UNIVERSIDAD DE LAS TUNAS
"VLADIMIR I. LENIN"

CENTRO UNIVERSITARIO MUNICIPAL
JESÚS MENÉNDEZ

Monografía

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

AUTORES
RAFAEL EUGENIO PÉREZ GRAVE DE PERALTA.
Licenciado en Educación en la Especialidad de Matemática, Profesor Asistente.
RENÉ SANTOS PAVÓN.
Licenciado en Educación en la Especialidad de Matemática, Profesor Auxiliar.
MARJORIS GONZÁLEZ LÓPEZ.
Licenciada en Educación en la Especialidad de Biología, Profesora Instructora.

CHAPARRA, 2011

PRÓLOGO

El objetivo supremo de la enseñanza de la Matemática es su traducción a la resolución de problemas, habilidad tan útil en la vida profesional y personal y tan rechazada por una cifra significativamente grande de personas de todas las edades y sexos.

No se puede acusar al facilismo y la incomprensión como causas absolutas de tal menosprecio, sin lugar a dudas, los docentes que imparten la asignatura, con su actuación a veces inconsciente y en otras por carencias metodológicas, contribuyen a la apatía que manifiestan no pocas personas por esta práctica.

Si el docente se apoya en estrategias de trabajo, válidas para lograr en los estudiantes la apropiación y desarrollo eficiente del **proceso total para la resolución de problemas matemáticos**, esto se va incorporando como una característica de la personalidad que favorece la perseverancia y una elevada autoestima, además de preparar al hombre para la vida.

Este material se propone realizar una reflexión al accionar metodológico del docente, para revelar sus posibles fallas al enfrentar este proceso, a partir de una experiencia aplicada en el Municipio Jesús Menéndez de la provincia cubana de Las Tunas.

El tema es de interés para todos los docentes que imparten la Matemática en cualquier enseñanza desde la primaria hasta la universitaria, con énfasis en los primeros grados.

LOS AUTORES

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Una cantidad nada despreciable de personas rechazan la asignatura Matemática y un número mayor, no aceptan la resolución de problemas, mas paradójicamente, todas esas personas, tiene que depender de la Matemática para lograr la subsistencia.

¿Cómo fundamentar entonces tal impugnación?

No resulta fácil, ni mucho menos breve, ofrecer una argumentación a esta problemática pues son muy diversos los factores que pueden ocasionar este desinterés por el estudio y práctica de una disciplina tan útil en la vida moderna.

Así es que en todos los países del mundo los programas de estudio incluyen la Matemática por su carácter imprescindible en cualquier latitud, pero su aceptación es muy similar en todas partes. Joaquín Palacio Peña en su obra colección de problemas para la vida expresa: la Matemática siempre ha sido una asignatura útil para todos, pero de interés solo para una parte de la población escolar. Mientras pocos la consideran fácil, muchos la valoran de difícil. Su utilidad no es discutida por nadie, de aquí su presencia en los programas de todos los países del mundo desde el inicio de la vida escolar.

El fin del conocimiento matemático está marcado por la resolución de problemas, es para ello que se enseña la Matemática, para resolver los problemas de la vida y la práctica social, desde un científico hasta un simple obrero o campesino, han de usar la Matemática para resolver los problemas que se le presentar todos los días o se benefician con un método o equipo que existe gracias a esta disciplina.

La poca motivación por esta ciencia pudiera ser como se dijo, por causas muy disímiles, pero sin dudas los docentes que enfrentaron la educación de estas personas, tienen una cuota de responsabilidad en esta situación.

En este material se abordan algunas de las fallas que se comenten en el proceso total de resolución de problemas matemáticos, que conspiran con el normal desarrollo de habilidades para la ejecución de esta actividad por parte de los estudiantes y que se identifican en el actuar del docente. Metodológicamente fundamentadas por los trabajos de autores nacionales y extranjeros que han abordado la problemática.

Se expone una experiencia realizada en el municipio Jesús Menéndez de la provincia de Las Tunas, en relación con el tratamiento a los problemas matemáticos, desde la comisión municipal hasta el aula, lo que puede ser de utilidad para los maestros, profesores y directivos del sector de la Educación.

CAPÍTULO I: LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS

1.1 DEFINICIÓN

Luego del primer contacto con el contenido de la enseñanza, se hace necesaria una etapa de fijación de este, para ello el profesor dispone de diferentes formas para alcanzar tal propósito. La Matemática como las demás materias, cuenta con diversas situaciones que presentan exigencias muy variadas.

Según Horst Müller, citado por (colectivo de autores cubanos, 1992). Se entiende por ejercicio en la enseñanza de la Matemática una exigencia para actuar que se caracteriza por:

1. El objetivo de las acciones,
2. El contenido de las acciones,
3. Las condiciones para las acciones

El objetivo de todas las acciones en la resolución de un ejercicio es, en cada caso transformar una situación inicial (elementos dados, premisas), en una situación final (elementos que se buscan, tesis).

El contenido de las acciones en la resolución de un ejercicio está caracterizando por:

A) El objeto de las acciones, que puede estar dado por los elementos de la materia matemática, (conceptos, proposiciones y procedimientos algorítmicos); la correspondencia entre situaciones extramatemática y elementos de materia matemática, y los procedimientos heurísticos (principios, estrategias reglas, etc.) así como medios heurísticos auxiliares.
B) Tipos de acciones: identificar, realizar, comparar, ordenar, clasificar, reconocer, escribir, aplicar, fundamentar, planificar y controlar.

Como condiciones para las acciones se encuentran en primer lugar las exigencias que el ejercicio plantea al alumno, expresada por el grado de dificultad del ejercicio.

¿Qué es un problema?

Según el breve diccionario de la Lengua Española, tomo III, (2006), se entiende por problema: hecho, acontecimiento o asunto que plantea una dificultad; suceso que hay que averiguar: problemas domésticos, problemas económicos, Tuvo muchos problemas para conseguir la plaza de asesor legal en esa empresa 2 proposición dirigida a averiguar el modo de obtener un resultado cuando se conocen algunos datos:

Un problema de matemáticas, un problema de física, un problema de ajedrez. FAM. Problemática, problemático, problematismo.

Problema, según Mario O González, (1973), es toda proposición (generalmente de carácter práctico), en que se pide la determinación de ciertas cantidades (numéricas; geométricas, físicas, etc), mediante las relaciones que existen entre ellas y otras conocidas.

Estas cantidades conocidas, continúa González, se llaman datos; aquellas cuya determinación se busca, incógnitas.

El propio autor, reconoce 6 partes en cada uno de los problemas matemáticos que se proponen a los estudiantes por parte de los docentes.

Enunciado: expresa el objeto del problema, consignándose los datos del mismo, sus incógnitas y de un modo más o menos explicito relaciones que los ligan estas con los datos. El enunciado debe ser claro y preciso.

Planteo: En los problemas algebraicos el planteo consiste en traducir en ecuaciones o inecuaciones las relaciones que existen entre los datos y las incógnitas. A veces es preciso comenzar por elegir las incógnitas por no aparecer estas claramente en el enunciado, o bien, porque sea conveniente usar otras distintas, pero de las cuales pueda pasarse fácilmente a las incógnitas.

Resolución: es la determinación del valor o valores de las incógnitas que satisfacen las ecuaciones establecidas, para ello se emplean los métodos que se estudian en álgebra.

Verificación de los resultados obtenidos: tiene por objeto comprobar si los valores obtenidos responden a las condiciones impuestas en el enunciado del problema.

Discusión: consiste en estudiar los casos de posibilidad o imposibilidad del problema, determinando los valores entre los cuales pueden variar los datos. En la discusión suelen señalarse también los casos límite o notables que pueden presentarse en el problema.

Interpretación de los resultados: Depende de la rama del conocimiento humano en que el problema se hubiere presentado (geometría, mecánica, óptica, etc) y consiste en ver si todas las soluciones o solo algunas de ellas responden a la naturaleza de la cuestión. A veces una solución aparentemente absurda (por ejemplo, una solución negativa en un problema de edades, o de caída de proyectiles) puede recibir adecuada interpretación ampliando o generalizando convenientemente las hipótesis del enunciado

Un problema es, según Ballester Pedroso, S. [et alt], (1992), un ejercicio que refleja, determinadas situaciones a través de elementos y relaciones del dominio de las ciencias o la práctica, en el leguaje común y exige de medios matemáticos para su solución.

Según Silvestre, M. (1999), la formulación de la tarea plantea determinadas exigencias al alumno, estas repercuten tanto en la adquisición del conocimiento como en el desarrollo de su intelecto.

Acerca de los problemas expresó, que el alumno deberá percibir en el problema contradicción entre lo que conoce y lo que le falta por conocer para encontrar la solución, así como que sienta el interés por resolverlo, pues de lo contrario este pierde el carácter de problema para el estudiante en cuestión.

Continua diciendo además que el educando puede considerar un problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo, este concepto de problema es muy importante para la didáctica, pues en la selección de los problemas a proponer a un grupo de alumnos hay que tener en cuanta no solo la naturaleza de la tarea sino también los conocimientos que las personas requieren para su solución, lo que es problema para una persona no lo es necesariamente para otra.

Si bien es muy importante la solución de problemas, es de gran valor la elaboración de estos por el alumno. El planteamiento de suposiciones y la búsqueda de soluciones constituyen una vía que puede estimular la formulación de problemas.

Para Majmutov, M.I. (1983), las categorías fundamentales de la ***lógica dialéctica***, son los conceptos ***reflejo y contradicción***. Los conceptos más significativos emanados de los antes mencionados, que caracterizan el proceso de la actividad del hombre son las categorías de la teoría del conocimiento ***creatividad, problema e hipótesis***, las que forman parte de la didáctica tradicional. Estos conceptos son al mismo tiempo psicológicos, reflejan las particularidades de la actividad mental del ser humano.

Los autores cubanos, Campistrous, L. y C. Rizo, (1996), plantean que problema es una situación nueva que promueve la reflexión; el esfuerzo intelectual; se busca un resultado a partir de ciertos datos.

Según Labarrere, A. (1988), es toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla

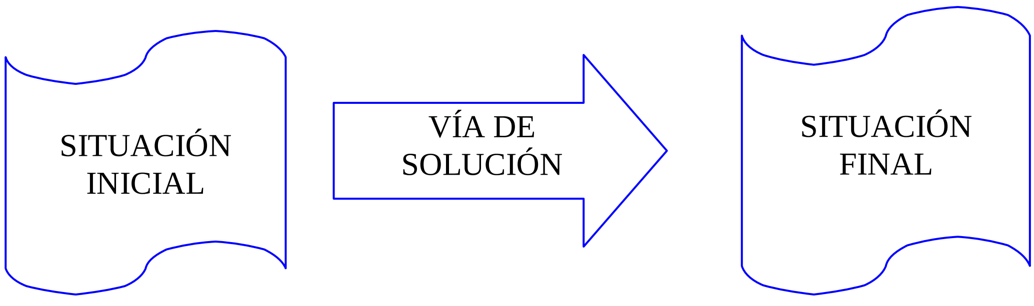
En todo ejercicio matemático podemos distinguir tres componentes:

Una situación inicial y una exigencia que obliga a transformarlo, la vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida; cuando es conocida deje de ser un problema, así lo abordan Campistrous, L. y C. Rizo, (1996).

La palabra problema, de acuerdo con Davidson, L. J. y otros, (1987), se usa en el lenguaje común en su más amplia acepción, es decir, aquella en la que se expone una situación de la cual se busca un resultado a partir de ciertos datos. Para el profesor de Matemática esta palabra ha de tener un significado más preciso; un problema representará una verdadera situación nueva.

Sin dudas en un problema se juntan elementos muy valiosos para el desarrollo del pensamiento lógico y la actividad creadora del hombre: la propia ***estructura del material*** presentado, el contacto con ***el entorno y la práctica*** cotidiana y la aplicación del ***contenido matemático*** para la solución constituyen una trilogía, nada despreciable por todo buen educador. Si a estas premisas se le añade un adecuado manejo emocional, favorable al aprendizaje y la actuación voluntaria, augura un resultado muy positivo.

Luego de las definiciones anteriores se considera útil presentar a los estudiantes y docentes que se inician en estas prácticas, un esquema como el siguiente;



Se comparten los criterios dados por los autores mencionados, pero es importante destacar estos tres elementos pues de ellos dependen las definiciones de ejercicio formal y demostraciones, además de la de problema.

El **ejercicio formal** es aquel donde se aprecia una situación inicial y es evidente la vía de solución, quedando solamente como incógnita el resultado final, en este tipo de actividad, solo se desconoce uno de los tres elementos que hemos escogido para la clasificación. Como ejemplo podemos citar:

Calcule

120: 7

Como situación inicial se dan dos cantidades y se expresa la operación que habrá que realizar para encontrar el resultado final.

La demostración por su parte será aquella en la que se ofrece la situación inicial y la final y se desconoce la vía de solución.

Ejemplo

Hoy es sábado, demuestre que dentro de 120 días será domingo.

En este caso se conoce la situación inicial que es el dato de que es sábado y se dan los días que deben transcurrir para que sea domingo, al estudiante le queda, buscar una vía para demostrar eso.

Ya se explicó que el problema exige mucho más, por ofrecer solo la situación inicial y el estudiante tiene que encontrar la vía y la situación final.

Un ejemplo pudiera ser.

Si hoy es sábado. ¿Qué día de la semana será dentro de 120 días?

En este caso no se conoce la situación final, que es el día de la semana (domingo), ni la forma para llegar a ese resultado.

<u>Otros ejemplos</u>

Ejercicios formales.

1- Calcula la integral

$$\int (X^{3} + e^{3X} + X^{-1} – \text{senx})\, dx$$

2- Hallar las derivadas parciales de segundo orden

$$Z = Y^{2} e^{X} + X^{2} Y^{2} + 1$$

En ambos ejercicios se tiene la situación inicial y es evidente la vía de solución.

Demostraciones.

1- Si $y = e^{4x} + 2\,e^{-x}$

Demuestre que se cumple la siguiente identidad

$Y''' - 13\,y' - 12\,y = 0$

2- Dada la igualdad

$$\frac{A^2 + \cos 2x}{sen 2x} = A \cot x$$

Demuestre que para A= 1, la igualdad que se obtiene es una identidad para todos los valores admisibles de la variable.

Obsérvese que en ambos casos se ofrece la situación inicial y final, sólo se desconoce la vía de solución.

Problemas

1- Hallar el máximo volumen de una caja paralelepípeda, sin tapa superior, cuya área total es de 192 m^2

2- En un cultivo de bacterias que se reproducen por bipartición cada hora, había inicialmente 400 de ellas; si el número total al cabo de X horas está dado por la función $f(x) = 400 \cdot 2^x$

Determine el tiempo que debe transcurrir para que existan 12800 bacterias

1.2 . TIPOS DE PROBLEMAS

Según criterios de Hernández, A. G. y A. M. Rojas, (1975), los problemas están determinados por el número de operaciones que requieran y por la relación entre ellas. Desde ese punto de vista se pueden clasificar los problemas en la forma siguiente:

Problemas simples (una sola operación)

Problemas compuestos (más de una operación) { **Independientes.** / **Dependientes**

Ejemplo de problema compuesto dependiente

A la salida de una escuela, la mitad de los alumnos ha tomado dirección Este, la tercera parte de los que quedaban dirección Oeste; la cuarta parte de los alumnos al Norte, y 25 han quedado en la escuela. ¿Cuál es la matricula de la escuela si se sabe que ese día los ausentes eran los $^{2}/_{17}$ de la matricula?

Presentes ese día X

Matricula de la escuela M

Este $^{X}/_{2}$

Oeste $^{X}/_{6}$

Norte $^{X}/_{4}$

Quedan en la escuela 25 alumnos

Conduce a la ecuación: $^{X}/_{2} + ^{X}/_{6} + ^{X}/_{4} + 25 = X$

Presentes ese día X = 300 alumnos

Ausentes son $^{2}/_{17}$ de la matricula, entonces los presentes serán $^{15}/_{17}$, de la propia matricula

Basta encontrar de qué número es 300, los $^{15}/_{17}$.

$^{15}/_{17} \cdot M = 300$

$M = 340$

La matricula de la escuela es de 340 alumnos

Un breve análisis nos conduce a que este problema es **compuesto** porque en el intervienen varias operaciones y es **dependiente** porque necesitamos hallar primero los presentes ese día para luego encontrar la matricula de la escuela.

Un problema compuesto **independiente** pudiera ser:

Un almacén de forma semiesférica que tiene un radio de 10 $\sqrt{5}$ m. hallar el área del terreno que está ocupando y su volumen.

En este caso el cálculo del área no depende del volumen y viceversa, por lo que son operaciones **totalmente independientes**

Esta clasificación no es la única, hay autores que los clasifican atendiendo a otros criterios.

Véase la clasificación siguiente:

- Problemas de un paso y de más de un paso.

De este aspecto no se pondrán ejemplos aquí pues son válidos otros ya tratados.

- Problemas con datos innecesarios.

Como ejemplo se verá el problema que sigue a continuación

Todos los estudiantes del décimo grado de mi centro participaron en las BET, durante 15 días, de total de alumnos $^2/_7$ trabajaron en una industria. El 80 % del resto en un organopónico y los 19 restantes, integraron la brigada para la reparación de la escuela.

¿Cuál es la matricula de décimo grado en este centro?

Se puede apreciar que el dato de 15 días no se utiliza, es innecesario

- Problemas sin números

Son aquellos en los que se aprecian las mismas condiciones que el resto de los problemas (hay una situación inicial, no se conocen la vía de solución ni la situación final), pero sin ofrecer datos numéricos.

Se proponen ahora algunos ejemplos.

1. **Si se sabe el número de filas de un aula y las sillas que tiene cada fila ¿Cómo se puede saber el número de sillas del aula?**
2. **Si se sabe el precio total de varias camisas del mismo tipo ¿Cómo saber el precio de cada camisa?**
3. **Se conoce que para confeccionar un libro se utilizaron p cifras básicas ¿Cómo pudo saber cuántas páginas tiene el libro?**
4. **si conozco la edad actual de una persona ¿Cómo conocer?**

La edad dentro de x años

La edad hace x años.

Este tipo de problema no es muy usado por los docentes en sus clases y tareas, perdiéndose aquí la posibilidad de que los estudiantes se dirijan a los procedimientos de solución de una forma diferente, demostrando haber comprendido el texto y las operaciones que deben intervenir. Precisamente la ausencia de los datos favorece su razonamiento lógico y frenan un poco la tendencia a la ejecución que padecen los estudiantes.

En un experimento realizado en una escuela primaria se les propuso a un grupo de alumnos un problema en el que se expresaba:

Si un campesino tiene 125 carneros y 5 perros. ¿Cuál será la edad del campesino?

Los alumnos luego de pensar unos breves minutos, comenzaron a trabajar, sólo una niña del aula no lo hizo.

Al comenzar el análisis del trabajo realizado la doctora interroga a los alumnos acerca de las respuestas y sus razonamientos, fueron sorprendentes los resultados cuando la mayoría del aula realizó una operación en busca de un número, sin previo análisis de lo que se da y lo que se pide, demostrándose la tendencia a la ejecución que se refería anteriormente. Los alumnos redujeron el problema a la realización de operaciones de resta, suma y división, es decir hallaron una cantidad como resultado de realizar un cálculo, en el debate se supo que no hicieron la multiplicación por que el número sería muy grande y una persona no puede vivir tantos años, pero las otras tres le conducía a una cantidad más pequeña y si las aceptaron, obviando todas las otras condiciones.

- Problemas con datos fuera del enunciado

Como se puede inferir en este tipo de problemas no aparece en el enunciado un dato que resulta necesario para su solución y que hay que buscar en otra fuente o tal vez debe conocerse de memoria.

Un ejemplo puede ser

Si una sortija de 1,25 cm^3 de volumen pesa 48, 25 dg

¿Será de oro?

Cómo saber si es de oro una sortija de la cual conocemos su volumen y su peso, ¿Qué relación se puede establecer entre en volumen y el peso de un cuerpo?, claro que esto nos conduce al peso específico.

¿Qué es el peso específico?

Es el peso, generalmente en gramos, que posee un cuerpo por cada cm^3 de volumen, pueden tomarse otras unidades pero estas están convenidas a nivel internacional.

Ejemplo

El peso específico del mármol es de 2,7 $g/cm^{3;}$ esto equivale a decir que cada cm^3 de mármol pesa 2,7 g.

Existen tablas de peso específico, donde se expresa numéricamente el valor de determinados materiales o elementos: así podemos saber el peso específico del oro, la plata, el cobre, bronce etc.

Cómo resolver el problema anterior usando esta tabla

Si se convierten los 48,25 dg en gramos serán 4, 825 g

Se tiene entonces $P_e = \frac{P}{V} = \frac{4{,}825g}{1{,}25cm^3} = 3{,}85\ g/cm^3$

Al comparar con el peso específico del oro que es de 19,3 g/cm^3

Se llega a la conclusión de que la sortija no es de oro

Un segundo ejemplo

Se sabe que un cuerpo de 10 cm^3 de volumen pesa 25g ¿De qué material está hecho?

Aquí el procedimiento es similar

Se calcula el peso específico y se busca en la tabla de pesos específicos a que material corresponde

Un tercer ejemplo

En cierto lugar se escucha una descarga eléctrica producida por un rayo, seis segundos después de la caída del mismo. ¿A qué distancia de dicho lugar cayó el rayo?

En este caso será necesario conocer la velocidad del sonido que se puede saber de memoria o consultar otra fuente.

Al hablar de la clasificación de problemas se tienen muy diversos criterios que van desde los contenidos que sirven para la modelación de su solución, la forma de plantearlos en un texto o simplemente donde lo que predomina esencialmente, no es el texto sino un esquema o situación gráfica, veamos este propuesto por Palacio, J. (2003)

Coloca los números que faltan

				8				
			10		**12**			
		13				**15**		
	15						**19**	
¿?								**¿?**

Como se aprecia en este problema el texto es muy poco y no aporta mucho a la solución donde los números indican una ley de formación que se necesita descubrir y aplicar para resolver la situación planteada.

Otro ejemplo de ello es el problema que se plantea ahora.

Esteban, Manolo y Enrique se ponen a contar de tres en tres, diciendo cada uno, un número por su turno: Esteban dice 3, manolo dijo 6 y Enrique dijo 9… Y así sucesivamente. ¿Quién dijo 450?

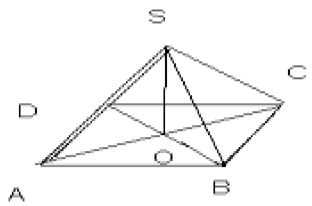
Otras situaciones que se presentan en los problemas es el hecho de esconder datos, los cuales pueden hallarse mediante cálculos o deducciones derivadas de otros elementos que se dan en el problema. A veces hay datos que sobran.

El uso de la terminología de la asignatura o un lenguaje poco conocido por el estudiante, sin dudas complicará más la solución al no poder comprender algunas ideas o situaciones.

Es una característica de los problemas matemáticos que en ocasiones nos parece ser de un contenido y realmente se modela con otros, por ejemplo, problemas geométricos que se modelan con un contenido algebraico, trigonométrico, geométrico o mixto.

Hernández, J. (2002), presenta problemas de geometría del espacio en su obra ¿Cómo estás en Matemática?, donde se recoge desde la geometría, otros contenidos de la enseñanza preuniversitaria que representan objetivos a evaluar en los exámenes de ingreso a la Educación Superior.

Algunos ejemplos de esto se aprecian a continuación.



De una pirámide regular de base cuadrada, se conoce que su arista AB de la base es 4,0 cm. mayor que su altura OS y el volumen es 0,2 dm^{3}.

Calcula el perímetro de su base.

Si consideramos que la altura de la pirámide está dada por x, entonces la arita de la base se podrá escribir como X + 4 (trabajando en cm.). En la fórmula del volumen se pueden hacer las sustituciones pertinentes y aparece la ecuación que necesitamos (0,2 dm^3 = 200 $cm^{3)}$

$V = \frac{A_B.h}{3} = \frac{(X+4)^2 .X}{3}$, o sea 200.3 = $(X + 4)^2$. X

Donde 600= (X^2 + 8X + 16). X que nos conduce a una ecuación de tercer grado dada por $X^3 + 8X^2 + 16X - 600 = 0$ y que admite la descomposición en factores, aplicando la división sintética, $(X - 6)(X^2 + 14X + 100) = 0$. Llegamos a que únicamente X = 6 pues $X^2 + 14X + 100 = 0$ no tiene soluciones reales pues su discriminante D = -- 204 < 0. Ya podemos decir que h = 6 cm. y que a= 10 cm.

El perímetro de su base es entonces P = 4.10 = 40 cm.

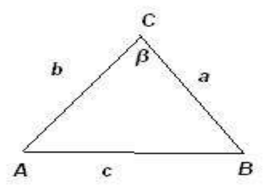
Ejercicios geométricos modelados a partir de la trigonometría

La trigonometría facilita en ocasiones la solución de problemas, pues con una mínima cantidad de datos, nos permite la búsqueda de otros necesarios para la solución; resulta sumamente importante la ley de los cosenos, que constituye una generalización del teorema de Pitágoras, por lo que se abre ahora múltiple posibilidades por cuanto se puede trabajar con cualquier tipo de triangulo (no sólo el rectángulo como con el teorema de Pitágoras) y buscar diferentes elementos de estos, con seguridad y precisión.

Seguidamente se analiza un ejemplo de problema relacionado con un triangulo cualquiera, donde se busca un ángulo y sólo se dan relaciones entre sus lados por lo que se pudiera modelar haciendo uso de la trigonometría.

En el triángulo ABC se cumple que (a+ b+ c) (a+ b –C) = 3ab

Calcular β



Se trata de encontrar un ángulo de un triangulo cualquiera, donde no se cuenta con datos numéricos, sólo relaciones entre sus lados.

Esto nos hace pensar en la aplicación de la ley de los cosenos por relacionar esta los tres lados y un ángulo de un triángulo cualquiera:

En este caso pudiera ser $c^2 = a^2 + b^2 – 2abcos\ \beta$ (I)

Trabajando en la relación dada

Se obtiene la igualdad $a^2 + 2\ a\ b + b^2 – c^2 = 3\ a\ b$

En la igualdad aparecen los lados del triángulo ABC, elevados al cuadrado, lo que pude sugerir, despejar c^2 , y se llega a la igualdad $a^2 + 2\ a\ b + b^2 – 3\ a\ b = c^2$

Y reduciendo términos semejantes resulta $a^2 – ab + b^2 = c^2$ (II)

Igualando las relaciones I y II se obtiene

$a^2 + b^2 – 2\ a\ b\ \cos\beta = a^2 – ab + b^2$

Cancelando

--2 a b cos β = – ab

$$\text{Cos}\ \beta = \frac{-ab}{-2ab} = \frac{1}{2}$$

¿Cuál es el ángulo cuyo coseno es $1/2$?
Según las condiciones del problema será 60º

CAPÍTULO II: IMPORTANCIA DE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Los componentes fundamentales de la Enseñanza de la Matemática son el instructivo; el educativo, el desarrollador y de control, las funciones básicas de los ejercicios se corresponden con estos componentes.

- Función instructiva:

Se refiere a los conocimientos, capacidades y habilidades que son necesarios desarrollar.

- Función educativa:

Está relacionada con el desarrollo de la concepción científica del mundo, las cualidades de la personalidad y otras.

- Función desarrolladora:

Está encaminada a desarrollar el pensamiento de los estudiantes, pensamiento científico teórico; dotarlos de métodos efectivos de la actividad intelectual.
Está encaminada a desarrollar el pensamiento de los estudiantes, pensamiento científico teórico; dotarlos de métodos efectivos de la actividad intelectual.

- Función control:

Se refiere a los ejercicios y problemas, como instrumentos de medición del aprendizaje de la Matemática, según la etapa del proceso de aprendizaje de que se trate.

Palacio, J. (2003), se refiere a diferentes ventajas de la clase concebida a través de problemas:

- Aumenta el interés de los estudiantes al ver la inmediata aplicación práctica de lo que estudian.
- El estudiante deja de ser un reproductor de las ideas exclusivas del profesor y se convierte en un protagonista de la actividad, con una activa participación.
- Los contenidos no se olvidan con facilidad, pues la mayoría de los problemas, principalmente los que tienen textos, permiten asociar el contenido matemático con los intereses de la comunidad y del estudiante en particular.
- Pueden formularse nuevas preguntas sobre la situación resuelta, aspecto tan importante como la propia resolución de problemas.

- Ayuda a desarrollar la expresión oral y por tanto facilita el poder de comunicación, desarrollando y enriqueciendo el idioma.
- Contribuye a dar respuesta a intereses e inquietudes de los estudiantes, si se plantean en correspondencia con estas.
- Contribuyen a eliminar creencias negativas respeto a la capacidad del estudiante hacia la Matemática.

No causa el mismo efecto un ejercicio formal, tal vez carente de un texto y por tanto de una situación que puede incluso ser real, cercano al entorno del estudiante, que un problema que cumpla todas esas características.

No pocos docentes subestiman las capacidades y posibilidades de sus discípulos para resolver problemas y por tanto limitan la cantidad de ejercicios de este tipo y en otros casos se analiza solo una vía de los que se proponen, lo que hace al estudiante poco protagónico y se crean además falsos criterios acerca de la imposibilidad de resolución de esta forma de fijación y profundización, para un número nada despreciable de educandos. Resultan realmente ilimitadas las posibilidades de participación activa que ofrece el proceso total de resolución de problemas, desde el punto de vista de los análisis individuales y de los debates colectivos durante la solución y retrospectiva.

El vínculo de los problemas con las diversas actividades sociales que realiza el hombre en su cotidianidad, es realmente muy abarcador, lo que favorece el conocimiento adicional de aspectos importantes para la vida, apoya a otras ciencias demostrando su validez desde el punto de vista práctico y científico.

La propia resolución de un problema no concluye con el hallazgo de la respuesta que se pide, sino, bien dirigido por el docente, crea nuevas expectativas, nuevos problemas que pueden ser sueltos o formulados por los alumnos y en algunos casos son motivación de investigaciones muy interesantes.

La comprensión del enunciado del problema implica un estudio semántico y gramatical de su texto: significados, palabras claves, uso adecuado de los signos de puntuación, nuevos vocablos, en fin un aporte indiscutible a la calidad de la comunicación de los estudiantes, y si a ello se une los debates acerca de la actividad, la contribución se incrementa.

El sistema de educación cubano concede gran importancia a la unidad de lo instructivo y lo educativo. Está demostrado que para avanzar en ambos sentidos se precisa conocer profundamente a los estudiantes, donde el poseer una caracterización que comprenda lo académico, biológico, psicológico, comunitario, familiar y cualquier aspecto que se considere útil, facilita la elaboración y ejecución de una estrategia que permita alcanzar una adecuada educación e instrucción trabajando de forma individualizada.

En tal sentido Martínez, A. y otros, (1989), plantean que al caracterizar a nuestros alumnos a fin de atender a sus diferencias individuales, resulta imprescindible remitirse al conocimiento de las regularidades distintivas de la edad de que se trate, ya que ello sirve de fondo, de base para nuestras observaciones y análisis. Por otra parte le da una dirección a nuestro trabajo, ya que las regularidades de una etapa determinada del desarrollo no deben ser interpretadas como las características específicas que deben tener los sujetos de por sí, sino como algo que puede y debe lograrse en ellos por la acción positiva de las condiciones sociales de vida y educación que reciben a partir de sus condiciones internas y de experiencia anterior.

Cumpliendo con esta premisa, cada docente desde la asignatura que imparte, instruye y educa.

Acerca de estos términos el apóstol de la intendencia de Cuba, (Martí, J. 1975) expresó

"Instrucción no es lo mismo que educación: aquella se refiere al pensamiento, y ésta precisamente a los sentimientos. Sin embargo no hay buena educación sin instrucción, las cualidades morales suben de precio cuando están realzadas por las cualidades inteligentes".

La clase y la asignatura en particular pueden aportar elementos importantes, algunas veces llamados colaterales, que enriquecen la cultura general integral y por tanto la educación de las nuevas generaciones y que se identifican entre otros con los siguientes ejes temáticos: inculcar una conciencia de ahorro por encima de una educación de consumismo, la aplicación conciente y consecuente de las normas de cortesía y convivencia social, el conocimiento de la actualidad nacional e internacional como necesidad para conocer e interpretar el mundo donde se vive, conocimiento de la cultura jurídica más elemental que permita conocer los deberes y derechos como ciudadano cubano y universal y dónde poder ir a buscar más información en un momento dado, educación económica a escala nacional e internacional para evaluar como se proyectará el futuro en determinados países y en Cuba, pues ahora todos los fenómenos foráneos tienen su repercusión a escala global, crear hábitos correctos de higiene, alimentación, sexo seguro y sexualidad en sentido más amplio, de estudio individual y/o colectivo, defensa del medio ambiente en la práctica y en las ideas.

Igualmente importante es el conocimiento de la Historia de Cuba, un uso correcto del idioma tanto oral como escrito y la explotación consecuente de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones entre otros.

La salida en la clase de estos elementos, resulta más fácil en algunas asignaturas que en otras. En el caso concreto de la Matemática, se aprecian limitaciones pues no siempre los contenidos se adecuan para garantizar un tratamiento a estos temas, sin que resulte un parche o salto en la continuidad lógica del conocimiento matemático que se está impartiendo, pero es precisamente **el problema** quien ayuda a resolver tal situación, pues es la forma de fijación del contenido que más aporta en este sentido, porque se describe una actividad humana que lleva un mensaje de alto valor formativo, siempre que el docente se trace esto como una meta que no puede desperdiciar.

Mediante la resolución de problemas matemáticos se logra consolidar otras asignaturas como Física, Química, Biología, Educación Laboral, entre otras.

El aporte que realizan los problemas matemáticos al desarrollo del pensamiento lógico e intelectual en general es sin dudas ilimitado, acerca la problemática de la necesidad de enseñar al alumnos a pensar adecuadamente, Turner Martí, L. y J. A. Chávez, (1989), reconocen que “Aunque se seleccione racionalmente lo que el estudiante debe aprender, aunque se empleen los métodos y los medios más efectivos para hacer más rápido y sólido el aprendizaje, si no se enseña a los alumnos a aprender por sí mismo, al egresar estos de la escuela general o de un centro profesional de nivel medio o superior, al cabo de un año, aproximadamente, estarían incapacitados para ser eficientes en la solución de los problemas laborales que les rodean”

Es evidente que la falta de conocimientos de los estudiantes no depende de una sola causa, pero a juzgar por estos autores, “Ha existido en la práctica la supremacía incondicional del volumen de conocimientos sobre el desarrollo de capacidades mentales”.

Y continúan expresando, “Como ejemplo de esto, se puede apreciar que la propia Didáctica limitó su trabajo durante mucho tiempo a investigar unilateralmente la teoría de transmitir a los alumnos conclusiones preparadas por las ciencias (teoría de la asimilación del conocimiento por la memorización) y se mantuvo en estado embrionario la teoría de la asimilación, mediante la actividad mental independiente. Resultó casi no investigado el proceso de aprendizaje".

Plantean finalmente que, "En la actualidad (se observa en muchas clases en los cuarenta y cinco o cincuenta minutos de duración) la actividad intelectual del alumno se reduce, en la mayoría de los casos, a tomas de notas mecánicamente, que resumen las conclusiones presentadas por el maestro, o se dedica a tomar textualmente un dictado, a realizar algunos ejercicios en que se repiten los mismos pasos ya presentados, o al responder algunas preguntas que reproducen lo expresado por el profesor. Con esta actividad insuficiente, no hay inicio de aprendizaje real que pueda traducirse después en una búsqueda del libro de texto, en una motivación para profundizar y ampliar lo estudiado; no hay solidez en lo aprendido ni relaciones con los nuevos conocimientos, ni, por supuesto, se aprecia en los alumnos un pensamiento dialéctico y creador".

Refiriéndose a la importancia de la resolución de problemas (Silvestre, M. 1999), expresó "La generalidad de autores que han investigado el desarrollo intelectual, conceden una gran importancia a la solución de problemas. La contradicción que presenta el problema para el alumno, entre lo que conoce y lo que debe averiguar, implica el análisis, la reflexión, la consecuente formulación de suposiciones, la búsqueda y aplicación de estrategias de solución, la profundización en el conocimiento, su interconexión, lo cual deberá representar un esfuerzo mental sostenido, que estimule su propio desarrollo y facilite la interiorización de los procedimientos que emplea y su control.

La consolidación de los diferentes momentos a que se ha hecho referencia, va dirigida: a propiciar la integración de los elementos adquiridos del conocimiento en lo cual los ejercicios y problemas pueden ofrecer múltiples posibilidades; a la vinculación del conocimiento, de forma que se propicie la concatenación de unos conocimientos con otros.

CAPÍTULO III: LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

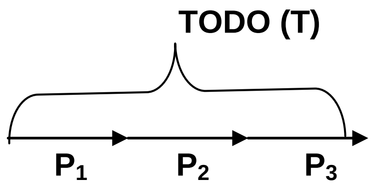
EL SIGNIFICADO DE LAS OPERACIONES

Se ha comprobado en la práctica la gran importancia que tiene en la resolución de problemas matemáticos, conocer los significados de las operaciones aritméticas, no solo para los llamados problemas aritméticos, sino para los geométricos y algebraicos.

El dominio de los significados de las operaciones aritméticas favorece la modelación de soluciones de problemas donde se usan términos como excede, cabe tantas veces en él, es una parte del total, le sobrepasa en, otras por solo citar algunas, y estas se pueden dar en problemas geométricos o algebraicos entre otros.

La comisión municipal de matemática del municipio Jesús Menéndez en las Tunas, aprobó el trabajo en todas las enseñanzas, de los significados de las operaciones aritméticas muchos años antes de que se incluyera en los programas de la asignatura, en la enseñanza primaria, pues se evidenció en este territorio esa necesidad urgente. Para preparar a los alumnos y se adoptó como modelo los significados tratados por Campistrous Pérez, L. y C. Rizo Cabrera, (2002), los que se presentan a continuación.

Se asume como premisa la relación ***parte todo***. Esta es muy elemental y relaciona al ***conjunto completo o todo*** con sus subconjuntos o partes; además establecida entre números o cantidades, tienen algunas propiedades como:



- ✓ La descomposición del todo da lugar a dos o más partes
- ✓ La reunión de todas las partes da como resultado el todo.
- ✓ Cada parte es menor que el todo

En el dominio de los fraccionarios es posible que suceda que la parte sea mayor que el todo, por lo que los conceptos de parte y todo son relativos, lo que en una ocasión es parte en otra puede ser el todo o viceversa.

Aunque el autor plantea la utilidad del significado de las operaciones aritméticas solo para problemas de este tipo, la práctica ha demostrado su factibilidad en otros tipos de problemas tales como algebraicos y hasta geométricos, como se expresó anteriormente.

<u>Significados</u>

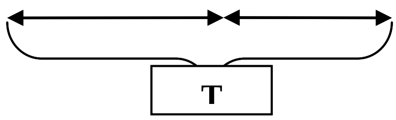
Adición
1-Dadas las partes hallar el todo

$\mathbf{P_1 + P_2 = T}$

Sustracción
1-Dado el todo y una parte hallar la otra parte.

$\mathbf{T — P_2 = P_1}$

$\mathbf{T — P_1 = P_2}$



La modelación es la misma, lo que cambia es lo que se quiere hallar.

Ejemplo

- Mercedes tiene un álbum con 50 sellos y su hermana le regala 30 sellos. ¿Cuántos sellos tiene mercedes, ahora?

Aquí se busca el todo cuando se conocen sus partes integrantes.

- Héctor tiene 40 naranjas. Si le da 20 naranjas a Gisela, ¿Cuántas le quedan a Héctor?

En este se conoce el todo y una parte, se busca la otra parte.

Adición

- Dada una parte y el exceso de otra sobre ella, hallar la otra parte

Sustracción

- Hallar el exceso de una parte sobre otra, o dada una parte y su exceso sobre otra, hallar la otra parte

$$P_2 + E = P_1$$

En un ómnibus viajan 18 trabajadores. En otro viajan dos trabajadores más que en el primero: ¿Cuántos trabajadores viajan en este último ómnibus?

$$P_1 - P_2 = E$$

$$P_1 - E = P_2$$

Osvaldo y Eduardo realizan una competencia. Osvaldo camina 50 m y Eduardo 40 m. ¿Cuántos metros más camina Osvaldo que Eduardo?

Arturo tiene una caja con 130 bolas. Él tiene 80 bolas más que Luís. ¿Cuántas tiene Luís?

Multiplicación y división

Multiplicación

- ❖ Reunión de partes iguales para hallar el todo (suma de sumandos iguales)
- ❖ Dada la cantidad de partes iguales y el contenido de cada parte, hallar el todo.

A. B = T

En el aula, María, Pepe y Luisa tienen 7 años cada uno. ¿Cuántos años tienen en total?

Marta tiene dos búcaros. Ella colocó 5 flores en cada uno. ¿Cuántas flores colocó Marta?

- ❖ Hallar múltiplos

En un taller hay 10 máquinas. En otro taller hay el doble. ¿Cuántas máquinas hay en le segundo?

División

- ❖ Repartir en partes iguales el todo (hallar el contenido de cada parte)

T: a = b

- ❖ Dado el todo y el contenido de cada parte, hallar la cantidad de partes (cuántas veces está una parte contenida en le todo)

T: B = A

A un cumpleaños fueron invitados 10 niños. Se prepararon 20 lápices para repartirlos por igual a los niños. ¿Cuántos lápices recibió cada uno?

Se tienen 20 libretas y se le quiere dar dos a cada niño. ¿Para cuántos niños alcanzan?

- ❖ Hallar una parte alícuota.

(Una unidad fraccionaria: mitad, décima parte, etc.)

En una competencia de matemática deben calcularse 10 ejercicios. Si falta por calcular la quinta parte de ellos. ¿Cuántos faltan por calcular?

Hay otros significados que no están relacionados con la relación parte todo.

- ❖ Significado de área

- ❖ Restas sucesivas

10- 2= 8

8 – 2 = 6

6 – 2 = 4

4 – 2 = 2

Largo por ancho
A.B = área del rectángulo

- Conteo (diferentes maneras de contar algo)

Se cuentan grupos iguales, y se cuentan la cantidad de grupos.

&&& &&& &&& &&& 4 grupos de a tres nos da 12.

¿Cuántos mosaicos de 1 dm^2 se necesitan para cubrir un piso rectangular cuyas dimensiones son 3 m de largo y 4 m de ancho?

Tengo 4 blusas y dos sayas. ¿Cuántas combinaciones diferentes puedo formar con ellas?

2 –2 = 0

¿Cuántas veces se ha restado el número dos?

Cinco veces

Se averiguó las veces que 2 está contenido en 10.

Es decir 10 : 2 = 5

Un camión cargado con 320 cajas de naranjas debe dejar 40 cajas en cada una de las escuelas de la enseñanza primaria, hasta que quede vacío. ¿Cuántas escuelas reciben naranjas de ese camión?

La potenciación

Es una multiplicación abreviada donde los factores son iguales, es hallar un producto de n factores, todos iguales.

$2.2.2.2.2.2.2.2.2.2. = 2^{10}$

$3^4 = 81$

El número 3 sería la base y es el que se repite como factor, el 4 se llama exponente y es el que indica las veces que se repite la base y el 81 es la potencia, que será el resultado de haber multiplicado el 3 (base), 4 veces (exponente).

Es decir, en la operación de potenciación: se conoce la base y el exponente y se busca la potencia.

Radicación

Partiendo de la definición anterior: ¿Cuál es la base si el exponente es 4 y la potencia es 81?

Esto conlleva a la expresión $X^4 = 81$, entonces $X = \sqrt[4]{81} = 3$

Porque $3^4 = 81$

Logaritmación

Si se parte de las dos definiciones anteriores: en la potenciación se **busca la potencia,** cundo se conocen la base y el exponente, en la radicación se debe **hallar la base** conocidas la potencia y el exponente, ya se puede inferir que en la logaritmación se debe **encontrar el exponente** si se sabe cuál la base y la potencia, se tiene así la otra operación inversa de la potenciación.

$\mathrm{Log}_3\ 81 = 4$

3.2 IMPORTANCIA DE LAS PALABRAS CLAVES.

Frecuentemente se repiten en los textos de una cantidad significativamente grande problemas, términos que constituyen palabras claves para la comprensión y solución de los mismos, a continuación se ilustra en una tabla, los más usados, aclarando que es muy importante verlos dentro de la situación que se describe, no se puede actuar sin previos análisis, pues sus significados pudieran cambiar.

PALABRAS O FRASES USADAS	INTERPRETACIONES QUE PUDIERAN HACERSE, SEGÚN LOS SIGNIFICADOS DE LAS OPERACIONES	EJEMPLOS

Aumentado en; agregar; totalizar; adicionar; recopilar; costo total	Puede dar idea de adición	• La edad de Juan, es la de Pedro, aumentada en 15 años. • La brigada No 1 cortó 2500 @ de caña y la No 2, logró derribar 3750 @. Un estudiante tiene la tarea de totalizar las dos cantidades. ¿Cuántas arrobas cortaron ambas?
Disminuido en; diferentes entre sí; excede a; le sobrepasa en; es mayor en; es menor en.	Puede dar idea de sustracción	• La edad de Juan, es la de Pedro, disminuida en 15 años. • La edad de Pedro y la de Juan son diferentes en 15 años. ¿Cuál es la edad de cada uno si Pedro, que es el mayor, tiene 40 años?
Duplo; triplo, cuádruplo; quíntuplo; séxtuplo; y otros.	Puede dar idea de multiplicación	• Entre Ana y Raúl han resuelto 40 problemas. El triplo de los problemas resuelto por Raúl excede en 10 al duplo de los resueltos por Ana. ¿Cuántos problemas más resolvió Ana que Raúl?
Mitad, tercera parte, razón entre a y b, es parte de, distribuir por igual, averiguar las veces que está contenido en otra cantidad, es el cociente de…	Puede dar idea de división	• La edad de Juan y la de Pedro están en la razón 2 es a 3 • Se debe repartir 350 naranjas entre 10 personas
Maximizar, minimizar, obtener extremos, hacer máxima ganancia, mínimos costos, Elasticidad	Derivación, cálculos de máximos y mínimos	• Una firma tiene como función ganancia $G=800X—X^2–XY—Y^2$ +460 Y. ¿Cuál es la mayor ganancia

		posible?
Cuando da idea de una cantidad X que contiene en sí mismo otra cantidad X de otros elementos, y cada uno de estos a su vez contiene una cantidad X de elementos, y así sucesivamente.	Puede dar idea de potenciación	• Una granja avícola tiene 4 naves, cada nave, cuatro hileras de jaulas y cada jaula 4 pollos. ¿Cuántos pollos hay en la granja?

Un aspecto a tener muy en cuenta para la resolución de problema es el hecho de poseer dominio del contenido matemático que se ha recibido, pues esto constituye el soporte material de la modelación de los mismos, sin esta premisa el estudiante se encontrará sin las armas que necesita y no podrá proceder aun cuando comprenda excelentemente el enunciado.

3.3 PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Al resolver problemas geométricos, plantea Gúsiev, V. [et alt], (1989), por regla se emplean tres métodos fundamentales: **geométricos** (la afirmación requerida se deduce con ayuda de razonamientos lógicos de una serie de teoremas conocidos); **algebraicos** (la demostración de la afirmación o bien el hallazgo de los valores que se determinan, se realiza con el cálculo directo, sobre la base de diversas dependencias entre las magnitudes geométricas, con ayuda de la compasión de ecuaciones o sistemas de éstas); **mixtos** (en ciertas etapas la resolución se lleva a cabo por métodos geométricos, en otras, algebraicas)

Independientemente de la vía elegida para la resolución, el éxito de su utilización, como es natural, depende del conocimiento de los teoremas, y otros contenidos geométricos, así como el hábito de su aplicación. Entre las condiciones previas necesaria para enfrentar con resultados positivos la resolución de problemas en esta área de la Matemática, se encuentra el dominio por parte de los estudiantes de las características de las figuras planas donde pueden identificarse segmentos y ángulos iguales, los que a menudo constituyen la base del cálculo geométrico.

segmentos iguales	**ángulos iguales**

Lados de un triángulo equilátero	Ángulos de un triangulo equilátero
Lados opuestos a la base de un triángulo isósceles.	Ángulos de la base de un triángulo isósceles
Lados de un cuadrado	Ángulos de un cuadrado
Lados opuestos de todo paralelogramo en general	Ángulos opuestos de un paralelogramo.
Lados de un trapecio isósceles.	Ángulos de la base de un trapecio isósceles
Cuerdas de la circunferencia, inscritas en un mismo arco o en arcos iguales.	Ángulos inscritos sobre un mismo arco o arcos iguales.
Segmentos de una cuerda dividida por un radio o diámetro perpendicular a ella.	Ángulos que se obtienen al trazar una bisectriz a otro.
Segmentos que se obtienen al trazar una mediatriz a otro.	Ángulos alternos o correspondientes entre paralelas.
Las diagonales de un cuadrado	Ángulos opuestos por el vértice.
Radios de una circunferencia o circunferencias iguales.	
Otros ejemplos	

Sirva este cuadro para dar una idea a los docentes de resúmenes que pueden elaborarse a los estudiantes o pedirles que lo realicen ellos mismos a partir de la búsqueda en las distintas fuentes, lo que permitirá reconocer elementos iguales, que constituye la base de un gran número de problemas geométricos a los que deben enfrentarse en las diferentes enseñanzas y en la vida.

Paralelamente al resumen, se precisa la identificación de los elementos geométricos, en cada una de las figuras correspondientes.

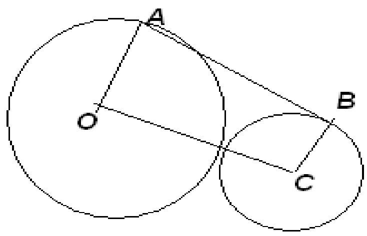
Un problema cuya solución conduce a la utilización del método **geométrico**.

Dadas las circunferencias de centros O y C; tangentes exteriores; con radios de 12 cm. y 4 cm. respectivamente.

$\overline{AB}$ **Tangente común· Halle el área del cuadrilátero ABCO**

A

A



Este problema requiere de una construcción auxiliar (método muy usado en la geometría y sobre el cual el docente debe estar atento y entrenar a los alumnos en esta práctica); es decir en ocasiones se aprecia que los datos que se ofrecen no son suficientes y hay que sospechar la construcción de un elemento geométrico bien fundamentado y demostrado por los propios datos que se ofrecen.

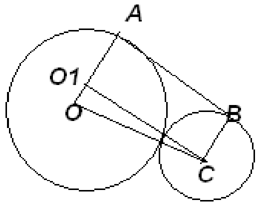
Trazando una paralela a AB se obtiene O_1 C

Se determina de esta manera un rectángulo y un triángulo rectángulo, CO_1 será cateto del triángulo y altura del trapecio ABCO; luego una vía puede ser buscar el cateto $CO_{1,}$ pues se conoce la hipotenusa y el otro cateto.

Luego de encontrado el segmento $CO_{1,}$ se puede proceder de dos maneras diferentes.

- Calcular el área del trapecio ABCO de forma directa, que es lo que se pide
- Hallando las áreas del triángulo y el rectángulo y adicionando ambas

En ambos casos hemos utilizados el método geométrico para la solución



Un ejemplo de problema con salida a una vía **algebraica** se analiza a continuación:

El perímetro de un triángulo es igual a 37 cm. La suma de las longitudes de los lados más pequeños excede en 7 cm a la del lado mayor; el lado mediano es igual

al lado menos aumentado en 2 cm. Halla la longitud de los lados del triángulo.

Se denotan las variables

X lado menor

Y lado mediano

Z lado mayor

En este caso puede o no realizarse una figura de análisis

Una solución puede ser a partir de modelar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables, como el que se presenta a continuación.

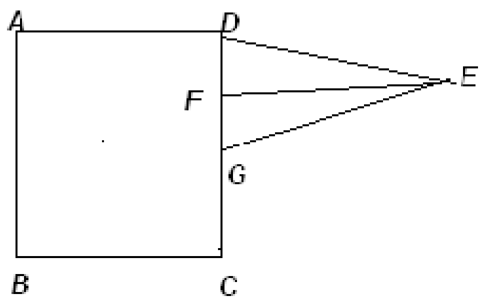
$X + Y + Z = 37$

$X + Y – 7 = Z$

$Y = X + 2$

Conduce a la solución X = 10 cm; Y = 12 cm ; Z = 15 cm.

A continuación se presenta un problema cuya solución se puede modelar por el método **mixto**



En la figura ABCD es un cuadrado, G es punto medio de DC, EF $\perp$ DC;

EF = 3 DG + 2 cm.; el área del polígono ABCGED es de 24 cm^2

Calcula la longitud del segmento DG.

Como se conoce al área del polígono ABCGED y este está formado por un cuadrado y un triángulo, se puede apoyar la solución en el área de cada uno; es importante expresar las dimensiones de cada uno en función de DG o de una variable convenida previamente.

Área del cuadrado ABCD + área del triángulo DEG = 24

Lado del cuadrado 2DG

Base del triángulo DG

Altura del triángulo EF = 3 DG + 2

De esta forma se llega a la ecuación

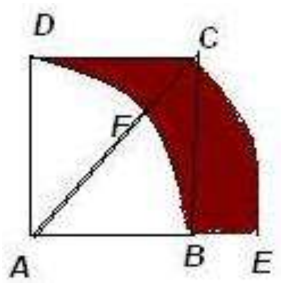
11 DG^2 + 2 DG – 48 = 0

(11 DG + 24) (DG – 2) = 0

DG = 2 DG= $\frac{-24}{11}$ esta solución se desprecia por ser negativa

Por lo que la respuesta es DG = 2,0 cm.

<u>Obsérvese la figura</u>



Es muy común resolver problemas geométricos en los que intervienen áreas sombreadas, en este ejercicio que presentamos a continuación se vinculan distintos contenidos geométricos y es necesario hacer razonamientos lógicos y ejercitar la observación. Es un ejemplo tomado de Matemática cuarto curso geometría del autor (Fiterre Riveras, I. 1955).

Haciendo centro en el vértice A del cuadrado ABCD y con radios respectivamente iguales a su lado y a su diagonal se trazan arcos DB y CE.

Si AB = 20 m. Halla el área de la superficie sombreada

Área del cuadrado= 20^2 = 400 m^2

AC = $\sqrt{AB^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{400+400}$ = $\sqrt{800}$ = 20 $\sqrt{2}$

Área del triangulo ACD = 200 m^2

Área del círculo de radio 20 m es 1256 m^2

Sector DFA es un octavo del área del círculo pues su ángulo central es de 45^o , es decir será de 157 m ^{2}

Entonces el área DFC es de 200 m^2 – 157 m^2 = 43 m ^{2}

Área del círculo de radio 20 $\sqrt{2}$ = ¶ (20 $\sqrt{2}$)^2 = 3,14. 400. 2 = 3,14. 800 = 2512 m^2

Área del sector circular de radio 20 $\sqrt{2}$ es un octavo de la del círculo por ser un ángulo de

45 ^{o} es de 314 m ^{2}

Si a este sector se le resta el sector AFB cuya área es la misma que la del sector DFA es

decir 157 m ^{2}, nos da como resultado 157 m ^{2}

Para hallar el área sombreada total puede hallarse ahora de dos formas diferentes

Primera forma: área de DFC + área de FCBE = 200 m ^{2}

Segunda forma: área de DFC + área de FBC + área de BEC = 200 m ^{2}

3.4 ACERCA DE LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Los problemas numéricos de máximos y mínimos resultan muy útiles en la práctica matemática y existen diversos métodos para su solución, se analizarán ahora algunas consideraciones acerca de un método poco usual en la enseñanza general en Cuba en los momentos actuales y que propone (González, M. O. 1973), cuando expresa que “El mínimo común múltiplo (m) de dos números a y b es igual al producto de estos números, dividido por el mcd del número M”

Simbólicamente

Sean a y b dos números naturales y m su mínimo común múltiplo, si el máximo común divisor es M.

Entonces se tiene: m = $\frac{a.b}{M}$

Esta relación puede ser utilizada en la resolución de problemas matemáticos como el que se analiza a continuación.

El máximo común divisor de dos números es 20 y el mínimo común múltiplo es 2880. Hallar los números sabiendo que son entre sí como 16 es a 9.

SOLUCIÓN

X ——— un número mcm ——— 2880

Y ——— otro número mcd ——— 20

$\frac{XY}{20} = 2880$ (I)

$\frac{X}{Y} = \frac{16}{9}$ (II)

Resolviendo el sistema

X Y = 57600 (I)

9 X = 16 Y (II)

Despejando X en la ecuación II

$X = \frac{16Y}{9}$

Sustituyendo en I

$\frac{16Y.Y}{9} = 57600$

$\frac{16y^2}{9} = 57600$

$16\,Y^2 = 5184400$ dividiendo por 16

$Y^2 = 32400$

$Y = \sqrt{32400} = 180$

X = 320

Los números son 320 y 180

CAPÍTULO IV: RESULTADOS DE UNA EXPERIENCIA

4.1 ¿QUÉ SIGNIFICA DOMINAR LA MATEMÁTICA?

Dominar la Matemática significa, en primera instancia poder resolver problemas, no solo problemas tipos, sino también problemas que exigen pensamiento independiente, sentido común, originalidad, inventiva.

La primera y más importante obligación del curso de Matemática en la escuela, consiste en subrayar el aspecto metodológico del proceso de solución de problemas.

En ocasiones los estudiantes poseen los conocimientos teóricos necesarios para resolver determinados ejercicios y no pueden realizarlos, motivado porque no son capaces de aplicar lo conocido a una situación dada, es decir poseen el **saber** pero no el **poder** matemático.

En investigación realizada en una secundaria básica del municipio Jesús Menéndez en Las Tunas, se alcanzaron los resultados siguientes.

Se aplican 4 instrumentos con el objetivo de comprobar los conocimientos de los estudiantes sobre un mismo contenido a diferentes niveles (reproductivo y productivo).

<u>Instrumento no 1</u>

1- Une con flechas lo dado en la columna izquierda con la fórmula correspondiente de la derecha.

Columna izquierda	**Columna derecha**
A)Área del cuadrado de lado a	1) A =**¶.r**$^{\mathbf{2}}$
	2) A = $\frac{a.b}{2}$
B)Área del círculo	
C) Área del semicírculo.	3) A = a.b
D) Área total de la esfera.	4) A = $\frac{A.\alpha}{A} = \frac{\alpha}{360^0}$
)Área de un triangulo rectángulo de catetos a y b.	5) A = $\pi.r^2$
F)Área del sector circular, conocidos A y α	6) A = 6. a^2

G) Área del rectángulo.

7) A = $\frac{(a+b).h}{2}$

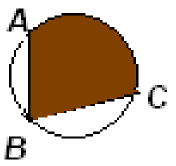
8) A = $\frac{\pi.r^2}{2}$

Instrumento no 2

Una esfera maciza de volumen igual a 113,04 cm^3 y radio r=3 cm., se desea dividir en dos semiesferas y pintar una completamente ¿Qué cantidad de superficie debe ser pintada?

Instrumento no 3

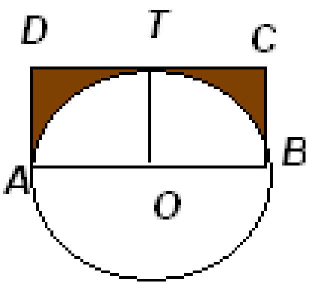
En la figura los puntos A, B, C, son puntos de la circunferencia ángulo ABC=90^0, AB=6,0 dm, BC=8,0 dm. Hallar el área sombreada.



Instrumento no 4

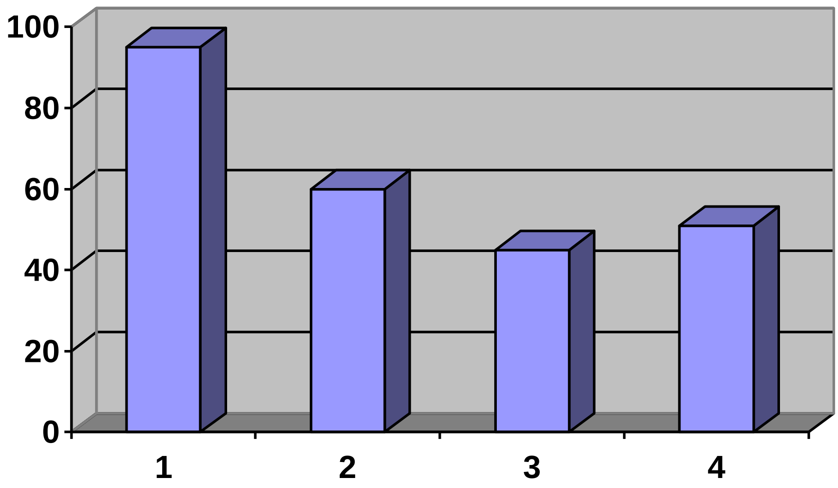
ABCD es un rectángulo de área 32 dm^{2}; DC//AB; DC tangente en T, a la circunferencia.

Calcule el área sombreada.



A continuación se muestran los resultados obtenidos en una muestra de 66 estudiantes.

Cada una de las barras representa un instrumento de los aplicados del 1 al 4, según se expone anteriormente.



Como se aprecia, en la primera actividad resultaron aprobados casi la totalidad de los estudiantes, demostrándose que poseían los conocimientos del contenido que luego usarían en el resto de los instrumentos, sin embargo los resultados de las evaluaciones 2, 3, 4, se comportaron alrededor del 60 %. En el que se equivocaron hasta estudiantes de alto rendimiento en le grupo.

Para el trabajo con los problemas en el municipio Jesús Menéndez de la provincia de Las Tunas, la comisión municipal de Matemática preparó a los docentes representantes de las diferentes enseñanzas, para enfrentar la resolución de problemas matemáticos desde la óptica de las habilidades, fue muy positivo el uso de ellas pues estas constituyen algoritmos generales que guían la actividad de los estudiantes.

Según Álvarez, C. (1999), las habilidades, que forman parte del contenido de una disciplina, caracterizan en el plano didáctico a las acciones que el estudiante realiza al interactuar con el objeto de estudio con el fin de transformarlo, de humanizarlo.

Para psicólogos como Petrovsky, A. (1980), se define la habilidad como el dominio de un complejo sistema de acciones psíquicas y prácticas necesarias para una regulación racional de la actividad, con ayuda de conocimientos y hábitos que la persona posee.

Luego de haberse generalizado en le territorio, el estudio de los significados de las operaciones, según Campistrous Pérez, L. y C. Rizo Cabrera, (2002), llegándose al acuerdo de utilizar habilidades ya trabajadas y considerar cinco o seis pasos para la resolución de problemas como guía de orientación, en los cuales se prepararon los representantes de cada director de las escuelas del municipio que eran miembros de la Comisión Municipal de Matemática. Este conocimiento sirvió para instrumentar el la base lo orientado y llegó así, a todos los maestros y profesores del territorio para su aplicación el las aulas.

4.2. PROCESO TOTAL DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resulta de gran importancia en la resolución de problemas motivar la actividad de forma adecuada, lo que resulta a veces muy difícil para algunos docentes pues en esta fase no podemos adelantar nada que pueda afectar el pensamiento lógico y la creatividad del estudiante.

Este momento depende un tanto de la edad y grado en que está el estudiante y las características que tienen de forma grupal y/o individual, las que puede variar de un grupo a otro.

Se consideran aquí dos etapas para esa motivación las que pudieran ser **antes** de conocer en texto del problema y **luego de conocer este.**

Para ilustrar el primer momento pudiera pensarse en ofrecer datos o hacer un poco de historia acerca de las diferentes situaciones que ofrecen los problemas, las que como se conoce son precisamente alguna experiencia social que nos ha antecedido y que si se profundiza en ello por el docente: se elevará la cultura general integral de los alumnos y se familiariza con el texto, sirviendo de motivación.

Un problema puede referirse a costumbres de habitantes de algunas regiones, razas, tribus u otras colectividades y esto se puede fundamentar o ilustrar de alguna forma, pero pudiera hablarse de procesos, fenómenos, algoritmos, en fin de cualquier rama de la ciencia, la técnica o la práctica social.

Ejemplo.

Analicemos el siguiente problema, tomado de Álgebra Recreativa, Y. Perelman, 1975

¡Caminante!, Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡OH, milagro!, Cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vellos cubrióse su barbilla. Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, que entregó su cuerpo,

su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan sólo la mitad de la de su padre. Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobreviviendo cuatro años al deceso de su hijo. Dime cuántos años había vivido Diofanto cuándo le llegó la muerte.

Antes de proponerles este problema a los estudiantes, el docente pudiera hacer un comentario acerca de ciertas costumbres que ha existido de escribir frases, signos u otros grabados en las lápidas de las tumbas con diferentes significados, haciendo ahora una breve historia de esta práctica, el profesor puede lograr una motivación y cultura adicional.

En el caso que nos ocupa se puede motivar planteando a los estudiantes la siguiente situación: se conoce muy poco acerca de la vida de Diofanto, notable matemático de la antigüedad; todo lo que se conoce acerca de él, ha sido tomado de la inscripción que se encuentra en su sepulcro, inscripción compuesta en forma de ejercicio matemático, veamos el siguiente problema mediante el cual podemos conocer algunos datos biográficos de este gran matemático.

Un segundo momento lo pudiera potenciar el propio análisis e interpretación del texto del problema y en fin cada uno de los pasos que a continuación se van a tratar, apoyados por la actividad del docente que siente emoción por la asignatura Matemática, que la disfruta y la imparte con esos mismos sentimientos.

Al referirse a la motivación inicial de la clase, Pérez Grave de Peralta, R. y R. Peña Santos, (2007) expresaron que esta atmósfera emocional que se crea aporta una expectativa en función del resultado final, y sobre quién o quiénes de los compañeros de aula que han ofrecidos sus criterios en los momentos iniciales del encuentro, estarán más cerca de la solución correcta, esa espera productiva genera motivos por alcanzar su desenlace.

Estas condiciones iniciales se pueden mantener todo el tiempo de la clase pero incorporando otros elementos propios de la actuación del docentes, que no se abordarán en estos momentos.

Este estado es altamente positivo para el aprendizaje, porque contribuye al desarrollo de la imaginación, la reflexión y el análisis, destacándose que la atención no puede ser impuesta, debe ser voluntaria, y esta sólo se produce cuando el organismo lo considera como algo vital.

Existen condiciones propias del problema que favorecen la motivación, tales como la alusión de su entorno más cercano, la utilidad práctica, la posibilidad de que el estudiante pueda resolver problemas propios muy similares al que se resolvió en el aula, pueden existir otras donde se aborden elementos que tengan relación con el deporte u otras actividades que sean del agrado de los estudiantes.

Interpretación del texto del problema

En este paso se identificó la interpretación del problema**,** siguiendo las mismas indicaciones que las orientadas por la asignatura Lengua Española o Español Literatura u otros nombres que adoptan las asignaturas propias de la lengua materna, de acuerdo a los programas establecidos por los Ministerios de Educación y de Educación Superior, de esta manera no se enseña a los estudiantes varias formas de interpretación.

Entre otras:

- Leer varias veces el texto
- Buscar significados de palabras desconocidas para los estudiantes de forma particular.
- Definir palabras claves en el texto, según las situaciones planteadas.
- Segmentar el texto de acuerdo a los signos de puntuación usados en el mismo, definiendo el significado de cada **parte** según la situación que se plantea y luego concretar la idea del **todo** (análisis y síntesis)
- Reconocer todo lo dado de forma directa e indirecta
- Tener seguridad de saber lo que se debe buscar.
- Si se logra esto, el estudiante estará en condiciones de reformular el problema usando su propio lenguaje, describiendo las situaciones de manera **sintética**, sin necesidad de acudir mucho a las mismas palabras del texto y decir con claridad lo **DADO Y LO BUSCADO.**

El resumen es una técnica de redacción muy utilizada a escala mundial que permite trasmitir gran cantidad de información de forma abreviada, acerca de la extensión y la técnica del resumen López López, M. (1989), nos expresa que mientras mayor es la necesidad de brevedad, más exigente tiene que ser la búsqueda de ideas fundamentales a que puede reducirse un escrito. La extensión de un resumen depende del objetivo que se persigue. Puede ser desde un simple título hasta varias oraciones o párrafos.

La técnica para resumir comprende dos pasos fundamentales: uno la jerarquización de las ideas contenidas en el escrito y otro la integración de las ideas, es decir, lo que pudiéramos llamar un análisis primero y una síntesis después.

Jerarquización de las ideas

En esta fase preliminar tenemos que leer y analizar el documento o comunicación y encontrar la idea central de cada párrafo, para darle una prioridad de acuerdo con su importancia.

Integración de las ideas

En esta fase integraremos de nuevo las ideas jerarquizadas, seleccionado de ellas solo las indispensables para el objetivo que nos proponemos.

En ocasiones se aprecia que al realizar los resúmenes los estudiante, prácticamente repiten todo el contenido del mensaje, pues no saben como reducir las ideas que se plantean, usando solo las de mayor prioridad.

Resulta fundamental desarrollar en los estudiantes la habilidad de describir para la garantía de esta síntesis que solicitan los docentes. Al respecto plantea la propia autora: describir es representar, dibujar, pintar usando el lenguaje de modo que dé cabal idea del objeto. Se describen objetos, hechos, procesos (reales, sus representaciones), experimentos, vivencias y lo que se percibe o recuerda, se siente, se piensa o imagina.

Análisis de las vías de solución

Según Pérez, R. y R. Peña, (2007), citando otros autores, expresan: la habilidad analizar no es más que el proceso en el cual lo que se consideraba como un todo indivisible, se considera compuesto por diferentes partes, concentrándose la atención en dichas partes. Descomponer en elementos integrantes del todo.

Silvestre Oramas, M. (1999), manifestó que cobra un mayor significado el valor de conducir al alumno a la búsqueda de los elementos internos, esenciales al estableciendo de relaciones, nexos entre los elementos que se van poniendo de manifiesto; la visión del todo, de las partes y del todo enriquecido después de la profundización en el conocimiento; la revelación de las causas, de las cualidades que le confieren el valor y su valoración; el conocimiento del origen y desarrollo de los objetos, el establecimiento de relaciones entre lo que es el objeto de estudio y otros fenómenos vinculados; la formulación de suposiciones, la previsión de situaciones, la solución de problemas, la aplicación del conocimiento a la práctica social.

Se pudo comprobar según esta experiencia, lo valioso que resulta en este paso, reconocer primero de cuántas formas o caminos se puede llegar a lo buscado, sin importarles un tanto los datos que le han ofrecido en el problema. Ejemplo si tratara de determinar la edad de una persona: pensar ¿Cómo conocer la edad de una persona, olvidando los datos?, pudiera pensarse entonces, si se conoce la fecha de nacimiento, si se conoce la edad de otra persona y una relación cualquiera entre esta y la que se busca, si alguien la conoce y nos la dice, si lo preguntamos a la propia persona, en fin el debate colectivo puede conducirnos a un listado grande de posibilidades, muy superior a un análisis más individual.

Este listado como sin querer ha conducido a un conjunto de posibles soluciones de dicho problema, ¿Cómo continuar?, ahora se impone revisar cuáles de esas situaciones pueden constituir soluciones, según los datos ofrecidos en el texto del problema, es decir vale la pena revisar, con qué se cuenta, en este caso serian: ¿Se da en el texto del problema la fecha de nacimiento de la persona?, ¿Se da la edad de otra persona y una relación con la que se busca? Y así cada una de ellas. **En todos los casos en que se tiene esa información en el texto del problema, se tendría una solución del mismo, de no estar implícita o explicita, se debe desechar como solución.**

Este procedimiento hace suponer diferentes vías de solución o caminos para llegar a la respuesta, las que pueden variar según el dominio y capacidad del estudiante y luego se hace un análisis de los datos en busca de lo que se necesita para aplicar una de las soluciones previstas.

¿Está lo que necesito para seguir esta vía?, si no está se debe desechar y si está entonces se debe pasar al paso siguiente.

No se puede desechar algunas alternativas conocidas en la resolución de problemas como puede ser buscar analogías con otros ya resueltos, estrategias de trabajo hacia atrás, casos extremos, argumentos de paridad, principio de las gavetas o de Diriclet, el tanteo inteligente, y otras.

La elaboración de gráficos, diagramas, etc. representa un aporte importante a la búsqueda de la vía de solución pues se logra visualizar situaciones a veces muy abstractas o en una posición difícil de observar lo que se describe, con cierto acercamiento a la realidad, en ocasiones resulta conveniente hacer una representación de la parte del objeto desde un ángulo o perspectiva donde sean más evidentes aquellas cualidades que se desean mostrar.

El aporte de la vista al aprendizaje, Según (González C. V. 1990), la efectividad del aprendizaje a través de los órganos de los sentidos es aproximadamente un 83% por la vista, un 11% por lo que se escucha y un 6% por el gusto, el tacto y olfato, de aquí la enorme superioridad de los medios audiovisuales con que se cuentan en las sedes universitarias y otros centros educacionales.

El camino dialéctico del conocimiento, tal y como lo planteó Ilich Lenin, L. (1975), en su teoría, acerca del tema expresa…" de la contemplación viva al pensamiento abstracto y de aquí a la práctica"…

La **generalización** juega un papel muy importante en la resolución de problemas, pues estos son, esencialmente, una aplicación de un **concepto, ley, procedimiento** etc. que se estudió con anterioridad. En ocasiones un estudiante resuelve de forma correcta un problema y luego no es capaz de resolver otro con igual modelación, solo porque no posee una generalización sólidamente formada.

Concepto, según Davýdov, V.V. (1982), es un pensamiento en el que se refleja los rasgos comunes y esenciales de los objetos y fenómenos de la realidad…"Todo concepto se forma en nosotros sólo en unión de la palabra que le corresponde"

Continúa planteando que, **rasgos esenciales** se llama a los indicios que necesariamente pertenecen a los objetos de un género determinado y los distinguen respecto a los objetos de los demás géneros.

Muy relacionado con esto aparece la generalización acerca de lo cual expresó Davýdov, la operación de generalizar el concepto es el procedimiento lógico en el que se destacan los rasgos comunes de un grupo de objetos…."generalizar es efectuar el transito mental desde los indicios aislados y singulares de los objetos hasta los indicios pertenecientes a grupos enteros de dichos objetos”

Modelación de la vía de solución

La habilidad modelar expresa la utilización, comprensión y elaboración de representaciones concretas o gráficas de la realidad. Utilización de signos, símbolos, esquemas, planos.

En este tercer momento se deberá escribir en forma de pasos, diagramas, gráficos, tablas y otras formas, la solución del problema según las vías escogidas de acuerdo a las posibilidades planteadas en el texto o que se pueden inferir de él.

Entre las herramientas con que cuenta el estudiante para la modelación, juegan un papel fundamental los contenidos matemáticos ya adquiridos: operaciones de cálculos, ecuaciones, sistemas de ecuaciones, y otras. Sin olvidar la influencia que tiene la interdisciplinaridad, conocimientos de Física, Química, Biología y otras

Si se escogió más de un camino como factible, el problema tiene más de una solución y se modelarán todas, en este paso, con todos los detalles que sean comprensibles para otras personas si necesitamos mostrar el trabajo a los compañeros o al docente.

Resulta bueno fundamentar cada uno de los pasos que se dan para su mejor comprensión y además que no se olvide el por qué realizamos determinada acción.

Valoración de la respuesta

Valorar: juicio con el que se caracteriza un objeto, hecho o fenómeno a partir de patrones ya establecidos en una región o sociedad, tiene un carácter histórico. Es un criterio personal que en esencia parte de las categorías del bien y el mal. Elaborar juicios en correspondencia con los objetivos.

Es muy importante aquí, primero comprobar la respuesta en el texto del problema ¿Cumple las condiciones del problema?, no significa comprobar un calculo o posible ecuación, inecuación u otra forma de modelación de la vía, pues los cálculos pueden estar bien, pero la modelación estar mal y por tanto la respuesta.

Por ejemplo se modela con una ecuación mal concebida según el texto, pero se resuelve correctamente, al comprobar, solamente en la ecuación, se pudiera llegar a concluir que esa es la solución de forma equívoca.

El signo del resultado es importante, una edad no pudiera ser negativa, las cantidades muy pequeñas o demasiado grandes para lo que se ha destinado, velocidad de un caballo 1000 Km. por hora, un avión a 20 Km. por hora durante todo un vuelo lejano, un vehiculo más rápido que la velocidad de la luz, una parte menor que un todo (en algunos casos donde no procede), en fin, existen muchas condiciones que pudieran analizarse, como respuestas ilógicas, o no factibles según la práctica.

Las respuestas en Matemática, están condicionadas en ocasiones por otros elementos además del encontrado, ejemplo, en trigonometría se encontró un valor de un ángulo en una ecuación y la respuesta depende de la periodicidad de la función y de las condiciones declaradas para el dominio.

Ejemplo.

Sen(x) = $\frac{1}{2}$

X = $30^0 + k.360^o$, si se tratara del primer cuadrante, pero como la variable aquí tiene dominio R, tiene como solución además, $150^o + k.360^o$

Los docentes deberán preparar a los estudiantes en la realización de valoraciones de trabajos de compañeros de otros grupos, del propio grupo y como colofón de esta práctica, la realización de valoraciones del propio trabajo, es decir las autovaloraciones como paso final y máxima aspiración, acerca de esto, (Rico, M. 1998) , plantea “enseñar al alumno a realizar el control y la valoración de sus trabajos supone, en primer lugar, la comprensión por este de la importancia de dicha actividad. Se hace necesario en le trabajo con los diferentes ejercicios o actividades de las asignaturas, analizar y explicar a los escolares la importancia que tiene para ellos aprender a controlar y valorar el proceso y los resultados de sus trabajos, cómo esto le permite alcanzar una mayor calidad”.

Continua diciendo, “a partir de esta motivación, se analizan las exigencias que deben tenerse en cuanta para el control y valoración de las tareas”.

Dice la propia autora que “En el proceso de formación de esta habilidad resulta de vital importancia que los alumnos se inicien en el trabajo de control y valoración a partir de los trabajos de sus compañeros. Numerosas investigaciones han demostrado como esto constituye una premisa, un momento que antecede al logro del control y la valoración de su propio trabajo ya que precisamente resulta más fácil para el escolar someter a un análisis crítico el trabajo del compañero que el suyo. Precisamente sobre la base de ello, aprende a realizar un análisis objetivo, utilizando las exigencias del modelo y gradualmente irá llevando a su propio trabajo este análisis y lo que es más importante, ante cada nueva tarea, tendrá en cuenta en cumplimiento de las exigencias aprendidas y es ahí donde se muestra precisamente la acción de estas habilidades, es decir, en la medida en que el alumno aplique correctamente las exigencias en las nuevas tareas que realiza".

Recrearse con la solución del problema

Este paso se utiliza para hacer una retrospectiva del problema primero y de la habilidad para resolver problemas después. Pueden hacerse valoraciones colectivas como estas ¿Qué resultó más fácil en cada uno de los cuatro pasos? ¿Qué resultó más difícil? ¿Qué estudiantes pensaron en soluciones lógicas? ¿Qué soluciones fueron más racionales? ¿Para qué otras situaciones puede servir este problema? ¿Qué otros problemas similares han resuelto ustedes? ¿Qué aportes incorporaron a sus habilidades personales para resolver problemas? ¿Qué se debe mejorar al resolver otros similares?

El problema y su solución debe ser altamente provechoso para los estudiantes; pensar en su posible generalización prepara a los alumnos para la solución de problemas similares y otros ya resueltos que se modelaron de igual forma, prepara para la vida y la profesión futura, por eso es muy importante su contribución a la consolidación de saberes, es el nexo entre la sociedad y la escuela.

Aquí se debe estimular todo aquel que se esforzó y/o alcanzó un resultado positivo por modesto que sea, destacar los trabajos más completos, inspirar confianza al analizar las diferentes vías que existen y que están al alcance de todos, lo importante de la constancia en el trabajo.

Resulta muy importante promover la comunicación entre estudiantes y entre estos y el docente como vía para emitir todos los criterios acerca de este proceso de enseñanza aprendizaje.

Al decir de Fernández, A. (2000), el proceso de enseñanza-aprendizaje es esencialmente interactivo y comunicativo, de intercambio de información, compartiendo experiencias, conocimientos y vivencias que logran una influencia mutua en las relaciones.

Se debe destacar que estas preguntas y etapas no constituyen un algoritmo de trabajo en la resolución de problemas, sino que conforman una guía para la acción, una orientación sobre como proceder, no se trata de un conocimiento aislado que los estudiantes deben adquirir, sino una base orientadora de la acción en la resolución de los problemas. No se resta con esto, la creatividad de los estudiantes, los que pueden mover el pensamiento y la acción en función de la búsqueda de las mejores alternativas y las experiencias más cercanas adquiridas en la realización de este tipo de ejercicio tan importante para el desarrollo del pensamiento lógico.

Un buen debate puede aportar ideas y puntos de vistas muy diversos acerca de las experiencias individuales si se sabe manejar correctamente.

Se prevén cuatro etapas para el desarrollo de un debate, según lo expuesto por

(Del Pino, J. L. 2005):

1. Preparación previa del profesor y los estudiantes.

2. Presentación de la temática u objetivo del debate.

3. Desarrollo de la discusión.

4. Conclusiones y propuestas de continuidad de aprendizaje.

El propio autor recomienda algunos aspectos importantes para el éxito del debate en el grupo que se relacionan a continuación.

• Respetar el criterio ajeno.

• Exponer con claridad el nuestro y fundamentarlo.

• Escuchar con paciencia y relacionar unos criterios con otros.

• Interpretar lo que se dice leyendo lo implícito en las opiniones de otros.

• Intervenir disciplinadamente, sin interrumpir ni imponer nuestro criterio.

• Persuadir cuando sea necesario para llevar a las personas a una actuación justa y enriquecedora.

Saber discutir con respeto y cortesía, sin imposición, esto dará más prestigio y conocimientos sólidos.

Al decir de Chávez, J. A. (1992), el ilustre pedagogo cubano José de la Luz Caballero en su lucha por enseñar a pensar a los cubanos hace más de cien años nos dejaba una enseñanza clara “empecemos dudando de todo, haciéndonos cargo de que nada sabemos”… Estas apreciaciones de Luz son muy importantes para su época, pues como apuntara (Rodríguez, C. R. 1974), cuando a Carlos Marx se le preguntó que cuál era su precepto favorito replicó “dudar de todo”, lo que nos establece un puente entre el racionalismo cartesiano y el materialismo que llega a nuestros días.

La realización de una valoración crítica y autocrítica del trabajo realizado, constituye una posibilidad de revisar estrategias y saber como determinar los errores cometidos y lo más importante aprender a erradicarlos.

Según Rico Montero, P. (1998), la valoración está muy relacionada con el control, pues se forma sobre sus bases, permite al alumno conocer el grado de correspondencia de los resultados obtenidos con respecto a las exigencias de las tareas, lo que determina la calidad alcanzada.

Se infiere que en este modelo semipresencial, donde el estudiante es autogestor del conocimiento, el fin y objetivo supremo del docente, es lograr que cada uno de ellos se **autocontrole y autoevalúe**, pues el profesor toma otro rol en el proceso de enseñanza aprendizaje: como orientador y trasmisor de estrategias válidas para alcanzar una mayor eficiencia en la adquisición del conocimiento y por tanto también se minimiza el tiempo de este para desarrollar estas dos actividades, las que de por vida deben asumir los aprendices.

4.3 EJEMPLOS DE PROBLEMAS RESUELTOS DONDE SE COMENTAN LOS CINCO PASOS DESCRITOS

Problema

Una columna de un muelle a orillas de un río está enterrada en el fondo del río $^{2}/_{5}$ de su longitud. Tiene otra parte en el agua cuya longitud expresada en metros es numéricamente igual al cuadrado de la longitud de la columna disminuido en 24 unidades y la parte restante que mide 2 metros, está fuera del agua al aire libre. ¿Cuál es la longitud de la columna?

Interpretación del texto del problema

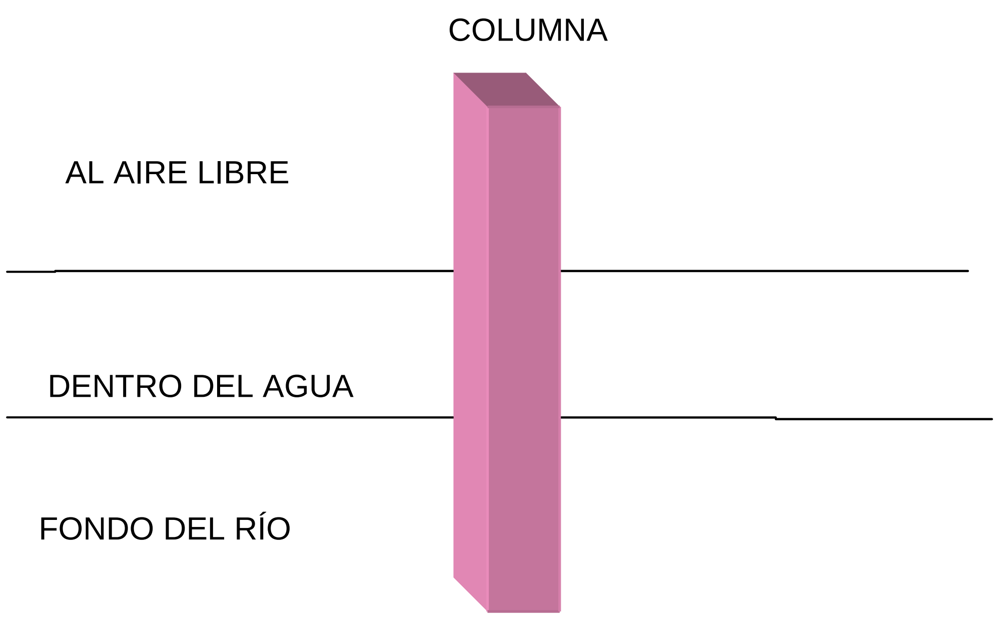
Se hace necesario en este paso, buscar los significados de algunas palabras que juegan un importante papel el texto, como pueden ser: columna, muelle, disminuida, de acuerdo con las características del grupo donde se trabaje pueden analizarse otras, de interés para la correcta comprensión del enunciado del problema.

La palabra columna debe significar para los estudiantes: viga, estaca, pilote que está clavado en el fondo del río con una posición vertical, la palabra muelle puede significar para los estudiantes una especie de resorte, por estar más cerca de su posible entorno, mas en esta ocasión se refiere a un embarcadero o punto donde atracan los botes o barcos, la palabra disminuido no significaría empequeñecido, es decir no se achica la columna, sino que si se le resta 24 unidades a su longitud total.

Si el docente no está al tanto de estos análisis con sus estudiantes o mejor aun los educa en la búsqueda de estos, se corre el riesgo de no comprender la situación planteada y por tanto no será posible una solución adecuada.

Cuando se llega a la segmentación del texto se concretan tres ideas que revelan la división de la columna o estaca en tres partes: una bajo tierra, otra en el agua y una tercera por encima, al aire libre. Obsérvese que se ha seguido la misma orientación que se ofrece en las asignaturas de la lengua materna para la comprensión de textos, lo que favorece esta actividad pues siempre se realiza de la misma forma, lo que hace que se cree una habilidad en los estudiantes para este importante aspecto de todo el que se autoprepara.

Luego de estas acciones el docente o el estudiante puede formularse la siguiente interrogante ¿Es necesario una figura de análisis?



En estos momentos los estudiantes están en condiciones de realizar una breve síntesis de la situación planteada en el problema, la cual puede realizarse sin la lectura del texto, solo describiendo con palabras propias, los elementos que se dan y lo que se debe buscar.

<u>Una idea pudiera ser: el problema trata de una columna que se encuentra enterrada en el fondo de un río, de forma vertical por estar formando parte de un muelle, la cual está dividida en tres partes, una bajo tierra, una en el agua y otra sobresaliendo del agua, al aire libre, se dan algunas relaciones entre las partes determinadas y se quiere saber la longitud total de la columna.</u>

Sin lugar a dudas, educar a los discípulos en la realización de esta reformulación sintetizada, antes de emprender cualquier acción en busca de la vía, representa una garantía para la solución de todo problema matemático, no se podrá resolver bien el problema que se ha comprendido mal o que no se ha comprendido y es muy común observar el carácter ejecutivo de los estudiantes al resolver una situación planteada, sin previo análisis, con excesiva rapidez en busca del resultado. En ocasiones cuando se resuelve bien, se casan con una sola solución aun cuando esta sea la más laboriosa o complicada, precisamente por el afán de terminar rápido la tarea.

Análisis de las vías de solución

Si se obvian los datos, de primera instancia, se puede formular la siguiente pregunta ¿De cuántas maneras podemos obtener la longitud de la columna?

Luego de un debate con los estudiantes o un análisis particular si se resuelve individualmente se puede concluir que la longitud de una columna se averigua de las siguientes formas:

- Midiéndola directamente
- Preguntando al constructor del muelle.
- Realizando una estimación.
- Conociendo la longitud de cada una de las partes en que se dividió imaginariamente y luego adicionado las longitudes de las partes.

Después de confeccionar este listado de posibles soluciones, se hace necesaria la búsqueda en el texto del problema, de los elementos que sustentan cada una de las vías propuestas. Así por ejemplo la primera solución no sería factible pues no tenemos contacto con la columna que debemos medir, la segunda opción tampoco es posible si no conocemos al constructor, si fuese un problema real creado del entorno del los estudiantes, esta sería otra vías de solución, la tercera puede hacerse si se hace una inspección en el lugar y se observa la columna, tal vez eso no es posible.

Al estudiar la cuarta posibilidad no se podrá desechar de inmediato, sin previo análisis, como se hizo con las anteriores, pues habría que averiguar si es o no posible hallar la longitud de cada una de las partes reconocidas.

Según el texto una de las partes se conoce, tiene 2 metros de longitud, ¿Qué se conoce de las otras partes?

La parte enterrada tiene $^2\!/_5$ de su longitud total

La parte que está dentro del agua es numéricamente igual al cuadrado de la longitud total disminuida en 24 unidades.

Como se aprecia: se conoce una de de las partes y las otras dos están dadas por relaciones con la longitud total

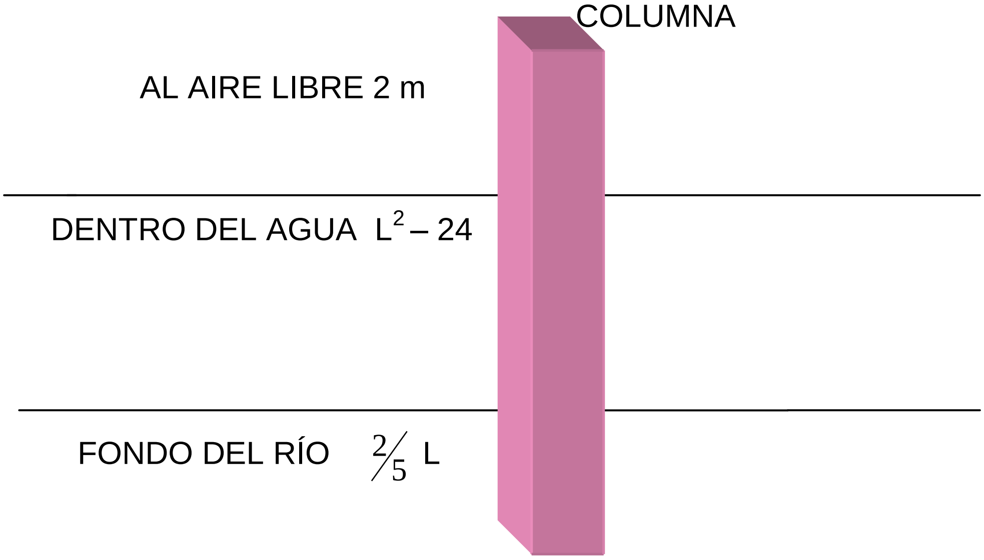
Esto puede conducir a otra interrogante.

¿Cómo relacionar la longitud total y las partes integrantes?

La respuesta puede conducir a una posible ecuación de segundo grado.

Modelación de la vía de solución

Si se declara la longitud total de la columna por la variable L, entonces del enunciado y la figura de análisis anterior, se expresaría



Según se sospechaba en el paso anterior la solución puede estar en la resolución de una ecuación de segundo grado.

Si sumamos las tres partes integrantes de la columna resultaría la longitud total de la misma.

$2 + L^2 - 24 + \frac{2}{5} L = L$

Multiplicando por cinco y simplificando se obtiene

$5L^2 – 3L – 110 = 0$

Descomponiendo en factores

$(5L + 22) (L – 5) = 0$

$5L = - 22$ no se admite

$L = 5$ solución.

Al aire libre 2 m

Dentro del agua $5^2 – 24 = 1$m

Bajo tierra $\frac{2}{5} . 5 = 2$ m

Longitud total 2m+ 1m +2m = 5m

<u>Valoración de la respuesta</u>

En ocasiones una respuesta cumple, según el estudiante que resolvió el problema, todos los requisitos para ser aceptada como buena y sin embargo no lo es, esto sucede porque a veces se modela mal la solución pero se resulve bien y cundo se valora, cumple ciertas condiciones, es lógica desde el punto de vista de su aceptación de acuerdo a lo que se busca, no se trata entonces de que valorar la respuesta sea un método infalible para garantizar la veracidad de esta en todos los casos, de lo que se trata es de educar a los estudiantes en esta práctica, pues sin dudas con estos análisis pueden descubrirse errores que son evidentes, y mientras más reiteradamente lo realicen, aprenderán mejor a descubrir sus propias fallas, pues lo cierto es que una cantidad no despreciable de estudiantes no tiene este hábito, y si el de la premura, lo que hace que no se valora la respuesta de un problema ni cuando se trata de un examen que puede representar un pase de grado o enseñanza .

Se puede partir del hecho de haber despreciado la solución negativa pues una longitud de esa naturaleza no puede tener ese signo.

El valor 5 fue el que se aceptó pero ¿Cumple con las condiciones del problema?

En el fondo del río $\frac{2}{5} \cdot 5 = 2$ m

Lo que permanece dentro del agua $5^2 - 24 = 1$m

Al aire libre 2 m

La suma de los tres pedazos imaginarios nos da 5m, es una respuesta factible, pues es lógica por el signo y por módulo.

Todas estas condiciones hacen sospechar que la respuesta es correcta.

Por tanto la longitud de la columna que está en el muelle con las condiciones descritas es de 5m

Recrearse con la solución del problema

En este momento se hace necesario una retrospectiva reflexiva acerca de cómo se actúo de forma individual y/o colectiva en el enfrentamiento al problema, destacando las mejores formas de pensar y actuar, lo que puede variar de un colectivo a otro.

Puede hacerse un análisis acerca de lo que significó para los estudiantes al solucionar el problema, la búsqueda de los significados de las palabras: muelle, columna, disminuida, ¿Qué aporte hizo a la comprensión y luego a la solución?

Otro aspecto importante fue la construcción de la figura de análisis, la cual ofrece una mejor perspectiva de la situación planteada al poder visualizarse.

En este problemas se ofrece un todo que se ha dividido imaginariamente en varias partes y esas partes guardan relaciones con el todo, se puede generalizar una idea: es posible encontrar las partes de un todo y/o el todo si existen relaciones de esas partes con el todo, y se puede sospechar su modelación a través de una ecuación.

El todo en este caso puede representar una finca dividida en cuartones o parcelas, un almacén compuesto por varios estantes, cantidad de dinero de una persona que lo distribuye a varias de ellas.

Problema número dos

Tomado de álgebra recreativa, (Perelman, Y. 1975), y transformado su texto para acercarlo a nuestros días.

Un burro y un caballo cargan pesados sacos. El caballo se queja de la carga que le ha tocado y el burro le dijo; si yo te doy uno de mis sacos, tendríamos la misma cantidad, pero si yo tomara un saco de los tuyos mi carga sería el doble de la tuya. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

Interpretación del texto del problema

A simple vista el problema no contiene palabras de significados desconocidos, aunque esto es muy relativo, pues estaría en dependencia de las características del grupo de estudiantes a los que se les proponga.

Al efectuar la o las lecturas se destacan dos expresiones muy significativas para la comprensión del texto que son: **la misma cantidad** y **el doble de la tuya,** pues establecen relaciones importantes entre las cargas de los animales que dialogan.

Si se realiza una síntesis del enunciado pudiera expresarse entre otras cosas: de la conversación entre el burro y el caballo, se puede inferir que el burro está más cargado que el caballo y se trata entonces de conocer cuántos sacos lleva cada animal

Análisis de las vías de solución

Se comenzará como el ejemplo anterior por preguntar ¿De cuántas maneras podemos averiguar la carga que lleva cada animal?

Se puede concluir:

- Si se realiza un tanteo inteligente, probando parejas de números hasta encontrar la que cumple simultáneamente ambas condiciones.
- Se puede sospechar que mediante una ecuación lineal pueda encontrarse, pues existen relaciones entre las cargas que se buscan.
- Tal vez pueda modelarse mediante un sistema de ecuaciones lineales de dos variables y dos ecuaciones.

Ahora se trata de buscar en el texto del problema todos los elementos que propicien la factibilidad de una o más vías de las expresadas.

Tanteo inteligente.

Se establece una relación directa entre las dos cargas, las que deben cumplir una doble condición al expresar las cantidades respectivas, por lo que se puede pensar en una tabla como la siguiente.

caballo	burro	Valoración de la alternativa
1	3	Si el burro da uno, tiene igual cantidad, pero si el caballo cede uno, el burro no tiene el doble.
2	4	Ya es el doble la del burro, por tanto si se hace lo expresado en el problema, no se cumple ninguna condición.
3	5	Si el burro da uno tienen la misma cantidad, pero si es el caballo es el cede uno, el burro no tendría el doble.
4	8	En este caso se da la misma situación que la fila dos
5	7	Obsérvese en este caso que si el burro le da uno al caballo tiene igual cantidad, pero si el caballo es el que da uno al burro, este tendrá el doble. Por tanto esta será la posible solución pues cumple simultáneamente con las dos condiciones

Ecuación lineal

Se declaran las variables

Se designa la carga del caballo por la variable X

Y la del burro por X + 2

Con esta condición inicial se garantiza que si el burro le da uno de los sacos al caballo, entonces tendrían la misma cantidad.

Ahora se trata de buscar los números que cumplen las dos condiciones y para ello se plantea una ecuación que cumpla con la segunda condición a partir de lo expresado como primera condición.

Si el burro cede un saco entonces tendría X + 2 – 1

Y esto representaría que el caballo lleva X + 1 sacos

Pero cuando esto sucede entonces la carga del burro es el doble de la del caballo.

¿Cómo lograr una igualdad de ambas expresiones?

(X + 2) + 1 = 2 (X--1)

X + 3 = 2 X – 2

X = 5 Sacos que lleva el caballo

Como el burro lleva dos sacos más llevará 7 sacos.

Sistema de dos ecuaciones en dos variables

Declarando variables

Carga que lleva el caballo X

Carga que lleva el burro Y

A partir del enunciado se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} Y + 1 = 2\,(X - 1) \\ Y - 1 = X + 1 \end{cases}$$

Cuyas soluciones son X = 5; Y = 7

Valoración de la respuesta

El resultado parece ser lógico pues se habla de sacos y son dos cantidades positivas y además factibles para una carga de un animal, si la cifra fuera muy grande, digamos 20 sacos, no sería adecuado a la práctica.

Las dos cantidades cumplen con las condiciones del problema, pues si a 7 se le resta uno y se le suma a 5 se obtiene 6 en cada caso. Si a 5 se le resta uno y se le adiciona a 7 se obtiene 4 y 8, cumpliendo con la otra condición de que uno sea el duplo del otro.

Recrearse con la solución del problema

Se puede destacar la existencia de tres vías para arribar a la respuesta, así como la validez de cada una de ellas desde el punto de vista matemático, con esto se asegura un tanto, lo accesible del problema para los diferentes tipos de estudiantes que tiene el grupo y que de haberse analizando una sola, los alumnos con dificultades pueden pensar que dicho problema no está al alcance de ellos.

Otro análisis importante lo constituye una disección a las tres vías: **el tanteo inteligente** propicia a los estudiantes de menos posibilidades académicas llegar a un resultado correcto, pues se reduce al trabajo con números pequeños y cálculos elementales, probando en cada pareja el cumplimiento de dos condiciones simultáneas.

La ecuación lineal pudiera ser la vía más compleja y difícil y es importante destacar que la declaración de las variables juega un papel decisivo, pues se garantiza en ella la primera condición del problema (caballo X y el burro X + 2), puede observarse que si el burro le cede uno al caballo tendrían la misma cantidad, entonces se trata de que la ecuación que se plantee cumpla con la segunda condición, es decir hay que suponer que en las expresiones consideradas se cumple, que si el caballo le da un saco al burro, este tendrá el doble $(X + 2) + 1 = 2(X – 1)$, esta igualdad ahora cumple con las dos condiciones planteadas.

En el sistema de ecuaciones lineales basta con declarar la carga del burro por una variable y la del caballo por otra (caballo X y burro Y), a partir de aquí el sistema se forma utilizado las dos ideas básicas o condiciones del problema es decir, el caso en que se igualan y el caso en que se duplica una con respecto a la otra, lo que expresado algebraicamente sería $Y – 1 = X + 1$ y además $Y + 1 = 2(X – 1)$

Este problema puede aportar a la estrategia general de resolución de este tipo de ejercicio tan completo y al desarrollo de las habilidades correspondiente, en la medida que el docente sea capaz de hacer reflexiones colectivas con los estudiantes para inspirar confianza y perseverancia en estos, mostrando un amplio abanico de posibilidades válidas en la solución de este tipo de actividad tan rechazada por un número importante de alumnos.

4.4 ALGUNAS CONSIDERACIONES FINALES ACERCA DEL DESARROLLO DE HABILIDADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

- No sería adecuado plantearle a los estudiantes problemas que aborden solamente el contenido que se está impartiendo en ese momento, sino incluir otros de temas ya abordados, de lo contrario se tiende a mecanizar las soluciones al saber que se habrá de modelar según lo que se trabaja.
- Es importante mover lo dado y lo buscado, es decir ofrecer como datos en algún momento lo que fue encontrado en otros problemas, así como cambiar las posiciones de los objetos y cuerpos que se utilizan.
- En la etapa de comprensión del problema es importante desarrollar en los estudiantes, habilidades para realizar una <u>síntesis de lo tratado en el problema</u> usando para ellos palabras propias.
- Resulta importante que los docentes den tratamiento a al vocabulario matemático y en especial a algunos términos que por su uso frecuente deben ser de dominio pleno de los estudiantes: aumentado, disminuido, duplo, triplo, mitad, tercera parte, bisecan, excede en, razón entre, minimizar, maximizar, equipartir, otros.
- Prestar gran interés a los significados de las operaciones aritméticas por su incidencia en la modelación de solución de problemas desde la enseñanza primaria hasta la universitaria.
- Es necesario ofrecer más importancia al desarrollo de la vía de solución que al resultado de esta, como forma para crear en los estudiantes un pensamiento lógico y creativo.
- Los seis pasos para resolver problemas que se proponen en este trabajo constituyen una base orientadora general para la acción y aunque no es necesario que la misma se escriba con todo rigor, si es fundamental su utilización reiterada y obligatoria, fundamentalmente en los primeros grados.
- Pedir a los estudiantes que elaboren problemas cuya solución conduzca a los contenidos ya recibidos.
- Proponer problemas con datos innecesarios, datos que falten, datos que se puedan inferir de la vida, con una, varias o infinitas soluciones, sin solución.

- Ocasionalmente el docente puede plantear problemas resueltos, en algunos casos de forma correcta y en otros incorrectamente, con el objetivo de realizar un análisis acerca de la solución presentada, en el debate se corrigen los errores y se fundamentan los pasos y acciones emprendidas, así como otras vías posibles.
- Es muy importante proponer problemas a los estudiantes como motivación de clases o partes de estas o unidades del programa, los problemas son además una forma de consolidación de mayor exigencia y permiten variar las actividades.
- Incluir dentro de la evaluación frecuente y final, con carácter obligatorio, problemas relacionados con los contenidos tratados.

Todas estas estrategias de trabajo a seguir con la resolución de problemas matemáticos son perfectamente válidas para su aplicación en las Sedes Universitarias Municipales, pero no cabe dudas que en este modelo semipresencial el tiempo de que dispone el profesor es limitado para crear habilidades sólidas en los estudiantes relacionadas con esta actividad tan importante para la asignatura y la vida. Se precisa entonces la importancia concedida a las enseñanzas precedentes en la creación y desarrollo de formas de actuación lógicas y productivas al analizar y resolver problemas matemáticos, de forma tal que durante los estudios universitarios, se usen ya para llevarlos a la práctica cotidiana y profesional.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez de Zayas, C. “Hacia una escuela de excelencia”, Sucre, 1996.

--------------------“La escuela en la vida”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1999.

Amador, A. M. “Conoces a tus alumnos”. [et alt]. —Ed. Pueblo y Educación, 1989.

Amos, J. “Didáctica Magna”, Ed. Reus, Madrid, 1922.

Campistrous, L. y C. Rizo “Aprender a resolver problemas aritméticos”, Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 2002.

Chávez, J. A. “Del Ideario Pedagógico de José de la Luz y Caballero”, Ed. Editorial Académica, La Habana, 1992.

Colectivo de autores: “Seminario Nacional del MINED”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1984.

Colectivo de autores: “Preguntas y respuestas para elevar la calidad del trabajo en la escuela”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2002.

Colectivo de autores “Metodología de la Enseñanza de la Matemática” tomo I, Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1992.

Colectivo de autores “Laboratorio de Matemática Superior” Ed. Félix Varela, La Habana, 2005.

Colectivo de autores “Breve diccionario de la lengua española”, Ed. Casa editorial abril, Ciudad de La Habana, 2006.

Colectivo de autores “Conoces a tus alumnos” Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1989.

Danilov, M. A. “Didáctica de la escuela media”, Ed. Libros para la Educación, La Habana, 1981.

Davinson, L. J. “Problemas de Matemática elemental 1”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1987.

Davydov, V.V. “Tipos de generalizaciones de la enseñanza”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1982.

Del Pino, J. L. “El trabajo independiente sus formas de realización”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2005.

Fernández, A. “El formador de formación profesional y ocupacional”, Ediciones Octaedro, Barcelona, 2000.

Fiterre, I. “Matemática cuarto curso, Geometría” Ed. Selecta, la Habana, 1955.

González, V. “Teoría y práctica de los medios de enseñanza”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1990.

------------------ “Medios de Enseñanza”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1983.

González, M. “Complementos de aritmética y álgebra” quinto curso, tomo 1, Ed. Pueblo y Educación, Cuidad de la Habana, 1973.

Gúsiev, V. “Práctica para resolver problemas matemáticos [et alt]. Ed. MIR, Moscú, 1989.

Hernández, J. “¿Cómo estás en Matemática?”, Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 2002.

Hernández, A. G. y A. M. Rojas, “Orientaciones Didácticas de la Matemática”, Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1975.

Klimgberg, L. “Introducción a la Didáctica General”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1978.

Labarrere, A. F. “Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas” Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1988.

López, M. “Cómo enseñar a describir, definir, argumentar”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2002.

------------- “Cómo enseñar a determinar lo esencial”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1989.

Martí, J. J. “Obras Completas”, Ed. Ciencias Sociales, La Habana, 1975.

Martínez, E. “Guía de estudio Matemática superior I programa Álvaro Reinoso”, Ed. Imprenta Alejo Carpentier, La Habana, 2003.

Majmutov, M. I. ¨La Enseñanza problémica¨, Ed. MIR, Moscu, 1983.

Mestre, U. y J. J. Fonseca, “Fundamentos de la Didáctica”, en soporte electrónico, Las Tunas, 2003.

Petrovky, A. V. “Psicología general, manual didáctico para los Institutos de Pedagogía”, Ed. Progreso, Moscú, 1980.

Pérez, R. y R. Santos, “la clase encuentro”, Ed. Editorial Universitaria, Las Tunas, 2007.

Perelman, Y. “Álgebra recreativa”, Ed. MIR, Moscú, 1975.

Palacio, J. “Colección de problemas matemáticos para la vida”, Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 2003.

Piskunov, N. “Cálculo diferencial e integral tomo I”, Ed. MIR, Moscú, 1983.

Rico, P.” Reflexión y aprendizaje en el aula”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1996.

Rico, P. “Cómo desarrollar en los alumnos las habilidades para el control y la valoración de su trabajo docente”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1998.

Rodríguez, C. R. “José de la Luz y Caballero”, Ediciones de la Revista Fundamentos, año VII, No 80, junio, La Habana, 1974.

Rosell, S. “Matemática segundo curso” algebra, Ed. Selecta, La habana, 1944.

Silvestre, M. Aprendizaje, educación y desarrollo, Ed. Pueblo y Educción, La Habana, 1999.

Sydsaeter, K. y P. Hammond, “Matemáticas para el análisis económico” volumen I, Ed. Félix Varela, La Habana, 2003.

---------------------------------------, “Matemáticas para el análisis económico” volumen II, Ed. Félix Varela, La Habana, 2003.

Torroella, G.”Aprender a convivir”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2002.

--------------- “Aprender a vivir”, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2001.

Turner, L. y J. Chávez, “Se aprende a aprender”, Ed. Pueblo y educación, La Habana, 1989.

Zilberstein, J. y H. Valdés, Aprendizaje escolar, diagnostico y calidad educativa, Ediciones CEIDE, México D. C., 1999.

Zilberstein, J y R. Portela, Una Concepción desarrolladora de la motivación de las ciencias, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2002.