	5.5	12.0	3.0	5.5	09.5	1.5	5.0
11.0	3.0	3.0	12.0	2.5	5.5	10.5	3.0	4.5	10.5	2.5	5.5	08.5	2.5	4.5
10.0	2.0	4.0	13.0	3.0	5.0	09.0	2.5	4.0	10.0	3.0	4.0	13.0	2.0	5.0
09.5	2.0	6.0	12.5	2.5	6.0	11.0	3.0	5.5	12.5	3.5	5.0	10.5	2.5	5.0
12.0	3.0	5.0	12.5	3.0	6.0	14.0	3.0	5.5	13.5	3.0	5.0	10.5	3.0	6.0
12.0	3.0	5.0	14.0	3.0	5.0	09.5	2.5	6.0	12.0	3.0	5.0	13.5	2.5	5.0
13.5	3.5	5.0	10.0	2.5	5.0	11.0	3.0	5.0	13.0	3.0	5.0	11.5	2.5	5.0
11.5	2.5	5.5	12.0	3.0	5.0	12.5	3.0	5.5	10.5	2.5	4.5	11.0	3.0	6.0

L = Largo, A = Ancho, C = Coordenada de A.

Debido a la versatilidad de la función Weibull, se busca ajustar las características dimensionales del grano de avena al modelo de distribución de probabilidad Weibull de tres parámetros expresada en (1).  
 Con función de probabilidad acumulada (20)

$$f(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (20)$$

Donde:  $\beta$  es el parámetro de forma,  $\gamma$  es parámetro de localización,  $\eta$  parámetro de escala,  $x$  variable independiente representa la longitud o ancho del grano.

El Cuadro 2, muestra la frecuencia acumulada de longitud  $l_i$  y ancho  $a_i$  de grano, en intervalos de 0.5 mm. Estos datos junto con el modelo Weibull de frecuencia acumulada, permiten plantear dos sistemas no lineales, uno para los datos de longitud  $l_i$  y otro para el ancho  $a_i$ .

$$f(x)_i = 1 - e^{-\left(\frac{l_i-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$$

$$f(y)_i = 1 - e^{-\left(\frac{a_i-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (21)$$

Los parámetros de forma, localización y escala ( $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\eta$ ), se obtienen al resolver por separado cada sistema de ecuaciones, utilizando como herramienta de cálculo MatLab (The MathWorks, 2003). La instrucción de `fminsearch`, determina el mínimo local de una función escalar de variable múltiple, con una estimación inicial, generalmente referida a una optimización no lineal sin restricciones. `fminsearch` usa el método simplex de Nelder-Mead (Byatt and Coope, 2003).

Si  $n$  es la longitud de  $x$ , un simplex en un espacio unidimensional es caracterizado por los  $n+1$  vectores distintos que son sus vértices. En espacio 2, un simplex es un triángulo; en espacio 3, es una pirámide o tetraedro. En cada caso de la búsqueda, un nuevo punto interior o cercano al simplex en turno generado. El valor de la función en el nuevo punto es comparado con los valores de la función en los vértices del simplex y, usualmente, y uno de los vértices es remplazado por el nuevo punto, generando un nuevo simplex. Este paso es repetido hasta que el diámetro del simplex es menor que la tolerancia especificada. Este es un método directo que no utiliza un gradiente numérico o analítico.

El Cuadro 2 muestra los valores de los parámetros que caracterizan las dimensiones del grano de avena, con una función de densidad de probabilidad Weibull.

**Cuadro 2. Parámetros de la función Weibull**

Parámetros de la función Weibull			
Dimensión	Beta	Eta	Gama
Longitud	5.5474	8.4388	3.2666
Ancho	3.9894	1.3368	1.3339

Los parámetros del Cuadro 2 generan las funciones de densidad de probabilidad Weibull que modelan la longitud y ancho del grano de avena.

$$f(l) = \frac{5.5474}{8.4388} \left( \frac{l-3.2666}{8.4388} \right)^{5.5474-1} e^{-\left( \frac{l-3.2666}{8.4388} \right)^{5.5474}}$$

$$f(l) = 0.6573 \left( \frac{l-3.2666}{8.4388} \right)^{4.5474} e^{-\left( \frac{l-3.2666}{8.4388} \right)^{5.5474}} \quad (22)$$

$$f(a) = \frac{3.9894}{1.3368} \left( \frac{a-1.3339}{1.3368} \right)^{3.9894-1} e^{-\left( \frac{a-1.3339}{1.3368} \right)^{3.9894}}$$

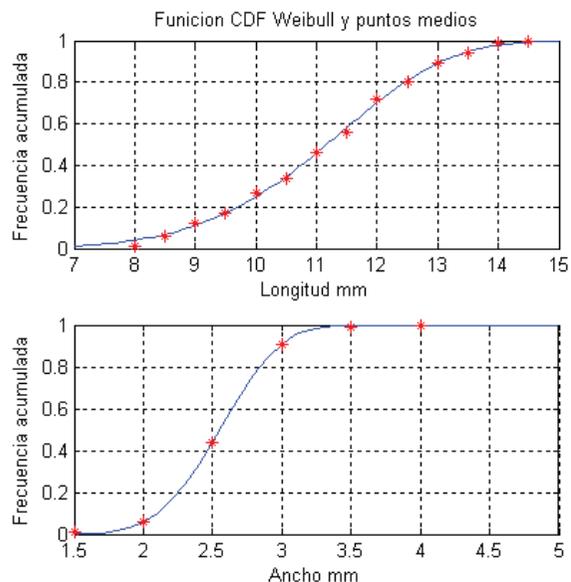
$$f(a) = 2.9842 \left( \frac{a-1.3339}{1.3368} \right)^{2.9894} e^{-\left( \frac{a-1.3339}{1.3368} \right)^{3.9894}} \quad (23)$$

y las distribuciones de probabilidad acumulada Weibull para la longitud  $l$  y ancho máximo  $a$ , del grano avena.

$$f(l) = 1 - e^{-\left( \frac{l-3.2666}{8.4388} \right)^{5.5474}}$$

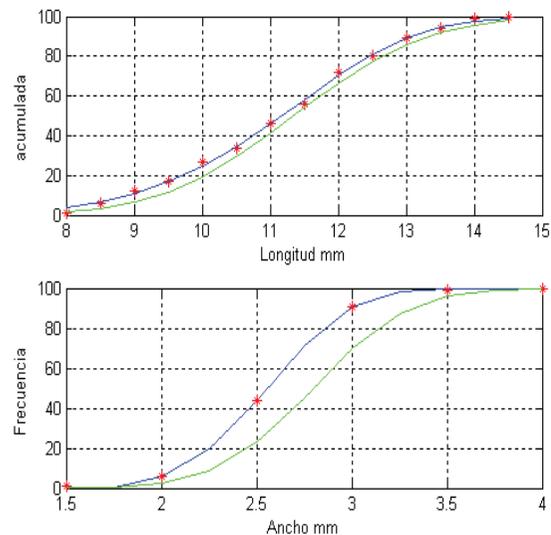
$$f(a) = 1 - e^{-\left( \frac{a-1.3339}{1.3368} \right)^{3.9894}} \quad (24)$$

La Figura 3, muestra la solución numérica de la distribución de probabilidad acumulada del modelo Weibull implementado y su ajuste con los puntos medidos de longitud y ancho máximo de grano del avena. Esta gráfica permite inferir sobre la pertinencia del método simplex de Nelder-Mead, aplicado en la determinación numérica de los parámetros de la función Weibull.



**Figura 8. Distribución de probabilidad acumulada Weibull**

Esta gráfica permite inferir sobre la pertinencia del método simplex de Nelder-Mead, aplicado en la determinación numérica de los parámetros de la función Weibull.



**Figura 9 Comportamiento del modelo Weibull y normal**

Finalmente, la distribución de probabilidad conjunta (25), permite analizar el comportamiento estadístico simultáneo de la longitud y ancho del grano de avena.

$$f(l, a) = f(l) * f(a) \quad (25)$$

Expresada como función de densidad acumulada, tiene la forma:

$$f(l, a) = (1 - e^{-b}) (1 - e^{-c}) \quad (26)$$

Sustituyendo 24 en 25, la función de densidad de probabilidad conjunta de la longitud y ancho del grano de avena es:

$$f(l, a) = 1.9615.m.n.e^{-b}.e^{-c} \quad (27)$$

Donde:

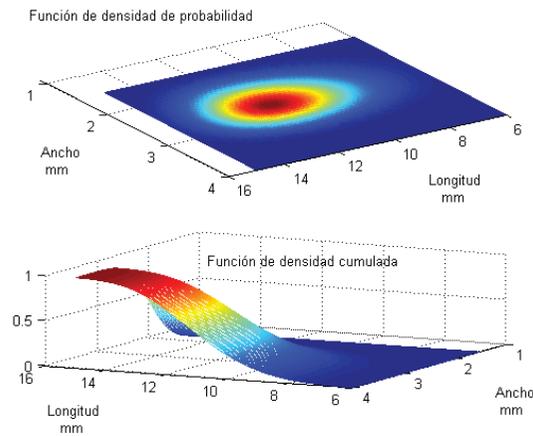
$$b = -\left(\frac{l - 3.2666}{8.4388}\right)^{5.5474}$$

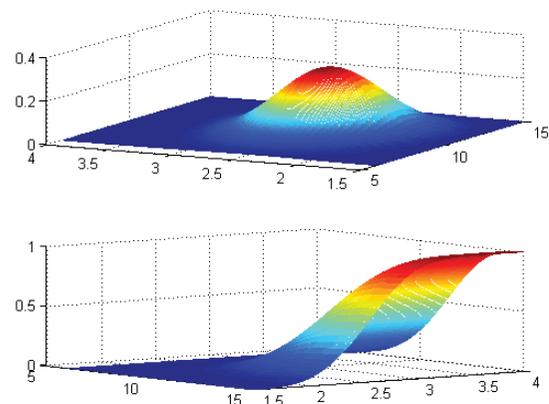
$$c = -\left(\frac{a - 1.3339}{1.3368}\right)^{3.9894}$$

$$m = -\left(\frac{l - 3.2666}{8.4388}\right)^{4.5474}$$

$$n = -\left(\frac{a - 1.3339}{1.3368}\right)^{2.9894}$$

En la gráfica de la función de densidad de probabilidad, ver Figura 10, la elipse interna indica los intervalos conjuntos de dimensiones del grano más frecuentes, el ancho de 2.5 a 3.0 mm está relacionado con una longitud de 11 a 13 mm de longitud. De igual manera la elipse externa indica los intervalos conjuntos menos frecuentes de dimensiones, el ancho de 3.5 a 2.0 mm está relacionado con la longitud de 8.5 a 14.5 mm.





**Figura 10. Función de probabilidad conjunta.**

De igual manera la Figura 10, muestra como el cambio de pendiente más pronunciado se presenta en la parte media de la gráfica, donde 8.5 mm y 14.5 mm de longitud, son los extremos del intervalo de dimensiones de grano menos frecuente.

La función `fminsearch` (método simplex de Nelder-Mead) del Matlab, es una solución numérica que genera resultados aceptables al modelar el comportamiento dimensional del grano de avena con una función de densidad Weibull, permite resolver apropiadamente los sistemas de ecuaciones no lineales sin restricciones, facilita la determinación de los parámetros de la función Weibull dada una muestra aleatoria y fortalece la estadística no paramétricas (Lagarias, 1995).

Sin embargo, antes de generalizar el modelo Weibull, como la función de densidad de probabilidad que modela el comportamiento dimensional del grano de avena, se recomienda explorarlo en diferentes variedades de avena, ya sea forrajeras o para grano, con el propósito de crear patrones de referencia que permitan inferir sobre el comportamiento dimensional de las distintas variedades de grano de avena. Igualmente se puede recomendar la implementación de estos métodos numéricos y herramientas de cálculo para caracterizar el comportamiento estadístico de las dimensiones de los cereales y otros granos, así como la determinación de parámetros que caracterizan a las funciones de densidad de probabilidad.

#### **BIBLIOGRAFIA**

- Dhillon, B.S. "Design Reliability Fundamentals and Applications", CRC Press, United States of America. 1999.
- Byatt, D., Coope. P. I C. 40 Years of the Nelder-Mead Algorithm, University of Canterbury, New Zealand, November 5, 2003.
- Kececioglu, D. Reliability Engineering Handbook. Prentice Hall Inc. 1991.
- Lagarias, J. C.; Cañas, J. A. Características de la convergencia del algoritmo de Nelder-Mead en dimensiones bajas. Tech De los Laboratorios de AT&T Bell. Representante. Colina De Murray, NJ. 1995.
- Nash, F.R. Estimating Device Reliability: Assessment of Credibility. Kluwer Academic Publishers. 1999.
- The MathWorks Release 13. Statistics Toolbox 4.1, The MathWorks, Inc. 2003.
- Ushakov, I.A., Harrison, R.A. Handbook of Reliability Engineering. John Wiley & Sons. Inc. 1994.
- Wallace, R., Blischke, D. N., Prabhakar, M. Reliability Modeling Prediction and Optimization. John Wiley & Sons Inc. 2000.