Toma de Decisiones a través de la Investigación de Operaciones

Naim Caba Villalobos
Oswaldo Chamorro Altahona
Tomás José Fontalvo Herrera

Toma de Decisiones a través de la Investigación de Operaciones

Naim Caba Villalobos
Oswaldo Chamorro Altahona
Tomás José Fontalvo Herrera

Toma de Decisiones a través de la Investigación de Operaciones

- **Modelos Matemáticos para la toma de Decisión en la Administración de los Sistemas de Inventarios**
- **Colas de Espera**
- **Soluciones a través del Proceso de Simulación**
- **Cadenas de Markov**

Naim Caba Villalobos
Oswaldo Chamorro Altahona
Tomás José Fontalvo Herrera

Tabla de Contenido

Capítulo 3

Prólogo

Los temas que abordan la presente obra incluyen: la investigación de operaciones en el proceso de toma de decisiones, los sistemas y modelos de inventarios, líneas de espera, el proceso de simulación Montecarlo y el proceso de las cadenas de Markov.

Este texto está dirigido al nivel medio superior de los programas de Administración de Empresas o de Ingeniería Industrial.

El conocimiento de matemáticas que constituye el requisito previo está limitado en gran parte al nivel introductorio del álgebra, en algunas secciones, la optimización clásica requiere de algunos conocimientos del cálculo que se emplea a nivel de principiantes. Este libro se puede utilizar sin tener conocimientos profundos de investigación y cálculo de operaciones.

El libro tiene 2 justificaciones importantes: 1) Como complemento de textos actuales de producción, 2) como libro de texto.

El Libro usa ampliamente las técnicas cuantitativas, no obstante solo es necesario un nivel introductorio de álgebra para lograr el entendimiento en los temas y aplicaciones. Cuando surge la necesidad, explican las técnicas estadísticas, de cálculo y administrativas mediante ejemplos sencillos.

El libro ha sido diseñado como un apoyo cuantitativo, tiende a favorecer la claridad de las presentaciones más que la complejidad matemática.

Capítulo 1

La Investigación de Operaciones en el Proceso de Toma de Decisión

Objetivos

- Conocer y clasificar los modelos que con frecuencia se utilizan en las industrias y empresas en general en la toma de decisiones en el campo de la producción y las operaciones.
- Tener el conocimiento y la habilidad para aplicar las categorías de los modelos de inventario para la toma de decisión.
- Conocer y aplicar las técnicas para la toma de decisiones bajo certeza, bajo riesgo y baja incertidumbre.
- Conocer y aplicar el concepto de valor esperado.
- Conocer, establecer y analizar problemas de toma de decisión mediante matrices condicionales de pago.
- Conocer, establecer y analizar problemas de toma de decisión mediante árboles de decisión.

1.1. Definición de investigación de Operaciones

Teniendo en cuenta sus orígenes la *investigación de Operaciones* la podemos definir como un enfoque científico de la toma de decisión. En este orden de ideas, la toma de decisión es dada a través de la aplicación del método científico, de ahí la definición antes dada.

Dentro de este contexto, la investigación de operaciones la podemos identificar desde la época de Frederick W. Taylor, los esposos Gilbreths y Henry Gantt. No obstante, sólo fue hasta la segunda guerra mundial cuando el término investigación de operaciones fue utilizado para describir el enfoque adoptado por ciertos grupos interdisciplinarios de hombres de ciencia para resolver algunos problemas de estrategias y tácticas del manejo militar. Después de la guerra este enfoque se extendió a las organizaciones industriales, y con la aparición del computador se generó una mayor rapidez, posteriormente bajo este enfoque se desarrollaron esquemas de toma de decisión a problemas comunes en las organizaciones industriales.

La investigación de operaciones comienza describiendo algún sistema mediante un modelo que luego se manipula y a través de este determinar la mejor forma de operación de dicho sistema.

Es esta, tal vez la mejor forma de tomar una decisión, no obstante nos compromete a seguir un proceso de toma de decisiones racional.

1.2. Proceso racional de toma de decisiones.

¿Cómo debemos actuar al tomar una decisión? ¿Qué debemos hacer para tomar la mejor decisión?. Hacernos estas preguntas nos ha ocurrido en cualquier situación. A través de los tiempos muchos intelectuales las discurrieron ya que en si forman parte fundamental de la búsqueda de la verdad. En esa época muchos fueron los debates al respecto, el resultado de este extenso debate fue un enfoque general conocido como el método científico. Además se han desarrollado varios modelos matemáticos para problemas específicos.

La *investigación de operaciones* no hace distinción a los nombres proceso de toma de decisiones y solución de problemas por tanto cualquier término se utilizará indistintamente. Esto comprenderá a la secuencia completa de pasos desde la identificación de un problema hasta su solución. El término *toma de decisiones* se referirá a la selección de una alternativa entre un conjunto de estas. Significa escoger; como tal, la toma de decisiones vendría a ser un paso dentro de este proceso.

1.3. El método científico

El método científico surgió a través del tiempo, a partir de la experiencia práctica de muchos científicos, astrónomos, químicos, físicos y biólogos. En general se ha reconocido a Sir Francis Bacon como el primero que describió formalmente el método, hace más de un siglo. La intención original fue de tener una guía para la investigación en las ciencias físicas, pero el método se adapta fácilmente a cualquier tipo de problema.

A continuación se enumeran los pasos del método científico para resolver problemas:

- ***Definir el problema.*** Este primer paso es crítico porque establece las fronteras para todo lo que sigue. Debe definirse en magnitud, tiempo y grado de importancia. Donde comienza y donde termina, que tan grande o pequeño es, cuando ocurrió y hasta donde puede durar, es relevante o no. Para definir bien un problema se necesita conocerlo.

- ***Recolección de datos.*** La razón para este paso es sencilla, pues se estará más capacitado para resolver problemas si se tiene suficiente información sobre el mismo. Deberá reunirse información pasada, hechos pertinentes, así como soluciones previas a problemas semejantes. Definir alternativas de solución. El método científico se basa en la suposición que las soluciones existen. En este paso se buscan las soluciones posibles y se enumeran.

- ***Evaluar las alternativas de solución.*** Una vez enumeradas todas las alternativas de solución, deberán evaluarse. Esto puede lograrse comparando una por una con un conjunto de criterios de solución u objetivos que se deben cumplir. También puede lograse estableciendo rangos relativos de las alternativas de acuerdo con factores que sean importantes para la solución. En general se hacen las dos cosas.

- ***Seleccionar la mejor alternativa.*** Aquí se toma la decisión de cuál de las alternativas cumple mejor con los criterios de solución.

- ***Puesta en marcha.*** La toma de decisiones en administración debe llevar a actuar. La alternativa seleccionada deberá ponerse en práctica.

Aun cuando se presenta el método científico como un paquete ordenado de pasos separados, existe retroalimentación y sus pasos permiten retroalimentación.

Esto puede darse, por ejemplo, que al tratar de evaluar las alternativas se descubra que no se tiene la información suficiente. Entonces, al pasar de nuevo al segundo paso, puede encontrarse otras alternativas de solución.

1.4. Características de los sistemas administrativos.

El campo de la teoría general de los sistemas nos puede proporcionar algunas ideas sobre las características de los sistemas administrativos.

Entendemos por sistema cualquier conjunto de partes interrelacionadas que cumplen una misión específica, así por ejemplo: una empresa, una silla, un procedimiento financiero, una plancha, todos ellos son sistemas. Cuando utilizamos modelos para analizar los sistemas administrativos es muy importante conocer que tanto se ajustan las características de un modelo a las del sistema que estamos estudiando. Las técnicas de utilizar modelos sencillos para aproximar sistemas complejos no son malas, siempre y cuando no olvidemos los supuestos y limitaciones.

1.5. Modelos de toma de decisión

En el proceso de toma de decisiones, un paso vital es la construcción de un modelo del problema o sistema a estudiar. En la investigación de operaciones utilizamos generalmente un modelo matemático. De por sí, existen otras clases de modelos, ya sean modelos físicos o esquemáticos. Como ejemplo de un modelo físico tenemos el modelo a escala de una planta utilizada en el estudio de redistribución de la misma. El organigrama de una empresa muestra la interrelación entre las diferentes funciones establecidas, este sería un ejemplo de modelo esquemático.

La teoría de decisiones proporciona una manera útil de clasificar los modelos para la toma de decisiones. Utilizando *toma de decisiones* como sinónimo de *selección*, se supondrá que se ha definido el problema, que se tienen todos los datos y se han identificado los cursos de acción alternativos. La teoría de decisiones nos dice que esta tarea de hacer una selección caerá en una de cuatro categorías generales dependiendo de la habilidad personal para predecir las consecuencias de cada alternativa.

Categorías	Consecuencias
Certidumbre	Deterministas
Riesgo	Probabilistas
Incertidumbre	Desconocidas
Conflicto	Influidas por un oponente

1.5.1. Toma de decisiones bajo condiciones de certidumbre.

Si podemos predecir con certeza las consecuencias de cada alternativa de acción, entonces se tiene una tarea de toma de decisiones bajo certidumbre. Otra manera de pensar esto es que existe una relación directa de causa y efecto entre cada acción y su consecuencia. Si esta lloviendo ¿deberá llevarse un paraguas? Si esta nevando ¿deberá llevarse un abrigo?, en ambos casos las consecuencias son predecibles.

Una buena parte de las decisiones que se toman a diario cae dentro de esta categoría. ¿En dónde comer? ¿Qué tipo de transporte utilizar para ir a la escuela o a la universidad? Conceptualmente la tarea es bastante sencilla. Simplemente se evalúan las consecuencias de cada acción alternativa y se selecciona la que se prefiere. Sin embargo, en la práctica, esto puede no resultar tan fácil como nos parece. El número de alternativas puede ser muy grande o tal vez infinito lo que haría muy dispendiosa su numeración.

Varios de los modelos y técnicas que se presentan en la administración de las empresas se diseñan para tomar decisiones bajo certidumbre. La programación lineal, programación de producción y control de inventarios, el análisis del punto de equilibrio todos ellos incluyen modelos determinísticos.

1.5.2. Toma de decisiones bajo condiciones de riesgo

En esta categoría se incluyen las decisiones en las cuales las consecuencias de una acción dada dependen de algún evento probabilista.

Ejemplo 1-1

Supóngase un comerciante que está a cargo de la venta de juguetes para la próxima temporada navideña. La decisión que debe tomar el comerciante es decidir cuantos juguetes ordenar para la siguiente temporada. Supongamos que se pagan $35.000 por cada juguete (en promedio), y solo se pueden ordenar lotes de 100 y se tiene pensado venderlos a $80.000 cada uno. En el caso de no venderlos no tienen valor de recuperación. Se recopilan los registros de ventas pasadas del comerciante y se analiza el crecimiento potencial de las ventas con otros vendedores, llegando a las siguientes estimaciones para la próxima temporada:

Venta de Juguetes	Probabilidad
100	0.3
200	0.3
300	0.4
	1.0

Con los datos anteriores se pude calcular la ganancia para cada combinación de cantidad ordenada y ventas eventuales, la cual llamaremos ganancia condicional. Así por ejemplo, si se compran 300 juguetes y sólo se venden 200, la utilidad neta será de $45.000 por cada juguete vendido menos una pérdida de $35.000 por cada juguete no vendido. Es decir:

200(80.000-35.000)-100(35.000)=9’000.000-3’500.000=$5’500.000

ALTERNATIVAS DE DECISIÓN			DEMANDA DE JUGUETES		
			100	200	300
	Probabilidad		(0.3)	(0.3)	(0.4)
	A1	100	4’500.000	4’500.000	4’500.000
	A2	200	1’000.000	9’000.000	9’000.000
	A3	300	-2’500.000	5’500.000	14’000.000

Otra forma de obtener lo mismo es considerando los ingresos totales menos el costo total, para cada nivel de venta correspondiente a cada nivel de compra o inventario disponible.

En la siguiente matriz se hace esto para cada una de las combinaciones:

MATRIZ DE GANANCIAS CONDICIONALES

G_{11}= 100(80.000)-100(35.000) = 4’500.000

G_{12}= 100(80.000)-100(35.000) = 4’500.000

G_{13}= 100(80.000)-100(35.000) = 4’500.000

G_{21}= 100(80.000)-200(35.000) = 1’000.000

G_{22}= 200(80.000)-200(35.000) = 9’000.000

G_{23} = 200(80.000)-200(35.000) = 9’000.000

G_{31}= 100(80.000)-300(35.000) = -2’500.000

G_{32}= 200(80.000)-300(35.000) = 5’500.000

G_{33}= 300(80.000)-300(35.000) =14’000.000

Si observamos la que hemos llamado matriz de ganancias condicionales o matriz de pagos, ¿Cuántos juguetes deberán ordenarse?. Si se ordenan 200, puede ganarse $9’000.000 ó $1’000.000. Una orden de

300 árboles tiene utilidad potencial que fluctúa entre $-2’500.000 y $14’000.000. ¿Cuál debe escogerse?.

Como resultado más importante de la teoría de decisiones bajo riesgo es indudablemente que debemos seleccionar la alternativa que arroje el mayor valor esperado.

Si nos referimos a su valor numérico, el valor esperado de una variable aleatoria discreta llamada X se calcula como se muestra a continuación:

$$E(X) = \Sigma X_i \, p\,(X_i)_{i=1\ n}$$

Lo anterior nos indica que el valor esperado de X, llámese E(X), es igual a la sumatoria de los valores posibles de X multiplicada por sus respectivas probabilidades.

En el ejemplo que venimos trabajando el valor esperado de cada alternativa quedará así:

E (A_1)= 4’500.000(0.3)+4’500.000(0.3)+4’500.000(0.3) = $4’500.000

E (A_2)= 1’000.000(0.3)+9’000.000(0.3)+9’000.000(0.4) = $6’600.000

E (A_3)= -2’500.000(0.3)+5’500.000(0.3)+14’000.000(0.4) = $6’500.000

Según los resultados del valor esperado para cada opción o alternativa de decisión deberá escogerse la alternativa A_2, cuyo valor esperado es mayor, es decir deberán comprarse 200 árboles para la próxima temporada, puesto que esta alternativa representa la mayor utilidad esperada en condiciones de riesgo.

Otra forma de tomar la decisión es desde el punto vista de las pérdidas esperadas, para lo cual debemos conformar la Matriz de Pérdidas esperadas, de igual forma calcularemos el valor esperado de cada alternativa y escogemos aquella que presente el menor valor esperado; que en este caso, naturalmente deberá ser la misma alternativa A_2.

Existen muchas decisiones administrativas que pueden catalogarse como toma de decisiones bajo riesgo. Algunas de ellas son:

¿Deberá introducirse un nuevo producto en el mercado?
¿Deberá construirse una nueva planta o ampliarse la existente?
¿Cuantas comidas deberá preparar un restaurante para la venta diaria?
¿Qué condiciones deberán ofrecerse para obtener un contrato?
¿Deberá iniciarse un nuevo programa costoso de publicidad?
¿Deberá una compañía petrolera realizar pruebas de penetración costosas antes de hacer una nueva perforación?

1.5.3. Toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre

Es esta una categoría muy común para la toma de decisiones aunque su nombre parece ser muy peculiar. Tiene parecido con la toma de decisiones bajo riesgo, aunque con una diferencia importante; ahora ya no se tiene el conocimiento de las probabilidades de los eventos futuros, es más, no se tiene idea de qué tan diferentes sean las consecuencias. Para el mismo ejemplo de los juguetes de temporada Navidad equivaldría a tratar de decidir cuantos juguetes ordenar sin tener la más remota noción de cuantos pueden venderse. Otro ejemplo sería el de tratar de adivinar si al tirar una moneda al aire el resultado es cara o sello sin saber si la moneda tiene dos caras, es legal o incluso si tiene los dos sellos.

En realidad, actuar en esta categoría es como disparar en la oscuridad. Será que ¿Podríamos encontrar la manera óptima de disparar en la oscuridad? No obstante, podemos encontrar varios métodos para manejar problemas de este tipo.

En primer lugar, debemos tratar de reducir la incertidumbre obteniéndose la información adicional pertinente sobre el problema. Si esto no resulta, aun así tenemos otras vías de acción.

La forma mas utilizada para encarar este tipo de situaciones es introduciendo directamente en el problema los llamados sentimientos subjetivos de optimismo y pesimismo. Este accionar, en muchas ocasiones, tiene una base razonable. Un ejemplo es la decisión de cuántos juguetes de temporada de Navidad debería ordenar el comerciante del ejemplo visto anteriormente. Se tendría razón al decir que las ventas de juguetes son buenas: ya que el comerciante de juguetes, haría una buena publicidad, si hay competencia en el mercado. Si el comerciante es una persona optimista, puede emplear una estrategia *Máximas.*

Significa entonces que él selecciona la acción que maximiza el pago o ganancia máxima. En el ejemplo visto, éste corresponde a $14’000.000, de tal manera, que con éste enfoque se ordenarían 300 juguetes.

Por otra parte, si es pesimista, puede actuar de forma conservadora y emplear una estrategia *maximin;* seleccionando entonces la alternativa con el mayor de los pagos o ganancias mínimas. Los pagos mínimos calculados para las tres alternativas son: $4’500.000, $ 1’000.000 y $-2’500.000. Obviamente, seleccionaría el más grande, esto es $4’500.000 por tanto, se ordenan 100 juguetes.

Máximas y Maximin son posiciones extremas. Claro está que se podría seleccionar alguna acción intermedia.

Una estrategia alternativa consiste en convertir el problema a uno de toma de decisiones bajo riesgo, para que pueda hacerse una selección óptima. Primero pueden expresarse aquellos conocimientos o predicciones que se tengan sobre los eventos en términos de una distribución de probabilidad.

Si no se tienen bases para hacer estimaciones subjetivas, se puede emplear el *principio de razón insuficiente*: Esto significa que podemos suponer que todos los eventos son igualmente probables. Así para las ventas de juguetes, se le asignará una probabilidad de 1/3 a cada evento. Paso seguido se calcula los valores esperados para cada alternativa y se escoge la de mayor valor.

$E(A_1)$ = 4’500.000(1/3) + 4’500.000(1/3)+ 4’500.000(1/3) = 4’500.000

$E(A_2)$ = 1’000.000(1/3) + 9’000.000(1/3) + 9’000.000(1/3) = 6’333.333

$E(A_3)$ = -2’500.000(13) +5’500.000(1/3) +14’000.000(1/3) = 5’666.667

En este caso, se ha de escoger la alternativa A_2, puesto que su valor esperado es el mayor.

1.5.4. Toma de decisiones bajo condiciones de conflicto

Ésta es la última de las cuatro categorías antes definidas. Aquí se presentan aquellos casos de toma de decisiones bajo incertidumbre en que hay un oponente. Las probabilidades de los eventos no sólo se desconocen, sino también están influenciadas por un oponente cuya meta es vencer. Esta es la situación típica de cualquier competencia: juegos, negocios y en la misma guerra.

1.6 Toma de decisiones a través de árboles de decisión.

En el momento de la toma de decisión, nos encontramos en un contexto incierto cuando los informes o los datos relativos a esta decisión dependen de eventos aleatorios, a los cuales pueden asociarse probabilidades. Veamos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 1-2

Compañía de Productos Barranquilla investiga la posibilidad de producir y mercadear cobertizos de almacenamientos para patios. Al llevar a cabo este proyecto necesitaría de la construcción de una planta manufacturera grande o pequeña. El mercado para el producto fabricado (cobertizos de almacenamiento) puede ser favorable o desfavorable. Tiene desde luego la opción de no desarrollar el nuevo producto.

Primera parte: Un árbol de decisión es la representación gráfica de un proceso de decisión que indica alternativas, estados naturales y sus probabilidades respectivas, así como los resultados para la combinación de alternativas y estados naturales.

Pasos:

1. Definir el problema.
2. Estructurar o dibujar el árbol de decisión.
3. Asignar probabilidades a los estados naturales.
4. Estimar resultados para cada posible combinación de alternativas y estados naturales.
5. Resolver el problema.

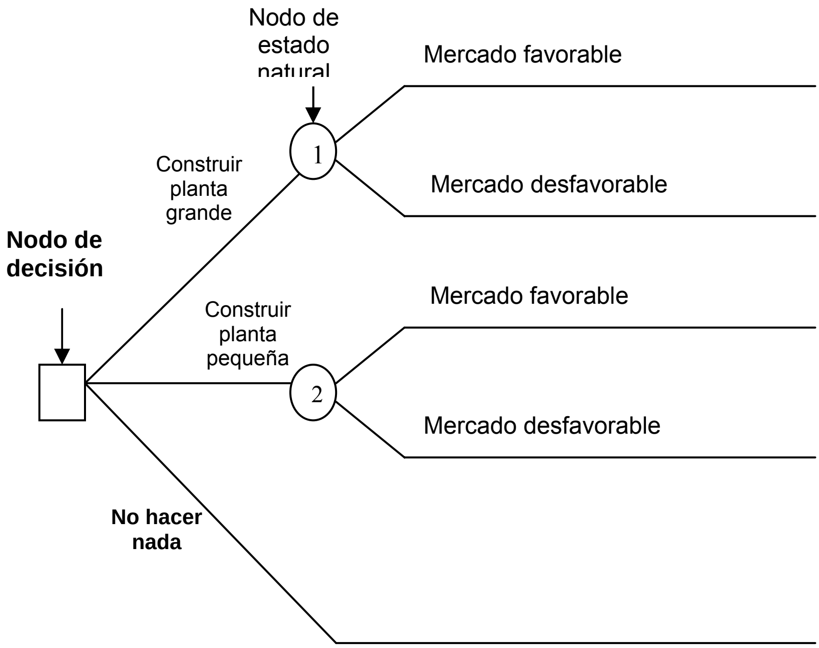
Con un mercado favorable, una instalación grande proporcionara una utilidad neta $20.000. Si el mercado es desfavorable produciría una pérdida neta de $180.000. Una planta pequeña acarrearía una utilidad neta de $100.000 en un mercado favorable pero una pérdida neta de $20.000 si el mercado fuera desfavorable.

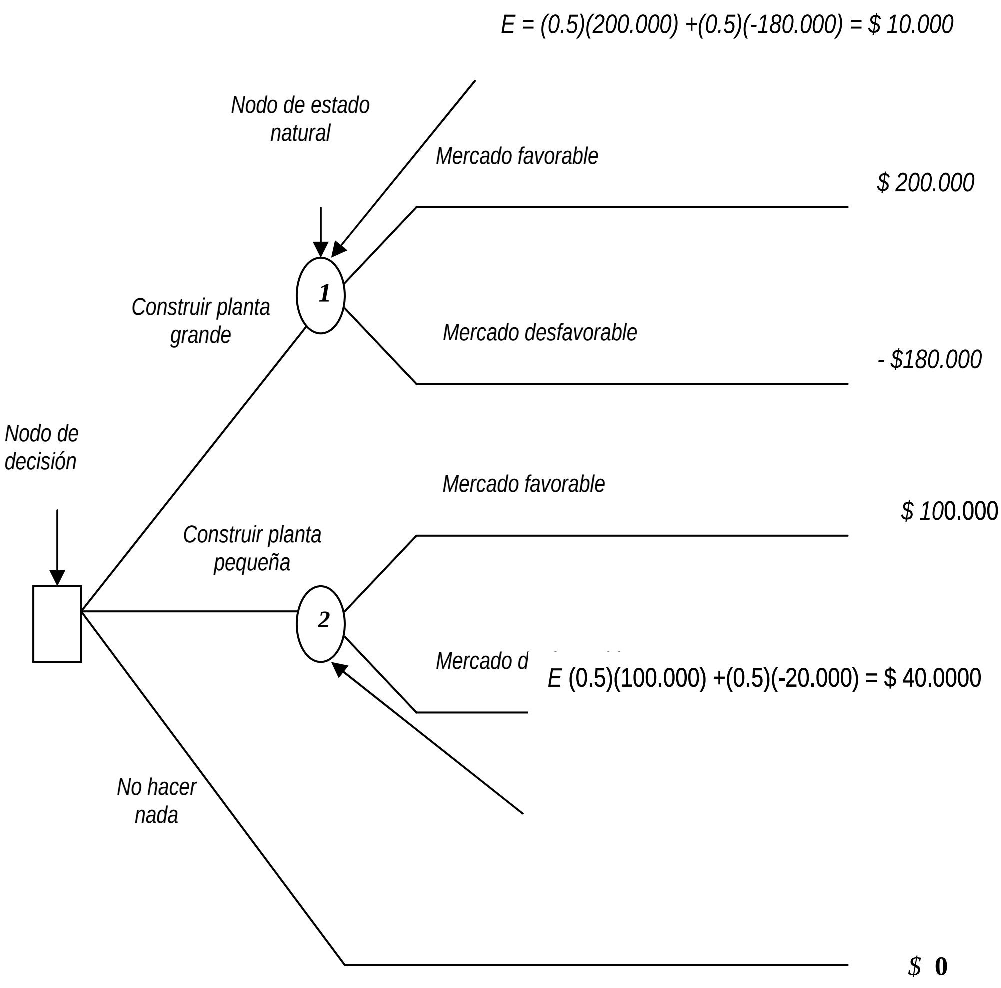
El gerente de la Compañía cree que la probabilidad de un mercado favorable es exactamente la misma que la de un mercado desfavorable; esto es, cada estado natural tiene una oportunidad de 0,50.

Segunda parte: Si el gerente decide realizar una encuesta de mercado cuyo costo asciende a $10.000. El nodo del estado natural 1 tiene dos ramas que salen de él. Digamos que hay una oportunidad del 45% de que los resultados de la encuesta indiquen un mercado favorable para los cobertizos de almacenamiento. Habrá entonces una probabilidad del 55% de que los resultados de la encuesta sean negativos. El 78% de probabilidad de un mercado favorable para los cobertizos dado un resultado positivo de la encuesta de mercado. Por supuesto que se puede encontrar una alta probabilidad de un mercado desfavorable, dado que la investigación determinó que el mercado era bueno. No se debe olvidar, de cualquier forma, que existe una oportunidad de que la encuesta de mercado de $10.000 no haya tenido información perfecta o ni siquiera confiable, cualquier estudio de investigación esta sujeto a error. En este caso existe una oportunidad del 22% de que el mercado para cobertizos sea desfavorable aunque los resultados de la encuesta sean positivos.

De la misma forma, hay una oportunidad del 27% de que el mercado de cobertizos sea favorable si los resultados de la encuesta sean negativos.

La probabilidad es mucho más alta, 73% de que el mercado sea en realidad desfavorable dado que la encuesta sea negativa.





1.7 Aplicaciones modelos de toma de decisión

La panadería Pan de Oro prepara todos los días su famoso pan francés. Este se vende a $1.000 y cuesta $500 prepararlo. El pan que no se vende se lleva a la mesa de descuento en donde se vende a $500 la pieza. Aun a este precio, la mitad del pan de la mesa de descuento que no se vende hay que retirarlo.

El problema de Pan de Oro es decidir cuantas piezas prepara para un día típico. La historia dice que la demanda de pan ha sido la que se muestra en la tabla 1-1.

TABLA 1-1

Demanda en Docenas de piezas	*Probabilidad*
3	0.10
4	0.40
5	0.40
6	0.10

En la matriz de pagos que se muestra enseguida, identifíquese la alternativa de decisión que maximiza.

		Eventos		
		E_1 (0.4)	E_2 (0.5)	E_3 (0.1)
Alternativas de decisión	D_1	80	400	300
	D_2	100	300	400

En la matriz de pagos que se muestra enseguida, identifíquese la alternativa de decisión que minimiza.

		Eventos		
		E_1 (0.2)	E_2 (0.6)	E_3 (0.2)
Alternativas de decisión	D_1	-200	1800	2000
	D_2	150	600	2000
	D_3	-660	100	3000

Castro-Cherassi está planeando el desarrollo de un conjunto de condominios cerca del Barrio El Silencio. El terreno que se piensa comprar costará $600'000.000.oo. El desarrollo del área común costará otros $400.000.000.oo. Las unidades costarán $30´000.000.oo cada una, y se espera que se vendan por $70´000.000.oo. El problema es decidir cuantas unidades construir, si se construyen. Si se obtiene una demanda alta por las unidades se podrán vender 40 de ellas a precio completo. Se piensa que la probabilidad de una demanda alta es 0,35; si se obtiene una demanda media, sólo se podrán vender 30 de ellas a precio completo. Se hará un remate de las unidades restantes con una pérdida de $5´000.000 por unidad. La probabilidad de una demanda media es 0,55.

Si la demanda resulta ser pequeña, sólo 20 se podrán vender a precio completo y el resto podrá venderse con una pérdida de $5´000.000.oo por cada una. ¿Deberá Castro - Cherassi construir 0, 20, 30 ó 40 unidades?

Lady Modas es un comprador en el departamento de damas de la tienda Francisca Miranda. Está tratando de decidir cuantas docenas de vestidos de cierta línea de otoño comprar. Cada docena vendida durante el otoño generará $1’500.000.oo de ganancia para la tienda. Cada docena no vendida al final de la temporada tendrá un costo para la tienda de $50.000.oo. Lady Modas piensa que la demanda para temporada será de 4, 5, 6 ó 7 docenas de vestidos con probabilidades respectivas de 0,4; 0,3; 0,2 y 0,1. ¿Cuántas docenas deberá ordenar?

La compañía TERPEL Oil está tratando de decidir si compra los derechos de perforación sobre el rancho de Pedro Cogollo. La compañía piensa que existe una probabilidad de 0,20 de encontrar petróleo y si se encuentra, se tendrá un rendimiento de $600’000.000.oo después de y sobre el costo de los derechos de perforación. Pedro Cogollo quiere $100.000.000.oo por los derechos ¿Qué curso de acción se debe recomendar a la TERPEL Oil?

Confecciones El Industrial necesita reemplazar una de sus máquinas y está considerando la compra de la máquina A ó de la B. La máquina A tiene un costo inicial de $5´000.000.oo y costos de operación por unidad es de $5.000. Por otro lado, la máquina B tiene un costo inicial de $6´500.000.oo y costos de operación de $3.500.oo por unidad. La demanda durante la vida útil de las máquinas es incierta, pero la administración piensa subjetivamente que puede ser de 100.000, 200.000 ó 300.000 unidades con probabilidades respectivas de 0,25; 0,35 y 0,40. ¿Qué máquina deberá comprar Confecciones El Industrial?

El propietario de un supermercado piensa ofrecer a su clientela un servicio de entregas a domicilio. Esta decisión dependerá de afluencia de la clientela y del aumento en las cifras de ventas después de la implantación del servicio. El propietario puede elegir entre dos tipos de equipo (A y B). Después del estudio de mercado y el análisis de costos, se tiene el siguiente informe de costos:

CIFRAS DE VENTAS

Sin Servicio		Con Servicio	
Ingreso	Probabilidad	Ingreso	Probabilidad
$ 600.000.000.oo	60%	$ 810.000.000.oo	70%
750.000.000.oo	30%	900.000.000.oo	20%
810.000.000.oo	10%	1060.000.000.oo	10%

COSTO DEL SERVICIO

Costo	Equipo	
	A	B
Costos Fijos por año	$ 5.000.000.oo	$ 10.000.000.oo
Costos Variables por año por peso de ventas	1.5%	1%

El propietario se encuentra ante tres posibilidades:

- No ofrecer el servicio de entregas a domicilio
- Ofrecer el servicio instalando el equipo A y
- Ofrecer el servicio instalando el equipo B

Aplique los pasos para tomar la decisión a través de un árbol de decisión más conveniente desde el punto de vista económico.

Una fábrica de vidrio especializada en cristal está afrontando un sustancial cuello de botella, y la administración de la empresa está estudiando tres posibles cursos de acción: a) Un plan de subcontratación; b) Implantar tiempo extra de producción, ó c) Construir nuevas instalaciones. La solución correcta depende de gran parte de la demanda futura, la cual puede ser baja, media o alta. La administración ha acordado las probabilidades respectivas como 0,10, 0,50 y 0,40 En la tabla siguiente se muestra un análisis de costos que refleja el efecto sobre las utilidades

DECISIONES	UTILIDAD ($000) si la demanda es		
	ALTA (0.10)	MEDIA (0.50)	BAJA (0.40)
A= Arreglo de subcontrato	10	50	50
B= Comenzar tiempo extra	-20	60	100
C= Construir instalaciones	-150	20	200

Construya el árbol de decisión para elegir por el valor esperado la mejor alternativa.

Aunque las estaciones independientes de gasolina han pasado tiempos difíciles, Altamira ha estado pensando comenzar con una nueva estación independiente de gasolina. El problema de Altamira es decidir que tan grande debe ser su estación. El retorno anual de la inversión, dependerá tanto del tamaño de su estación como de un número de factores relacionados con la industria del petróleo y de la demanda de gasolina. Después de un cuidadoso análisis, Altamira desarrolló la siguiente tabla:

Tamaño de la primera estación	Mercado Bueno (0.35)	Mercado Medio (0.40)	Mercado malo (0.25)
Pequeño	50.000	20.000	-10.000
Mediano	80.000	30.000	-20.000
Grande	100.000	30.000	-40.000
Muy Grande	300.000	25.000	-160.00

Los planeadores a largo plazo de una Compañía Generadora de Energía, han previsto la necesidad de añadir 400 Megawatts de potencia a su sistema en el año 5. Deben elegir entre una planta solar que costará aproximadamente 150 millones de dólares y una planta de carbón que costará 20% menos. Ambas plantas tienen una vida útil de 20 años. La construcción de la planta solar requiere aprobación pública, pero la administración considera que hay una alta probabilidad (0,9) de obtenerla. Si la planta no es aprobada, la instalación continuará careciendo de energía por un monto equivalente a 5% del costo calculado de la planta en el segundo año, y tendrá que comprar la energía necesaria en otra fuente, con un costo de 12 millones de dólares.

Si la demanda de energía es alta y la planta solar puede operar totalmente, los costos de operación (que no incluyen depreciación) son calculados en 4 millones de dólares al año. Sin embargo, los planeadores consideran que hay 40% de probabilidad de que la planta puede operar un ciclo completo, lo cual incrementaría 10% los costos de operación.

Si se opta por la planta de carbón, los costos serán 5 millones de dólares al año, a menos que los costos de control de polución sean inevitables. Si los filtros de aire no son satisfactorios y la preocupación pública es acentuada, podría incrementarse el costo de la instalación en 10 millones de dólares en el tercer año. Posterior a la instalación de la planta. La administración cree que hay una posibilidad de 50-50 de que eso ocurra, y quiere la orientación para decidir.

Utilice un árbol de decisión acompañado de los datos financieros para ayudar a identificar la decisión apropiada, con base en el criterio de valor esperado.

Capítulo 2

Sistemas y Modelos de Inventarios

Objetivos

- Identificar y Conocer en detalle los sistemas y modelos de inventarios para empresas manufactureras y comerciales.
- Determinar el tamaño de lote económico, perfil y modelamiento matemático, aplicaciones.
- Determinación del perfil y modelamiento de modelos basados en el modelo del lote económico.
- Mostrar el perfil y modelamiento de un modelo fijo de reorden basado en el modelo del lote económico.
- Aplicar los modelos de cantidad fija de reorden cuantos los costos por faltantes sean desconocidos.
- Aplicar los modelos fijos de reorden cuando se conocen los costos por faltantes.
- Aplicar el análisis ABC para clasificar inventarios.

2.1 Necesidad de los inventarios y decisiones básicas en los sistemas de inventarios a través de los modelos.

La necesidad de los inventarios surge de las diferencias entre el tiempo y la localización de la demanda y el abastecimiento. El uso los inventarios se justifican al actuar como un amortiguador entre la oferta y la demanda. Esto ocurre tanto para la materia prima como para un proceso de producción o en bienes terminados y almacenados por el fabricante, el distribuidor o un comerciante.

Tener almacenado inventarios cuesta dinero. Representan capital inactivo. Así por ejemplo tenemos que el costo de los automóviles de lujo nuevos y los repuestos de grandes plantas son muy altos para permitir grandes volúmenes de inventarios. Pero aún una tienda de barrio se preocupa por tener demasiado inventario, lo que significa un desperdicio de dinero inmovilizado. Es necesario entonces tener un balance entre los costos de inventario y el servicio al cliente.

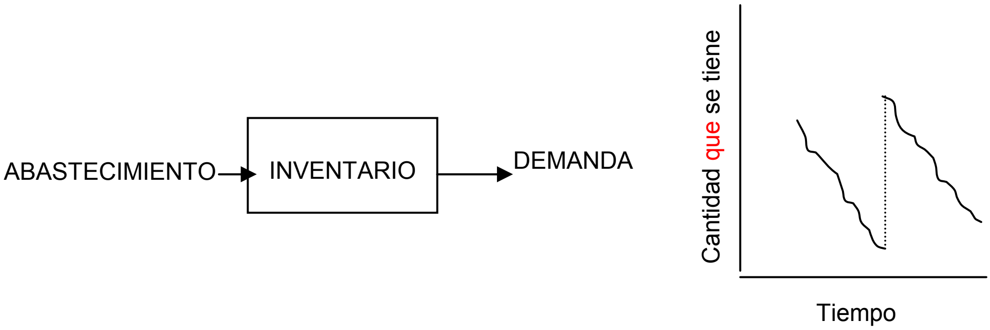


FIGURA 2-1

La Figura 2-1, mostrada anteriormente ilustra los conceptos de inventarios. La cantidad de inventario que se tiene se comporta de manera cíclica. Comienza con un nivel alto y la cantidad se reduce conforme se sacan las unidades. Cuando el nivel baja se coloca una orden, la cual eleva de nuevo el nivel de inventario y el ciclo se repite. La cantidad de inventario se controla con el tiempo y la cantidad de cada orden. Así, las dos decisiones básicas a nivel cuantitativo en manejo del inventario son:

- Cuánto ordenar
- Cuándo ordenar

2.2 Clasificación de los sistemas de inventarios.

Es conveniente dividir el estudio de los sistemas en dos categorías:

- Demanda y tiempo de entrega deterministas

- Demanda y tiempo de entrega probabilista

En la primara categoría tanto la demanda como el tiempo de entrega son conocidos y constantes. Los sistemas que tienen demanda o tiempo de entrega probabilistas incluyen incertidumbre y riesgo para el administrador.

Existen tres tipos importantes de inventarios:

- Orden repetitiva, demanda independiente
- Una sola orden, demanda independiente
- Orden repetitiva, demanda dependiente

El primer tipo de sistema es la situación más común en el mundo administrativo. Los sistemas de una sola orden pueden analizarse con matrices de pago como se vio en el Capítulo 1. Los sistemas con demanda dependiente surgen más bien en procesos de manufactura en donde la demanda de partes depende de la demanda del artículo terminado.

Otra forma de clasificar los sistemas de inventarios es por su relación con la secuencia completa de operaciones de producción. Con este método pueden distinguirse cuatro tipos de inventarios:

a) Abastecimientos
b) Materiales
c) En proceso
d) Bienes terminados

Los abastecimientos o suministros incluyen artículos de consumo como papel, lápices, tintas, formas, etc. Los materiales se refieren a artículos necesarios para completar algún producto terminado y casi siempre tienen una demanda dependiente. Los artículos en proceso son bienes parcialmente terminados y el producto final del proceso son los bienes terminados.

2.3 Clasificación de los modelos de inventarios.

Los modelos de inventario pueden agruparse en dos grandes categorías:

Modelos de cantidad fija de reorden
Modelos de período fijo de reorden

El manejo de un modelo de cantidad fija de reorden se muestra en la Figura 2-2. La demanda se satisface a partir del inventario que se tiene. Si esto no es adecuado, entonces la orden se satisface después o la venta se pierde. Cada vez que se hace un retiro, el balance del inventario se ajusta para mostrar continuamente (o perpetuamente) el estado actual. Cuando el inventario baja a un punto de reorden establecido, se coloca una orden de reabastecimiento. Como las órdenes de reabastecimiento son siempre por la misma cantidad, este se llama cantidad fija de reorden.

El modelo de período fijo de reorden se muestra en la Figura 2-3. De nuevo la demanda del cliente se satisface con el inventario que se tiene y los faltantes traen como resultado ya sea él satisfacerlos después o la pérdida de la venta. Pero aquí no existe una actualización perpetua de los registros de inventario. En su lugar, se hacen revisiones periódicas a intervalos fijos de tiempo. Cuando se hace una revisión, la cantidad que se tiene (más la cantidad ordenada menos los faltantes) se compara con el máximo deseado y se hace un pedido por la diferencia.

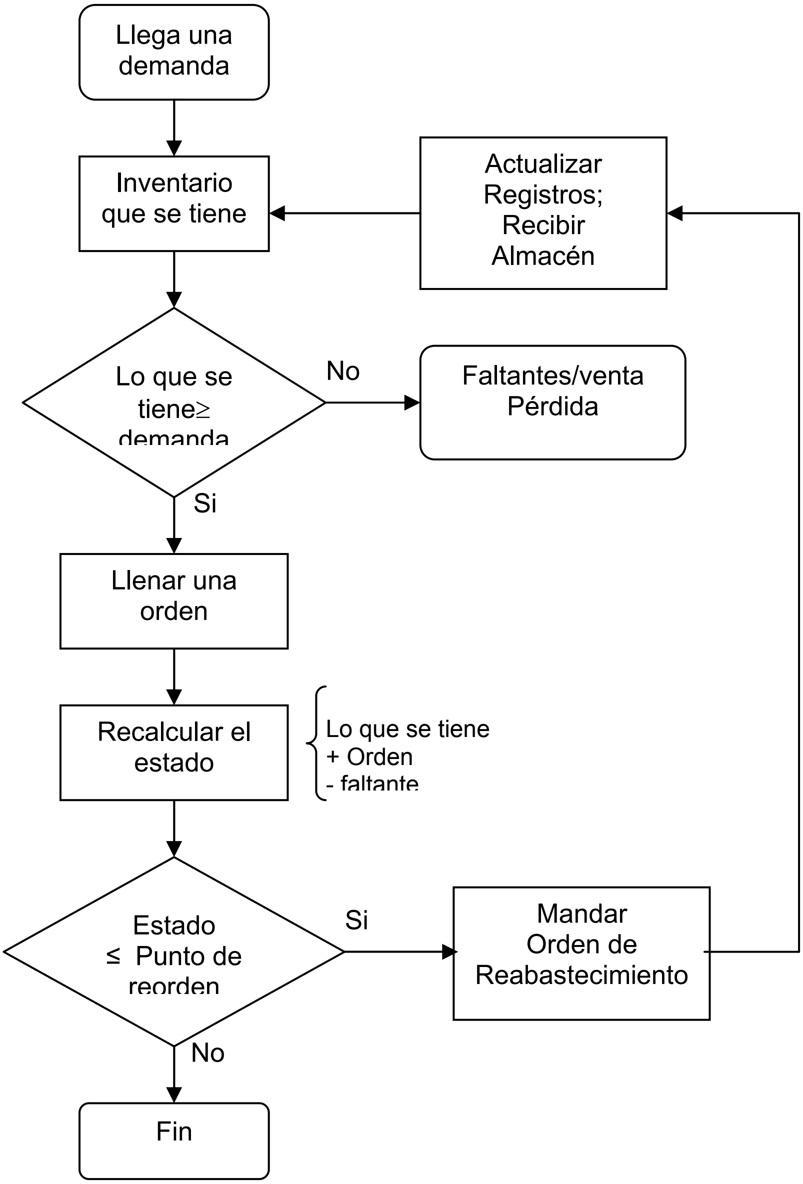


FIGURA 2-2. Modelo de cantidad fija de reorden

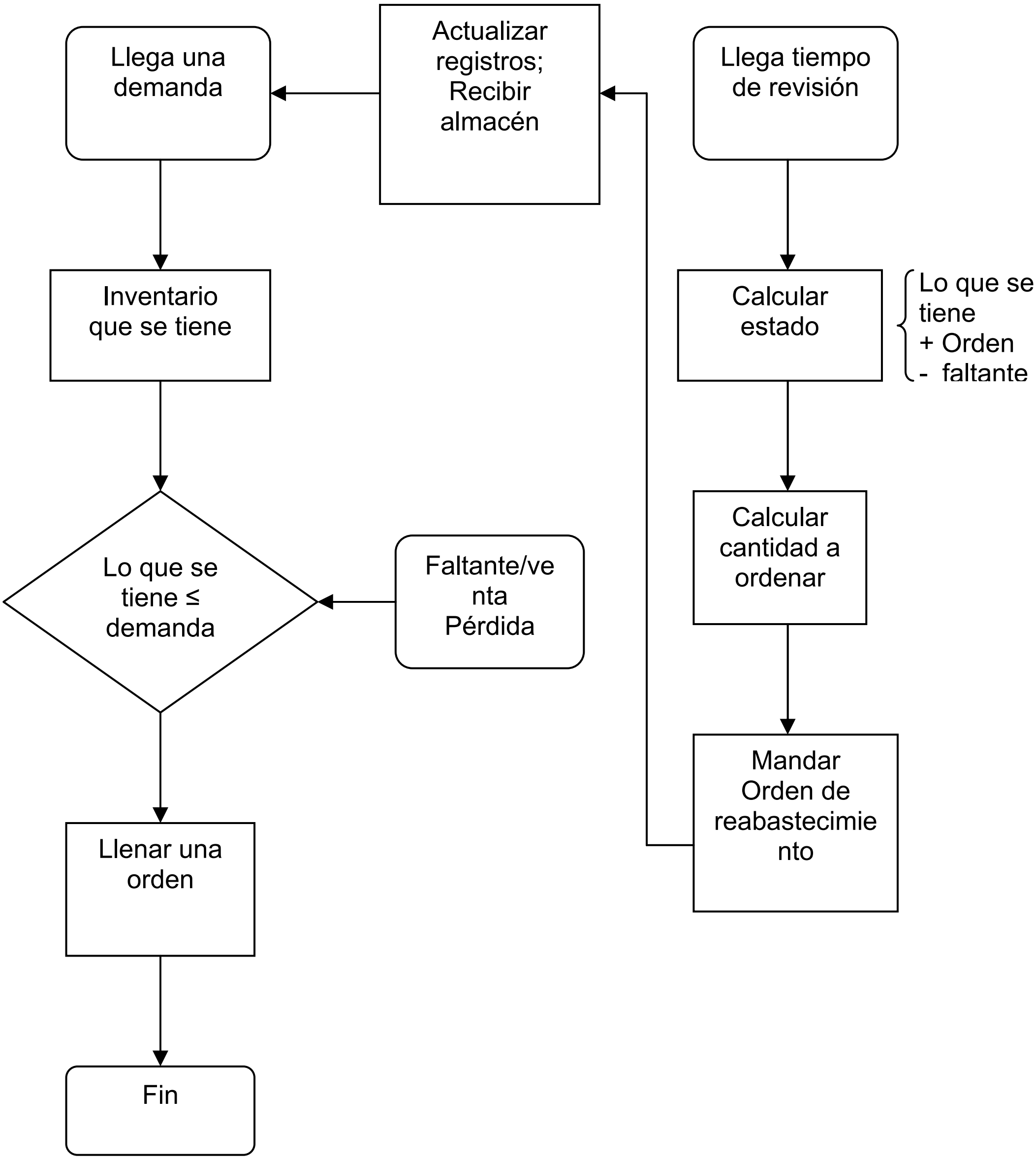


FIGURA 2-3. Modelo de período fijo de reorden

2.4 Costos de los inventarios.

Para cualquier empresa que administre inventarios, son un beneficio mixto. Se incurre en costos para adquirir los bienes y para mantener el inventario, agotando recursos que pueden invertirse ya sea en publicidad o investigación o cualquier otra prioridad. Por otro lado se está mejorando el servicio al cliente al tener un artículo en almacén al momento que éste lo demande. El desafío para el administrador es alcanzar el nivel deseado de servicio al cliente a un costo mínimo. Los costos asociados con los inventarios se describen a continuación.

2.4.1 Costo de compra.

Debemos tener claro que el costo de compra de un artículo es importante. Este costo incluye el precio del artículo propiamente más los impuestos del caso y los costos de transporte. Si la compañía produce el artículo, entonces el costo completo que debe incluirse se llama costo de producción. El costo unitario de compra se simboliza por "c".

2.4.2 Costo de ordenar.

Para hacer un pedido siempre se incurre en costos. Para los negocios, los costos de ordenar incluyen la mano de obra para preparar la orden de pedido, las formas usadas, timbres de correo, llamadas telefónicas, Internet, fax y cualquier otro costo directo. Si el artículo se produce internamente, el costo de ordenar incluirá todos los costos de preparación. El costo de hacer un pedido se representa por "Co".

2.4.3 Costo de conservación.

Esta categoría involucra varios costos. Uno es el almacenamiento físico de cada artículo. Esto puede bajo para partes pequeñas pero alto artículos grandes. La refrigeración aumentaría el costo. Otro costo se debe a las condiciones de perecedero. Artículos de comida pueden deteriorarse en inventario. También la obsolescencia tecnológica puede depreciar el valor de un inventario. Las condiciones del clima pueden por ejemplo causar oxidación en piezas metálicas. Finalmente se incurre en costos de conservación al tener el capital inmóvil en un inventario en lugar de otro tipo de inversión. Representado un costo de oportunidad, pero lo cierto es que es real. En general, los costos anuales de conservación de un inventario oscilan del 10% al 40% del valor promedio del mismo. El costo anual de conservación por unidad se representará por "Cc".

2.4.4 Costo de faltantes.

Cuando no se tiene disponible un artículo, un cliente se va insatisfecho y tal vez no regrese. Se ha perdido una venta y también algo de credibilidad. En estos casos podría no causarse mucho daño si se tiene permitido faltante, es decir, si la demanda puede satisfacerse después. El costo por faltante por unidad por año se simboliza por "Cf”.

2.5 Modelo del Lote Económico o Modelo de compra

El Primer modelo de inventarios que se considera es un modelo de cantidad fija de reorden. Con este tipo de modelo es necesario determinar la cantidad fija que se debe ordenar cada vez y un punto de reorden que indique cuando se debe hacer el pedido. Para simplificar el análisis se harán las siguientes suposiciones:

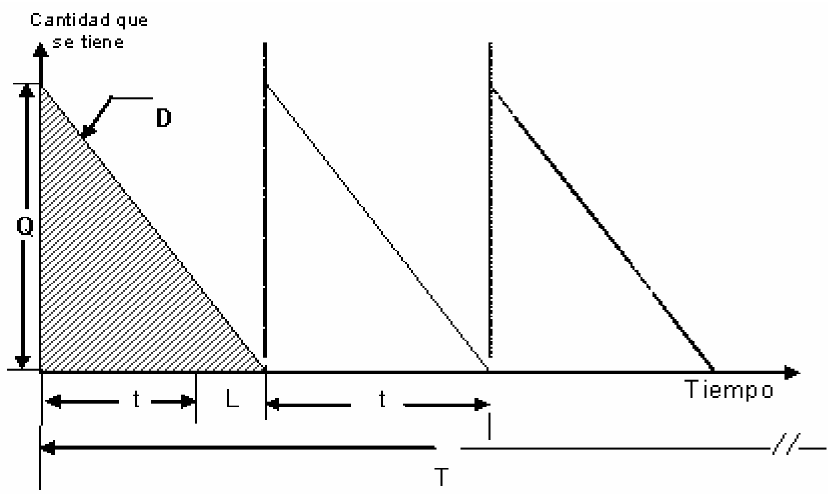
1) La demanda es uniforme (constante y contínua)
2) El abastecimiento se recibe todo junto, no es en partes (global)
3) El tiempo de entrega es constante
4) Todos los costos son constantes
5) No se permiten faltantes

Aunque estas suposiciones muy pocas veces, si es que alguna, son ciertas a la larga, con frecuencia son aproximaciones razonables a corto plazo.

El modelo del Lote Económico se desarrolló en particular para esta situación. Es un modelo muy antiguo que data de 1.915, fecha en la que F. W. Harris lo desarrolló y se aplica ampliamente.

Un enfoque común para desarrollar los modelos de inventarios es obtener una expresión matemática para los costos totales y después buscar el mínimo.

PERFIL DEL MODELO



Donde: **FIGURA 2-4**

Q: Cantidad óptima a pedir (unidades)

D: Tasa de demanda (unidades /año)

R: Punto de reorden (unidades)

t : tiempo de un período(días)

L: tiempo de entrega o tiempo de anticipación (días)

T: Tiempo Planeado = 1 Año

La demanda es uniforme con unidades por unidad de tiempo (año). Se reciben Q unidades de abastecimiento global. El nivel de inventario comienza en un punto pico de Q unidades y declina en forma estable hasta un punto de reorden R, en este momento se coloca una nueva orden de Q unidades. Cuando se recibe la orden, el nivel de inventario regresa a su punto pico y el ciclo se repite. Como el tiempo de entrega es constante, no hay razón de que ocurran faltantes.

Costos Anuales de Inventario = Costos Anuales de Comprar +
Costos Anuales de Ordenar +
Costos Anuales de Conservación

Como en todos los períodos ocurre lo mismo y si tenemos N períodos durante un año, entonces:

Costo Anual de Inventario = Costo de un Período X N

C´ = Costo de un Período =

Costo de Comprar/Período + Costo de Ordenar/Período + Costo de Conservar/Período

$$C' = Qc + Co + \underline{tQCc}$$

2

Por otra parte el Número de Períodos $N= \frac{D}{Q}$ y $t = \frac{Q}{D}$

Se tiene que el costo Anual en Inventario:

$$CT/año = C´x\ N= \left(QC+Co + \frac{Q}{2D} x QCc \right) \frac{XD}{Q}$$

Finalmente: $$CT/año= Dc + \frac{DCo}{Q} + \frac{QCc}{2}$$

¿Cómo se encuentra el mínimo? Para cualquier valor dado de D, Co y Cc, puede encontrarse, por prueba y error, el valor de Q que minimice el costo total. También puede derivarse la fórmula del costo total e igualar a cero, obteniéndose que la cantidad que debe ordenarse cada vez es:

$$Q = \sqrt{2DCo/Cc}$$

En donde D = Demanda por año en unidades

Co = Costo de ordenar por orden en unidades monetarias

Cc = Costo de conservación por unidad por año en unidades Monetarias

Q = Cantidad a ordenar en unidades

¿Cómo obtenemos el punto de reorden? Como se supuso que el tiempo de entrega es constante, sólo se tiene que igualar el punto de reorden y la demanda que ocurrirá durante el período de entrega. Esto se llama *demanda de tiempo de entrega*. Matemáticamente,

Si: L = tiempo de entrega en días

D = demanda anual

R = punto de reorden

Entonces $R = \frac{DL}{365}$ (unidades)

Hay que tener siempre presente que la demanda y el tiempo de entrega tienen que estar en la misma escala de tiempo.

EJEMPLO 2-1:

Considérese un fabricante que necesita 4.000 piezas de ensamble para su producción del próximo año. El costo de las unidades es de $2.000.oo cada una. Se dispone en el mercado local con un tiempo de entrega de 5 días, pero el costo de ordenar para el fabricante es de $2.000.oo por orden. El costo de conservación es de $1.400.oo al año por almacenamiento, más el 10% por unidad por año por el costo de oportunidad del capital. ¿Cuántas unidades debe ordenar el fabricante con el fin de minimizar los costos totales del inventario?

De los datos suministrados se tiene:

D = 4.000 unidades/año

Co = $2.000.oo/orden

Cc = $1.400.oo+ (10%)($2.000.oo) = $ 1.600.oo/unidad/año

Aplicando la ecuación:

$$Q = \sqrt{2DCo/Cc}$$

$$Q = \sqrt{2(4000)(2000)/1600}$$

$$Q = \sqrt{10000}$$

$$Q = 100 \text{ unidades}$$

El punto de reorden es:

$$R = \frac{LD}{365} = \frac{(5)(4000)}{365} = 55 \text{ unidades}$$

Entonces la política será ordenar 100 unidades siempre que el inventario baje a 55 unidades. El costo total por año será:

$$CT/año = Dc + \frac{D}{Q}Co + \frac{Q}{2}Cc = 4.000(2000) + \frac{4.000}{100}(2000) + \frac{100}{2}(1600) = \$8.160.000$$

¿Cuántos pedidos se harán en un año?

$$N = \frac{D}{Q} = \frac{4.000}{100} = 40 \text{ ordenes}$$

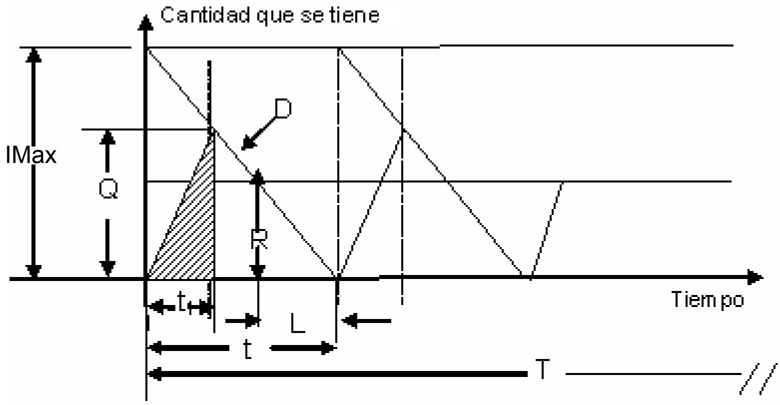
¿Cuántos días calendario habrá entre las órdenes? Si se usan 365 días por año:

$$\text{Días entre órdenes} = \frac{365}{N} = \frac{365}{40} = 9 \text{ días}$$

2.6 Casos especiales: Modelo de reabastecimiento uniforme/ Manufacturación

El inventario de bienes terminados de un fabricante no se abastece de solo golpe con una cantidad global. Los bienes llegan uno a uno conforme salen del proceso productivo. De hecho el reabastecimiento es uniforme como lo es la demanda supuesta por el modelo del Lote Económico. La tasa de reabastecimiento o manufacturación debe ser mayor que la tasa de demanda, de otra manera no habría inventario. A continuación se presenta el perfil del modelo:

FIGURA 2-5: PERFIL DEL MODELO



Donde:

Q: cantidad de Reabastecimiento o cantidad óptima a Manufacturar (unidades)

D: tasa de demanda (unidades/año)

M: tasa de Manufacturación o Reabastecimiento Uniforme (unidades/año)

T: tiempo Planeado (1año)

t : tiempo de un período, tanda o corrida de producción (días)

(M-D): tasa de acumulación (Unidades/año)

t_1: tiempo producción o manufacturación (días)

R: punto de reorden o preparar la siguiente tanda

L: tiempo de preparación o anticipación siguiente corrida

Durante el período de reabastecimiento, el inventario crece con una tasa igual que la diferencia entre las tasas de demanda y manufacturación. El nivel de inventario máximo se alcanza después de un tiempo t_1, es decir:

$$IMAX = (M-D)\ t_1$$

Entre los períodos de manufacturación (tandas o corridas), el inventario decrece con una tasa D de demanda.

Se planea desarrollar una ecuación para el costo total anual de inventario.

CT/año = Costo anual de Manufacturar +Costo anual de preparar + Costo anual de conservación

De igual manera como ocurre en modelo del Lote Económico se pude determinar los costos de inventario de un período o tanda de producción y multiplicar por el número de períodos anuales, esto es:

CT/año = C´x N, donde:

C´= Costos de inventario de un período

N = Número de períodos o tandas de producción

$$C' = Qc + Co + \frac{IMAX.t}{2} Cc \qquad y \qquad N = \frac{D}{Q}$$

Por otra parte,

$$I_{MAX} = (M-D)t_1 \quad y \quad t_1 = \frac{Q}{M}, \text{ luego: } I_{MAX} = (M-D)\frac{Q}{M} = Q(1-D/M)$$

$t = \frac{Q}{D}$, volviendo a la ecuación del costo total anual

$$CT/año = \left(Qc + Co + \frac{Q}{2}(1-D/M)\frac{Q}{D}Cc\right)\frac{D}{Q} = Dc + \frac{DCo}{Q} + \frac{Q}{2}(1-D/M)Cc$$

A partir de la ecuación del costo total anual de inventario se puede determinar la cantidad Q a producir que minimiza ese costo por prueba y error o derivando la ecuación con respecto a Q e igualando a cero. Con este último procedimiento el valor de Q se consigue con la expresión:

$$Q = \sqrt{2\,DCo/Cc(1-D/M)}$$

El punto de reorden o punto en que se inicia la preparación del siguiente período de producción, estará dado por:

$$R = \frac{D.L}{365}$$

EJEMPLO 2-2:

Recordando el ejemplo dado en el modelo del lote económico donde:

D = 4.000 unidades/año

Co = \$2000 /orden

Cc = \$1600/unidad /año

C = \$2000/unidad

Supongamos que el reabastecimiento es uniforme con una tasa M = 8.000 unidades por año. Entonces:

$$Q=\sqrt{2\,DCo/C\,c(1-D/M)}=\sqrt{2(4000)(2000)/1600(1-4000/8000)}=$$

$$\sqrt{20.000}=141 \text{unidades y}$$

$$CT/Año=Dc+\frac{DCo}{Q}+\frac{Q}{2}(1D/M)Cc=(4000)(2000)+\frac{4000}{141}(2000)+\frac{141}{2}(14000/8000)(1600)$$

CT/año = 8.000.000 + 56568.5 +56568.5 = \$8.113.137

Es interesante comparar estos resultados y los obtenidos cuando el reabastecimiento es global (lote económico). Con el reabastecimiento uniforme se hacen pedidos más grandes y los costos son menores, como se indica en la tabla mostrada adelante.

La razón es que durante el período de reabastecimiento algunas unidades que se reciben se distribuyen de inmediato para satisfacer la demanda. Esto reduce los costos de conservación.

TABLA 2-1

Comparación de abastecimiento Uniforme y Global

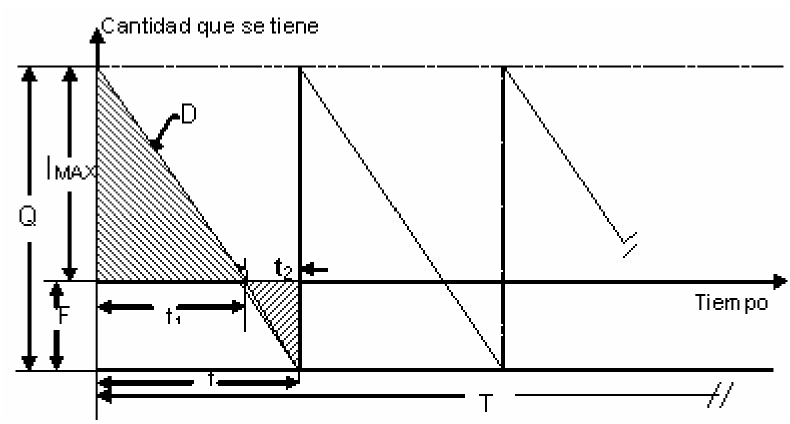
	ABASTECIMIENTO	
	UNIFORME	GLOBAL
Cantidad que se debe ordenar	141	100
Costo anual de inventario	\$8.113.137.oo	\$ 8.160.000.oo

2.7 Casos especiales: Modelo de compra con faltantes.

Si los clientes aceptan que haya faltantes, es decir, que su pedido se satisfaga después, cuando no se tiene un artículo en almacén, entonces la venta no se pierde. Bajo esta condición, el inventario puede reducirse. En el límite no se tendría ningún inventario. Se supondrá entonces, que a cada unidad faltante, se asocia un costo agregado por faltantes, de manera que se desea tener algún inventario. Los costos anuales de inventario comprenderán ahora los costos de comprar, los de ordenar, los de conservación y los de faltantes. Se supondrá también que los reabastecimientos se reciben todos juntos (o de un solo golpe).

FIGURA 2-6

PERFIL DEL MODELO



Donde:

Q: Cantidad óptima de compra (unidades)

F: Cantidad faltante o déficit (unidades)

D: Tasa de demanda (unidades/año)

IMAX: Inventario Máximo (unidades)

T: Tiempo planeado (1 año)

t : tiempo de un periodo (días)

t_2: tiempo de faltantes o déficit (días)

t_1: tiempo sin faltantes o sin déficit (días)

De igual manera se define la ecuación del costo total anual de inventario:

CT/año= Costo de comprar/año + Costo de Ordenar/año + Costo de Conservación/año + Costo de faltantes/año

Dado que el tiempo por período y los tiempos sin y con faltantes se consideran constantes se puede calcular el costo total anual como el producto del costo de inventario por período por el número de períodos anuales, esto es:

CT/año = Costo/Período x Número de Períodos = C´x N

C' = Costo de comprar/período + Costo de Ordenar/Período + Costo de Conservación/Período + Costo de Faltantes/período

$$C' = Qc + Co + \frac{IMAX \cdot t_1}{2} Cc + \frac{F \cdot t_2}{2} C_F$$

$$N = \frac{D}{Q}, \quad IMAX = Q - F, \quad t = \frac{Q}{D}$$

Por semejanza de triángulos tenemos que:

$$\frac{t_1}{IMAX} = \frac{t}{Q} \quad t_1 = \frac{IMAX.t}{Q} = \frac{(Q-F)Q/D}{Q} = (Q-F)/D \text{ y}$$

$$\frac{t_2}{F} = \frac{t}{Q} \quad t_2 = \frac{Q\,F}{D\,Q} = \frac{F}{D}$$

Reemplazando en la Ecuación del Costo Total Anual de inventario tenemos:

$$CT/año = \left[Qc + Co + \frac{(Q-F).(Q-F)Cc}{2D} + \frac{F.F.C_F}{2D} \right] x \frac{D}{Q}$$

$$CT/año = Dc + \frac{D}{Q} Co + \frac{(Q-F)^2 Cc}{2Q} + \frac{F^2}{2Q} C_F$$

Para hallar los valores de las variables Q y F que minimizan la ecuación del costo total anual de inventario, se deriva parcialmente primero con respecto a Q y luego con respecto a F, se igualan las derivadas a cero (0) y se combinan las dos ecuaciones resultantes, obteniéndose que :

$$Q = \sqrt{2DCo/Cc}\ \sqrt{(Cc + Cf)/Cf}$$

$$F = \sqrt{2DCo/Cf}\ \sqrt{Cc/(Cc + Cf)}$$

EJEMPLO 2-3:

Continuando con el mismo ejemplo del lote económico se tiene que:

D=4.000 unidades /año

Co= \$2000/orden

Cc= \$1600 /unidad-año

Supongamos que el costo de faltante Cf= \$1600/unidad

Entonces:

$Q = \sqrt{2(4000)(2000)/1600}\ \sqrt{(1600+1600)/1600}$ = (100) (1,41)=141 unidades

$F = \sqrt{2(4000)(2000)/1600}\ \sqrt{1600/(1600+1600)}$ = (100) (0,707) =70,7 unidades

IMAX = Q-F = 141-71= 70 unidades

CT/año =

$Dc+\frac{D}{Q}Co+\frac{(Q-F)}{2Q}\,2Cc+\frac{F^2}{2Q}C_F= (4000)(2000)+\frac{4000}{141,4}(2000)+\frac{(141,4-1)^2}{2(141,4)}(4000) + \frac{(71)^2}{2(141,4)}(1600)$

CT/año = 8.000.000 +56.568.5+ 28.284.25+ 28.284.25 = \$ 8.113.137

2.8 Casos especiales: Modelo de compra con descuento por cantidad

Otra situación típica surge cuando se tiene la oportunidad de recibir un descuento en la compra de una cantidad grande. Puede ser que el costo de tener un inventario adicional quede más que compensada reduciendo el costo de compra. La forma más directa de saber si se deben ordenar cantidades grandes es comparar el costo total anual en inventario con base en la cantidad económica y el precio base con la cantidad de compra sugerida y el precio unitario con descuento. No se necesitan fórmulas nuevas, simplemente se aplican las que ya se describieron. Esto puede hacerse de la siguiente manera:

1. Encuéntrese el tamaño del lote económico con el precio base. Si el tamaño del lote económico es mayor que la cantidad mínima de descuento, el problema está resuelto. Simplemente se calcula otra vez el lote económico con el precio de descuento y se ordena esa cantidad. Suponiendo que el lote económico con el precio base es menor que el nivel de descuento, se procede con el paso 2.
2. Calcúlase el costo total anual con precio y lote económico base.
3. Calcúlase el costo total anual con precio y cantidad sugerida de descuento.
4. Compare el costo total anual con precio y lote económico base con cada uno de los costos totales calculados para cada precio y cantidad sugerida de compra asociada y escójase aquel tamaño que corresponda al menor costo total anual en inventario.
5. Calculase el ahorro entre la diferencia del costo total anual correspondiente al precio base y lote económico con el costo total anual si resultare menor con el precio de descuento y la cantidad sugerida de compra.

Si resulta que la cantidad de descuento es menos costosa, se debe recalcular el lote económico con el precio de descuento para comprobar si se debe pedir más que la cantidad mínima.

En el caso de que existan precios de descuento múltiples, el procedimiento anterior debe repetirse para cada precio de descuento con el fin de encontrar la cantidad que debe ordenarse de precio mínimo.

EJEMPLO 2-4:

Supóngase que el proveedor del ejemplo del modelo del lote económico ofrece un descuento del 5% si se ordenan 200 unidades o más.

C= \$2000/unidad

D= 4.000 unidades/año

Co= \$2000/orden

Cc= \$1400 + (10%)(\$2000) =\$1600/unidad/año

Paso 1: Calcular Q, con precio Base

$$Q =$$

$$Q =$$

$$Q = \sqrt{10000}$$

$$Q = 100 \text{ unidades}$$

Dado que Q< nivel de descuento (100 < 200), se sigue con el paso 2:

Paso 2: Calcular el CT/año, con precio base y Q*

$$CT/\text{año} = Dc + \frac{D}{Q}Co + \frac{Q}{2}Cc = 4.000(2000) + \frac{4.000}{100}(2000) + \frac{100}{2}(1600) = \$8.160.000$$

Paso 3: Calculase el Costo total anual con Precio de descuento y cantidad de compra sugerida.

CT/año

$$4000(2000)(0,95)+\frac{4000}{200}(2000)+\frac{200}{2}(1400+0,1*0,95*2000)=7600.000+40000+190000= 7830000$$

Como el costo Total anual con precio de descuento es menor que el costo total anual con precio base y cantidad económica, se acepta el descuento, comprando 200 unidades.

Paso 4: Calcular la cantidad económica con precio de descuento:

$$Q = \sqrt{2(4000)(2000)/1520} = 102{,}6 \text{ unidades}$$

Esta cantidad es todavía menor que la cantidad mínima de descuento por tanto se ordenan 200 unidades ya que existe un ahorro = 8.160.000 - 7.830.000 = $330.000

2.9 Casos especiales: modelo de manufacturación con faltantes.

Los supuestos de este modelo son iguales a las del modelo de manufacturación excepto que se permite déficit (faltantes). En la siguiente fígura se muestra esquemáticamente este modelo:

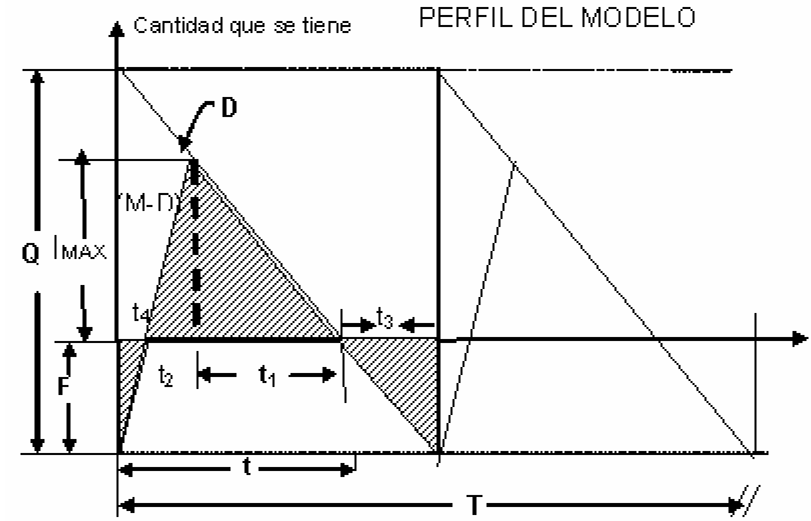


FIGURA 2-7

Donde:

Q: Cantidad óptima de compra (unidades)

M: Tasa de manufacturación (unidades/año)

F: Cantidad faltante o déficit (unidades)

D: Tasa de demanda (unidades/año)

M-D: Tasa de Acumulación (Unidades/año)

IMAX: Inventario Máximo (unidades)

T: Tiempo planeado (1 año)

t: tiempo de un periodo (días)

t_1 tiempo de Manufacturación (días)

t_2: tiempo sin faltantes o sin déficit (días)

t_3: tiempo de faltantes (días)

t_4: tiempo de faltantes (días)

De igual manera se define la ecuación del costo total anual de inventario:

CT/año= Costo de Manufacturar/año + Costo de Preparación/año + Costo de Conservación/año + Costo de Faltantes/año

Dado que el tiempo por período y los tiempos sin y con faltantes se consideran constantes se puede calcular el costo total anual como el producto del costo de inventario por período por el número de períodos anuales, esto es:

CT/año = Costo/Período x Número de Períodos = C´x N

C' = Costo de Manufacturar/período + Costo de Preparar /Período + Costo de Conservación/Período + Costo de Faltantes/período

$$C' = Qc + Co + \frac{IMAX}{2}(t_1 + t_2)Cc + \frac{F}{2}(t_3+t_4)\ CF$$

$$N = \frac{D}{Q}, \quad IMAX = Q(1-D/M)-F$$

Realizando una serie de semejanzas de triángulos se tiene que:

$$t_1+t_2 = (Q\ (1-D/M) - F)(1/(M-D)+1/D)$$

$$t_3+t_4 = F\ (1/(M-D)+1/D)$$

Reemplazando en la Ecuación del Costo Total Anual de inventario tenemos:

$$CT/año = Dc + Co\ (D/Q) + \frac{Cc\ (Q(1-/D/M)-F)^2}{2Q}\ (1/(1-D/M) + \frac{Cf\ (1/(1-D/M)F^2}{2Q}$$

Para hallar los valores de las variables Q y F que minimizan la ecuación del costo total anual de inventario, se deriva parcialmente primero con respecto a Q y luego con respecto a F se igualan las derivadas a cero (0) y se combinan las dos ecuaciones resultantes, obteniéndose que :

$$Q = \sqrt{2DCo/Cc(1-D/M)}\sqrt{(Cc+Cf)/Cf}$$

$$F = \sqrt{2DCo/Cf}\sqrt{1-D/M}\sqrt{Cc/(Cc+Cf)}$$

EJEMPLO 2-5:

Continuando con el mismo ejemplo que hemos venido manejando del lote económico se tiene que:

D = 4.000 unidades /año y la tasa de Manufacturación

M=8000 unidades/año

C= $2000/unidad (costo unitario de Manufacturación)

Co= $2000/Corrida Costo de Preparación/Corrida

Cc= $1600/unidad-año

Supongamos que el costo de faltante Cf= $1600/unidad

Entonces:

Q= $\sqrt{2(4000)(2000)/1600(1-(4000/8000))}\sqrt{(1600+1600)1600}$

Q= (141,42) (1,4142)= 200 unidades

F = $\sqrt{2(4000)(2000)/1600}\sqrt{1-(4000/8000)}\sqrt{1600/(1600+1600)}$

F = (100) (0,707) (0.701)=50 unidades

IMAX = Q (1-D/M)-F = 200(1-2000/4000)-50= 50 unidades

CT/año = Dc + Co (D/Q) + $\frac{Cc\,(Q\,(1-D/M)-F)^2}{2Q}$ (1/(1-D/M) +$\frac{Cf\,(1/(1-D/M))F^2}{2Q}$

CT/año = 8.000.000+ 40.000+ 20.000 + 20.000 = $8080.000

2.10 Modelo con demanda probabilística cuando no se conoce el costo de faltantes.

En los modelos con demanda incierta o probabilística se supone que se conoce la distribución de probabilidad de la demanda, pero que esa demanda es impredecible en un día o mes dado. Con frecuencia este es el caso cuando se trata de una tienda, ventas industriales y la mayoría de los servicios.

La incertidumbre al predecir la demanda significa que siempre existe la posibilidad de que haya faltantes, es decir, de quedar sin artículos en almacén.

El riesgo puede reducirse teniendo un inventario grande, pero nunca puede eliminarse. La tarea del administrador de inventarios es balancear el riesgo de faltantes y el costo de existencia adicional.

En la mayoría de los sistemas de inventarios, el costo de quedar sin artículos en almacén no se conoce con exactitud. En estos casos la administración debe tomar una decisión subjetiva en cuanto al riesgo que se correrá. En los casos en que el costo de un faltante puede determinarse, es posible obtener una política óptima de inventario. Aquí, se describirá un modelo de cantidad fija de reorden con costos de faltantes desconocidos.

2.11 Modelo con demanda probabilística cantidad fija de reorden y costos de faltantes desconocidos.

Es necesario calcular tanto la cantidad fija de reorden como el punto de reorden. Para encontrar la cantidad fija de reorden, se usa el modelo básico del lote económico. Los faltantes se ignoran y se supone que la incertidumbre en la demanda es despreciable, con la demanda promedio.

$$Q = \sqrt{2\overline{D}Co/Cc}$$

Donde Q = Tamaño del lote económico en unidades

$\overline{D}$ = Demanda promedio en unidades por año

Co= Costo de ordenar en $ por orden

Cc = Costo de conservación en $ por unidad por año.

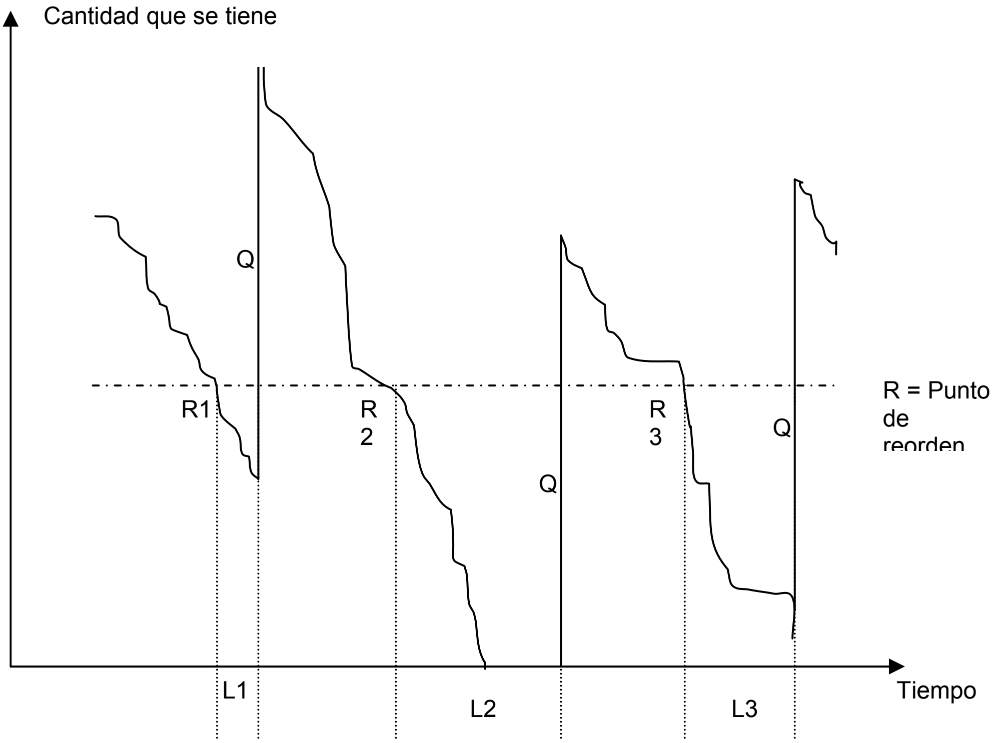


FIGURA 2-8

Como los cálculos del punto de reorden toman en cuenta el tiempo de entrega, se está a salvo al ignorar el tiempo de entrega para encontrar la cantidad de reorden.

A una vez que se hace a un lado el tiempo de entrega, el problema se parece mucho al modelo básico del lote económico, minimizar la suma de los costos de ordenar y de conservación. Dado que las variaciones de la demanda se promedian se puede calcular la cantidad económica con esta demanda promediada.

Para encontrar el punto de reorden no existe manera óptima cuando no se conoce costo de faltantes.

En su lugar se utilizan los conceptos ***de inventario de seguridad y nivel de servicio*** para hacer un juicio sobre el riesgo de faltantes aceptable. También se toma en cuenta el hecho de que la posibilidad de quedar sin artículos en almacén sólo existe durante el tiempo de entrega: consideremos la figura mostrada adelante. Cuando el nivel de inventario está arriba del punto de reorden, como antes de colocar el pedido R_1, no hay posibilidad de quedar sin existencias. Cuando el nivel baja del punto de reorden, se coloca un pedido y comienza el período de entrega. Solamente durante estos periodos (L_1, L_2, L_3) existen, posibilidades de faltantes. Entonces para determinar el punto de reorden sólo es necesario conocer la distribución de la demanda durante el tiempo de entrega. Esto se llama ***demanda del tiempo de entrega.***

En la figura mostrada a continuación se presenta un ejemplo de demanda del tiempo de entrega. Aquí se muestra una distribución normal centrada en la demanda promedio del tiempo de entrega DdL , en donde Dd es la demanda diaria promedio. Si el punto de Reorden se iguala a la demanda diaria del tiempo de entrega, el inventario que se tiene en el momento de recibir una orden será cero , en promedio . Pero la mitad de las veces será mas cero y la mitad de las veces será menos que cero, es decir, habrá faltantes. Como casi siempre una posibilidad del 50% de quedar sin existencias es muy alta, se debe agregar un inventario de seguridad.

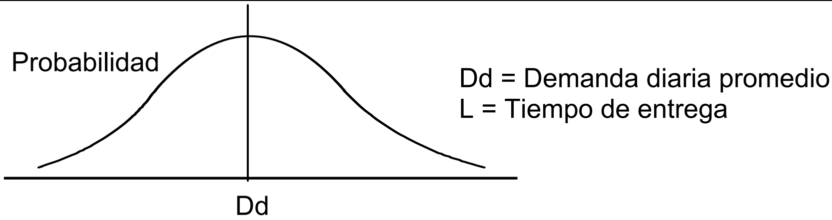
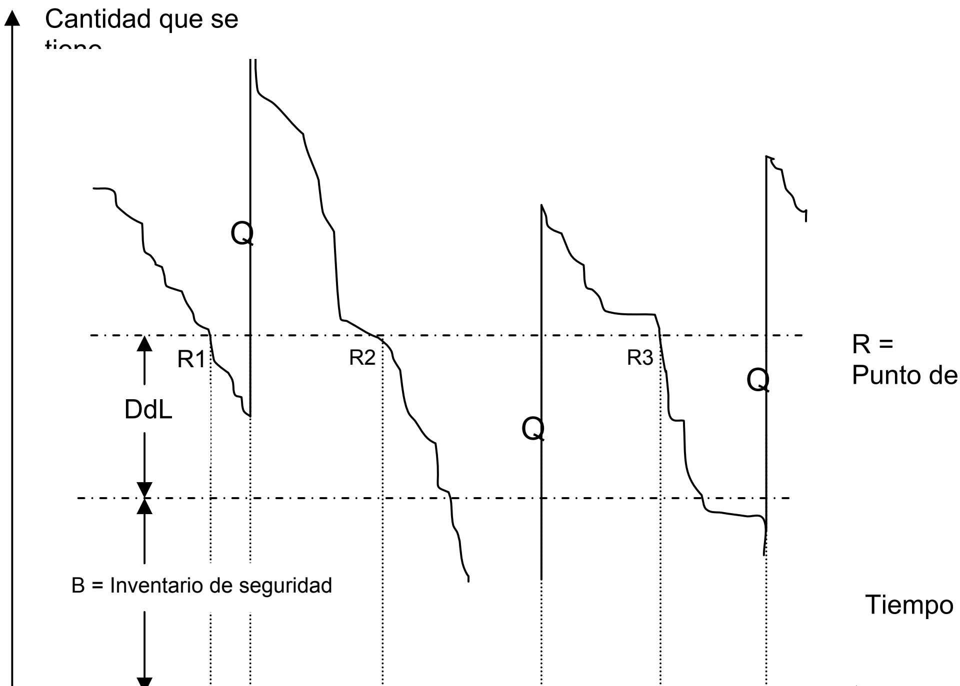


FIGURA 2-9

En efecto, el inventario de seguridad se muestra en la figura siguiente. El punto de reorden se incrementa para proporcionar mayor protección



contra los faltantes durante el tiempo de entrega. La fórmula para el punto de reorden se convierte en:

FIGURA 2-10

R = DdL + B

En donde: R = Punto de reorden

Dd = Demanda diaria promedio en unidades

L = Tiempo de entrega promedio en días

B = Inventario de seguridad en unidades

La cantidad de inventario de seguridad está basada en la decisión administrativa sobre el nivel de servicio. El ***Nivel de Servicio*** es la probabilidad de tener un artículo en almacén cuando se necesite. La administración debe hacer un juicio intuitivo de cual debe ser esta probabilidad, no puede derivarse matemáticamente. Los niveles de servicio en general varían del 80 al 99%. Esto significa que la posibilidad de quedar sin artículos en almacén varía entre un 20 y 1 %. Una vez que se escoge el nivel de servicio, la cantidad de inventario de seguridad que se necesita se encuentra como se muestra en la figura anterior.

Como en la tabla de la Distribución Normal, se encuentra Z que corresponde al nivel de servicio deseado. Así, para un nivel de servicio del 95%, Z = 1,64. El Inventario esta dado entonces por:

$$B = Z\sigma$$

En donde B = Inventario de seguridad en unidades y σ desviación estándar de la demandad del tiempo de entrega.

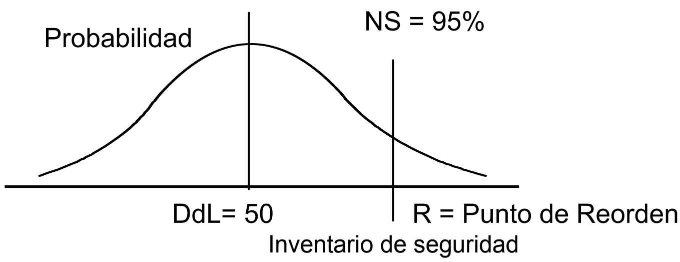


FIGURA 2-11

Por ejemplo, en la figura anterior

B = (1,64) (20) = 32,8 o 33 unidades

El punto de reorden es

$$R = DdL + B$$

$$R = (10)\ (5) + 33 = 83 \text{ unidades}$$

Resumiendo el procedimiento para el modelo:

Encuéntrese la cantidad que debe ordenarse con el modelo del lote económico basándose en la demanda promedio.

Determínese el inventario de seguridad con base en la distribución de la demanda del tiempo de entrega y selección intuitiva del nivel de servicio.

Iguálese el punto de reorden a la demanda promedio del tiempo de entrega más el inventario de seguridad.

EJEMPLO 2-6:

El proveedor de una bodega de Gran abastos es un almacén lejano. Con pocas excepciones, la bodega puede abastecer cualquier artículo que se pida en cualquier cantidad. Uno de los artículos que se vende, es el aceite para cocina a base de soya. La demanda de aceite tiene un promedio de cinco cajas por día y se distribuye normalmente. El tiempo de entrega varía un poco, con un promedio de tres (3) días .La desviación estándar para la demanda del tiempo de entrega es de 3,9. Los costos de ordenar se estiman en $15.000 por orden. El costo de conservación es de $1.000 por caja por año. El comerciante quiere un 98% de nivel de servicio en el aceite para cocina.

Para encontrarle la cantidad de reorden se necesita conocer la demanda anual promedio. Si la tienda abre 6 días por semana durante 50 semanas, entonces:

$$D = (5)\ (6)\ (50) = 1500 \text{ unidades /año}$$

También:

Co = $15.000/orden

Cc = $1000/caja/año

Entonces:

$$Q = \sqrt{2\overline{D}Co/Cc} = \sqrt{2(1500)(15\,000)/1}000 = 67 \text{ cajas}$$

A continuación se encuentra el inventario de seguridad , para un nivel de servicio del 98%, se busca en la tabla Área bajo la curva Normal estándar Anexo 2 y entramos que Z = 2,08; entonces el inventario de seguridad es:

$$B = Z\sigma = 2(2{,}08)\ (3{,}9) = 7{,}9 \text{ u } 8 \text{ unidades}$$

Por último el punto de reorden es:

$$R = DdL + B = (5)\ (3) + 8 = 23 \text{ unidades}$$

El comerciante deberá utilizar la siguiente política: “Cuando el nivel de inventario baje a 23 cajas, se debe ordenar 67 cajas”

2.12 Modelo con demanda probabilística cuando sí se conoce el costo de faltantes.

Cuando los costos por faltantes se conocen, es posible optimizar tanto la cantidad de reorden como el punto de reorden. El racionamiento básico que respalda este procedimiento es el mismo que el que se usó para desarrollar el modelo del lote económico. Todos los costos de inventario se expresan en términos de la cantidad que debe ordenarse y del punto de reorden y después se minimizan y se suman.

La cantidad que debe ordenarse se calcula con el modelo básico del lote económico con la demanda promedio, como se describió antes. En realidad esto da una cantidad que debe ordenarse un poco menor que la óptima. La razón es que los costos por faltantes tienden a aumentar el tamaño de la orden para reducir el número de órdenes. Debe recordarse que la posibilidad de faltantes ocurre sólo cuando se hacen los pedidos (en el período de entrega); así las probabilidades totales disminuyen si hay menos ordenes. Pero es obvio que los costos de conservación se elevan si hay menos órdenes. El efecto neto es que el valor óptimo es muy poco diferente del valor aproximado del lote económico.

Para encontrar el punto de reorden se aplica el concepto de costo marginal. Cada vez que el punto de reorden se incrementa en 1 unidad, el costo de conservación aumenta y el costo por faltantes disminuye. Debe haber un punto de cruce entre los dos costos que proporcione el mejor punto de reorden. Esto ocurre cuando los dos costos marginales son iguales.

Costo marginal de mantener = Costo marginal por faltante

El costo esperado de aumentar el punto de reorden en 1 unidad (costo marginal de conservación) es igual que el costo de conservación (Cc) multiplicado por la probabilidad de que no haya faltantes. (Cuando ocurre un faltante no hay costo de conservación). Si P representa la probabilidad de que la demanda sea menor que el punto de reorden, es decir de que no ocurran faltantes, para ser más precisos:

DdL = Demanda promedio del tiempo del tiempo de entrega

R= Punto de reorden

P= Probabilidad ($DdL \leq R$)

Entonces el costo marginal de conservación = CcPT

El costo marginal de faltantes durante el periodo de entrega es igual que el costo del número de unidades que faltan multiplicado por la probabilidad de un faltante, o sea:

$$(1 - P)Cf$$

En donde Cf= Costo unitario por faltante.

Como puede ocurrir un faltante cada vez que se hace un pedido, el costo anual por faltantes depende del número de órdenes. Con una demanda anual D y una cantidad que debe ordenarse Q, el número promedio de órdenes es D/Q, es decir,

Número promedio de órdenes por año= D/Q

Así:

Costo Marginal por faltantes = (1 – P) CfD/Q

Igualando los dos costos marginales y resolviendo para P:

$$CcP= (1 - P)\, CfD/Q$$

$$CcP + PD/QCf = D/QCf$$

$$P= \frac{D/QCf}{Cc + D/QCf}$$

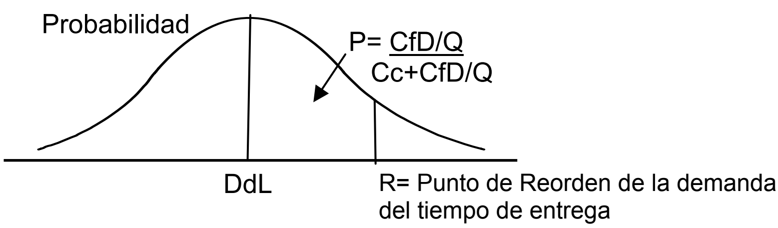


FIGURA 2-12

Esto da una probabilidad crítica. Entonces el punto de reorden se selecciona como se muestra en la figura. Con la distribución de probabilidad de la demanda del tiempo de entrega, se escoge R tal que:

$$\text{Probabilidad } (DdL \leq R) = P = \frac{D/QCf}{Cc + D/QCf}$$

Ejemplo 2-7:

Cierto artículo de inventario tiene una demanda anual promedio de 5.000 unidades. Con base en 250 días hábiles por año, la demanda diaria tiene un promedio de 5000/250, ó 20 unidades por día. El tiempo de entrega varía, con un promedio de 2 días. Se supondrá que la demanda del tiempo de entrega tiene una distribución normal, con una desviación estándar de 6.3 unidades. Los costos de ordenar son de \$2.000 por orden, los costos de conservación \$2.500 por unidad por año y el costo por faltantes es de \$1000 por unidad. Entonces:

$\overline{D}$ = 5.000 unidades por año

Dd= 20 unidades por día

L = 2 días

Co= \$ 2.000 por orden

Cc= \$2.500 por unidad por año

Cf= \$1.000 por unidad

Para encontrar el tamaño de la orden, se ignoran los faltantes y se usa el Modelo básico del lote económico:

$$\mathbf{Q=} \sqrt{2DCo/Cc} = \sqrt{2(5.000)(2\ \ .000)/2.50\ \ 0)} = \sqrt{8.000} = 89.44$$

Después se encuentra la probabilidad crítica:

$$P = \frac{(D/Q)Cf}{} = \frac{(5000/89.44)(1000)}{} = \frac{56.2}{} = 0.96$$

Cc +D/QCf 2.500 + (5000/89.44)(1000) 2.500+56.2

Como la distribución es normal, se sabe que: R= DdL +Zσ

De la Tabla Normal del apéndice,

Por último, R = DdL+ Zσ =20(2) +1.75 (6.3) = 40+11 =51 unidades. Así, cuando el inventario baja a 51 unidades, se debe hacer un pedido de 89 unidades.

2.13 Modelo de período fijo de reorden.

Con los modelos de período fijo de reorden se determina un intervalo fijo óptimo para llevar a cabo las revisiones del inventario: Entonces, cada vez que se hace un pedido se ordena la diferencia entre algún máximo y la cantidad que se tiene. Se harán las mismas cuatro suposiciones que se hicieron para el modelo básico del lote económico: demanda uniforme, abastecimiento global, tiempo de entrega constante y costos constantes. Bajo estas suposiciones se encontrará que el modelo de período fijo de reorden óptimo es el mismo que el modelo del lote económico que se encontró antes, excepto que este recibe el nombre de intervalo económico de reorden.

<u>Intervalo económico de reorden</u>

En la Figura 1 se muestra el inventario que se tiene. El inventario disminuye en respuesta a la demanda. Cuando se hace la revisión se coloca un pedido por la diferencia entre M (el máximo) y la cantidad que se tiene. Al recibirse, el inventario se reestablece en su máximo. La primera tarea es encontrar el intervalo óptimo de reorden (T).

El método para encontrar t es el mismo que se empleó para encontrar el modelo del lote económico: se minimiza el costo total anual de inventario. Como se tienen las mismas suposiciones, puede aplicarse la ecuación del costo total anual: CT/año = Dc +D/QCo +Q/Cc

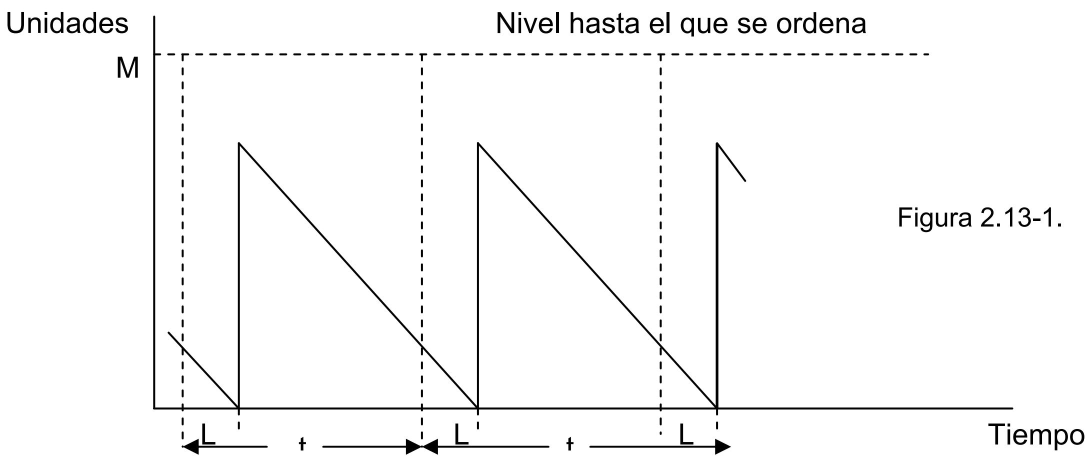


FIGURA 2-13

Sería mejor tener T en lugar de Q. Esto puede arreglarse sustituyendo t= Q/D

ó Q=tD

Entonces costo Total anual de inventario:

CT/año= Dc+ DCo/tD + tDCc/2

CT/año= Dc +Co/t +tDCc/2

Este costo se minimiza cuando el período de reorden es:

$$t = \sqrt{2Co/DCc}$$

En donde: t= Intervalo económico de reorden en años

D= demanda anual en unidades

Co= Costo de ordenar en pesos por orden

Cc= Costo de conservación en $ /unidad /año

Para completar el modelo es necesario encontrar M, el máximo. Este se conoce como el punto hasta el que se ordena. Dicho nivel depende del tiempo de entrega. Lógicamente, las revisiones periódicas se deben programar con tiempo suficiente para permitir que se haga un pedido y que se reciba antes de quedarse sin artículos en el almacén, Esto significa que M debe ser igual que la cantidad que se usa a través de un período más una cantidad igual que la demanda del tiempo de entrega. Entonces:

$$M = tD + LD = D\,(t+L)$$

En donde: t= Intervalo económico de reorden en años

D= Demanda anual en unidades

L= Tiempo de entrega en años

Nótese que t, D y L deben tener las mismas unidades de tiempo

Ejemplo 2-8:

Consideremos el fabricante que necesita 4.000 piezas de ensamble para el próximo año del primer ejemplo del lote económico. El costo de las unidades es de $2.000 cada una. Se dispone en la localidad con un tiempo de entrega de 5 días, pero el costo de ordenar para el fabricante es de $2000 por orden. El costo de conservación es de $1400 al año por almacenamiento, más el 10% por unidad por año por el costo de oportunidad del capital. ¿Cuántas unidades debe ordenar el fabricante con el fin de minimizar los costos totales de inventario?

De los datos suministrados se tiene:

D = 4.000 unidades/año

Co = $2000/orden

Cc = $1400+ (10%) ($2000) = $1600/unidad/año

L = 5 días

Aplicando la Ecuación: **t=** =

t= 0.025 años

Para convertirlo en días:

t= 365(0.025)= 9,125 días

El punto hasta el que se ordena es:

M= D (t+L)

M= (4000) (0.025+5/365) =155 unidades

2.14 Modelo probabilístico de compra con periodo fijo de reorden.

Con un modelo de periodo fijo de reorden se verifica el balance de inventario a intervalos fijos de tiempo y se coloca una orden por la diferencia entre el balance que se tiene y el punto hasta el que se ordena. Como el período de revisión es fijo, puede ocurrir un faltante en cualquier momento durante el período de revisión, como se muestra en la Figura 2-14.

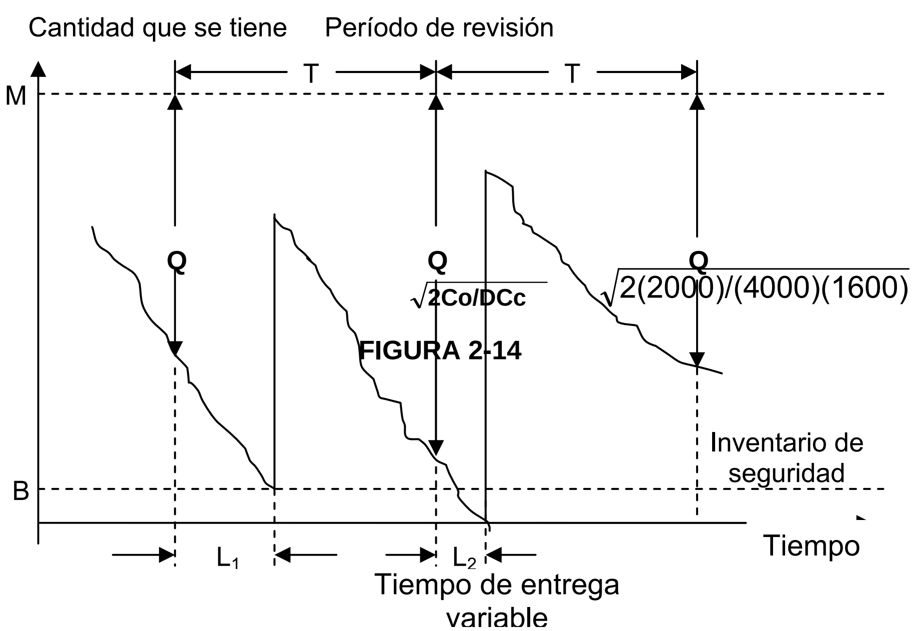


FIGURA 2-14

Esto es bastante diferente de los dos modelos anteriores, en los que los faltantes podrían ocurrir sólo durante un período de entrega. Como resultado, el inventario de seguridad debe ser mayor, si se quiere proporcionar el mismo nivel de servicio.

El modelo que se presenta se supone que tiene una distribución normal, la demanda del tiempo de entrega se distribuye normalmente y los costos de faltantes no se conocen. Para encontrar el período óptimo para ordenar, se ignora toda incertidumbre y se aplica el modelo de intervalo económico de reorden visto. Después se aplica el concepto de nivel de servicio determinado administrativamente para encontrar el punto hasta el que se ordena.

Cálculo del período de reorden.

Ignorando la incertidumbre puede aplicarse la ecuación hallada para encontrar el intervalo económico de reorden en los modelos determinísticos: $t = \sqrt{2Co/DCc}$

En donde: t= período de reorden (años)
D= Demanda promedio (unidades/año)
Co = costo de ordenar ($/año)
Cc= Costo de conservación ($/unidad/año)

Cálculo del punto hasta el que se ordena.

Cuando se estudia el modelo de período fijo de reorden con demanda y tiempo de entrega constantes, se encontró que el nivel hasta el que se ordena es igual que la demanda durante el período para ordenar más la demanda del tiempo de entrega. Rescribiendo la ecuación de M para convertir todo en días:

$$M = Dd\,(t+L)$$

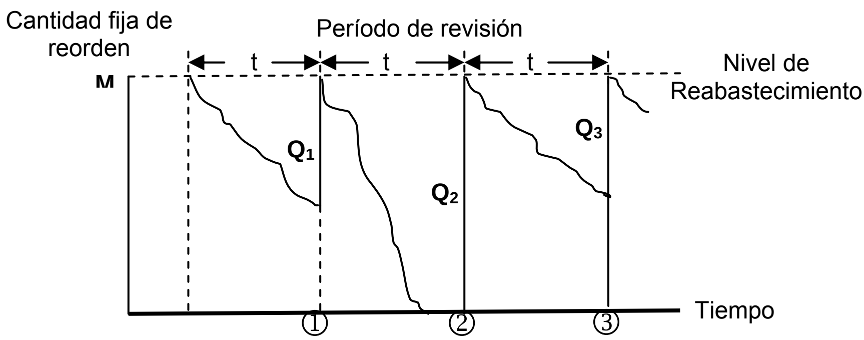
En donde M = Punto hasta el que se ordena (unidades)

Dd = demanda promedio diaria (unidades/día)

L = Tiempo de entrega promedio (días)

t = Período de reorden (días)

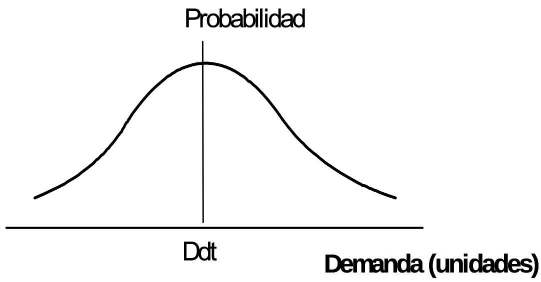
Esta ecuación se utiliza en el caso de demanda y tiempo de entrega inciertos. Lo único que se debe agregar es el inventario de seguridad para reducir el riesgo de faltantes (ver Fígura).



Fígura 2-15

Con la misma lógica que se presentó antes, se escoge un nivel de servicio NS o probabilidad de tener existencias. Esta probabilidad se usa, entonces, con la distribución de la demanda para encontrar la cantidad de inventario de seguridad.

Pero, ¿Qué distribución de demanda se usa? Con el modelo de cantidad fija de reorden se usó la demanda del tiempo de entrega. Sin embargo, ahora pueden ocurrir faltantes en cualquier momento del período. Entonces se necesita la distribución de la demanda del período de revisión, como se muestra en la fígura siguiente:



Fígura 2-16

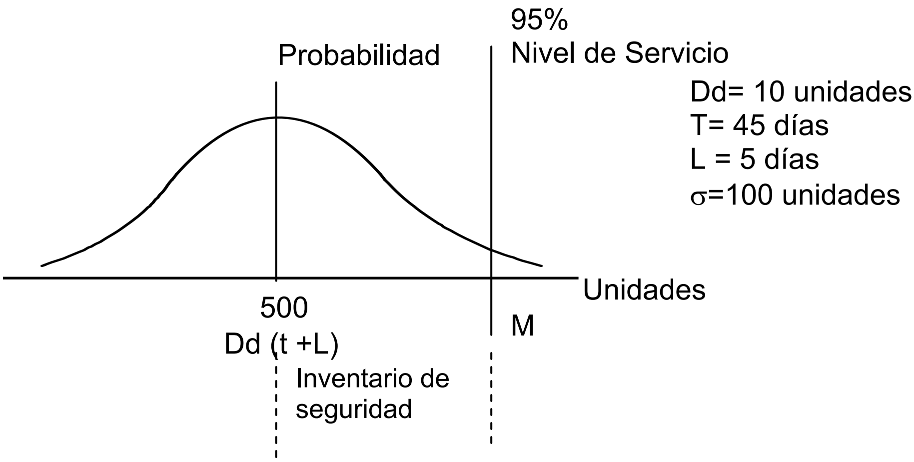
Suponiendo que la demanda del período de revisión se distribuye normalmente, se usa el nivel de servicio para leer la tabla normal estándar (apéndice B) y encontrará el valor correspondiente de Z. Entonces:

B= Inventario de seguridad = $Z\sigma$

En donde σ= desviación estándar de la demanda del período de reorden. Así el punto hasta el que se ordena esta dado por:

$$M = Dd(t+L) + B$$
$$= Dd\,(t + L) + Z\sigma$$

En la Figura 2-17 se muestra esto en un diagrama. Por conveniencia, la distribución esta centrada en Dd (t+L) y no en la demanda promedio del período de revisión.



Fígura 2-17

Con los números que se muestran en el apéndice B, para un nivel de servicio de 95%: Z= 1.64 M= Dd (t+L) +Zσ = (10) (45+5) + (1.64)(100) = 500+164= 664 unidades

Ejemplo 2-9:

El ejemplo se refiere al distribuidor de aceite de soya para cocina visto anteriormente, con una demanda promedio de 5 cajas por día, distribuida normalmente. El tiempo de entrega tenía un promedio de 3 días. El costo de ordenar era de $15.000 por orden y el costo de conservación de $1.000 por unidad por año. El vendedor deseaba un nivel de servicio del 98%.

Para encontrar el período de reorden, se basa la demanda anual en un año de 300 días hábiles:

Demanda anual = D = 300(5) = 1500

Con la Fórmula: t= $\sqrt{2Co/DCc}$ = $\sqrt{(2)(1.5)/(15.000)/(1\,000)}$=0.045 años

En días hábiles: t= (0.045) (300)= 13 días

Entonces el período de revisión debe ser, más o menos 13 días hábiles. Después, para encontrar el punto de hasta el que se ordena, se encontrará primero el inventario de seguridad. Para esto se necesita la desviación estándar de la demanda del período de revisión, que no era un dato dado en el ejemplo primero. Se supondrá que esta es de 9 unidades con base en los datos históricos. Para un nivel del 98%, el apéndice B da Z= 2.08.

$$B=Z\sigma$$

$$B= (2.08)\ (9)= 18.7 \text{ ó } 19 \text{ unidades}$$

El punto hasta el que se ordena es:

$$M=Dd\ (t+L)+B$$

$$M= (5)\ (13+3)+19$$

$$M= 99 \text{ unidades}$$

La política de inventario es revisar el balance cada 13 días hábiles. Se debe hacer un pedido por la diferencia entre 99 unidades y el balance en el momento de la revisión.

El inventario de seguridad que se necesitó aquí fue de 19 unidades, mientras que sólo se requirieron 8 unidades para el modelo de cantidad fija de reorden.

2.15 Análisis de inventario ABC - Ley de Pareto

La clasificación es la etapa esencial en una administración sana de inventarios: La empresa, según sus necesidades, adopta ciertos criterios a este respecto, entre los cuales se pueden mencionar la tasa de rotación, el objeto, la utilización, el valor del consumo anual, etc. La clasificación por el método ABC es utilizada en las empresas que desean ejercer un mínimo de control sobre sus inventarios.

Este método consiste en reagrupar los artículos del almacén ya sea con base en el gasto anual promedio de cada artículo (costo de compra y gastos generales), o con base en la inversión anual para cada uno. Se procede a esta clasificación una vez que se han identificado los artículos de almacén y que los ficheros de utilización han sido establecidos y mantenidos durante un ciclo completo de operaciones.

Enseguida se describen las etapas de su elaboración:

Los artículos se clasifican en orden decreciente o creciente, tomando como base el gasto anual o inversión anual.
Se suman los valores de todos los artículos del almacén. El resultado representa la inversión total anual.
El valor de cada artículo se convierte en porcentaje del total de la inversión anual.

Los artículos se reparten en tres grupos: A, B y C, así:

- El Grupo A, que representa entre el 70% y el 80% del consumo anual total en $, contiene entre el 10% y el 20% de los artículos.
- El Grupo B, que representa entre el 15% y el 20% del consumo anual, contiene del 30% al 40% de los artículos.
- El Grupo C, que representa entre el 5% y el 10% del consumo total, contiene del 40% al 50% de los artículos.

Ejemplo 2-10:

En la tabla siguiente se muestra la inversión anual para diez artículos hallados en almacén. Clasifíquelos por el método ABC.

Nº de Artículo	23	39	43	42	47	56	61	74	88	102
Costo anual	150.000	800	4.250	950.000	250.000	15.000	2.250	75.000	750.000	130.000

SOLUCIÓN:

Etapas a) y b):		Etapa c)
Número	Costo Anual	Porcentaje
42	$ 950.000.oo	40,8
88	750.000.oo	32,1
67	250.000.oo	10,7
23	150.000.oo	6,4
102	130.000.oo	5,6
74	75.000.oo	3,2
56	15.000.oo	0,6
59	8.000.oo	0,3
43	4.250.oo	0,2
61	2.220.oo	0,1
TOTAL:	$ 2.334.500.oo	100,0%

Etapa d):

GRUPOS	INVERSIÓN		INVENTARIO	
	COSTO ANUAL	PORCENTAJE %	Nº ARTÍCULO	PORCENTAJE %
A	$1.700.000.oo	72,9	42,88	20
B	530.000.oo	22,7	47,23,102	30
C	104.500.oo	4,4	74,56,59,43,61	50

Puede observarse que un gran número de artículos (40% a 50%) no constituyen más que un pequeño porcentaje (5% al 10%) del costo anual. Esto se hace con el objeto de:

- Orientar los esfuerzos del administrador en la elaboración de la política y los procedimientos de control de inventarios.
- Permite repartir el presupuesto y el tiempo del personal en función del valor de los diferentes artículos en almacén.

2.16 Aplicaciones: Modelos de inventario

Modelo del Lote Económico

3 La Tienda de Paco hace un pedido por semana para proveerse de los para consumos regulares. Un producto, la salsa California, parece tener una demanda uniforme de 10.000 botellas cada año. La Tienda de Paco que el costo anual de conservación es el 20% y el costo de ordenar es $20.000 Los costos de la tienda son $8.000 por botella. ¿Cuál es la cantidad óptima de reorden?

4 Si la demanda de un artículo es uniforme de 20.000 unidades por año y los costos de ordenar son de $5000 con un costo de

conservación de $500 por unidad por año, ¿cuántas unidades serán ordenadas cada vez? ¿Cuántas ordenes se harán en un año? ¿Cuál es el costo total anual de inventario?

5 Para el Campeonato Local de Béisbol las pelotas de béisbol tienen una demanda de 80 pelotas por semana. La Liga paga $15.000 por cada pelota y estima el costo anual de conservación en un 20% del valor del inventario promedio. Se lleva 2 semanas recibir una orden y cuesta $4.000 procesarla. ¿Cuál debe ser el punto de reorden? ¿Cuántas pelotas deberá ordenar la Liga cada vez?

6 Ferretería El Rey almacena una cuchilla para cortadoras de pasto que le sirve a muchos modelos de cortadoras. La cuchilla se vende por $5.000 y le cuesta a la ferretería $3.750. Durante el invierno el negocio es bueno con una demanda estable de 100 cuchillas mes. La Ferretería estima sus costos de reorden en $4000 por orden y sus costos de conservación en un 20% del valor del inventario promedio. El tiempo de entrega para cada orden es una semana.

Formúlese una política de inventario para la Ferretería el Rey basándose en un modelo de cantidad fija de reorden.

¿Cuál sería el costo de inventario total anual para la firma si la demanda permaneciera a 100 por mes todo el año?

7 Un fabricante utiliza 10.000 unidades al año de un artículo que cuesta $2.667 cada uno. El tiempo de entrega es de 5 días y una orden cuesta $800. El costo de conservación se estima en un 15% del valor del inventario promedio. Usando un modelo de cantidad fija de reorden:

a) ¿Cuántos artículos deben ordenarse cada vez?
b) ¿Cuál es el punto de reorden?

c) ¿Cuál es el costo anual de inventario?

8 Una firma compra $ 80.000.000 anual de un artículo particular. El costo de conservación es 10% del valor del inventario promedio y el costo de ordenar es $10.000 por orden. ¿Cuál es el valor en pesos que debe ordenar la firma? ¿Cuántos pedidos hará durante el año?

9 Lámparas Gloriben vende 80 unidades al mes de una lámpara especial. La lámpara cuesta $20.000. El tiempo de entrega de las órdenes es de 2 semanas y el costo de la orden es $10.000. Los costos de conservación se estiman en $2000 por unidad por año, más el 5% del valor del inventario promedio. Se emplea un modelo de cantidad fija de reorden.

¿Cuál es la política de inventario que debe seguir Gloriben?

¿Cuál es el valor del inventario promedio?

¿Cuál es el inventario máximo?

¿Cuál es el costo anual de inventario?

10 Lámparas Gloriben del ejercicio 7 hace un estudio de sus costos de inventario y encuentra que su costo de ordenar tiene un 100% de error; en realidad es $5.000 y no $10.000 ¿cuál debe ser la política de inventario de Lámparas Gloriben con el costo de ordenar corregido? Cómo porcentaje, ¿cuál fue el aumento en el costo anual de inventario debido al error?

11 Supóngase que la demanda de un artículo es de 1000 unidades por mes con un costo de conservación de $10.000 por unidad por año. El costo de ordenar es $6.000 por orden.

Encuéntrese el tamaño del lote económico y el número de órdenes por año.

Encuéntrese el costo total anual de inventario.

Encuéntrese el tamaño del lote económico y el número de órdenes por año si los costos de ordenar son $4.000, $6.000, $8.000 y $10.000.

Para comprobar que tan sensible es el modelo del lote económico a los errores en las estimaciones de costos, encuéntrese el costo total anual de inventario para cada uno de los costos de ordenar en c). Supóngase que cada uno de estos esta equivocado y que el costo total real de ordenar es $6.000.

Modelo de Reabastecimiento Uniforme o Modelo de Manufacturación

12 Muebles El Roble produce una mesa de comedor en Guayacán sólido a un costo de $100.000.oo. La compañía vende 2.500 mesas cada año, aunque tiene capacidad para producir 5.000 unidades anuales. Cuesta $40.000.oo poner en marcha la línea de producción. Los costos de conservación de los bienes terminados son del 10% por unidad por año.

¿Cuántas mesas se deben hacer en cada corrida de producción?

¿Cuántas corridas de producción se deben realizar al año?

13 A partir de los siguientes datos determínese la longitud óptima de cada corrida de producción y el número de corridas por año:

Demanda/año: 12.500 unidades

Tasa de producción:	25.000 unidad/año
Costo fijo:	$100.000.oo
Costo conservación:	20%/unidad/ año
Costo producción:	$100.000.oo/unidad

14 Un fabricante produce un artículo a una tasa de 4.000 por año. El costo fijo es $200.000.oo y se lleva 3 días poner en marcha la línea. El costo de conservación de un artículo en inventario es $30.000.oo por año. Si la firma vende 3.000 unidades por año.

¿Cuál es la longitud óptima de una corrida de producción?

¿Cuál es el punto de reorden?

¿Cuál es el costo anual de inventario?

15 Algunos artículos llegan a inventario y salen de inmediato con una tasa de producción uniforme. Estos reduce los costos de inventario.

Para atender esto, úsense los siguientes datos:

Demanda:	5.000 unidades
Tasa producción:	12.500 unidades
Costo Fijo:	$1.000.000.oo
Costo conservación:	$100.000.oo/unidad/año

Encuéntrese la cantidad óptima de producción y el costo anual de inventario suponiendo abastecimiento uniforme.

Repítase (a) suponiendo abastecimiento global ¿Cómo se comparan los resultados?

Modelos de Compra y Manufacturación con Faltantes (Déficit)

16 El departamento de reparaciones de una nueva distribuidora almacena en general sólo 2 ó 3% de las reparaciones disponibles. La mayoría de los clientes entienden esto y no les importa esperar las partes de órdenes especiales. Supóngase que un distribuidor almacena un tipo particular de chapa de puertas. La chapa cuesta

$5.000. El distribuidor vende 100 cada año, ya que se usan en varios modelos. El costo de ordenar normal es de $4.000. Si un cliente pide una chapa cuando no se tiene en almacén, se incurre en un costo de faltante de $1.000 por unidad. Si el costo de conservación es $2.000 por unidad por año, ¿cuál es la cantidad óptima de reorden? ¿Cuál es el nivel máximo de inventario?

17 "Repuesto de la Costa" fabrica una amplia variedad de repuestos de reemplazo para automóviles usados. Como produce tantas partes, prefiere esperar hasta tener suficientes órdenes antes de poner en marcha la línea de producción para cualquiera de ellas. Como los faltantes deben esperar, Repuestos de la Costa estima que hay un costo por faltantes de $20.000 por unidad por llevar el registro. Por ejemplo, se lleva 30 minutos con un costo de $100.000 iniciar la línea para ensamblar bombas de gasolina. La firma produce 20.000 unidades por año. Su costo de conservación del inventario es $5.000 por unidad por año.

¿Cuál debe ser su política de inventario?

18 Colchones Relax produce 1.500 unidades anuales de un modelo especial de Colchón. Cuesta $50.000 y un día echar a andar la línea de producción para este colchón. La firma estima su costo de conservación en $20.000 por unidad por año. Llevar un registro de faltantes cuesta 10% por unidad.

a) ¿Cuántas unidades debe producir la firma en cada corrida?

b) ¿Cuál es el costo total cada año por inventario?

19 ¿Cuánto ahorra al año la compañía anterior (ver problema 16) al permitir faltantes? Para hacer la comparación encuéntrese el costo anual de inventario si no se permitieran faltantes.

20 La demanda de un artículo de una determinada compañía es de 18.000 unidades/año, y la compañía puede producir ese artículo a una tasa de 3.000 unidades por mes. El costo de organizar una tanda de producción es de $500 y el costo de almacenamiento de una unidad por mes es de $0.15, se permiten faltantes y el costo de una unidad agotada es de $20 por año. Determine:

a) La cantidad óptima que debe manufacturarse
b) El número de unidades agotadas
c) El inventario máximo
d) El costo total anual en inventario
e) El tiempo de manufacturación

21 La demanda de un artículo es de 1.000 unidades por mes, y se permite déficit, puede manufacturarse a una tasa de 4.000 unidades por mes. Si el costo unitario de producción es de $1500, el costo de preparar una tanda de producción de $600, el costo de tenencia de una unidad es de $200 por año y el costo de déficit de una unidad es de $1000 por año, determinar:

a) La cantidad óptima que debe manufacturarse
b) El número permitido de unidades agotadas
c) El costo total anual óptimo
d) El número de tandas de producción
e) El tiempo entre tandas de producción
f) El tiempo necesario para fabricar la cantidad óptima
g) La duración del déficit
h) El inventario Máximo

Modelo de Compra con Descuento por Cantidad

22 Almacén La Isla actualmente ordena partes usando el modelo del lote económico para minimizar sus costos. El proveedor ha ofrecido un 1% de descuento si la Aba-Nikos ordena por mes. Dados los datos siguientes, ¿Debe aceptar la oferta Aba-Nikos?

Uso anual:	62.500
Costo de ordenar:	$10.000 por orden
Costo conservación:	20% /unidad/año
Precio:	$1.000/unidad (sin descuento)

23 Almacén El Buzo almacena cloro en cartuchos de 4 libras para usarse en clorinizadores automáticos. De marzo a octubre las ventas promedian 300 cartuchos al mes. El Buzo paga $6.000 por cada uno con un tiempo de entrega de 2 semanas. Su costo de conservación se estima en el 15% del valor del inventario promedio anual. Estima su costo de ordenar en $5.000 por orden. Han ofrecido al Buzo un descuento del 5% si ordena mensualmente.

Ignorando el descuento ¿cuál es la política de inventario que debe seguir la compañía?

¿Cuánto ahorraría ordenando una cantidad suficiente para recibir el descuento?

24 Marina Yates comercializa Motores fuera de borda. Cierto modelo cuesta a la compañía $100.000 cada uno y tiene un tiempo de entrega de dos semanas. Las ventas son estables de un Motor por semana durante todo el año. Los costos de ordenar son de $5.000 por orden y los costos de conservación ascienden a un 10% del valor del inventario promedio en el año. Marina Yates actualmente ordena y conforma al modelo del lote económico, pero le han ofrecido un 10% de descuento si ordena por lo menos 15 unidades.

¿Cuánto ahorraría la compañía al año si ordena lo suficiente para recibir el descuento?

25 Un distribuidor de artículos marinos compra tanques de gas al fabricante a $12.000 cada uno. El fabricante ofrece un 5% de descuento en órdenes de 50 ó más y 10% de 100 ó más. El distribuidor estima sus costos de ordenar en $5.000 por orden y los de conservación en $10.000 por unidad por año. El distribuidor compra 300 tanques por año. ¿Cuántos tanques deberá ordenar cada vez?

26 Una Compañía desea establecer una regla de administración de inventarios para un producto cuyo consumo anual se eleva a $250.000.000.oo. Después del estudio detallado de sus principales registros contables, se ha colectado la siguiente información:

- Costo unitario : $ 2500
- Alquiler almacén : $ 250/unidad
- Costo de preparación de un pedido : $ 21.500/pedido

  Seguro de los inventarios : 10 % de su valor
- Costo de recepción : $ 20.000/pedido
- Gastos postales : $ 500/pedido
- Pérdidas por deterioro : 2 %

  Falta de ganancia en intereses : 10 %

Calcule:

a) El costo de ordenar y conservación por unidad

La cantidad económica a pedir.

La cantidad por ordenar, considerando la hipótesis de los siguientes descuentos por cantidad:

1 a 9.999	$2500 por unidad
10.000 a 19.999	$2400 por unidad
20.000 ó más	$2350 por unidad

Modelo con Demanda Deterministica con Periodo Fijo de Reorden, Costos de Faltantes Desconocidos

27 Galería Real vende un artículo de consumo que tiene un promedio de ventas de 10 unidades por día. Los pedidos solo pueden hacerse cada tercer día y se reciben tres después. La galería quiere mantener un nivel de servicio del 99%. Si la desviación estándar de la demanda del periodo de reorden es de 15, ¿Cuál debe ser el punto hasta el que se ordena?

28 Gloriben trabaja diferentes floreros de cristal. Las órdenes se hacen cada mes, con un promedio de tiempo de entrega de dos meses. Si la demanda del período de reorden tiene desviación estándar de 4.

a) ¿Qué punto hasta el que se ordena dará un nivel de servicio de 98?

b) Establezca la política de inventario considerando el hecho de que el período de reorden que el tiempo de entrega.

Modelo con Demanda Determínistica con Periodo Fijo de Reorden, Costos de Faltantes Conocidos

29 Dados los siguientes datos, encuéntrese la cantidad de reorden y el punto de reorden:

Demanda anual: 100.000 unidades

Costo de ordenar: $12.000 por orden

Costo de conservación: $60.000 por unidad /año

Costo por faltante: $10.000 por unidad

Tiempo de entrega promedio: 3 días

Demanda diaria promedio: 400 unidades

Supóngase que la demanda del tiempo de entrega está distribuida normalmente con una desviación estándar de 35 unidades.

30 Librería El plagio vende una amplia variedad de libros de pasta dura sobre muchos temas. La librería esta dividida en áreas por materias, de manera que puedan agruparse los libros similares. Considere, por ejemplo el área de historia. La librería tiene 15 pies de espacio en las repisas en que pueden colocarse 200 libros sobre historia. El plagio piensa que los libros sobre historia, con algunas excepciones, se compran por impulso y que las ventas se pierden si se dispone de muy pocos libros. La librería estima este costo por faltantes en $3000 por cliente de libros de historia, siempre que tiene menos de 10 libros. En promedio, vende 400 de estos libros al año. Los costos de ordenar son altos, ya que debe hacerse una selección de títulos, promediando $15.000 por orden. El costo de conservación es de 1200 por libro por año. De la experiencia pasada se sabe que la demanda del tiempo de entrega es de 40 libros en promedio con una desviación estándar de 10, normalmente distribuida.

a) ¿Cuántos libros de historia se deben ordenar cada vez?

b) ¿Cuál debe ser el punto de reorden?

c) ¿Cuál es el nivel de servicio que debe proporcionarse?

Modelo con Demanda Probabilística

Cuando no se Conoce el Costo de Faltantes

31 El proveedor de la tienda de un gran comerciante es un almacén lejano. Con pocas excepciones, el almacén puede abastecer cualquier artículo que se le pida en cualquier cantidad. Uno de los artículos que se vende es el aceite de motor para automóviles. La demanda del aceite tiende a un promedio de 5 cajas por día y se distribuye normalmente. El tiempo de entrega varía un poco, con promedio de 3 días. La desviación estándar para la demanda del tiempo de entrega es 3.9. Los costos de ordenar se estiman en $15.000 por orden. El comerciante quiere un 98% de nivel de servicio en el aceite de motor.

La tienda abre 6 días por semana durante 50 semanas al año. Determine la cantidad de reorden y el punto de reorden.

32 Un productor de Microcomputadoras compra una unidad de procesamiento central de un solo chip por $15.000 cada uno. Según los planes de producción, se necesitan 10.000 unidades durante el próximo año, pero esto dependerá de las ventas. En realidad, la firma piensa que la demanda estará distribuida normalmente con un promedio de 10.000 unidades.

El gerente de abastecimientos hace planes basándose en un tiempo de entrega promedio de 9 días, una demanda diaria promedio de 10.000 dividida en 300 días hábiles, o 33 unidades por día y un nivel de servicio del 99%.

Los costos de ordenar son de $30.000 por orden, mientras que los costos de conservación son de $3.000 por unidad por año. La demanda del tiempo de entrega tiene una desviación estándar de 15 unidades.

Encuentre el punto de reorden del inventario y la cantidad que debe ordenarse.

33 Encuéntrese el punto de reorden para un artículo que tiene una demanda de tiempo de entrega distribuida normalmente con media de 70 y desviación estándar de 8, cuando se desea un nivel de servicio del 90%.

34 Un artículo tiene una demanda promedio de tiempo de entrega de 40 unidades (con distribución normal) con una desviación estándar de 7. Se desea un nivel de servicio del 95%. Encuéntrese el punto de reorden.

35 La demanda del tiempo de entrega para un artículo tiene un promedio de 65 con desviación estándar de 8(y distribución normal) ¿Cuál es el inventario de seguridad necesario para proporcionar sólo un 5% de posibilidad de quedar sin existencia?

36 Química Colombia produce un compuesto químico de limpieza en tres localidades, después lo manda a uno de sus ocho almacenes regionales. El compuesto se envía en envase de 50 kilogramos. Cada almacén espera mantener un nivel de servicio a sus clientes del 95%.

El almacén de Químicos Barranquilla estima un costo de ordenar de $5.000 y sus costos de conservación en $4.000 por envase por año. La demanda de este almacén tiene un promedio de 1.000 envases por año. La demanda del tiempo de entrega se distribuye normalmente, con media de 20 y desviación estándar de 5. Formúlese una política de inventario para este artículo.

37 Una tienda de artículos marinos almacena tanques de oxígeno. Un tanque de un una marca de mucha aceptación tiene venta promedio de 500 unidades por año. El tanque cuesta $65.000 y se vende por $75.000 La tienda trata de mantener un nivel de servicio del 95%. Los costos de conservación promedian anualmente el 20% del valor del inventario, mientras que cada orden cuesta $5.000. La demanda del tiempo de entrega tiene una distribución normal con media 10 y desviación estándar de 3. Con un modelo de cantidad fija de reorden, formule la política de inventario que se debe usar.

38 La Enlatados de La Costa importa sardinas enlatadas desde el Perú, junto con muchos otros productos de mar. Las sardinas se compran en cajas de 24 latas y se venden bastante bien, con un promedio de 15 cajas por año. El gerente hace pedidos de 5 cajas cada vez, debido a que el tiempo de entrega es largo (casi siempre cuatro meses). El pedido se hace cuando se abre la última caja. Si la demanda del tiempo de entrega tiene un promedio de 3 cajas con una desviación estándar de 2 cajas. ¿Cuál es el nivel de servicio que proporciona Enlatados de la Costa?

Modelo con Demanda Probabilística
Cuando si se Conoce el Costo de Faltantes

39 Dados los siguientes datos, encuéntrese la cantidad de reorden y el punto de reorden:

Demanda Anual: 100.000 unidades

Costo de ordenar: $12.000 por orden

Costo de conservación: $60.000 por unidad /año

Costo por faltante: $10.000 por unidad

Tiempo de entrega promedio: 3 días

Demanda diaria promedio: 400 unidades

Supóngase que la demanda del tiempo de entrega esta distribuida normalmente con una desviación estándar de 35 unidades.

40 Librería El plagio vende una amplia variedad de libros de pasta dura sobre muchos temas. La librería esta dividida en áreas por materias, de manera que puedan agruparse los libros similares. Considere, por ejemplo el área de historia. La librería tiene 15 pies de espacio en las repisas en que pueden colocarse 200 libros sobre historia. El plagio piensa que los libros sobre historia, con algunas excepciones, se compran por impulso y que las ventas se pierden si se dispone de muy pocos libros. La librería estima este costo por faltantes en $3.000 por cliente de libros de historia, siempre que tiene menos de 10 libros. En promedio, vende 400 de estos libros al año.

Los costos de ordenar son altos, ya que debe hacerse una selección de títulos, promediando $15.000.oo por orden. El costo de conservación es de $1.200.oo por libro por año. De la experiencia pasada se sabe que la demanda del tiempo de entrega es de 40 libros en promedio con una desviación estándar de 10, normalmente distribuida.

a) ¿Cuántos libros de historia se deben ordenar cada vez?

b) ¿Cuál debe ser el punto de reorden?

c) ¿Cuál es el nivel de servicio que debe proporcionarse?

Modelo con Periodo Fijo de Reorden, Demanda Probabilística y Costos de Faltantes Desconocidos

41 Galería Real vende un artículo de consumo que tiene un promedio de ventas de 10 unidades por día. Los pedidos sólo pueden hacerse cada tercer día y se reciben tres días después. La galería quiere mantener un nivel de servicio del 99%. Si la desviación estándar de la demanda del periodo de reorden es de 15, ¿Cuál debe ser el punto hasta el que se ordena?

42 Gloriben trabaja diferentes floreros de cristal. Las órdenes se hacen cada mes, con un promedio de tiempo de entrega de dos meses. Si la demanda del período de reorden tiene desviación estándar de 4.

a) ¿Que punto hasta el que se ordena dará un nivel de servicio de 98?
b) Establezca la política de inventario considerando el hecho de que el período de reorden que el tiempo de entrega.

Análisis abc: Ley de Paretto

43 Los siguientes artículos han sido registrados en el fichero de una compañía, así como su costo anual de compra:

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Código	S27	P28	N46	W33	M72	M65	S25	P16	O21	P12
Costo anual	64.000	2.400	74.000	28.000	216.000	7.400	56.000	38.000	16.200	130.000

a) Clasifique estos artículos según el método ABC

b) Indique el valor monetario y el porcentaje de cada clase

c) Calcule la cantidad económica a ordenar del artículo P36, cuyo costo unitario es de \$2000 y su costo de ordenar \$5000/pedido y el costo anual de conservación es de \$500 por unidad.

Capítulo 3

Líneas de espera- teoría de colas

Objetivos

- Conocer e identificar los tipos de costos que se dan en los sistemas de colas de espera.
- Conocer e identificar las estructuras típicas de los sistemas de colas de espera.
- Conocer y aplicar los supuestos y las ecuaciones para los modelos para estudiar los sistemas de colas de esperas.
- Formular y aplicar los modelos de sistemas de colas de espera para encontrar la capacidad de servicio que minimiza el costo del sistema.

3.1. Introducción a la teoría de colas.

Objetivos

Tener que esperar en una cola es una experiencia cotidiana que normalmente se considera desagradable. Esperar en un ascensor, esperar el pedido en un restaurante o en la cola de un banco es una confrontación con la pérdida de tiempo .No es fácil esperar pacientemente en la cola de un supermercado. Si la espera es demasiado larga, las personas se vuelven irritables e inquietas, llegando en varios casos a que los temperamentos se ofusquen.

Aún sea desagradable esperar, es fácil observar que el proporcionar suficiente capacidad de servicio para eliminar la espera sería costoso.
Pensemos en ¿cuántas cajeras se necesitaría en un banco o en un supermercado para eliminar las colas? (aún si esto fuera posible, todavía

se tendría que esperar mientras se proporciona el servicio). Es claro que se necesita algún tipo de balanceo o compromiso para que el tiempo de espera no sea muy largo y el costo de servicio no sea muy alto.

El problema del administrador es determinar que capacidad o tasa de servicio proporciona el balance adecuado. Este sería un problema sencillo, si cada cliente llegara a una hora fija y el tiempo de servicio también fuera fijo. Los sistemas de líneas de espera son sistemas probabilísticas o aleatorios.

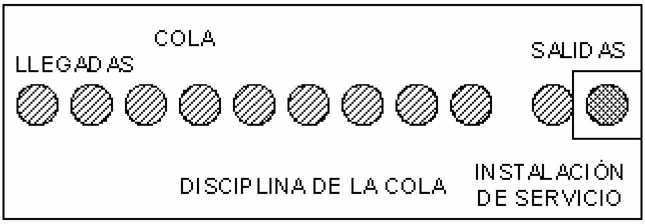
Con experiencia y sentido común, muchos administradores encuentran un balance apropiado entre los costos de espera y de servicio sin elaborar ningún tipo de cálculo. Por ejemplo el administrador de un supermercado actúa intuitivamente para agregar personal en las cajas cuando las colas se hacen muy largas. El administrador de un restaurante planea tener más meseros alrededor de las horas de las comidas, guiándose por la experiencia. No obstante, en ocasiones en que la intuición necesita ayuda, como cuando va de por medio una inversión sustancial de capital o cuando el balance apropiado no es evidente, el análisis cuantitativo es útil en estas situaciones.

Una cola es una línea de espera y la teoría de colas es una colección de modelos matemáticos que describen sistemas de líneas de espera particulares o sistemas de colas. Los modelos sirven para encontrar el comportamiento del estado estable, como la longitud promedio de la línea y el tiempo de espera promedio para un sistema dado. Esta información, junto con los costos pertinentes, se usa entonces, para determinar la capacidad de servicio apropiada.

3.2. Costos de los sistemas de colas

Un sistema de colas puede dividirse en sus dos componentes de mayor importancia, la cola y la instalación de servicio.

FIGURA 3-1: SISTEMA DE COLAS



Las llegadas son las unidades que entran al sistema para recibir el servicio, siempre se unen primero a la cola; si no hay línea se dice que la cola está vacía. De la cola las llegadas van a la instalación de servicio de acuerdo con la disciplina de cola, es decir, de acuerdo con la regla para decir cual de las llegadas se sirve después. El primero en llegar primero en ser servido es una regla común, Una vez que se completa el servicio, las llegadas se convierten en salidas.
Ambos componentes del sistema tiene costos asociados que deben considerarse.

Costo de espera

Esperar es estar inútil. Es desperdicio. Significa que algún recurso está inactivo cuando podría usarse en forma más productiva (o agradable) en otra parte. De hecho, representa un costo de oportunidad. Cuando los camiones esperan inútiles en una cola de un muelle de carga y descarga,

se pierde su productividad, es dinero que se pierde y no puede recuperarse.
Cuando los clientes esperan en la cola de un banco, el costo de espera es indirecto. Es cierto que no se hace ningún pago cuando un cliente disgustado se va porque la cola es demasiado larga, pero el banco paga esta espera de otra manera. Los clientes se quejan quitando tiempo a los empleados .Dejan de venir, causando que se pierdan oportunidades de ganancia. Si el problema continua, podrían hacer que banco quiebre. Este costo intangible es tan real como cualquier dinero que se saca del bolsillo.

Cuando el costo de espera es medible, como en el caso de los camiones en el muelle de carga y descarga, los cálculos son directos. Pariendo de la nómina y otros gastos contables puede encontrase el costo por hora: como el costo de espera casi siempre es proporcional al tiempo de espera, puede expresarse como el costo de espera por hora multiplicado por la longitud promedio de la línea:

$$\text{Costo total de espera} = C_w L$$

En donde: C_w = Costo de espera en $ por llagada por unidad de tiempo y L la longitud promedio de la línea.

Si por ejemplo, el costo de un camión que espera en la línea es de $ 100.000/por hora (incluyendo conductor y ayudantes) y en promedio hay cuatro camiones esperando, entonces el costo de espera total es de $ 400.000 por hora.

Con frecuencia es difícil dar una cantidad en pesos para el costo de espera de los clientes que están en una línea.
Existen dos formas de manejar el costo intangible del tiempo de espera de los clientes. Una es pedir a las personas con conocimiento que

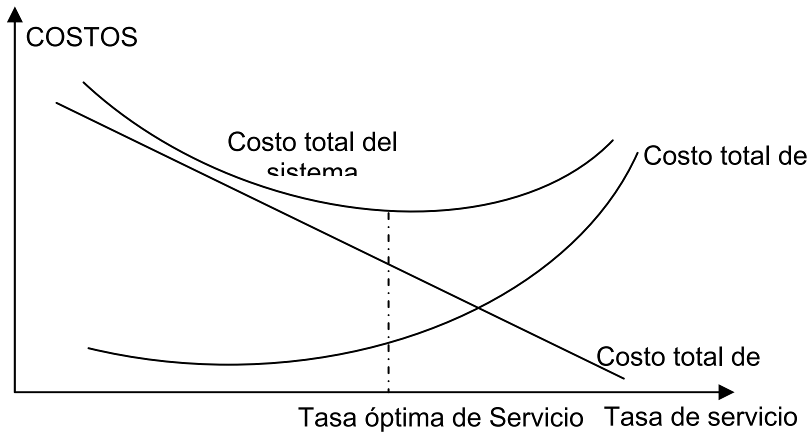
estimen el valor promedio del tiempo de un cliente, tomando en cuenta los factores psicológicos y competitivos de la situación. Después casi siempre se supone linealidad (es más fácil) y se usa la fórmula anterior para encontrar el costo de espera total. El segundo método tiene un enfoque indirecto que establece un tiempo máximo de espera para el cliente promedio, este se usa después para determinar la capacidad del servicio. Co este punto de vista por supuesto, todavía existe el costo de espera pero no se usa en forma explícita.

Costo de servicio

Determinar el costo de servicio es más sencillo, en concepto, que determinar el costo de espera. En la mayoría de las aplicaciones se tratará de comparar varias instalaciones de servicio, dos cajeras en un banco contra tres, una brigada de cuatro contra cinco, una caja de una tienda contra dos. En estos casos, sólo se necesitan los costos comparativos o diferenciales. Por ejemplo, si se quiere saber cuantas cajas de autobanco deben tener personal, sólo se necesitan los costos de personal. Por otra parte, si la pregunta es cuantas cajas se deben instalar, entonces se necesitan los costos de instalación y los de operación de cada ventanilla.

3.3 Sistema de costo mínimo

Tan indeseable como pueda ser la espera, puede ser menos costoso que



FÍGURA 3-2

proporcionar un servicio más rápido. Desde un punto de vista global, se quiere que el sistema que comparado con los demás, tenga el costo total más pequeño, incluyendo el costo de servicio y el costo de espera. Esto se muestra en la figura a continuación:

Para tasas bajas de servicio, se experimentan largas colas y costos de espera muy altos. Conforme aumenta el servicio, hay un ahorro sustancial en el costo de espera, aunque los costos de servicio aumenten, ya que el costo total del sistema disminuye. Sin embargo, finalmente se llega a un punto de disminución en el requerimiento. Más allá del punto de costo mínimo, el aumento en el costo del servicio cuesta más que los ahorros consecuentes con el costo de espera. Entonces el objeto es encontrar el sistema de costo mínimo.

3.4 Estructuras típicas de Colas

Las llegadas pueden ser personas, cartas, carros, incendios, ensambles intermedios en una fábrica, etc.

Tabla 3-1 ejemplos de sistemas de colas

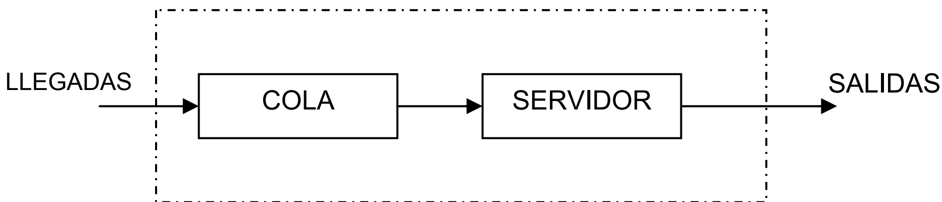
SITUACIÓN	LLEGADAS	COLA	INSTALACIÓN DE SERVICIO
Aeropuerto	Aviones	Aviones en carreteo	Pista
Aeropuerto	Pasajeros	Sala de espera	Avión
Cía. Telefónica	Números marcados	Llamadas	Conmutador
Lavado de carros	Autos	Autos sucios	Mecanismo de lavado
Hospital	Pacientes	Personas enfermas	Hospital
Cartas de oficina	Notas de dictado	Cartas por escribir	Secretaria
Carga de camiones	Camiones	Camiones en espera	Muelle de carga

Nótese que en cada situación sólo fluye un solo tipo de artículo a través del sistema. Las llegadas vienen de una misma población, son homogéneas.

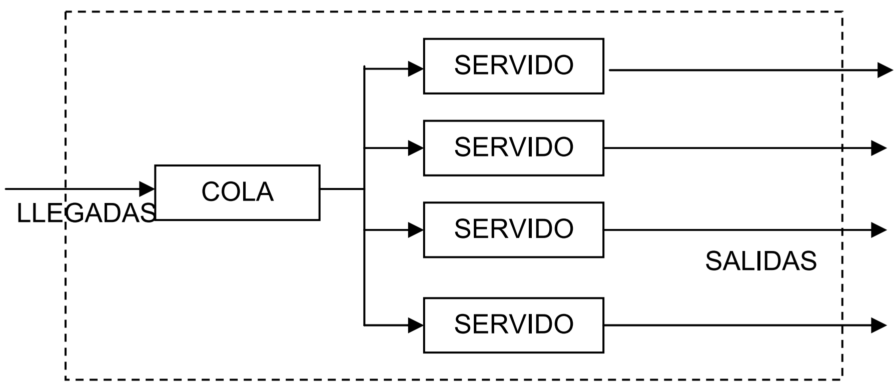
Permitiendo que varíen de número de colas y el número de servidores, pueden hacerse los diagramas de cuatro tipos de sistemas mostrados a continuación:

FIGURA 3-3

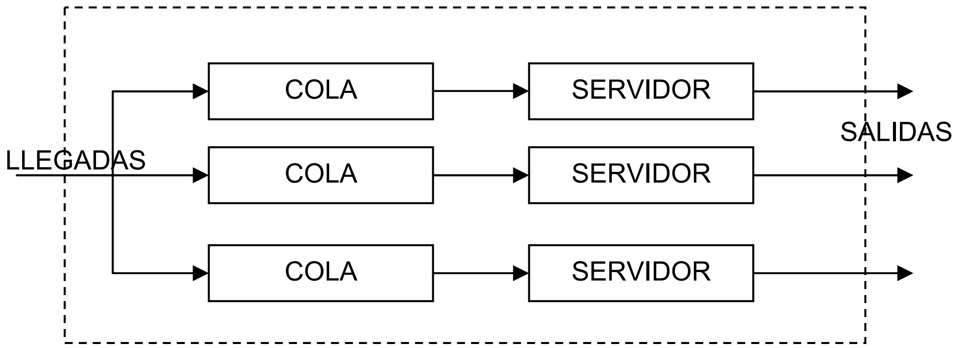
a) UNA LÍNEA Y UN SERVIDOR



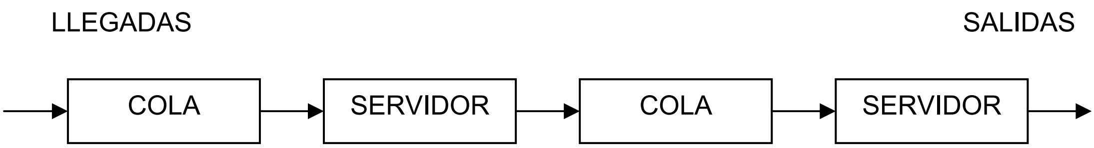
b) UNA LÍNEA; MÚLTIPLES SERVIDORES



c) VARIAS LÍNEAS, MÚLTIPLES SERVIDORES



d) UNA LÍNEA, SERVIDORES SECUENCIALES



El primer sistema que se muestra se llama un sistema de un servidor y una cola y puede describir un lavado de carros automáticos o un muelle de descarga de un solo lugar. El segundo, una línea con múltiples servidores, es típico de una peluquería o una panadería en donde los clientes toman un número al entrar y les sirven cuando les llega el turno. El tercer sistema, es aquel en que el servidor tiene una línea separada, es característico en los bancos y tiendas de autoservicio. Para este tipo de servicio pueden separarse los servicios y tratarlos como sistemas independientes de un servidor y una sola línea. Esto sería válido si se da poco intercambio entre las colas, como en las ventanillas de autobanco. Cuando el intercambio es sencillo y ocurre con frecuencia, como dentro del banco, la separación no sería válida. El cuarto sistema, una línea con servidores en serie, puede describir una fábrica.

3.5 Modelo de un servidor y una Cola

Este modelo puede aplicarse a personas esperando en una línea para comprar boletos para el cine, a mecánicos que esperan obtener las herramientas de un expendio o a trabajos de computadora que esperan tiempo de procesador.
Es uno de los modelos más antiguo, más sencillos y más comunes de la teoría de colas. Se analizan las suposiciones necesarias para este modelo.

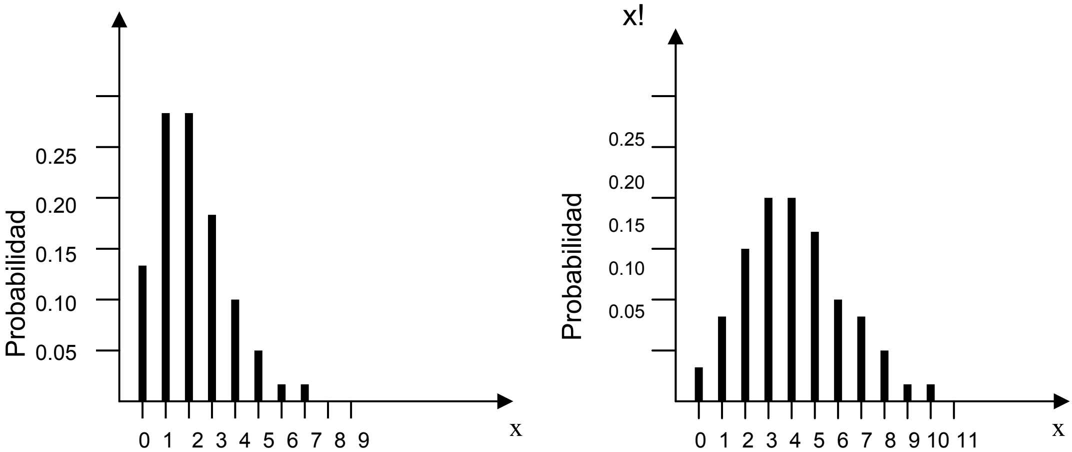
3.5.1 Llegadas

Se supone que las llegadas entran al sistema de manera completamente aleatoria: No tiene horario, es impredecible en que momento llegarán.

De otra manera más formal, esto significa que la probabilidad de una llegada en cualquier instante de tiempo, es la misma que en cualquier otro momento. Esto equivale a decir que el número de llegadas por unidad de tiempo tiene una distribución de Poisson. La suposición de llegadas aleatorias es válida para una infinidad de sistemas reales.

Comportamiento de las llegadas. La mayoría de los modelos de colas asumen que un cliente que llega es un cliente tolerante. Los clientes tolerantes son gente o máquinas que esperan su turno para recibir el servicio y no se intercambian entre las líneas. Desafortunadamente, la vida se complica por el hecho de que se sabe que la gente se frustra o deserta. Los clientes que se frustran se niegan a unirse a la línea de espera debido a que es demasiado larga y no se adapta a sus necesidades o intereses .Los cliente desertores son aquellos que entran a la fila pero que se vuelven impacientes y la dejan sin completar su transacción. En realidad, ambas situaciones únicamente sirven para acentuar la necesidad de la teoría de colas y el análisis de las líneas de espera.

$$\text{Probabilidad} = P(x) = \frac{e^{-A}A^x}{x!}$$

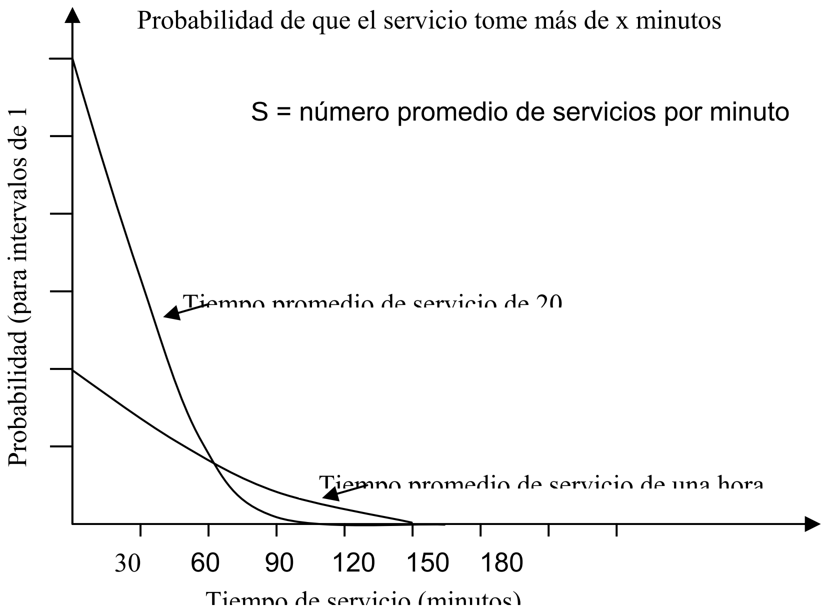


Distribución para A = 2 Distribución para A= 4

Fígura 3.4 Dos ejemplos de Distribución de Poisson para tiempos de llegada

3.5.2 Cola

En este modelo se considera que el tamaño de la cola es infinito. Es cierto que todas las colas tienen límites en el tamaño, pero este límite no desanima o evita las llegadas, puede ignorarse. La disciplina de la cola es primero en llegar primero en ser servido sin prioridades especiales.



También se supone que las llegadas no pueden cambiar lugares en la línea o dejar la cola antes de ser servidas.

3.5.3 Instalación de servicio

Se supone que un solo servidor proporciona el servicio que varía aleatoriamente. En particular, el tiempo de servicio .sigue una distribución exponencial. De hecho esto se deriva de la suposición de que las salidas son completamente aleatorias, la misma suposición que se hizo para las llegadas.

Figura 3.5 Dos ejemplos de distribución exponencial negativa para tiempos de servicio

3.5.4 Salidas

No se permite que las unidades que salen vuelvan a entrar de inmediato al sistema. Si bien esto sucede en ocasiones en sistemas reales, es muy raro. Si sucediera con frecuencia, afectaría la distribución de las llegadas.

3.5.5 Notación de Kendall Lee

D.G. Kendall sugirió de una notación de utilidad para clasificar la amplia diversidad de los diferentes modelos de línea de espera que se han desarrollado. La notación de Kendall, de tres símbolos es como sigue:

A/B/K

Donde:

A: indica la distribución de probabilidades de las llegadas

B: Indica la distribución de probabilidades de tiempos de servicio

- K: Indica el número de canales

Dependiendo de la letra que aparezca en la posición A o B, se puede describir una amplia variedad de sistemas de línea de espera. Las letras que comúnmente se utilizan son:

M: Designa una distribución de probabilidad de Poisson para las llegadas o distribución de probabilidad exponencial para el tiempo de servicio.

D: Designa el hecho de que las llegadas o el tiempo de servicio es determinístico o constante.

G: Indica que las llegadas o el tiempo de servicio tienen una distribución de probabilidad general, con media y varianza conocida.

Características de operación

Las características de operación son medidas de lo bien que funciona el sistema. En la mayoría de las aplicaciones de líneas de espera, el estado estable es de primera importancia. Los estados transitorios, como el de echar a andar y apagar el sistema, no se analizan. Las longitudes de las líneas de espera y los tiempos de espera se calculan en promedio. La derivación llega a los resultados siguientes:

3.5.5.1 Modelo de una sola línea, un servidor, llegadas Poisson, tiempos de servicio exponenciales –M/M/1

Cola:

- Longitud promedio de la línea $Lq = \frac{A^2}{S(S-A)}$
- Tiempo de espera promedio $Wq = \frac{Lq}{A} = \frac{A}{S(S-A)}$

Sistema:

- Longitud promedio de la línea $Ls = Lq + \frac{A}{S} = \frac{A}{S-A}$

  Tiempo de espera promedio = $Ws = \frac{Lq}{A} = \frac{1}{S-A}$

  Utilización de la instalación $U = \frac{A}{S}$

Probabilidad de que la línea exceda a n: $P(Ls>n) = \left(\frac{A}{S}\right)^{n+1}$

En donde:

A = Tasa promedio de llegada por unidad de tiempo

S = Tasa promedio de servicio por unidad de tiempo

Para entender como se utilizan las fórmulas, considérese el siguiente ejemplo

Ejemplo 3-1 ejemplo de un hipermercado

Imaginemos un Hipermercado como muchas cajas de salida. Supóngase que los clientes llegan para que se les marque su cuenta, con una tasa de 90 por hora y que hay 10 cajas en operación .Si hay poco intercambio entre las líneas, puede tratarse este problema como 10 sistemas separados de una sola línea, cada uno con una llegada de 9 clientes por hora, para una tasa de servicio de 12 clientes por hora.

Dados A = 9 clientes/hora

S = 12 clientes/hora

Entonces:

$$Lq = \frac{A^2}{S(S-A)} = \frac{(9)^2}{12(12-9)} = 2{,}25 \text{ clientes}$$

$$Wq = \frac{A}{S(S-A)} = \frac{9}{12(12-9)} = 0{,}25 \text{ horas ó } 15 \text{ minutos}$$

$$Ls = \frac{A}{S-A} = \frac{9}{12-9} = 3 \text{ clientes}$$

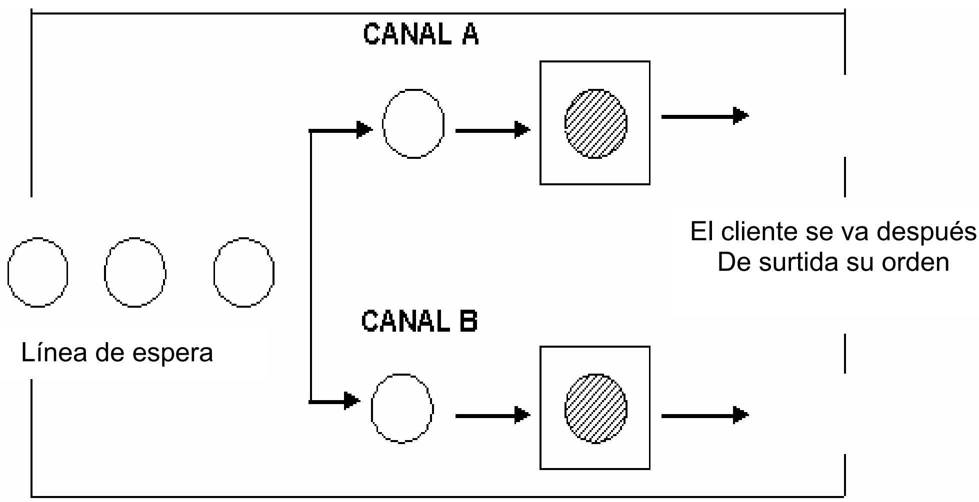


FIGURA 2-5

$$Ws = \frac{1}{S-A} = \frac{1}{12-9} = 0,33 \text{ horas ó 20 minutos}$$

$$U = \frac{A}{S} = \frac{9}{12} = 0,75 \text{ ó } 75\%$$

$$P(Ls>n) = (A/S)^{n+1} = (9/12)^{(2+1)} = 0,32$$

Entonces, para este ejemplo, el cliente promedio espera 15 minutos antes de ser servido. En promedio hay un poco más de dos clientes en la línea o tres en el sistema. El proceso completo lleva un promedio de 20 minutos. La caja está ocupada el 75% del tiempo y finalmente, el 32% del tiempo habrá cuatro personas o más en el sistema o tres o más esperando en la cola.

3.5.5.2 Modelo de línea de espera de múltiples canales, con llegadas Poisson y tiempos de servicio exponencial M/M/k

k= Número de Canales o instalaciones de servicio (en este grafico A y B)

$$Po = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k=n} (A/S)n/n! + ((A/S)\ k/k!)(kS)/(kS-A))}$$

Cola:

Longitud promedio de la línea = Lq =Po.(A/S)kAS/(K-1)!(kS-A)^2

Tiempo de espera promedio Wq = Lq/A

Sistema:

- Longitud promedio de la línea $Ls = Lq + \frac{A}{S}$

- Tiempo de espera promedio = Ws = $\frac{Lq}{A}$
- Utilización de la instalación Pw = $\frac{A}{S}$ (Probabilidad que una unidad tenga que esperar)

Probabilidad de n unidades en el sistema n ≤k Pn = ((A/S)n/n!).Po

Probabilidad de n unidades en el sistema n >k

Pn = Po.(A/S)n/(k)k(n-k)

A = Tasa promedio de llegada por unidad de tiempo

S = Tasa promedio de servicio por unidad de tiempo

k = Número de canales

Para comprender como se utilizan las fórmulas, considérese el siguiente ejemplo:

En un negocio que vende hamburguesas, papas fritas, refrescos y malteadas, así como otros productos especiales y postres; su dueño está preocupado pues los métodos que utiliza para atender a los clientes están dando como resultado tiempos de espera excesivos. Aplique los conceptos y modelos para ayudar a solucionar el problema del negocio. Le suministran lo siguiente:

Tasa media de Llegada A =0.75 clientes por minuto y una tasa media de servicio S = 1 cliente por minuto.

La operación del canal del negocio de Comidas rápidas que actualmente opera con un solo canal se puede expandir a un sistema de dos canales, abriendo un segundo canal; es decir k=2. Calcúlase los parámetros para este sistema.

3.5.5.3 Modelo de línea de espera de un solo canal, con llegadas Poisson y tiempos de servicio arbitrarios M/G/1

Probabilidad de que no existan unidades en el sistema Po =1 - A/S

Número promedio de unidades en la línea de espera $Lq = \frac{A^2 \sigma^2 + (A/S)^2}{2(1-A/S)}$

Número promedio de unidades en el sistema $Ls = Lq + A/S$

Tiempo promedio que utiliza la unidad en la línea de espera $Wq = Lq/A$

Tiempo promedio que la unidad ocupa el en sistema $Ws = Wq + 1/S$

Probabilidad de que una unidad que llega tenga que esperar servicio

$Pw = A/S$

Para comprender como se utilizan las fórmulas, considérese el siguiente ejemplo:

Un solo empleado maneja las ventas de un almacén. Las llegadas de los clientes son aleatorias y la tasa promedio de llegadas es de 21 clientes por hora, es decir A = 21/60=0.35 clientes por minuto. Un estudio del proceso del servicio muestra que el tiempo promedio del servicio es de dos minutos por cliente, con una desviación estar de σ =1.2 minutos. El tiempo medio de minutos por cliente muestra que el empleado tiene una tasa de servicio S = 1/2 o sea 0.50 clientes por minuto.

3.5.5.4 Modelo de línea de espera de un solo canal, con llegadas Poisson y tiempos de servicio constantes M/D/1

Probabilidad de que no existan unidades en el sistema

$Po = 1 - A/S$

Número promedio de unidades en la línea de espera

$Lq = \frac{(A/S)^2}{2(1-A/S)}$

Número promedio de unidades en el sistema

$Ls = Lq + A/S$

Tiempo promedio que utiliza la unidad en la línea de espera

$Wq = Lq/A$

Tiempo promedio que la unidad ocupa el en sistema

Ws= Wq +1/S

Probabilidad de que una unidad que llega tenga que esperar servicio

Pw = A/S

Para comprender como se utilizan las fórmulas, considérese el siguiente ejemplo:

Los clientes llegan a una máquina automática vendedora de café a una tasa de cuatro por minuto, o sea A =4 Clientes/min.; siguiendo una distribución de Poisson. La máquina de café sirve una tasa de café a una tasa constante de 10 segundos, o sea S =6 /min.

3.5.5.5 Modelo de línea de espera de un solo canal, con llegadas Poisson y tiempos de servicio exponencial y población finita M/M/1 población finita

Probabilidad de que no existan unidades en el sistema:

$$Po= \frac{1}{\sum_{n=0}^{N}(N!/(N-)!)(A/S)n}$$

Número promedio de unidades en la línea de espera

Lq = (1-Po)(N-(A +S/A)

Número promedio de unidades en el sistema

Ls= Lq + (1-Po)

Tiempo promedio que utiliza la unidad en línea de espera

Wq = Lq/ (N-1)A

Tiempo promedio que la unidad ocupa el en sistema

Ws= Wq + 1/S

Probabilidad de n unidades en el sistema n = 0,2, 3…

Pn = Po.N!/(N-n)!(A/S)n.

Para comprender como se utilizan las fórmulas, considérese el siguiente Ejemplo 3-2

Una industria manufacturera tiene un grupo de seis máquinas idénticas; cada una trabaja un promedio de 20 horas entre averías, por lo que la tasa media de reparación A =1/20 = 0.05 máquinas por hora. Las averías siguen una distribución de Poisson y una sola persona atiende la reparación para las 6 máquinas y su tiempo de servicio se distribuye exponencialmente con media
S = 1/2 = 0.5 máquinas por hora.

3.6 Evaluación del sistema cuando se conoce el costo de espera

La naturaleza de los costos de servicio influye en el método para encontrar el sistema de menor costo.

$$\sqrt{ACw/Cs}$$

3.6.1 Cuando el costo de servicio es una función lineal de la tasa de servicio

Si el costo de servicio es una función lineal de la tasa de servicio, puede encontrarse una solución general para la tasa óptima de servicio:

$$CT = CwLs + CsS = Cw\frac{A}{(S-A)} + Cs\,S$$

Derivando esta última expresión del costo total del sistema con respecto a S e igualando a cero tenemos:

$$-CwA + Cs = 0, \quad \text{luego} \quad S = A +$$

Para aplicar una solución general, se necesita una tasa de servicio que pueda variar de manera continua, lo cual muy pocas veces ocurre en la práctica.

Por ejemplo en un supermercado no tiene sentido hablar de partes fraccionadas de una caja, las cajas se agregan en unidades completas, de una en una. Similarmente un departamento de reproducción puede tener opción de escoger entre varias copiadoras con capacidades distintas, pero no dispone de capacidades Intermedias.

3.6.2. Cuando los costos de servicio varían en forma escalonada.

Cuando los costos de servicio cambian en forma escalonada, se usa la técnica de prueba y error para encontrar el sistema de menor costo. Se calcula el costo total para cada tasa de servicio, después para el siguiente y así sucesivamente. Esto se continúa hasta que se encuentra un límite inferior o un mínimo tal que al aumentar o disminuir las tasas de servicio da costos totales más altos. Este procedimiento puede parecer laborioso, pero casi nunca lo es, casi siempre se puede encontrar el mínimo en tres o cuatro pruebas.
Para los sistemas con servidores múltiples, en general, lo que se desea es saber cuantos servidores se deben tener. En otros casos, las tasas de servicio pueden variarse con equipo o personal adicional. En los supermercados se agiliza el servicio poniendo un empacador en la caja.

EJEMPLO 3-3: Tamaño de una brigada

Se esta estudiando un muelle de carga y descarga de camiones para aprender como formarse una brigada .El muelle tiene espacio sólo para un camión, así es un sistema de un servidor. Pero el tiempo de carga o descarga puede reducirse aumentando el tamaño de la brigada.

Supóngase que puede aplicarse el modelo de un servidor y una cola (llegadas Poisson, tiempos de servicio exponenciales) y que la tasa promedio de servicio es un camión por hora para un cargador. Los cargadores adicionales aumentan la tasa de servicio proporcionalmente. Además supóngase que los camiones llegan con una tasa de dos por hora en promedio y que el costo de espera es de $20.000 por hora por camión. Si se le paga $5.000 por hora a cada miembro de la brigada, ¿Cuál es el mejor tamaño de ésta?

En resumen se tiene:

A = 2 camiones /hora

S = 1 camión /hora/persona

Cw = Costo de espera = $20.000 hora/camión

Cs = Costo de servicio = $ 5.000/hora/persona

Ahora sea k el número de personas en la brigada. Se busca k de tal forma que la suma de los costos de espera y de servicio se minimice.

$$\text{Costo Total} = CwLs + kCs$$

Nótese que se usa la longitud de la línea del sistema, porque el camión esta inútil tanto si espera como si esta siendo servido.

Las pruebas que se deben iniciar con tres miembros, ya que uno o dos no podrían compensar la tasa de dos camiones por hora. Para una brigada de tres, la tasa de servicio es de tres camiones por hora y puede encontrarse Ls con la ecuación:

$$Ls = \frac{A}{S-A} = \frac{2}{3-2} = 2 \text{ camiones}$$

Y

$$\text{Costo Total (3)} = (20.000)(2)+(3)(5.000)=\$55.000$$

Para una brigada de cuatro:

$$Ls = \frac{2}{4(1)-2} = 1 \text{ camión}$$

y

$$\text{Costo Total} = (20.000)(1) +(4)(5.000) = \$ 40.000$$

El costo es menor, por tanto se sigue adelante con una brigada de cinco:

$$Ls = \frac{2}{5(1)-2} = 0{,}67 \text{ camiones}$$

y

$$\text{Costo Total} = (20.000)\,(0{,}67) + (5)(5.000) = \$\ 38.333$$

Este todavía es menor, se prueba con una brigada de seis:

$$Ls = \frac{2}{(6)(1)-2} = 0{,}5 \text{ camiones}$$

y

$$\text{Costo Total} = (20.000)(0{,}5) + (6)(5.000) = \$40.000$$

Como este costo es mayor que el de la brigada de cinco, se rebasó el límite inferior de la curva de costo, el tamaño óptimo de la brigada es de cinco.

3.7 Evaluación del sistema con costos de espera desconocidos

Existen muchas situaciones en que el administrador no puede dar un valor en pesos al costo de espera por una sencilla razón, no tiene una forma razonable de estimar costos ¿Cuál es el costo de espera en un banco? ¿En una tienda o supermercado? ¿En un restaurante?

En lugar de estimar el costo de espera, el administrador puede especificar un promedio mínimo de espera o de longitud de la línea. Esto establece un límite superior para Wq el tiempo de espera en la cola (o para Lq, longitud de la línea de la cola). Con este límite superior puede encontrarse la tasa de servicio necesaria para cualquier tasa de llegada dada; aunque este método no proporciona un sistema óptimo, si da un diseño que está de acuerdo con las especificaciones de la administración.

EJEMPLO 3-4 Restaurante de comidas rápidas

Considérese un restaurante de comidas rápidas con un menú limitado. El restaurante se está diseñando para que todos los clientes se unan a una sola línea para ser servidos. Una persona tomará la orden y la servirá. Con sus limitaciones la tasa de servicio puede aumentarse agregando más personal para preparar la comida y servir las órdenes.

Esto constituye un sistema de un servidor y una línea. Si las llegadas y las salidas son aleatorias, puede aplicarse el modelo de una cola. Supóngase que la administración quiere que el cliente promedio no espere más de dos minutos antes que se tome su orden. Esto se expresa como:

$$Wq = 2 \text{ minutos}$$

Supóngase también que la tasa máxima de llegada es de 30 órdenes por hora.

Se sabe que: $Wq = \dfrac{A}{S(S-A)}$

Rearreglando términos se tiene que:

$$S(S-A) = A/Wq \qquad S^2 - AS - A/Wq = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática. La solución es:

$$S = A/2 + \sqrt{A^2/4 + A/Wq} = 30/2 + \sqrt{(30)^2/4 + 30/0{,}33}$$

=15+33,54=48,5 órdenes

Para cumplir los requerimientos, se necesita una tasa de servicio de casi 50 órdenes por hora. Si por ejemplo, una brigada de cinco puede manejar 45 órdenes por hora y una de seis puede procesar 50 por hora, entonces sería necesario tener la brigada de seis.

3.9 Aplicaciones modelos de colas de espera

1. a) Para el modelo de un servidor y tiempo de espera exponenciales, use una tasa de servicio de 40 por hora para calcular Lq, Wq, Ls, Ws y U para tasas de llegadas de 10, 20, 30 y 39 por hora.

   b) En una misma gráfica, dibuje Ws y U. ¿A qué conclusiones se puede llegar sobre el uso adecuado de los servicios?

2. La mayoría de los administradores de supermercados responden al crecimiento excesivo de las colas en las cajas agregando un empacador en la caja. Esto es realmente económico ?Supóngase que el agregar un empacador eleva la tasa de servicio de 20 a 30 clientes por hora y que la tasa de llegada es de 15 clientes por hora. Si la empacadora gana $ 3.000 por hora y el tiempo de espera del cliente se evalúa en $ 5.000 por hora ¿Cual es la conclusión?

3. Manufacturas Barranquilla tiene un departamento de herramientas a donde acuden los operarios en busca de algunas herramientas especiales. Los operarios solicitan el servicio a una tasa promedio de 20 veces por hora. se requiere un promedio de 4 minutos para procesar la solicitud de un operario. La paga de los operarios es de $ 5.000 por hora y la de los empleados del departamento de herramientas es de $ 3.000 por hora. Si aumentando el número de empleados se logra reducir en forma proporcional el tiempo de

servicio. ¿Cuantos empleados deberán contratarse para el departamento de herramientas?

4. Reparaciones e Instalaciones de la Costa trabaja las 24 horas del día, 7 días a la semana en reparaciones de plomería. Las llamadas de los clientes llegan con una tasa de 10/día. Pepe piensa que un plomero por turno puede atender 12 llamadas diarias, por supuesto los tiempos de servicio varían. Pepe se pregunta si debe agregar un ayudante, el cual le elevaría su capacidad a un promedio de 15 llamadas diarias. Su plomero gana $ 3.000/hora y tendrá que pagar la mitad de esta cuantía al ayudante. Si Pepe estima que el tiempo que esperan los clientes hasta que el plomero llega tiene un costo $ 3.000/hora. ¿Debe agregarse el ayudante?

5. El supermercado La Comprita está tratando de evaluar un nuevo sistema de bandas para cajas que aumentaría su tasa de servicio de 12 a 15 clientes/hora. La administración sabe que los clientes llegan con una tasa promedio de 10 clientes/hora. La Comprita evalúa el tiempo de espera de clientes en $ 4.000/hora. ¿Si la nueva banda agrega $ 5.000/hora a los costos de operación, deberá comprarse?

6. La tienda de abarrotes ABC está tratando de determinar la tasa de servicio que se necesita en las horas pico. Qué tasa de servicio es necesaria si se supone una línea, un servidor, llegadas Poisson, tiempos de servicio exponenciales y una tasa promedio de llegada de sus clientes de 80 clientes/hora.
   - 43.7 La espera promedio (incluyendo servicio) se debe exceder de 2,4 minutos,
   - 43.8 La espera promedio (en la cola) no debe exceder de 2,4 minutos

7. El restaurante El Patio Costeño está estudiando la instalación de una ventana de servicio a los autos para aumentar sus ventas. Como parte de la planeación, la administración quiere saber qué tasa de servicio se necesitaría durante las horas pico. Se espera que los clientes lleguen cada 15 segundos en promedio y se desea que el tiempo de espera promedio en el sistema no sea mayor de 15 minutos. Si la tasa de llegada y de servicio se distribuyen suponiendo una Poisson. ¿Qué tasa de servicio se necesita?

8. Ladrillera del Norte actualmente emplea a un trabajador cuya tarea consiste en estibar los ladrillos que salen de la empresa en un camión. Un promedio de 24 camiones por día ó 3 por hora llegan a la puerta de carga, de acuerdo con la distribución de Poisson. El trabajador los estiba a una tasa de 4 camiones por hora, siguiendo aproximadamente la distribución exponencial en sus tiempos de servicio.

   La empresa cree que añadiendo un segundo estibador de ladrillos mejorará sustancialmente la productividad de la empresa. Se estima que una brigada de dos personas en la puerta de carga doblará la tasa de carga, de cuatro camiones por hora a ocho camiones por hora. Analice el efecto de este cambio en la línea de espera y compare los resultados con aquellos encontrados para un trabajador. ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de tres camiones recibiendo la carga o esperando?

9. Los choferes de los camiones que trabajan para la Ladrillera del Norte (ver problema 1) ganan como promedio $2000 por hora. Los estibadores de ladrillos reciben aproximadamente $1500 por hora. Los choferes de los camiones que esperan en la cola o en la puerta de carga están recibiendo un salario pero están productivamente

ociosos e incapaces de generar ingresos durante ese tiempo. ¿Cuáles serían los ahorros por hora en los costos, para la empresa asociada, empleando dos cargadores en lugar de uno?

10. Ladrillera del Norte está pensando en construir una segunda plataforma o puerta para acelerar el proceso de la estiba en sus camiones de ladrillos. Este sistema, según ellos, será aún más eficiente que contratar otro cargador para ayudar en la primera plataforma (como en el problema 1).

    Supóngase que los trabajadores de cada plataforma podrán ser capaces de cargar cuatro camiones por hora cada uno, y que los camiones continuarán llegando a una tasa de tres por hora. Después, aplique las ecuaciones apropiadas para encontrar las condiciones de operación de la nueva línea de espera. ¿Es acaso este nuevo sistema más rápido que los otros dos que se consideraron?

11. Debido a un reciente incremento en el negocio, una secretaria de cierta empresa legal tiene que transcribir 20 cartas por día en promedio (asuma una distribución de Poisson). A ella le toma aproximadamente 20 minutos transcribir cada carta (asuma una distribución exponencial). Suponiendo que la secretaria trabaja ocho horas por día:
    a. ¿Cuál es la tasa de utilización de la secretaria?
    b. ¿Cuál es el tiempo promedio de espera antes de que la secretaria transcriba una carta?
    c. ¿Cuál es el número promedio de cartas que esperan ser transcritas?
    d. ¿Cuál es la probabilidad de que la secretaria tenga más de cinco cartas que transcribir?

12. Al principio de la temporada de fútbol, la taquilla de la oficina de boletos se ocupa mucho el día anterior al primer juego. Los clientes llegan a una tasa de cuatro cada 10 minutos, y el tiempo promedio para realizar la transacción es de dos minutos.
    a. ¿Cuál es el número promedio de gente en la línea?
    b. ¿Cuál es el tiempo promedio que una persona pasaría en la oficina de boletos?
    c. ¿Cuál es la proporción de tiempo que el servidor está ocupado?

13. Una línea de la cafetería de la Universidad es una instalación de autoservicio donde el estudiante selecciona los artículos que desea, luego hace una sola línea para pagar al cajero. Los estudiantes llegan a una tasa de aproximadamente cuatro por minuto, de acuerdo con una distribución de Poisson. El único cajero toma cerca de 12 segundos por cliente, siguiendo una distribución exponencial.

¿Cuál es la probabilidad de que haya más de dos estudiantes en el sistema? ¿Mas de tres estudiantes¿ Más de cuatro?

¿Cuál es la probabilidad de que el sistema esté vació?

¿Cuánto tiempo tendrá que esperar el estudiante promedio antes de llegar al cajero?

¿Cuál es el número esperado de estudiantes en la cola? ¿Cuál es el número promedio?

¿Si se añade un segundo cajero que trabaja al mismo ritmo), ¿Cómo cambiarían las características de operación calculadas en (b),(c),(d) y (e). Suponga que los clientes esperan en una sola línea y se dirigen al primer cajero disponible.

14. Los clientes llegan a una máquina automática vendedora de café a una tasa de cuatro por minuto, siguiendo una distribución de Poisson. La máquina de café sirve una taza de café a una tasa constante de 10 segundos.
    a. ¿Cuál es número promedio de clientes esperando en la línea?
    b. ¿Cual es el número promedio en el sistema?
    c. ¿Cuánto tiempo espera una persona promedio en la línea antes de recibir servicio?

15. Un mecánico ofrece cinco taladros a un fabricante de láminas de acero. Las máquinas se descomponen en un promedio de una vez cada seis días de trabajo, y las descomposturas tienden a seguir una distribución de Poisson. El mecánico puede manejar un promedio de un trabajo de reparación por día. La reparaciones siguen una distribución exponencial
    a. ¿Cuántas máquinas esperan el servicio, en promedio?
    b. ¿Cuántos taladros se encuentran trabajando, en promedio?
    c. ¿Cuánto tiempo se reduciría el tiempo de espera si se contratara un segundo mecánico?

16. Los técnicos monitorean un grupo de cinco computadoras que controlan una instalación de manufactura automatizada. Toma un promedio de 15 minutos (distribuidos exponencialmente) ajustar una computadora que presenta un problema. Las computadoras trabajan un promedio de 85 minutos (distribuidos por Poisson) sin requerir ajustes.

¿Cuál es el número promedio de computadoras que esperan ser ajustadas?

¿Cuál es el número promedio que esta siendo ajustado?

¿Cuál es el número promedio de computadoras que no están en estrado de trabajar?

17. Pepe Ganga de Barranquilla tiene aproximadamente 300 clientes comprando en su almacén entre las 9:00 A.M. y las 5:00 P.M. los sábados. Para decidir cuantos cajeros mantener abiertos cada sábado, Pepe Ganga considera dos factores: el tiempo de espera del cliente (y el costo asociado de esperar) y los costos del servicio al emplear cajeros adicionales. Los empleados cajeros son pagados a un promedio de $2000 por hora. Cuando solo uno esta de guardia, el tiempo de espera por cliente es de aproximadamente 10 minutos (o 1/6 de una hora); cuando dos empleados están en servicio, el tiempo promedio de registro es de 6 minutos por persona; 4 minutos cuando tres empleados están trabajando; y 3 minutos cuando 4 empleados se encuentran en guardia.

    Pepe Ganga ha conducido encuestas de satisfacción del cliente y ha sido capaz de estimar que la tienda sufre aproximadamente $3000 en ventas y confianza pérdida por cada hora de tiempo que el cliente pasa esperando en las líneas de la salida. Utilizando la información anterior, determine el número óptimo de cajeros que se deben tener en servicio cada sábado, con el fin de minimizar el costo total esperado de Pepe Ganga.

Capítulo 4

El Proceso de Simulación Montecarlo

Objetivos:

- Conocer y aplicar los pasos en el procedimiento de simulación.
- El proceso de simulación Montecarlo, números aleatorios, números índice, validación del modelo.
- Como generar valores de una variable aleatoria, mediante el proceso de Montecarlo, como llevar a cabo la simulación, como llevar a cabo una simulación manual, y como interpretar los resultados.
- Simulaciones a través del Excel.

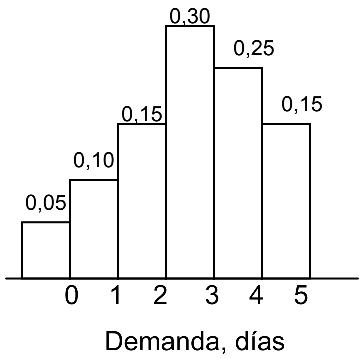
En la descripción de un sistema por medio de un modelo, encontramos casos en que el sistema es demasiado complicado para describirlo o que el modelo, una vez deducido, no permite una solución analítica. En estos casos, la simulación puede ser un instrumento valioso para obtener la respuesta de un problema particular. Hay diversas clases de simulación; por ejemplo los modelos de escala de aviones que se ensayan en un túnel de viento, el circuito eléctrico empleado para describir un circuito hidráulico, y la descripción de un sistema mediante un modelo matemático. En esta última clase de simulación se manipula el modelo matemático de algún sistema real y se observan los resultados. Entonces estas manipulaciones y observaciones se utilizan para hacer deducciones con respecto al sistema real. Si el modelo involucra muestreo aleatorio a partir de una distribución de probabilidad el procedimiento se denomina "Simulación Montecarlo".

4.1 EL proceso de Montecarlo: Dos ejemplos

A través de un ejemplo puede enfocarse mejor el método de simulación Montecarlo.

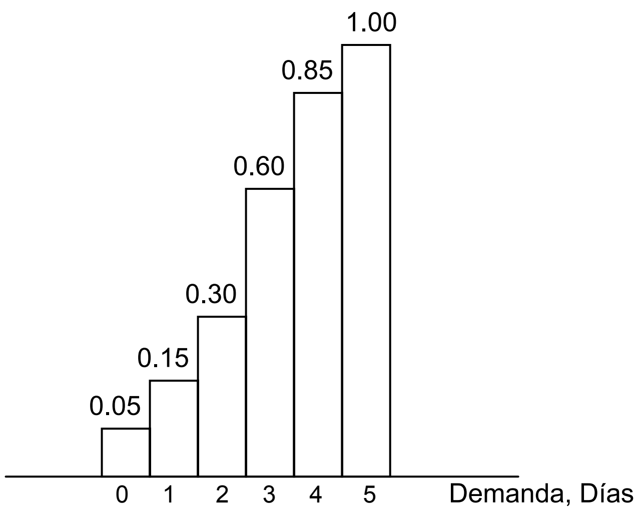
EJEMPLO 4-1: Se supone que la demanda diaria de un producto puede expresarse mediante la siguiente distribución y se desea generar un patrón de demanda para 10 días.

Distribución de la demanda



Primer paso: Establecer la Función de Distribución Acumulativa - FDA

Distribución acumulativa de la demanda



Segundo paso: Formar la Tabla de números índice**.** Los números índice se originan de una manera que puedan reflejar la probabilidad de los diferentes valores de la variable (por ejemplo la demanda) y la secuencia de números debe ser cerrada.

Los números de dígitos empleados en los números índice debe ser igual al número de cifras decimales empleadas en las probabilidades en los diferentes valores de la variables.

El número de dígitos usados en los números aleatorios debe ser igual al número de dígitos usados en los números índice.

NÚMEROS ÍNDICE

Demanda/día	Números Índice
0	00-04
1	05-14
2	15-29
3	30-59
4	60-84
5	85-99

Una pregunta ordinaria: ¿De dónde se obtiene la distribución de probabilidad de una variable?

Generalmente se obtiene a partir de datos históricos o a partir de datos estimados. Si se emplean datos históricos evidentemente se supone que los datos del pasado describen apropiadamente el futuro. Si se cree que esta exposición no es correcta, es necesario atenerse a los datos históricos.

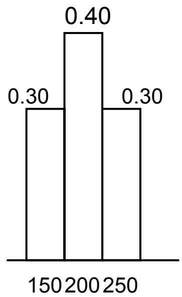
Los números aleatorios se obtuvieron a partir de una tabla de números aleatorios. Cuando se utiliza esta tabla se puede comenzar en cualquier punto de la tabla y seguir en cualquier dirección. Lo importante es "no preferir los números aleatorios".

Números aleatorios: 14, 74, 24,87, 07, 45, 26, 66, 26,94

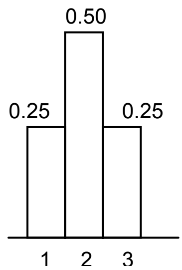
SIMULACIÓN:

NUMERO DE PRUEBA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Numero Aleatorio	14	74	24	87	07	45	26	66	26	94
Demanda simulada	1	4	2	5	1	3	2	4	2	5

Ejemplo 4-2:



Distribución de la demanda



Tiempo de Anticipación

Se supone que se desea simular la demanda durante el tiempo de anticipación.

Asignando números índice a las distribuciones de tiempo de anticipación y de la demanda se obtienen los resultados mostrados seguidamente.

Distribuciones acumulativas:

Demanda

Demanda	Probabilidad acumulada
150	0.3
200	0.7
250	1.0

Tiempo de anticipación

Tiempo	Probabilidad acumulada
1	0.25
2	0.75
3	1.00

Demanda Unidades/semana	Números Índice
150	0 – 2
200	3 – 6
250	7 – 9

Tiempo de Anticipación, semanas	Números Índice
1	00 – 24
2	25 – 74
3	75 – 99

El primer paso consiste en generar un número aleatorio para el tiempo de anticipación. Utilizando este tiempo de anticipación, la demanda durante cada semana del tiempo de anticipación, se determina generando diferentes números aleatorios para cada semana.

Simulación de la demanda
durante el tiempo de anticipación

PRUEBA	Nº Aleatorio Tiempo de anticipación	Tiempo de anticipación	Nº Aleat.	1º Sem.	Nº Aleat.	2º Sem.	Nº Aleat.	3º Sem	Demanda total
1	68	2	3	200	1	150	-	-	350
2	89	3	5	200	4	200	2	150	350
3	10	1	3	200	-	-	-	-	200
4	40	2	4	200	6	200	-	-	400
.									
N									

4.2 Aplicaciones de la Simulación

1. Las llegadas a la taquilla de un cine durante la media hora anterior a la hora de inicio programada tiene la distribución que se da enseguida. Aplique el método Montecarlo para generar las primeras 20 llegadas.

Tiempo entre llegadas, segundos	Probabilidad
20	0.30
40	0.25
60	0.15
80	0.15
100	0.10
120	0.05

¿Cuál es el tiempo promedio entre llegadas para la distribución dada? ¿Y para las llegadas generadas?

2. Un equipo de estudiantes visitó una cafetería de autoservicio durante la hora de almuerzo para reunir datos sobre las tasas de llegadas. Sus datos mostraron:

Tasa de llegadas Clientes/minutos	Frecuencia
2	12
4	18
6	21
8	20
10	17
12	12

Genérense las primeras 20 llegadas, incluyendo la hora de llegada para cada uno. Si existen llegadas múltiples dentro de un minuto, deben quedar igualmente espaciadas durante el intervalo de 1 minuto.

3. La demanda semanal de artículos en inventario tiene la distribución que se muestra enseguida. Genérese la demanda de 10 semanas con la técnica de MonteCarlo.

Demanda Unidades	**Probabilidad**
10	0.10
15	0.15
20	0.30
25	0.25
30	0.20

4. Los datos empíricos de la demanda semanal de la marca X se muestran enseguida. Con la técnica de MonteCarlo, simúlese la demanda semanal para las siguientes 13 semanas. Muéstrense los intervalos de los números índice que se usen y los números aleatorios seleccionados para cada semana.

Demanda	**Número de semanas que se recibe esta demanda**
100	10
300	21
500	32
700	15
900	10
1100	8
1300	4

5. La Oficina de Dirección del Tránsito Distrital de Barranquilla quiere experimentar con varios métodos de control de tráfico una intersección específica. Par esto necesita simular la llegada de los autos a la intersección. El conteo del tráfico real en la intersección dio los siguientes datos:

Tiempo entre llegadas segundos	**Probabilidad**	**Dirección**	**Probabilidad**
5	0.30	Norte	0.50
10	0.25	Sur	0.30
15	0.20	Este	0.15

20	0.15	Oeste	0.05
25	0.05		
30	0.05		

Genérense las primeras 10 llegadas a la intersección incluyendo tanto el tiempo de llegada como la dirección. ¿Qué suposición se debe hacer para generar las llegadas?

6. Pedro tiene dos maneras de llegar a su trabajo. Puede: a) tomar el autobús o b) manejar hasta un estacionamiento y después caminar a su oficina. Con la distribución que sigue (el tiempo está en minutos), simúlese 10 viajes para cada alternativa: Evalúense los resultados.

Muéstrese el proceso de MonteCarlo y los números aleatorio.

En autobús a la oficina		**En autobús al estacionamiento**	
Tiempo	**Probabilidad**	**Tiempo**	**Probabilidad**
20	0.45	15	0.40
25	0.20	20	0.35
30	0.15	25	0.15
35	0.10	30	0.10

Caminando a la oficina	
Tiempo	**Probabilidad**
2	0.20
3	0.65
5	0.15

6. Jaimito y Pedrito están tratando de desarrollar un juego de béisbol para niños diseñado para dos jugadores (un lanzador y un bateador).El lanzador puede escoger uno de cuatro lances: bola rápida, bola baja, curva o cambio de velocidad. El bateador puede seleccionar uno de tres bateos: rápido, normal o lento. Integrado

al juego pero desconocido para los jugadores, se tendrá la siguiente tabla de resultados fijos:

Bateo	Lance			
	Bola rápida	**Bola baja**	**Curva**	**Cambio de velocidad**
Rápido	Home run	Out	Out	Doble
Normal	Out	Doble	Sencillo	Out
Lento	Out	Out	Out	Triple

Cada jugador obtiene tres outs y marca carreras sólo cuando hay corredores en bases.

Si Jaimito batea primero y se juegan cinco entradas ¿quién ganará?

7. Utilice una hoja de cálculo para simular el lanzamiento de dados. Utilice la función BUSCAR, para seleccionar el resultado de cada dado. Coloque el número del primer dado en la columna A, y el segundo dado en B. Muestre la suma en la C. Repita la simulación para 1.000 lanzamientos de los dados. ¿Cuál es su estimación de simulación de la probabilidad de que salga un 7?

8. Con base, en la experiencia, el tiempo necesario para terminar un examen universitario de estadística esta normalmente distribuido con media de 42 minutos y una desviación estándar de 8. Una clase tiene 70 estudiantes. Utilice una hoja de cálculo para simular los tiempos de terminación del examen para los 70 estudiantes. ¿Cuántos estuantes estarán todavía trabajando, cuando el profesor detenga el examen a los 50 minutos?

9. Michelín ha producido una nueva llanta, con una vida media estimada de 40.00 millas. La administración cree que la

desviación estándar es de 5.000 millas y que la duración en millas de la llanta tiene una distribución normal. Utilice una hoja de cálculo para simular las millas obtenidas de una muestra de 400 llantas. Coloque las millas corridas de la celda A2 a A401 en su hoja de cálculo.

a. Utilice= CONTAR.SI (A2:A501;”>40.000”) en cualquier celda libre de la hoja de cálculo para contar las llantas que duren mas de 45.000 millas. ¿Cuál es su estimación del porcentaje de llantas que excedan de 45.000 millas?

b. Utilice= CONTAR.SI (A2:A501;”<32.000”) para encontrar la cantidad de llantas que alcanzan una duración inferior a 32.000 millas, y a continuación encuentre la cantidad con menos de 30.000 millas y con menos de 28.000 millas.

c. Si la Administración deseara publicar una garantía de duración en millas de la llanta, de manera que aproximadamente 10% de las mismas tuvieran una duración lo suficientemente baja como para calificar y tener derecho a garantía. ¿Qué duración de las llantas, considerada en el literal b) recomendaría usted para la garantía?

10. En la preparación de la próxima temporada navideña La Compañía KIKO TOY ha diseñado un nuevo muñeco llamado Freddy. El costo fijo para la producción es de 100.000 dólares. El costo variable incluyendo materiales, mano de obra y costos de embarque es de 34 dólares por muñeco. Durante la temporada de ventas de Navidad, KIKO venderá los muñecos a 42 dólares cada uno. Si KIKO produce muñecos en exceso, los excedentes se venderán en enero a través de un distribuidor, quien está de acuerdo en pagarle a KIKO 10 dólares por unidad. La demanda de juguetes nuevos durante la temporada de ventas navideñas es

extremadamente incierta. Los pronósticos existentes incluyen ventas esperadas de 60.000 muñecos, con una desviación estándar de 15.000. Se supone una distribución de probabilidad normal como una buena descripción de la demanda.

a. Diseñe una hoja de cálculo para simular las ventas de Freddy con base en una cantidad de producción de 60.000. Utilice 500 ensayos de simulación, ¿Cuál es su estimación de la utilidad promedio asociada con la cantidad de producción de 60.000 muñecos?

b. Antes de tomar una decisión final sobre la cantidad ha producir, la administración ha solicitado un análisis de una cantidad de producción más fuerte, de 70.000 unidades y de una más conservadora, de 50.000 unidades. Lleve a cabo su modelo de simulación con estas dos cantidades a producir. ¿Cuál es la utilidad promedio asociada con cada una de ellas? ¿Cual sería su recomendación sobre la producción de Freddy?

c. Suponiendo que la administración de KIKO adopta su recomendación, ¿Cuál sería la probabilidad de un faltante de inventario, es decir, de una carencia de muñecos durante la temporada?

11. Utilice hojas de cálculos para desarrollar sus propios modelos de simulación de línea de espera de un cajero y de dos cajeros. para un nuevo negocio que supone tiempos de llegadas uniformemente distribuidos entre 0 y 4 minutos. Los tiempos de servicio se espera sean normales, con una media de 2 minutos y una desviación estándar de 0.5 minutos.

a. Simule la operación de este sistema para 600 clientes con un cajero. ¿Cuál es su juicio sobre la capacidad de operar este nuevo negocio con un solo cajero? ¿Qué le pasa al tiempo de espera promedio de los clientes cerca del fin del período de simulación?

b. Simule la operación de este sistema para 600 clientes utilizando dos cajeros. ¿Cuál es el tiempo promedio de espera de los clientes?¿Cuál es su recomendación para la operación de los cajeros?

12. El modelo de línea de espera de Burger Done estudia el tiempo de espera de clientes en su restaurante de comida rápida. El sistema de línea de espera de Burger Done tiene un promedio de 0.75 llegas por minuto y una tasa de servicio de un cliente por minuto.

a. Utilice una hoja de cálculo para simular la operación de esta línea de espera

Suponiendo que las llegadas de los clientes siguen una distribución de probabilidad de Poisson, los tiempos entre llegadas se pueden simular con la fórmula de celda – (1/λ) *LN (ALEATORIO ()) donde λ=0.75. Suponiendo que el tiempo de servicio sigue una distribución de probabilidad exponencial, los tiempos de servicio se pueden simular utilizando la fórmula:

–μ*LN (ALEATORIO ()), donde μ=1. Ejecute la simulación de Burger Done para 500 clientes. ¿Qué tiempo de espera promedio, muestra su modelo de simulación?

b. Suponga que el tiempo de servicio se describe de una manera más precisa, mediante una distribución de probabilidad normal, con una media de 1 minuto y una desviación estándar de 0.2 minutos. ¿Cuál es el impacto de esta modificación en el tiempo promedio de espera?

Capítulo 5

El Proceso de las Cadenas de Markov

Objetivos

- Cómo reconocer una cadena de Markov
- Cómo se describe una cadena de Markov en una matriz de transición o un diagrama de estado.
- Cómo calcular las probabilidades del estado transitorio
- Cómo calcular las probabilidades del estado estable utilizando el método de suma de flujos, el método de sumas matriciales o a través de las funciones en Excel.
- Como aplicar el análisis de Markov.

Algunas situaciones empresariales se pueden modelar describiendo clases o estados separados, de manera que el sistema esté en un solo estado cada vez y que el cambio entre estados sea probabilística. Los procesos de Markov se pueden analizar para encontrar el comportamiento futuro a corto y a largo plazo, una vez que se ha especificado el proceso.

5.1 Probabilidades de Transición

Una forma para describir una cadena de Markov es con un diagrama de estados, como el que se muestra en la Figura Nº 5-1. En ésta se ilustra un sistema de Markov con cuatro estados posibles: S1, S2, S3 y S4. La probabilidad condicional o de transición de moverse de un estado a otro se indica en el diagrama. Para simplificar la notación se utilizan subíndices para el estado actual y el siguiente. Es decir, P14 = P (S4/S1). Las flechas muestran las trayectorias de la transición como son posibles.

Nótese que no aparecen algunas trayectorias como la de S2 a S3. Su ausencia significa que estas trayectorias tienen probabilidad de ocurrencia igual que cero.

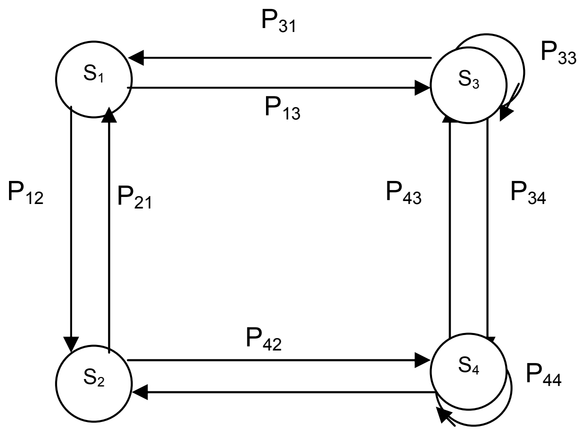


FIGURA N° 5-1

5.2 Matriz de Transición

Esquematizar el caso anterior a través de una matriz, se puede ver a continuación, nótese que como existen cuatro estados posibles, se necesitan 4x4 =16 probabilidades

TABLA 5-1

	S1	S2	S3	S4	TOTAL
S1	0	P_{12}	P_{13}	0	1
S2	P_{21}	0	0	P_{24}	1
S3	P_{31}	0	P_{32}	P_{34}	1
S4	0	P_{42}	P_{43}	P_{44}	1

Ahora que se sabe como presentar los datos, ¿qué puede hacerse? Un análisis útil es pronosticar el estado del sistema después de 1, 2,3 o más períodos. Esto se llama análisis de transición, debido a que es a corto plazo y está enfocado a períodos cortos.

5.3 Cálculo de la probabilidad del estado estable

Las cadenas de Markov poseen una propiedad notable en cuanto a que tienden a aproximarse a lo que se llama estado estable. Considérese los dos ejemplos anteriores de análisis de transición. En el sistema de los dos estados, P(S1) resultó ser 0.75 al principio y después 0.625, 0.567, 0.531 y 0.516. Estas probabilidades se mueven hacia un límite. En forma análoga, en el sistema de tres estados puede observarse que P(S1), por ejemplo, adquiere los valores 0.3, 0.45, 0.53, 0.565 y 0.58. Después de unos cuantos ciclos más, las probabilidades de estado comienzan a asentarse o estabilizarse. Cuando una cadena de Markov ha llegado suficientemente lejos como para estar cerca de estos límites, se dice que ha alcanzado un estado estable. Además, estos límites son los mismos, independientemente del punto de partida del sistema.

Una máquina que produce piezas puede estar ajustada o desajustada.
Si está ajustada, suponga que la probabilidad de que esté ajustada al día siguiente es de 0.7 y que la probabilidad de que no esté es 0.3. Si la máquina está desajustada, la probabilidad de que este ajustada al día siguiente es 0.6 y la probabilidad de que no esté es de 0.4. Si el estado 1 representa la situación de que la máquina está ajustada y el estado 2 representa el caso en que está desajustada, las probabilidades de cambio son las que se indican en la Matriz 1. Observe que la suma de las probabilidades de una fila es 1.

A De	Ajustada (estado 1)	No ajustada (estado 2)
Ajustada (estado 1)	0.7	0.3
No ajustada (estado 2)	0.6	0.4

Considere ahora el estado de la máquina en el tercer día. La probabilidad de que la máquina se halle en el estado 1 el tercer día es: 0.7x0.7 + 0.3x0.6 =0.67

En el Excel se da una función MMmult. o sea multiplicación de Matrices:

RESULTADOS

A De	Ajustada(1)	No ajustada(2)
Ajustada (1)	0,70	0,30
No ajustada(2)	0,60	0,40
Estado Uno	0,70	0,30
Tercer Día	0,67	0,33
Cuarto Día	0,67	0,33
Quinto Día	0,67	0,33
Sexto Día	0,67	0,33
Séptimo Día	0,67	0,33
Octavo Día	0,67	0,33
Noveno Día	0,67	0,33

Aplicación en excel: fórmulas

A De	Ajustada(1)	No ajustada(2)
Ajustada (1)	0,70	0,30
No ajustada(2)	0,60	0,40
Estado Uno	0,70	0,30
Tercer Día	=MMULT(D17:E17;$D$15:$E$16)	=MMULT(D17:E17;$D$15:$E$16)
Cuarto Día	=MMULT(D18:E18;$D$15:$E$16)	=MMULT(D18:E18;$D$15:$E$16)
Quinto Día	=MMULT(D19:E19;$D$15:$E$16)	=MMULT(D19:E19;$D$15:$E$16)
Sexto Día	=MMULT(D20:E20;$D$15:$E$16)	=MMULT(D20:E20;$D$15:$E$16)
Séptimo Día	=MMULT(D21:E21;$D$15:$E$16)	=MMULT(D21:E21;$D$15:$E$16)
Octavo Día	=MMULT(D22:E22;$D$15:$E$16)	=MMULT(D22:E22;$D$15:$E$16)
Noveno Día	=MMULT(D23:E23;$D$15:$E$16)	=MMULT(D23:E23;$D$15:$E$16)

Estado estable: Las cadenas de Markov poseen una propiedad notable en cuanto a que tienden a aproximarse a lo que se llama Estado estable. En el sistema de dos estados P (1) “Ajustada” resultó ser 0.70 al principio y después 0.60, 0.67. Estas probabilidades se mueven hacia un límite y después de unos cuantos ciclos mas, las probabilidades de estado comienzan a asentarse estabilizarse. Cuando una cadena de Markov ha llegado lo suficientemente lejos como para estar cerca de estos límites, se dice que ha alcanzado un estado estable.

5.4 Método de la suma de flujos

Este método está basado en el concepto de que todo lo que entra debe salir. El

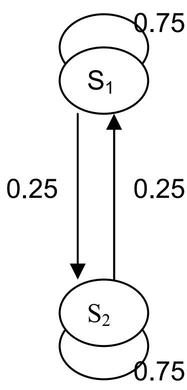


FIGURA 5-2

diagrama de estado se utiliza para presentar los flujos. En la Figura 5-1 se muestra de nuevo el ejemplo anterior de dos estados. Para cada estado puede escribirse una ecuación tal que para el estado k se cumpla: ΣpikP (si) = Σ pikP(Sk). Observando el estado S1 en la Figura 5, ponga atención sólo en las flechas entre los estados.

Para los flujos que llegan se tiene:

$$\Sigma pikP\ (si) = \Sigma\ p_{21}\ P(S2) = 0.25p\ (S2)$$

Para los flujos que salen, se suman las probabilidades de transición a todos los otros estados. En este caso sólo hay una, 0.25. Así la ecuación para S1 es

$$0.25P\ (S2) = 0.25P\ (S1)$$

De igual manera, el flujo hacia adentro para el estado S2 es 0.25P (S1) y el flujo hacia fuera es 0.25P (S2).Esto da para S2

$$0.25P\ (S1) = 0.25P\ (S2)$$

El hecho de que estas dos ecuaciones sean iguales es una coincidencia. Pero no son independientes; así se necesita una relación más:

$$P(S1) = P(S2) = 1$$

Esto proporciona tres ecuaciones con dos incógnitas que pueden resolverse por eliminación. El resultado es:

$$P(S1) = P(S2) = 0.5$$

El procedimiento no cambia en los sistemas con más estados. Considérese el

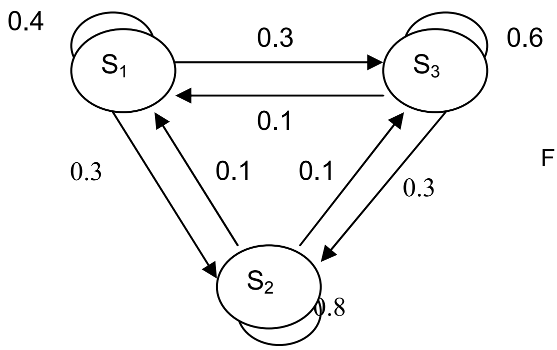


FIGURA N° 5-3

ejemplo con tres estados que se dio antes y que se muestra en la Figura N° 6.

Para el estado S1 se tiene:

$$0.1P(S2) + 0.1P(S3) = (0.3+0.3)P(S1)$$

Para el estado S2

$$0.3P(S1) + 0.3P(S3) = (0.1+0.1)P(S2)$$

y para el estado S3

$$0.3P(S1) + 0.1P(S2) = (0.1+0.3)P(S3)$$

Al poner todo esto junto se tienen cuatro ecuaciones:

$$-0.6P(S1) + 0.1P(S2) + 0.1P(S3) = 0 \quad (Ec.1)$$

$$0.3P(S1) - 0.2P(S2) + 0.3P(S3) = 0 \quad (Ec. 2)$$

$$0.3P(S1) + 0.1P(S2) - 0.4P(S3) = 0 \quad (Ec.3)$$

$$P(S1) + P(S2) + P(S3) = 1 \quad (Ec.4)$$

Cuando se resuelve un conjunto de ecuaciones como este, la última ecuación no puede eliminarse. Si se usan sólo las primeras tres, al final se tendrá una identidad ya que no son independientes. Una manera de resolver es por eliminación:

$$P(S1) = 1/6P(S2) + 1/6(S3)$$

$$0.3(1/6P(S2) + 1/6(S3)) + 0.1P(S2) - 0.4P(S3) = 0$$

$$1/6P(S2) + 1/6(S3) + P(S2) + P(S3) = 1$$

Sumando términos semejantes resultan dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$0.15P(S2) - 0.35P(S3) = 0$$

$$1.17P(S2) + 1.17P(S3) = 1$$

Después puede eliminarse P (S3) multiplicando la primera ecuación por 1.17/0.35 y sumando las dos ecuaciones:

$$(1.17/0.35)(0.15)P(S2) - 1.17P(S3) = 0$$

$$1.17P(S2) + 1.17P(S3) = 0$$

$$1.67P(S2) = 1$$

$$P(S2) = 0.6$$

Con este resultado se encuentra P(S3) :

$$1.17(0.6) + 1.17P(S3) = 1$$

$$P(S3) = 0.26$$

Por último se sustituyen los valores en la ecuación de PS1:

$$P(S1) = 1/6(0.6)+1/6(0.26) = 0.14$$

5.5 Aplicación: cambio de marca.

Las compras de los consumidores están influidas por la publicidad, el precio y muchos otros factores. Con frecuencia un factor clave es la última compra del consumidor. Si por ejemplo, alguien compra un refrigerador marca X y le da un buen servicio, quedará predispuesto a comprar otro refrigerador marca X. De hecho una investigación de mercado puede determinar el grado de lealtad a la marca encuestando a los consumidores. En términos de una cadena de Markov, los resultados de la investigación son las probabilidades de transición de seguir con la marca o de cambiar.

En la Figura 6 se muestra un ejemplo de cadena de Markov para el cambio de marca. En este ejemplo la marca A es la marca de interés y la marca B representa todas las demás marcas. Los clientes son bastante leales, el 80% de ellos son clientes que repiten. La oposición conserva el 70% de sus clientes.

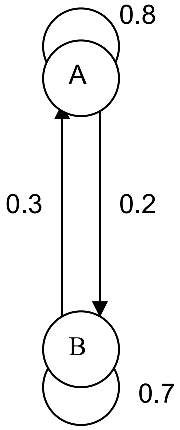
¿Qué información puede obtenerse con el análisis de Markov? Con el análisis de transición puede descubrirse que tan probable es que un cliente cambie después de cierto número de ciclos. Pero el análisis del estado es el más útil.

El promedio a la larga del estado A es el porcentaje de mercado que puede esperar recibir la marca A. Así, conociendo el grado de lealtad a la marca entre los clientes, puede predecirse el porcentaje de mercado para el producto o servicio.

Las ecuaciones de estado estable para el ejemplo de la Figura 6 son:

$$P(A) = 0.8P(A) + 0.3P(B)$$

$$P(B) = 0.2P(A) + 0.7P(B)$$



		A: Marca A	Marca B
De	Marca A		0.2
	Marca B	0.3	0.7

FIGURA 5-4

$$P(A)+P(B) = 1$$

La solución al sistema de ecuaciones es:

$$P(A)= 0.6$$
$$P(B)= 0.4$$

La marca A capturará a la larga el 60% del mercado y las otras marcas tendrán 40%. Esta información puede ser útil en muchas formas. Una de ellas es el evaluar las diferentes estrategias de publicidad. Esta publicidad puede estar dirigida a los clientes actuales en un esfuerzo para incrementar la lealtad a la marca. De otra manera, puede dirigirse a los compradores de otras marcas con el fin de persuadirlos para cambiar. ¿Cómo debe asignarse un presupuesto de publicidad entre estas dos alternativas? El análisis de Markov puede proporcionar una respuesta si se dispone de cierta información adicional. Por ejemplo, si cada incremento de un punto porcentual en el mercado aumenta las ganancias $50.000, el presupuesto de publicidad es $ 100.000 y esto podría aumentar la lealtad a la marca a 85% o incrementar el cambio a la marca a un 35%; el problema puede resolverse como sigue:

Si se dirige a los clientes de la marca A:

$$P(A) = 0.85P(A) + 0.3P(B)$$
$$P(B) = 0.15P(A) + 0.7P(B)$$
$$P(A)+P(B) = 1$$

Resolviendo:

P(A)= 0.75

P (B)= 0.25

Si se dirige a los otros compradores:

P (A) = 0.8P (A) +0.35P (B)

P (B) =0.2P (A) +0.65P (B)

P(A)+P (B) = 1

Resolviendo:

P(A)= 0.64

P (B)= 0.36

El dirigir la publicidad a los clientes actuales traerá el mayor incremento en el porcentaje de mercado, 15 puntos: ¿Vale la pena? La ganancia seria 15x$50.oo = 750.000 con sólo un gasto de $100.000.

5.6 Cadenas Absorbentes

Para quedar clasificado como cadena absorbente, un sistema debe cumplir dos requisitos: debe tener un estado absorbente y debe poder alcanzar ese estado. Un estado absorbente es aquel del que no puede salirse. Esto puede observarse fácilmente en la matriz de transición, porque un estado absorbente tiene una probabilidad de transición hacia sí mismo de uno y cero hacia todos los demás estados. El ejemplo que se muestra a continuación representa una cadena con dos estados absorbentes:

	S1	S2	S3	S4
S1	0.4	0.3	0.2	0.1
S2	0	1	0	0
S3	0.1	0.1	0.6	0.2
S4	0	0	0	1

5.7 Matriz fundamental y cálculos asociados

Siempre que un proceso de Markov tenga estados absorbentes, no calcularemos las probabilidades del estado estable, ya que cada una de las unidades finalmente terminarán en alguno de los estados absorbentes. El cálculo de las probabilidades de los estados absorbentes requiere la determinación y el uso de lo que se conoce como una Matriz Fundamental. En el ejemplo que sigue, se muestra el cálculo de la matriz fundamental y la determinación de las probabilidades de los estados absorbentes.

Se empiezan los cálculos dividiendo la matriz de las probabilidades de transición en las siguientes cuatro partes:

P=

1.0	0.0	0.0	0.0
0.0	1.0	0.0	0.0
0.4	0.0	0.3	0.3
0.4	0.2	0.3	0.1

P=

1.0	0.0	0.0	0.0
0.0	1.0	0.0	0.0
R		**Q**	

Donde:

R=		
	0.4	0.0
	0.4	0.2

Q= 3	0.3
0.3	0.1

Se puede calcular una matriz N, llamada MATRIZ FUNDAMENTAL, utilizando la fórmula siguiente: **N** = (I-Q)-1

Donde I es una Matriz identidad, el superíndices -1 representa la inversa de la matriz (I-Q).

Todos estos cálculos, los podemos realizar a través del Excel.

Cálculos de la Matriz Fundamental N

I-Q =	**1.0**	**0.0**	**-**	**0.3**	**0.3**	**=**	**0.7**	**-0.3**	**N=(I-Q)-1**	**1.67**	**0.56**	**NR =**	**0.89**	**0.11**
	0.0	**1.0**		**0.3**	**0.1**		**-0.3**	**0.9**		**0.56**	**1.30**		**0.74**	**0.26**

La Matriz inversa de (I-Q) o sea N= (I-Q)-1, se puede calcular con la función “MINVERSA” de Excel

N= Matriz Fundamental fórmulas Excel y cálculos

Si para la matriz desarrollada se puede concebir como la operación de las cuentas por cobrar a través de un proceso de Markov, podemos considerar periodos o sucesos semanales, con dólar que aparece en alguno de los siguientes estados:

Estado S1: categoría de pagado

Estado S2: categoría de cuentas malas

Estado S3: categoría de 0 a 30 días de antigüedad

Estado S4: categoría de 31 a 90 días de antigüedad

ANALISIS DE LOS RESULTADOS: La primera hilera del producto NR es la probabilidad de que un dólar de antigüedad de 0 a 30 termine en cada uno de los estados absorbentes. Así, vemos que existe una probabilidad de 0.89 de que un dólar de la categoría de 0 a 30 días finalmente quede pagado y una probabilidad de 0.11 de que se convierta en cuenta incobrable, igual análisis se hace para la segunda hilera

5.8 Cadenas Ergódicas

Una cadena ergódica describe matemáticamente un proceso en el cual es posible avanzar desde un estado hasta cualquier otro estado.

Un caso más restringido de cadena ergódica, es una cadena regular.
Una cadena regular se define como una cadena que tiene una matriz de transición P la cual para alguna potencia P tiene únicamente elementos positivos (diferentes de cero). Utilizando la misma matriz de transición, la forma más sencilla de verificar si una cadena es regular consiste en elevar sucesivamente al cuadrado la matriz hasta que todos los ceros sean eliminados o hasta que se desarrolle un patrón que demuestre obviamente que por lo menos un cero nunca podrá eliminarse. Se puede afirmar que todas las cadenas regulares son ergódicas pero lo contrario no necesariamente es cierto.

	Ejemplo 1			Ejemplo 2		
Matriz de Transición	0,2	0,3	0,5	1/4	3/4	
	0	0	1	1	0	
	1	0	0			
Potencia par:		P2		P2		Regular por tanto es ERGÓDICA
	0,5	0,1	0,4	13/16	3/16	
No es regular, por tanto No es ERGÓDICA	1,0	0,0	0,0	1/4	3/4	
	0,2	0,3	0,5			
Potencia impar	P3			P3		
	0,5	0,2	0,3	25/64	39/64	
	0,2	0,3	0,5	13/16	3/16	
	0,5	0,1	0,4			

5.9 Aplicaciones Cadenas de Markov

1. El centro de cómputo de La Universidad Autónoma sufre paros de las computadoras. Supongamos que los ensayos de un proceso de Markov asociado se definen como períodos de una hora y la probabilidad de que el sistema esté en un estado de operación o en estado de paro se base en el estado del sistema durante el período anterior. Los datos históricos muestran las siguientes probabilidades de transición:

De	HACIA	
	OPERANDO	DETENIDO
OPERANDO	0.90	0.10
DETENIDO	0.30	0.70

a. Si el sistema inicialmente opera, ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema esté detenido en la siguiente hora de operación?

b. ¿Cuáles son las probabilidades de un estado estable del sistema en el estado de operación y en el detenido?

2. Un problema importante de tránsito en la salida de Barranquilla implica que el tránsito intenta cruzar el río Magdalena hasta Santa Marta utilizando la carretera interdepartamental. Supongamos que la probabilidad de que no haya retraso por tránsito en un periodo, en función de ninguno en el período anterior es de 0.85 y que la probabilidad de encontrar un retraso de tránsito en un período, dado uno en el

anterior, es de 0.75. El tránsito se clasifica en estados de retraso o de no retraso, y el período considerado es de 30 minutos.

a. Suponga que usted es un conductor que sintoniza el sistema de tránsito por radio y recibe un informe de un retraso, ¿Cuál es la probabilidad de que para los siguientes 60 minutos (dos períodos) el sistema esté en un estado de retraso? Note que esta es la probabilidad de que esté en retraso durante dos períodos consecutivos.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que, a la larga, el tránsito no esté en estado de retraso?

3. Mercafácil es más pequeña que Merkosto o que Mercatodo. Sin embargo, la comodidad de Mercafácil, con un servicio más rápido y con bomba de gasolina para los automóviles, se puede esperar que atraiga a algunos de los clientes que actualmente hacen salidas de compras semanales ya sea a Merkosto o a Mercatodo. Suponga que las probabilidades de transición son como sigue:

	HACIA		
DE	Mercafacil	Mercatodo	Merkosto
Mercafacil	0.85	0.10	0.05
Mercatodo	0.20	0.75	0.05
Merkosto	0.15	0.10	0.75

a. Calcule las probabilidades del estado estable para este proceso de Markov de tres estados.

b. ¿Qué penetración en el mercado tendrá Mercafácil?

4. Coltefinanciera tiene dos clases de antigüedades para sus cuentas por cobrar: (1) las de una antigüedad de 0 a 30 días y (2) las de 31 a 90 días de antigüedad. Conforme la empresa opera hacia el futuro, podemos considerar cada una de las semanas como un ensayo de un proceso de

Markov, con un dólar que aparece en alguno de los siguientes estados del sistema:

Estado 1: categoría pagado

Estado 2: categoría de cuenta mala

Estado 3: categoría de 0 a 30 días de antigüedad

Estado 4: categoría de 31 a 90 días de antigüedad

Suponga que es apropiada la siguiente matriz de transición.

P=

1.0	0.0	0.0	0.0
0.0	1.0	0.0	0.0
0.5	0.0	0.25	0.25
0.5	0.2	0.05	0.25

Si Coltefinanciera tiene 4.000 dólares en la categoría de 0 a 30 días y 5.000 dólares en la de 31 a 90 días, ¿Cuál es su estimación del monto de cuentas incobrables que sufrirá la empresa?

4. U

na empresa grande reunió información de las razones por las que los administradores de nivel medio como los que tienen antigüedad abandonan la empresa. Algunos de los administradores finalmente se retiran, pero otros abandonan la empresa. Algunos de los administradores finalmente se retiraran, pero otros abandonan la empresa antes de su retiro por razones de tipo personal, incluyendo puestos mas atractivos en otras empresas. Suponga que es aplicable la siguiente matriz de probabilidad de transición de un año, con los cuatro estados de los procesos de Markov: el retiro, abandono antes del retiro por razones personales, permanencia como otro administrador medio o permanencia como administrador señor.

	RETIRO	ABANDONO PERSONAL	ADMINISTRADOR MEDIO	ADMINISTRADOR SENIOR
RETIRO	1.0	0.0	0.0	0.0
ABANDONO PERSONAL	0.0	1.0	0.0	0.0
ADMINISTRADOR MEDIO	0.03	0.07	0.8	0.1
ADMINISTRADOR SENIOR	0.08	0.01	0.03	0.88

a. ¿Qué estados pueden considerarse absorbentes? ¿Por qué?

b. Interprete la probabilidad de transición de los administradores medios.

c. Interprete la probabilidad de transición de los administradores senior.

d. ¿Qué porcentaje de administradores medios actuales finalmente se retirará de la empresa? ¿Qué porcentaje abandonará la empresa por razones de tipo personal?

e. Actualmente la empresa tiene 920 administradores: 640 medios y 280 senior. ¿Cuántos de estos finalmente se retirarán de la empresa? ¿Cuántos abandonaran por razones particulares?

6. La administración de la CIA de refrescos POSTOBóN cree que la probabilidad de que un cliente adquiera COLA o el competidor más importante de la empresa, COCA COLA, está basada en la compra más reciente. Suponga que son apropiadas las siguientes probabilidades de transición:

De	Hacia	
	COLA	COCACOLA
COLA	0,9	0,1
COCA COLA	0,1	0,9

a. ¿Cuál es la probabilidad de que este cliente adquiera Red Pop en su segunda compra?

b. ¿Cuál es la penetración en el mercado a largo plazo para cada uno de estos dos productos?

c. Red Pop planea una campaña publicitaria para aumentar las probabilidades de transición de los clientes de COCA COLA. La administración cree que la nueva campaña aumentaría 0,15 la probabilidad de que un cliente cambie de COCA COLA a COLA. ¿Cuál es el efecto proyectado de la campaña de publicidad en la penetración de mercado?

7. Una causa de la detención en un centro de cómputo que sufre paros de las computadoras, fue rastreada hasta una pieza específica de hardware. La Administración cree que pasar a un componente diferente de hardware dará las siguientes probabilidades de transición:

De	Hacia	
	Operando	Detenido
Operando	0,95	0,05
Detenido	0,60	0,40

a. ¿Cuáles son las probabilidades, en estado estable, de que el sistema esté en estado de operación o detenido?

b. Si el costo del sistema detenido por cualquier período se estima en 500 dólares (incluyendo utilidades y pérdidas debido al tiempo de parado y al mantenimiento) ¿Cuál es el costo de punto de equilibrio del nuevo componente de hardware, con base en un periodo de tiempo?

7. Los datos reunidos acerca de importantes áreas metropolitanas seleccionadas de la parte este de Estados Unidos muestran que 2% de los individuos que viven dentro de los límites de la ciudad

se mudan a los suburbios en un período de un año, en tanto que 1% de los individuos que viven en los suburbios se mudan a la ciudad en un período de un año. Responda las siguientes preguntas, suponiendo que este proceso queda modelado por un proceso de Markov con dos estados: ciudad y suburbios.

8.

a. Prepare la matriz de probabilidades de transición

b. Calcule las probabilidades del estado estable

c. En un área metropolitana específica, 40% de la población vive en la ciudad y 60% vive en los suburbios. ¿Que cambios en la población resultan de las probabilidades de estado estable para esta área metropolitana.

9. Los patrones de compra para dos marcas de pasta de dientes se pueden expresar como un proceso de MarKov con las siguientes probabilidades de transición:

	Hacia	
De	Colgate	Colinox
Colgate	0,90	0,10
Colinox	0,05	0,95

a. ¿Qué marca aparenta tener mas clientes leales? Explique

b. ¿Cuál es la penetración de mercado proyectada para ambas marcas?

10. Dada la siguiente matriz de transición con los estados 1 y 2 como estados absorbentes, ¿Cuál es la probabilidad de que las unidades en los estados 3 y 4 terminen en cada uno de los estados absorbentes?

$$P=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ \hline 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ \hline 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,5 \\ \hline\end{array}$$

11. Caribeña de Palmeras es propietataria de un terreno de 5000 palmeras. Cada año Caribeña de Palmeras le permite a los detallistas seleccionar y cortar árboles para la venta a clientes individuales.Caribeña protege los árboles pequeños (por lo general de menos de 4 pies de alto) de manera que estén disponibles para venta en años futuros. Actualmente están clasificados 1500 árboles como protegidos, en tanto que los 3500 restantes están disponibles para corte, quizás no sean seleccionados sino hasta en años futuros. Aunque la mayoría de los árboles que no se cortan en un año viven hasta el siguiente, todos los años se pierden pinos enfermos.

Al estudiar la operación de las palmeras caribeñas como proceso de Markov con períodos anuales, definimos los cuatro estados siguientes:

Estado 1 Cortado y vendido
Estado 2 Perdido por enfermedad
Estado 3 Pequeño para corte
Estado 4 Disponible para cortar, pero no cortado ni vendido

La siguiente matriz de transición es apropiada:

P=

1,0	0,0	0,0	0,0
0,0	1,0	0,0	0,0
0,1	0,2	0,5	0,2
0,4	0,1	0,0	0,5

¿Cuántos de los 5000 árboles del vivero se venderán y cuántos se perderán?

12. En la siguiente matriz de probabilidad de transición se resume la información del progreso de los estudiantes universitarios en una universidad particular:

	Graduado	Abandona	De 1°año	De 2° año	De 3° año	De 4° año
Graduado	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Abandona	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
De 1ª año	0,00	0,20	0,15	0,65	0,00	0,00
De 2ª año	0,00	0,15	0,00	0,10	0,75	0,00
De 3ª año	0,00	0,10	0,00	0,00	0,05	0,85
De 4ª año	0,90	0,05	0,00	0,00	0,00	0,05

a) ¿Qué estados son absorbentes?

b) Interprete la probabilidad de transición de un estudiante de segundo año.

c) Utilice Excel para calcular las probabilidades de que un estudiante de segundo año se gradúe o abandónelos estudios.

d) En un discurso de bienvenida a 600 alumnos de nuevo ingreso, el rector les pide que se den cuenta que aproximadamente 50% de los presentes no llegará al día de graduación. ¿Un análisis de los procesos de Markov apoya la declaración del rector? Expliquee) Hoy, la universidad tiene 600 estudiantes nuevos; 520 de segundo; 460 de tercero y 420 de cuarto. ¿Que porcentaje se graduará de los 2000 estudiantes de la universidad?

Bibliografía

THIERAUF, Robert J y GROSSE, Richard., Toma de decisiones por medio de Investigación de Operaciones, México: Editorial LIMOSA-NORIEGA, 1990

TAHA, Hamdy A, Investigación de Operaciones, México: Editorial ALFAOMEGA, 1991.

ANDERSON, David R, SWEENEY, Dennis J y WILLIAMS, Thomas A, Métodos cuantitativos para los negocios, México: Editorial Internacional Thomson Editores, 1999.

WINSTON, Wayne L, Investigación de Operaciones, aplicaciones y algoritmos, México: Editorial Grupo Editorial Iberoamericana; 1994.

SHAMBLIN, James E, y STEVENS, Jr. G.T. Investigación de operaciones, un enfoque fundamental, Editorial: Mc Graw Hill, México, 1986.