DESCIFRANDO A SRAFFA

Piero Sraffa

por

Antonio Mora Plaza


Piero Sraffa
Producción de mercancías por medio de mercancías
colección "libros de economía oikos"

SRAFFA DECODED

In 1960 was edited the book of Piero Sraffa *Production commodities by mean commodities*. It is not only an step in the history economic of analisys but it is a new alternative theory to the actually Microeconomic. The Sraffa´book it not is only the seed of a new economic theory. This article permit to follow step by step *Production Commodities*, to interpret it and more...

Keywords: Sraffa, theory, sraffian, commodities, production.

by Antonio Mora Plaza

DESCIFRANDO A SRAFFA

En 1960 se editó el libro de Piero Sraffa *Producción de mercancías por medio de mercancías*. Esta obra no es sólo un paso más en la historia del análisis económico sino algo más: es una nueva teoría alternativa a la Microeconomía actual. El libro de Sraffa es sólo la semilla de la nueva teoría. Este artículo permite seguir paso a paso el libro y descifrarlo.

Palabras clave: Sraffa, mercancías, producción.

por Antonio Mora Plaza

Índice:

dESCIFRANDO A SRAFFA

Antonio Mora Plaza

Se cumple en efecto en el año del 2010 el cincuenta aniversario de esta gran obra del gran economista italiano -turinés para más señas- Piero Sraffa. A pesar de que su obra es revolucionaria en el contexto de la historia del análisis económico y a pesar de que sus aportaciones -como veremos- son de importancia capital para el desarrollo de este tipo de conocimiento sobre la realidad social, a pesar de ello decía, su obra -al igual que la de Marx- no se enseña en los cursos de licenciatura o de grado de economía en las facultades de Economía. Normalmente se relegan a cursos especializados o de doctorados o, como se dice en Latinoamérica, de doctorando, y no forma parte del *corpus* de conocimientos de un economista cuando sale de la facultad con el título correspondiente bajo el brazo. La injusticia es manifiesta desde cualquier punto de vista: político, ético y, sobre todo, científico[1], que es el que me importa señalar y denunciar. Daré apenas unas puntadas a su biografía[2] que pueden explicar históricamente este ocultamiento y relegamiento del economista italiano, pero no justificarlo. A continuación esbozaré leve y modestamente el estado la teoría económica en el momento que nace Sraffa intelectualmente porque ello es imprescindible para entender el porqué del libro y de toda la obra del italiano. La parte central de este libro consistirá en construir una guía formal (matemática) que facilite la lectura del libro de Sraffa *Producción de mercancías por medio de mercancías*. Sin embargo, no me quedaré ahí, sino que intentaré estirar al máximo las posibilidades de avanzar en la construcción de una teoría económica alternativa a la Microeconomía actual y parte de la Macroeconomía, pero sin perder el cordón umbilical del esquema esrafiano. Hago dejación de intentar siquiera un resumen de los avances ya existentes en la literatura económica tras Sraffa. Esto normalmente sirve para alcanzar doctorados o aumentar espurios currículos, estériles en todo

1 En la medida en que una cosa como la economía puede ser una ciencia o, como diría Jean Robinson, sólo una caja de herramientas.

2 El libro clásico sobre la vida y, en parte, de la obra de Sraffa es "*Piero Sraffa (1898-1983). Ensayo biográfico*", de Jean-Pierre Poitier, traducido por Jordi Argente y revisado por Gustau Muñoz, en Ediciones Alfonso el Magnànim-IVEI, 1994. Para sus primeros años en Cambrigde y primeras aportaciones: "*Piero Sraffa: The Man and the Scholar*", de Kurz, Pasinetti, Salvadori, etc., 2008.

caso desde el punto de vista intelectual. Si algún mérito puede tener este texto -o querría que tuviera- es el de ser desvergonzado y arriesgadamente creativo.

Piero Sraffa nace en Turín en 1898 y muere en el Cambridge inglés en 1983. Es hijo de un prestigioso jurista, Ángelo Sraffa y de Irma Tivoli. Sus estudios en la escuela elemental los hace en Parma y los secundarios en el famoso instituto Giuseppe Parini, en Milán. Los universitarios los realiza en la Facultad de Derecho de Turín, donde sigue los cursos de economía política de Luigi Einaudi, especialista en finanzas. Enseguida -en 1919- entra en contacto con el dirigente italiano *Gramsci* y participa mediante traducciones de textos alemanes, franceses e ingleses en *L´Ordine Nuovo*, revista creada por el propio Gramsci y el que fuera posteriormente máximo líder y renovador del PCI, *Palmiro Togliatti*. La amistad, correspondencia y desvelos personales de Sraffa en ayuda de Gramsci fueron constantes hasta la muerte de éste en 1937. Tras algún intento anterior, en 1927 puede ir a Gran Bretaña y se entrevista con Keynes. Entre 1919 y 1920, Sraffa había preparado una tesis sobre las finanzas italianas bajo la supervisión del profesor *Einaudi* titulada *L´inflazione monetaria en Italia e dopo la guerra.* Ya en tierras inglesas y en contacto de nuevo con Keynes, éste le pide un artículo para la revista *Manchester Guardian Commercial* que dirigía. Sraffa escribirá ya directamente en inglés *The Bank Crisis in Italy*. Keynes quedará agradablemente conmocionado por el trabajo de su ya amigo turinés y ya no le dejará escapar de su Cambridge inglés, a pesar de los problemas de Sraffa para dar clase y, en general, para hablar en público. Entre 1924 y 1925 prepara un trabajo cuya importancia en la historia del análisis económico es difícil de exagerar: *Sulle relazioni fra costo e quantità prodota* (*Sobre las relaciones entre costo y cantidad producida*). Retorna a Italia y en 1926 obtiene una cátedra en la universidad de Cagliari, en Cerdeña, donde enseñará hasta el verano de 1927. En 1926, Keynes, a instancia del afamado economista Francis Y. Edgeworth, le pide un artículo sobre la competencia y Sraffa le manda un trabajo quizá aún más importante que el anterior: *The laws of Returns under a Competitive Conditions* (*La ley de los rendimientos en régimen de competencia*). La presión del régimen fascista para él se volverá insoportable y en 1927 se instala definitivamente en Cambridge hasta su muerte.

Este es un pequeño esbozo donde renuncio a relatar las relaciones políticas y de amistad con Gramsci por mor de espacio y oportunidad, pero es notorio que ambas fueron estrechas y leales, a pesar de sus discrepancias políticas (más tácticas o estratégicas que ideológicas). Apuesto a que debió estar en tensión por su lealtad ideológica a los sentimientos revolucionarios de los pueblos -en especial del italiano- y su rigor e imperturbable altura intelectual que no le permitía pasar más que aquello que el tamiz de su intelecto aceptaba. Prueba de ello y a pesar de decirse y aceptarse así mismo como marxista, construyó una teoría en su obra *Producción de mercancías por medio de mercancías*[3] (en adelante *PMPM*) que se aparta de la obra de Marx tanto por su método como por sus conceptos, aunque no tanto por su objeto.

En 1960 se publica simultáneamente en inglés y en italiano la obra mencionada, cuya elaboración data de finales de los años 20, cuando Sraffa decide leer los primeros esbozos a Keynes. También se lo lee a su amigo *Frank P. Ramsey* y a los matemáticos *A. Watson* y (más tarde) a *A. S. Besicovitch*. ¡Pasan por tanto más de 30 años desde su génesis hasta su publicación! En el ínterin, se produce la revolución keynesiana/kaleckiana. ¿Cuál es la intención primera de Sraffa al desarrollar su obra *PMPM*? Lo dice en el prólogo e, incluso, queda implícito más que explícito en el título y en el subtítulo. En el primero se habla de *producción de mercancías por medio de mercancías* -hoy diríamos *bienes y servicios*-, es decir, para nada se habla de *capital* como *medio de producción* distinto del resto de las mercaderías que se utilizan en el consumo. La razón de ello es que para Sraffa -y también para *David Ricardo*[4]- el capital es o se pude reducir a trabajo fechado, es decir, todos los *medios de producción* que alguna vez en el pasado se han producido se ha utilizado trabajo; es el trabajo el *factotum*, o en lenguaje aristotélico, *la causa eficiente* del capital. Esto es un misil en la línea de flotación de la teoría económica de la época, donde, al menos desde *Adam Smith*, se había dividido y agregado los medios de producción (factores) en la trinidad *trabajo, tierra y capital*. Hablamos de conceptos y no de meras descripciones de la realidad. De ahí también el subtítulo: “preludio a una crítica de la Teoría Económica”. Veamos lo que dice la gran *Joan Robinson* de los que es y cuál es el papel que jugaba “el capital” en la enseñanza de la economía, de la

---

[3] *Production of Commodities by means Commodities*, publicada por “The Syndics of the Cambridge University Press”, 1960; traducida al castellano por Luis Ángel Rojo en 1966 y editada por Oikos-Tau, S.A.

[4] *Principios de Economía Política*, cap. I, sección III, FCE, pág. 17.

teoría (única) de la época: "*Además*[5]*, la función de producción ha constituido un poderoso instrumento para una educación errónea. Al estudiante de teoría económica se le enseña a escribir **Y=f(L,K)**, siendo **L** una cantidad de trabajo, **K** una cantidad de capital e **Y** una tasa de output de mercancías. Se le alecciona a suponer que todos los trabajadores son iguales y a medir **L** en hombre-hora de trabajo; se le menciona un problema de números índices en cuanto a la elección de una unidad de output, y luego se le apremia a pasar al problema siguiente, con la esperanza de que se olvidará preguntar en qué unidades se mide **K**. Antes de que llegue a preguntárselo ya será profesor, y de ese modo se va transmitiendo de generación en generación unos hábitos de pensamiento pocos rigurosos*". Robinson se queda corta en cuanto al poco rigor, porque los problemas de agregación del llamado capital son insolubles: si no utilizamos precios, no podemos sumar cantidades heterogéneas; si los utilizamos, la suma -es decir, el llamado *capital agregado*[6]- depende tanto de los sumandos de los medios de producción como de sus precios, con lo que nunca sabremos a que achacar una variación estadística del capital, ni tendremos nunca una medida rigurosa del capital independiente de los precios. Dicho de otra forma, si para determinar los salarios y las ganancias tenemos que saber los precios previamente, nunca tendremos una teoría de los precios de los bienes finales y de los factores si no podemos desligar los factores y sus variaciones físicas de sus valoraciones. Entramos en una tautología donde lo más que se puede decir es que todo depende todo, y para ese recorrido no se necesitan tantas alforjas.

¿Cuál era la teoría económica predominante a la altura de comienzos de los años 30 del siglo XX?[7] Sin duda era *Marshall* y su

---

[5] en *Review of Economic Studies*, 1953-54 (*La función de producción y la teoría del capital*, en "Ensayos críticos", Ediciones Orbis, S. A., pág. 85).

[6] "*¿Existe una unidad en la que pueda medirse el capital agregado o social y que sean independiente de la distribución y de los precios?*", Joan Robinson, recogido de *Teoría del Capital*, G. C. Harcourt, 1975, edit. Oikos-Tau, pág. 13 ("*Some Cambrigde controversies in the theory of Capital*", 1975).

[7] Para un panorama de la época ver: "*Piero Sraffa. La implosión lógica de la teoría económica neoclásica*", Alejandro Fiorito: http://3794801810983261946-a-1802744773732722657-s-sites.googlegroups.com/site/revistacircus/Home/sraffa12.pdf?attachauth=ANoY7cpdoCOrLilEvw5v06kepzi9Q-I_WCc7jRK-HV6vX-oCKKHQ26wrV_8z0j6B9uSWaLbSTYi_hx-WIaT3eZmdPHbodxirhxahBOE06B578Ghht4xh2NgNcMkqBSqCTnQ_ku_dgCT7oH9

obra *Principios de Economía* (había desaparecido el adjetivo "política"). Su obra, trabajada durante mucho tiempo, recogía la tradición clásica con el importante añadido del marginalismo -como método y también en parte como objetivo- creado a finales del último tercio del XIX por la tríada *Jevons-Menger-Walras*[8]. Se corresponde en esencia con la Microeconomía que se estudia actualmente. El economista inglés centrará su análisis en el equilibrio parcial, mientras que Walras lo hará en el equilibrio general. La matemática empleada será cada vez más el cálculo infinitesimal o diferencial, porque se supone que los bienes y servicios se pueden dividir cuanto se quieran, tanto en la producción (productividad marginal) como en el consumo (utilidad marginal); también porque sus demostraciones son más elegantes con ese instrumental. Con curvas apropiadas de costes en formas de ***U*** y en el consumo convexas hacia el origen, se dejaba el camino expedito para que, posteriormente, con un poquito de *Brower* y *Kakutani* -teoremas del punto fijo- y con algún triple salto para agregar bienes y empresas, se llegue a las teorías posteriores del equilibrio general[9], donde se determinan los precios finales e intermedios de una vez para siempre, donde todo es paz y armonía, y ninguna fuerza interna lo puede cambiar. Claro, esto no explica las crisis, los ciclos, por ejemplo. Pero tiene una virtud ideológica: los precios finales y las rentas de los factores están justificados por sus utilidades marginales y sus productividades marginales. Tampoco explica esta teoría el *paro indeseado*[10], porque las leyes de oferta y demanda -que se obtienen de lo anterior- tienen o debieran tener tal flexibilidad de precios y salarios -y dado que se cruzan siempre[11]- que hacen imposible una situación de paro. El problema es que la realidad ahora, en 1929 y siguientes, y en otros períodos del capitalismo, dice lo contrario. Hay que reconocer, no obstante, que ya dentro del sistema neoclásico -personalizados en Marshall y Walras- escribe el sucesor del inglés en Cambridge, *Pigou*,

---

YCxx89Jxvk6Oep9GNV3f6OrteV30hsaU6NyDrgB_Ix_orYfPbMNqaGUvijm2zcNzLRKsjWH5YP3jwmckniA%3D%3D&attredirects=1

[8] Hay precursores como Gossen, Wieser, etc., pero estos 3 son los más importantes.

[9] Debreu (1959), Arrow y Hahn (1971). En el libro *General Analysis Competitive* de estos últimos autores se dice: "*A partir de la mano invisible de Adam Smith, los economistas clásicos sostuvieron que el equilibrio competitivo producía lo que en algún sentido no muy bien definido constituía una asignación optima de los recursos. Edgeworth (1881) y Pareto (1909) aclararon de modo considerable la relación existente entre los equilibrios competitivos y las asignaciones óptimas, partiendo de estas últimas*". Como se ve, la mano del andarín escocés ha sido alargada, además de muy *visible.*

[10] *Eso lo explica o se deriva de Keynes y Kalecki.*

[11] Las tijeras de Marshall.

Wealth and Welfare (1912) y lo remata posteriormente con *La economía del bienestar* (1920), donde se discuten posibles fallos del mercado (externalidades); era un cambio dentro del sistema intelectual neoclásico, por eso se le tildó significativamente de *fallos del mercado*. Con el tiempo, esos fallos del mercado y otros (bienes públicos, rendimientos crecientes o constantes, información asimétrica, etc.) pasarían a ser, aunque a regañadientes, *características* de mercado.

Pues bien, a la altura de los años 30 se producen dos revoluciones[12] en la teoría económica por obra de 3 autores, de los cuales uno es de sobra conocido -supongo que merecidamente- y los otros 2 son unos desconocidos para los no economistas, e incluso para estos, lo son sólo de oídas, me atrevería a decir, salvo para especialistas: el primero es Keynes y los semi-desconocidos son Kalecki y Sraffa[13]. De Kalecki no hablaré, pero decir que es como Keynes, pero en plan riguroso, entendible y profesional. Sigamos. La llamada revolución keynesiana la recoge otra vez Joan Robinson en un artículo de 1972[14]. Entre otras aportaciones de Keynes, lo que va trastocar el hermoso país de la *Alicia* neoclásica es la posibilidad de que se pueda dar un equilibrio entre Ahorro e Inversión (o lo que es equivalente, entre Producción y Renta) y simultáneamente paro indeseado[15]. También el factor tiempo. Oigamos de nuevo a la Robinson en el artículo citado anteriormente: "*Consideremos cuál era la clave de la revolución keynesiana, tanto en el plano de la teoría como en el de la política. En la teoría, el punto principal de la General*

[12] También ya se había producido la revolución marxista desde mediados del siglo XIX, pero esta ha sido siempre ajena a los economistas occidentales.
[13] Para que no haya dudas de estas afirmaciones del postergamiento de la obra de Sraffa a los especialistas, puede verse que en la reputada y utilizada *Historia de la teoría económica y de su método*, de R.B. Ekelund y R.F. Hébert (1992 en su versión inglesa), no hay un sólo capítulo específico dedicado a la obra capital de Sraffa. Es verdad que se le menciona en 7 ocasiones, pero siempre referidos a sus artículos sobre la competencia y sobre los rendimientos antes mencionados. Nada sobre *PMPM*. Todavía es peor el caso de Schumpeter en su *Historia del Análisis Económico*: lo menciona 2 veces (págs. 1137 y 1246 en la versión española de Ediciones Ariel) y nunca referidas a su obra fundamental.
[14] *The Second Crisis of Economic Theory*, en "American Economic Review" (*La Segunda crisis de la Teoría Económica*, en Información Económica Española, n. 498, mayo 1975; también en el libro mencionado antes "Ensayos Críticos", en Ediciones Roca, S.A., 1984).
[15] En realidad, Joan Robinson habla de dos crisis casi simultáneas: *"la primera surgió del desmoronamiento de una teoría que no podía explicar el nivel de empleo; la segunda crisis de una teoría que no podía explicar el contenido del empleo"* (artículo anterior).

Theory fue hacer estallar el núcleo del equilibrio y considerar la naturaleza de la vida vivida en el tiempo: la diferencia entre ayer y mañana. Aquí y ahora, el pasado es irrevocable y el futuro, desconocido". Frente a la placidez estática de la teoría neoclásica[16], Keynes opone el tiempo y su incertidumbre, y sin tiempo no existiría el multiplicador; tampoco una aproximación a la explicación de las crisis y los ciclos.

Después de estas leves pinceladas sobre el estado del conocimiento de la teoría económica en los albores del período de entreguerras -y que cualquier libro sobre la historia del análisis mejorará sin ninguna duda- pasemos directamente a la aportación de Sraffa en su obra *Producción de mercancías por medio de mercancías*. Antes de nada, sin embargo, una advertencia: he hecho en este trabajo esfuerzos ímprobos por apartarme de otros trabajos sobre Sraffa[17] porque nada más lejos de mi intención que hacer un mero resumen de lo aportado por otros. Eso vale para hacer tesis doctorales, obtener títulos o publicar en revistas especializadas. Prefiero el valor de la originalidad imperfecta a la más coherente de las síntesis o al más perfecto de los resúmenes. Dicho esto, entramos en materia sobre el libro de Sraffa.

Nada más empezar en su obra capital dice el autor: *"Cualquier persona acostumbrada a pensar en términos de demanda y oferta puede inclinarse a suponer, al leer estas páginas, que la argumentación descansa sobre el supuesto tácito de rendimientos constantes en todas las industrias"*[18]. Esta era la requisitoria y advertencia que le había hecho su amigo y mentor Keynes[19] para entender su obra o, al menos, sus hipótesis. Mi impresión personal tras estudiar y escribir varios artículos sobre esta obra de Sraffa es la de que Keynes no entendió nada de lo que Sraffa había escrito hasta ese momento, porque el italiano toma los medios y los productos finales como datos, por lo que no tiene sentido hablar de rendimientos cuando el tiempo no juega ningún papel[20]. Sólo en el capítulo de la reducción

---

[16] Al menos Marshall emplea la estática comparativa.
[17] Como los de Schefold, Pasinetti, Kurz, Roncaglia, Ahijado en España, etc.
[18] Pág. 11 de *PMPM.*
[19] Pág. 12 de *PMPM.*
[20] Todas las variaciones que estudia Sraffa entre tasa de salario, tasa de ganancia y precios son movimientos hipotéticos, sin referencia temporal. Sólo cuando pasa Sraffa al estudio de los medios de producción como trabajo fechado Keynes tiene

del capital a trabajo fechado hay que darle la razón al inglés. Esto demuestra la dificultad de pensar por uno mismo cuando las ideas heredades son más un obstáculo que un estímulo. Y eso que a Keynes se le tiene por un genio, que yo no discuto. Pero Sraffa no acaba su disertación sobre el tema del no supuesto sobre los rendimientos constantes y dice a continuación con fina ironía: *"Si se encuentra tal supuesto, no hay inconveniente alguno en que el lector lo adopte como una hipótesis temporal de trabajo. De hecho, sin embargo, no se hace tal supuesto"*. Por los testimonios que tenemos se deduce que el economista turinés era afable en demasía, pero también que intelectualmente era incorruptible[21] y con esto lo demuestra. ¿Cuál es el objeto de la investigación de Sraffa? Lo aclara el mismo en el prefacio: *"La investigación se ocupa exclusivamente de aquellas propiedades de un sistema económico que no dependen de variaciones en la escala de producción o en las proporciones de los factores"*. ¿Qué consigue Sraffa con este supuesto nada descabellado? Nada más y nada menos que cargarse el análisis marginal, porque "*sin variación, bien en la escala de la industria, bien en la proporción de los factores, no puede haber producto marginal ni coste marginal*"[22]. Eso obliga y le obliga a Sraffa a volver a los economistas clásicos, "*desde Adam Smith a Ricardo*". Resulta curioso y llamativo qué pocos economistas considera clásicos el italiano. A partir de ahora vamos a seguir el libro de Sraffa para ir desgranando algunas de sus conceptos, hipótesis, teorías y conclusiones. Vayamos ahora al libro para intentar desentrañarlo y descifrarlo.

El libro de Sraffa hay que descifrarlo. Otros hay interpretarlos, como el de Keynes, o sólo aprenderlos, como los de Kalecki, o sólo entenderlos, como el de Ricardo, o traducirlos al lenguaje corriente, como los de Marx. Sraffa es un economista puro que utiliza las matemáticas, pero que sustituye las conclusiones formales por los razonamientos económicos que ellas implican, a diferencia, por ejemplo, de Von Neumann. Sraffa es un pos-ricardiano que desarrolla su propio esqueleto económico, cuando lo fácil hubiera sido seguir el creado por Marx. Como todo gran intelectual, Sraffa veía de lejos y no se enfangó con el grandioso esquema del alemán porque vio algo que no tenía salida: la teoría del valor-trabajo, versión Marx en lenguaje

---

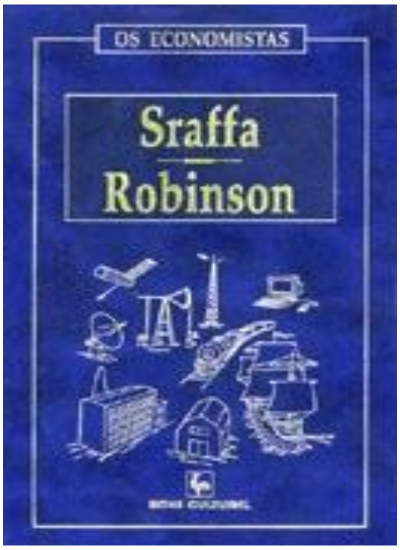
razón y ha de suponerse rendimientos constantes para que las matrices de requerimientos $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ sean constantes con el paso del tiempo.

[21] Con Joan Robinson, con Keynes y con el mismísimo Gramsci, por ejemplo.

[22] Pág. 11 de *PMPM.*

hegelés (J. Robinson). Intuyó que la forma de combatir el cáncer que se había desarrollado en la teoría económica con Jevons-Walras-Menger no era con la teoría del valor de Marx y su teoría de la plusvalía, sino con la búsqueda de una teoría de la distribución que fuera inmune a la variación de los precios. Ese fue el sueño del que Ricardo nunca despertó. Sraffa lo alcanzó con *la mercancía-patrón* y *la razón-patrón*; Marx, por su parte, lo intentó con su teoría del valor-trabajo que es distinta de la de Ricardo y, en mi opinión, tampoco lo consiguió por problemas de coherencia interna. A partir de ahí desarrolló Sraffa su teoría del excedente, su visión sobre el capital como trabajo fechado, la producción simple y conjunta, la razón-patrón como vara de medir de la distribución y sus componentes, la distinción no sociológica entre *bienes básicos* y *no básicos*, la destrucción de la teoría del capital marginalista con su recurso al trabajo fechado y la elección de técnicas. También otros logros que otros autores han desarrollado posteriormente. Pero toda la semilla está en *Producción de mercancías por medio de mercancías*. Tiene otras contribuciones también con dos artículos trascendentes, pero aquí nos limitamos a su libro escrito a lo largo de varias décadas y publicado definitivamente en 1960. En esta fecha nace una nueva teoría económica de la que Sraffa creó y puso la semilla. Aún está por desarrollar. En mi opinión no es la teoría de Sraffa una aportación más en la historia del análisis económico, sino una alternativa, tanto a la macroeconomía como a la microeconomía. Sobre todo a esta última. También, en mi opinión, la microeconomía que aún se enseña en las universidades es un cadáver intelectual, pero si subsiste es por motivos ideológicos y de inercia histórica.

Vamos a descifrar el libro de Sraffa y -lo que de verdad importa- desarrollarlo en lo posible. También corregirlo en sus errores, que algunos tiene. No es este un intento de recopilar lo que se ha hecho hasta ahora porque eso sirve sólo para conseguir doctorados y rellenar currículos. Con explicar la semilla de Sraffa y regarla en la medida de lo posible para que fructifique es suficiente. Más aún, cuanto más diferente sea de cuantos han desarrollado o interpretado la obra del italiano como *Pasinetti, Garegnani, Schefold, Roncanglio,* mejor. Nada más aburrido que repetir lo que otras han hecho, aunque sea imprescindible su conocimiento. Iremos capítulo a capítulo en lo posible, pero no se trata de divulgarlo, sino sólo de interpretarlo. No se puede sustituir la lectura de la genial obra del italiano. Aquí seremos selectivos en las cuestiones que aborda Sraffa y no entraremos en muchos de sus matices y consideraciones.



Capítulo I: Producción de subsistencia.

El primer capítulo es pedagógico y no supone aún ningún avance intelectual. Este capítulo es puro esquema input-output sin excedente. Parece que ambos autores -Sraffa y Leontief- desarrollaron sus análisis independientemente, aunque con intenciones diferentes, claro está: el ruso, con intenciones más empíricas que teóricas para valorar la influencia de las relaciones inter-industriales en la economía; el italiano, para construir su alternativa a la microeconomía de la época (la única teoría económica entonces hasta la aparición del keynesianismo) y a la teoría del capital. La ecuación implícita de la que parte Sraffa es:

(I.1) $$YI = XI$$

(I.1b) $$\begin{bmatrix} y_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & y_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

con ***Y*** como matriz diagonal $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$ de productos finales, donde $\boldsymbol{y}_{\text{ij}}=\mathbf{0}$ si $\boldsymbol{i}$<>$\boldsymbol{j}$; ***X*** es la matriz de medios de producción, e **I** es el vector de unos $\boldsymbol{n}\text{x}\mathbf{1}$. No hay excedente y el esquema responde a una economía que consume lo que produce. Podría representar una economía de trueque sin acumulación y de producción simple, es decir, con cada empresa -por llamar al hecho productivo de alguna forma- produciendo *un sólo* producto. No es necesario el dinero ni los precios, salvo quizá como unidad de medida del valor. Con los precios ***P*** sale la ecuación:

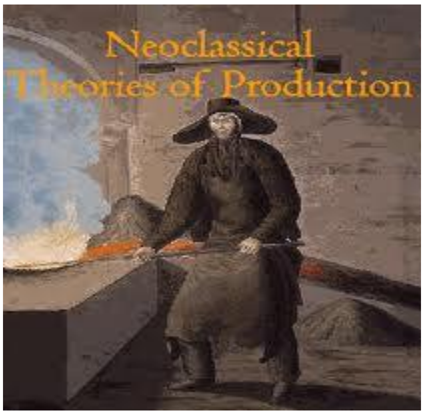
(I.2) $$PY = PX$$

(I.2b) $$\begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & y_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

siendo ***P*** un vector $\mathbf{1}\text{x}\boldsymbol{n}$.

Nos falta ahora utilizar una mercancía como medida de valor. Para ello se hace -según Sraffa- un precio igual a uno y quedan ***n*-1** precios y ***n*-1** ecuaciones independientes[23]. Eso equivale a dividir todas las ecuaciones por un precio cualquiera para que todos sean relativos. Esto procede de Ricardo, pero luego Sraffa utilizará otros numerarios para relativizar los valores. Es una prueba más del genio del italiano que, partiendo del economista inglés, se aparta de él cuando ello conduce a un callejón sin salida.

¿Implica el esquema de Sraffa una función de producción, aunque sea lineal con rendimientos constantes? Sraffa toma los datos de los productos finales ***Y*** y medios de la realidad ***X***, y a la pregunta contestó como hemos visto que el no hacía tal supuesto, pero que el que quisiera podría hacerlo[24]. Mi opinión es que este esquema implica una función de producción lineal como las que se supone que hay detrás del análisis input-output. Y si este esquema implica una función de producción con un equilibrio desde un período de tiempo ***t*** a otro ***t*+1** entre oferta y demanda, ha de suponerse rendimientos constantes. Keynes tenía razón si fechamos las variables, aunque no entendiera el conjunto del libro, pero al menos entendió el primer capítulo. Sraffa habla de producir trigo, hierro y cerdos con los mismos productos. Es un esquema pedagógico. Aunque no haya dinero, no estamos ante un sistema de mero intercambio. Como se ve, nuestra intención no es simplemente divulgar a Sraffa sino aventurar alguna interpretación.



[23] La razón de que quede ***n*-1** ecuaciones independientes es la de que al dividir por un precio cualquiera la ecuación (2), en el lado izquierdo de la ecuación, es decir, ***PY***, no aparecerá ningún precio en ese lado, por lo que ese precio no tiene influencia en el lado derecho (cuando antes aparecía, ahora se ha convertido en un uno). Si eso es así, la ecuación correspondiente a la mercancía cuyo precio ha dividido a todas las ecuaciones (el numerario) depende de las demás, pero las demás no dependen de ella. Con ello hemos convertido un sistema de ***n*** ecuaciones independientes en un sistema de ***n*-1** ecuaciones independientes.

[24] Lo dice en el prefacio.

Capítulos II y III: Producción con excedente

Dice Sraffa al comienzo del capítulo que: "*Si la economía produce más del mínimo del necesario para el reemplazamiento y existe un excedente que distribuir, el sistema se hace contradictorio*". La frase resulta sorprendente por el final. En efecto, si la economía -a diferencia del capítulo anterior- produce un excedente, la oferta (***PY*I**) en términos de valor es mayor que la demanda (que procede de todas las columnas de ***X***, aunque no sean sumables sector a sector, pero sí lo son para el conjunto de los sectores (***PX*I**). Sraffa no lo reconoce explícitamente, pero cuando se habla de oferta y de demanda de cada mercancía ha de incluirse los precios, aunque el equilibrio general del sistema entre cantidades compradas y vendidas se haga además en términos físicos. Volviendo a lo *contradictorio*, Sraffa se refiere que ahora, con un excedente, no podemos eliminar la ecuación del *numerario* porque hay una variable más -el excedente, es decir, ***r***- que no está en el lado izquierdo de la ecuación ***PY***=(**1**+***r***)***PX***; en cambio, sí tenemos ***n***-**1** precios, porque uno de ellos es el numerario. El adjetivo contradictorio me parece mal elegido. Lo que ocurre es que tenemos -diríamos hoy- un grado de libertad. Es casi lo contrario que contradictorio, pero Sraffa quizá pensaba en Walras. Ocurre ahora que no se puede determinar el excedente antes de conocer los precios, ni estos antes de saber el excedente. Hay una dependencia mutua que sólo se resuelve resolviendo -valga la redundancia- el sistema de ecuaciones (II.1). Sraffa subraya este hecho quizá para demostrar la diferencia de su esquema con los modelos marginalistas de equilibrio general conocidos en su época. Estos tratan de encontrar tantas ecuaciones como variables para que sea el sistema económico quien determine para quién y por cuánto se distribuye el excedente (rentas, salarios, ganancias, intereses, etc.). La ecuación que define la economía en esta primera parte del capítulo es:

(II.1) $$PY = (1+r) \times PX$$

(II.2) $$\begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & y_{nn} \end{bmatrix} = (1+r) \times \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

Aquí ***r*** representa el excedente y hace que se cumpla (II.3):

(II.3) $$y_{ij} > \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$ para todo ***i***=**1** a ***n*** con y_{ij}=**0** si ***i***<>***j***

En (II.2) tenemos ***n*** ecuaciones independientes con ***n*-1** precios (por efecto del numerario) y el excedente ***r***, con lo que el sistema tiene solución[25]. Viendo la (II.2) -y con esta última explicación- se ve porqué no se puede calcular los precios sólo por un lado y el excedente por otro: ambos están eternamente ligados. Ahora, en este sistema cabe preguntarse: ¿dónde aparece el trabajo o es que se produce sólo, sin la intervención de la mano del hombre (y de la mujer)? Pues, como dice Sraffa, "*hasta este momento hemos considerado los salarios como consistente en los bienes necesarios para la subsistencia de los trabajadores, de modo que entraban en el sistema en pie de igualdad con el petróleo para las máquinas o los alimentos para el ganado*". Es decir, los salarios están en ***X***. Sin embargo, Sraffa a continuación va a hacer explícitos los salarios porque el objeto de su análisis y el sentido de su obra es la distribución y la distinción entre rentas salariales y ganancias, a las que se añaden en un capítulo las rentas de la tierra (o de las minas) y las del capital como trabajo fechado. El sistema de ecuaciones que define esta inclusión de la nueva variable será:

(II.4) $$\boxed{PY = (1+r) \times PX + wL}$$

donde ***w*** es la tasa de salarios y ***L*** el vector de medios de trabajo en horas de trabajo **1**x***n***. Ahora Sraffa se deja de líos con el recuento de las ecuaciones y un precio como numerario y toma como tal a la suma de los inputs (diríamos hoy) de trabajo:

(II.5) $$\sum_{i=1}^{n} l_i = 1$$

[25] Eso es tanto como decir que todas las ecuaciones se han dividido entre el precio de la mercancía que hemos tomado como numerario. Al hacerlo así, ya no tenemos ***n*** ecuaciones linealmente independientes, sino ***n*-1** porque todos los precios aparecen tanto en el lado izquierdo de la ecuación ***PY***=***PX*** como en el lado izquierdo. Sin embargo, cuando tenemos la ecuación ***PY***=(**1**+***r***)***PX***, ya no podemos eliminar la ecuación del numerario porque en el lado derecho de la ecuación aparece (**1**+***r***) dividido entre el precio del numerario, que no aparece en el lado izquierdo. Lo único que podemos hacer es dividir los dos términos de la igualdad entre el numerario. Quizá Sraffa dedica demasiado tiempo a explicar este hecho.

Con (II.4) y (II.5) el sistema de Sraffa se reduce a la única ecuación[26]:

(II.6) $$PYI = (1+r) \times PXI + w$$

puesto que ***L*I**=**1**, que es lo mismo que (II.5).

En (II.6) tenemos una ecuación con ***n*+2** variables (***n*** precios, la tasa de ganancia ***r*** y la tasa de salarios ***w***). Si los precios son variables, tenemos ***n*+1** grados de libertad; si son datos, tenemos **1** grado de libertad. Ahora podemos despejar la tasa de salarios o de ganancia.

(II.7) $$w = PYI - (1+r)PXI \quad \text{o bien} \quad r = \frac{P[Y-X]I - w}{PXI}$$

donde ha desaparecido el vector de trabajo ***L***, pero quedan ligados ***r*** y ***w*** con precios ***P***, productos finales ***Y*** y medios de producción ***X***. Parecería que Sraffa ha hecho un mal negocio renunciando a un precio como numerario. Sin embargo, y quizá aprendida la lección de Walras con su teoría del equilibrio, lo que hace es tomar un segundo numerario[27] que será la renta neta, y que supone añadir la siguiente ecuación:

(II.8) $$PYI - PXI = 1$$

Con (II.8) Sraffa toma un numerario pero con variables que ya están en (II.4) con lo que elimina un grado de libertad; además, en este segundo numerario no aparece la variable del primero (los input de trabajo ***L***). Con las ecuaciones (II.6) y (II.8) se obtiene:

(II.9) $$r = \frac{1-w}{PXI} \quad \text{o bien} \quad w = 1 - rPXI$$

donde, gracias al numerario (II.8), ya la tasa de salario ***w*** o la tasa de ganancia ***r*** no dependen de los productos finales ***Y***. Sraffa da un paso

---

[26] Eso significa que hemos divido toda la ecuación entre ***L*I**, por lo que en las variables debería especificarse este hecho. Sraffa no lo cambia y nosotros tampoco lo vamos hacer. Desde el punto de vista conceptual para nada afecta a las conclusiones que se van a sacar, pero es importante saberlo por los posibles estudios empíricos.

[27] Podemos tomar tantos numerarios como queramos con tal de que no haya ninguna variable común en todos ellos.

adelante en la búsqueda de una medida de la distribución inmune a los precios, pero aún no lo ha conseguido. La ecuación (II.9) es una ecuación de equilibrio porque procede de (II.4), que lo es. Esto es así porque en esta ecuación, ***Y*** representa la producción final que se reparte entre ***X*** más el excedente en el período siguiente, que ahora -a diferencia del capítulo I- ha de repartirse entre salarios ***w*** y ganancias ***r***, y con ello se vuelve a empezar el ciclo. Y de nuevo la advertencia de Keynes: esto sólo es posible porque la relación entre ***Y*** y ***X*** es equivalente a una función de producción lineal y constante a lo largo del tiempo. Si Sraffa hubiera partido con ***Y*** y los medios empleados ***X***, y hubiera acotado el objeto de su análisis a la distribución del excedente, no habría que entrar en la discusión de los rendimientos. Afortunadamente no hizo eso. Sraffa habla de producción continuamente, aunque nunca emplee la palabra *función* (que estaba ya en Walras). Además, los precios que tenemos son de equilibrio, puesto que no están fechados y sólo es posible que sean los mismos para los productos finales que para los medios en situaciones de equilibrio entre consumo y producción cuando ha pasado un período de tiempo. Obsérvese que si ***Y*** o ***X*** varían, los precios en (II.6) van a variar también. Lo vemos mejor despejando los precios de esa ecuación matricial:

(II.10) $$P = wL\left[Y - \left(1 + r\right)X\right]^{-1}$$

Fijados ***w*** y ***r***, obtenemos los ***n*** precios[28], pero estos dependen de los productos finales ***Y*** y de los medios de producción ***X***. Cualquier variación de estos hará variar los precios, aunque las tasas de salario ***w*** y de ganancias ***r*** no se movieran, es decir, aunque el reparto del excedente fuera el mismo. Tomar como numerario la renta (II.8) es una genialidad que será decisiva para los capítulos que vienen. En (II.9) ya se atisba *la razón-patrón*. Ahora sólo falta eliminar ***PX*****I**. ¿Pero cómo? Se necesita una ecuación más, desde luego, pero *con una variable más que dependa de los datos que ya tenemos*. Mejor dicho, no de todos, porque no puede depender ni de ***w*** ni de ***r***, porque tendríamos entonces una ecuación redundante con (II.9), es decir, no puede depender de *cómo* se distribuya el excedente, aunque pueda *representar* al excedente. Vemos aquí que para salir del atolladero hay que conjuntar

[28] Y son ***n*** precios porque ya no podemos tomar tan siquiera uno como numerario porque ya hemos utilizado los precios en (10) para construir el numerario de la renta neta.

el sentido económico con el matemático, y el sentido económico de Sraffa era inconmensurable.

Bienes básicos y no básicos

En este capítulo introduce Sraffa la división de los bienes entre básicos y no básicos, según que entren como medio de producción en la producción de todos los demás bienes o no entren en ninguno. Oigamos a Sraffa: "*El criterio consiste en si una mercancía entra (directa o indirectamente) en la producción de todas las mercancías. Las que lo hacen serán denominadas básicas, y las que no serán denominadas productos no básicos*". Habría que decir que un criterio económico no debiera ser tan exigente y que aquel bien final que entrara como medio, aunque *sólo* fuera en uno de los demás bienes, debería ser ya un bien básico. Pero Sraffa tenía sus razones y, en concreto, dos: se llaman Perron y Froebenius, pero esto lo veremos más adelante. Los *no básicos*, como el oro que pone Sraffa de ejemplo, no entran como medio en ninguno de los demás bienes. Eso significa que si tenemos $\boldsymbol{n}$ ecuaciones con $\boldsymbol{n}$ bienes distintos y uno de ellos no es requerido como medio en ninguno de los demás, en realidad tenemos un sistema de $\boldsymbol{n}$**-1** ecuaciones con $\boldsymbol{n}$**-1** bienes linealmente independientes, por lo que puede ser resuelto sin esperar a ese bien $\boldsymbol{n}$-ésimo tan singular que nadie le requiere (cual patito feo). Por ahora esta diferenciación no jugará ningún papel, pero sí lo hará en *la producción conjunta*. Más aún, si de ese subsistema de $\boldsymbol{n}$**-1** ecuaciones con $\boldsymbol{n}$**-1** incógnitas somos capaces de obtener la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$ y la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}$ junto con los $\boldsymbol{n}$**-1** precios[29], el bien $\boldsymbol{n}$-ésimo (el del oro del ejemplo de Sraffa), tendrá que aceptar ambas tasas, le guste o no le guste. Sólo podrá eludirlas si, además de no vender su producto (el oro) a ningún otro sector, tampoco utiliza como medio ningún producto del resto de los sectores. En ese caso, el oro se produciría con oro (o en el ejemplo de D. Ricardo, el trigo), de tal manera que sería un mundo aparte, sin ninguna conexión con el resto del sistema; en términos comerciales, no tendría relación ni como cliente ni como proveedor con el resto del sistema. Si $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ fuera *la matriz de requerimientos* $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$ del sistema, el último caso estaría representado por esta matriz $\boldsymbol{A}$ con ceros en la última fila (excepto la columna $\boldsymbol{n}$-ésima

[29] Y no hay razón para no obtenerlo si la matriz de requerimientos $\mathbf{A}=\mathbf{XY}^{-1}$ de dimensión **n**x**n** es no negativa e irreducible, es decir, susceptible de aplicar Perron-Froebenius y obtener un conjunto de precios positivos. Si además **A** es productiva, tendremos una razón-patrón **R** menor que uno. Pero esto lo veremos más adelante.

donde ubicamos al bien oro) y con la columna ***n***-ésima también con ceros (excepto la fila ***n***-ésima, por el motivo anterior). Si sólo estamos en el caso de un bien *no básico*, es decir, que no vende a nadie, pero que compra a todos (o al menos a uno), matemáticamente la cosa se pone de manifiesto porque la fila ***n***-ésima (clientes) de la matriz ***A*** es también cero (menos la correspondiente a la columna ***n***-ésima correspondiente al bien en cuestión, al igual que antes), pero ahora al menos uno de sus elementos de su columna (proveedores) no es cero. Todo esto se verá más adelante en varios casos y capítulos.

Frente a Marx, que considera al numerario -con otro lenguaje, claro-, al bien oro, con la característica especial de que el sector de la producción de este bien ha de tener una composición orgánica de capital igual a la media de la composición orgánica del sistema[30], Sraffa se aparte de estas consideraciones y da una definición técnica exenta de consideraciones sociológicas, entre bienes que juegan un papel decisivo en la producción y los que no lo juegan. Señala como desventaja que, al sacar de los medios de producción a los salarios, relega a estos al papel de bienes no básicos, cuando, bajo un sentido económico, son tan necesarios[31]. Pero es un tributo inevitable si se quiere hacer explícita la distribución del excedente, es decir, los valores de ***r*** y ***w***. En capítulos posteriores (en la producción conjunta) se verá obligado a cambiar de criterio sobre la distinción entre bienes básicos y no básicos por motivos que veremos.

Salarios *post-factum*

Otro aspecto de este riquísimo capítulo es la consideración de renta *post-factum* de los salarios en (II.4). Oigamos a Sraffa como lo justifica: "*También supondremos en lo sucesivo que el salario se paga post-factum como una participación del producto anual, abandonándose así la idea de los economistas clásicos de una salario avanzado desde el capital. Retenemos, sin embargo, el supuesto de un ciclo anual de producción con un mercado anual*". Estas consideraciones que recoge Sraffa se vienen sosteniendo al menos desde Ricardo ("*de los economistas clásicos*"). Se trata de una hipótesis económica, pero el error es atribuir a la ecuación *esrafiana* (o la equivalente ricardiana) antes señalada esta consideración. Es falso.

[30] Marx tuvo sus razones para obrar así, pero este no es el lugar para discutirlo.
[31] "*La desventaja de proceder así consiste en que implica relegar los bienes necesarios de consumo al limbo de los productos no básicos*", pág. 26 de PMPM.

Lo único que nos dice la ecuación (II.4) es que para el cálculo de los ingresos ***PY***, el empresario no carga sobre los salarios su tasa de ganancia, pero para nada indica si se paga *post-factum* o *pre-factum* , es decir, *cuando* se paga. Es una forma de cálculo atemporal. Con (II.4) no sabemos *cuando* se pagan los salarios, sino por *cuánto* se pagan los salarios y *cómo* se calculan los precios. Veámoslo con ecuaciones. Si los salarios se pagan como en (II.4), los precios de producción ***P*** se calculan con (II.10):

(II.10) $$P = wL\left[Y - \left(1 + r\right)X\right]^{-1}$$

Si la ecuación de partida incluyera los salarios para calcular las ganancias y, por ende, los precios, la ecuación de partida sería:

(II.11) $$PY = \left(1 + r\right)\left[wL + PX\right]$$

Y si de esta ecuación se despejan los precios se obtendría:

(II.12) $$P = (1 + g)wL\left[Y - \left(1 + r\right)X\right]^{-1}$$

La diferencia entre (II.10) y (II.12) es que los precios en (II.12) van a ser más altos que en (II.10) porque están *pre-multiplicados* por (**1**+***r***) , pero nada dice de cuándo se pagan los salarios. En este caso las matemáticas no dan para tanto. Otra cosa es que le pusiéramos fechas a las variables. Es un error menor, pero lo interesante es la permanencia a lo largo de la historia del mismo. Ortega y Gasset diría que una idea se ha convertido en una creencia.

Generalización I

Ahora, con permiso del lector y con disculpas por entrometerme entre usted y el gran economista italiano, yo añadiría de mi cosecha lo siguiente. Sraffa, partiendo de un modelo muy abstracto de economía pura de equilibrio general con reemplazamiento pero sin excedente (capítulo I), ha llegado a uno también con reemplazamiento, pero con excedente repartido entre salarios y ganancias. Estos salarios y ganancias son únicos (tasas) para todos los sectores y mercancías del sistema. Esto aleja de tal manera de la realidad que podría poner en cuestión las conclusiones del modelo. Como veremos no es así porque el modelo puede generalizarse. Sea ***W*** ahora la matriz *diagonal* de todos los salarios ***n*** de cada sector (lo que supone de cada mercancía, porque estamos aún en un sistema de producción simple con igual número de mercancías y sectores); sea también ***G*** la matriz *diagonal* de las ***n*** tasas de ganancia de los ***n*** bienes y servicios (mercancías). También resulta alejado de la realidad el tema de la tasa de ganancia sin aplicar a los salarios que ya hemos discutido, porque las empresas o los empresarios consideran a los salarios como un coste más, sea cual sea el momento del pago. Por ello vamos a dar como ecuación de *definición del sistema económico* la siguiente:

(II.13)
$$PY = \left[LW + PX\right] \times \left(1 + G\right)$$

Esta ecuación, con ***n*** precios ***P***, ***n*** productos finales ***Y***, ***n*** inputs de trabajo ***L***, ***n*** tasas de salario ***W***, ***n***x***n*** medios de producción ***X*** y ***n*** tasas de ganancia ***G***, es casi ya contrastable con la realidad. Despejando los precios queda:

(II.14)
$$P = LW(1 + G)\left[Y - X(1 + G)\right]^{-1}$$

donde podemos decir que los precios son proporcionales a *las* salarios, pero no podemos decir lo mismo respecto a *las* tasas de ganancia, porque ***G*** aparece dos veces, y la segunda está restando dentro de una matriz sobre la que se calcula la inversa. Además, si sólo tuviéramos una tasa de ganancia se podría aplicar uno de los lemas del teorema Perron-Froebenius[32] y asegurar -en ese caso- que la expresión que aparece entre corchetes en (II.14) es creciente, pero aquí no es aplicable el teorema. En general, esta no linealidad del efecto de las ganancias sobre los precios se debe a que bajo el esquema *esrafiano* (o de Leontief), las ganancias no sólo entran en los precios de los proveedores de un producto final, sino que aquéllos (los proveedores) a su vez utilizan los productos finales de otros sectores para su producción, y estos sectores de segundo nivel temporal utilizan de otros, y así sucesivamente, por lo que un aumento de la tasa de ganancia en un sector no tiene los mismo efectos sobre los precios que ese mismo aumento sobre otro[33]. Depende, por ejemplo, de las

[32] Ver en "*Lezioni di teoria delle produzione*", Luigi Pasinetti, 1975 (*Lecciones de teoría de la producción*, apéndice matemático, 1983, FCE.

[33] Este efecto es la gran diferencia con la aplicación de la teoría del valor-trabajo. Con la contabilidad en términos valor-trabajo no hay ningún efecto indirecto porque los

proporciones de producto final sobre los medios de producción (los inversos de los coeficientes técnicos). En definitiva, esta es la última razón de porqué la teoría del capital neoclásica o marginalista es falsa, porque no se puede asegurar una relación monótona decreciente entre ganancias e intensidad del uso del capital (entendido como medios de producción). Por no hablar de los problemas insolubles de agregación que tiene este concepto en los esquemas neoclásicos y marginalistas. Puede comprobarse lo que da de sí una aparente inocente función definidora del sistema económico como (II.14). Otro plus indudable es lo cerquita que nos pone (II.14) de la realidad sin perder por explicativo. Casi sólo queda rellenar con datos sus variables.

En este epígrafe hemos recogido el capítulo II junto con el III, pero de este último aún no hemos dicho nada. Trata Sraffa en él del movimiento que se produce en los precios antes variaciones de la tasa de ganancia y la tasa de salarios. Ya hemos visto que para valorar eso no sólo hay que tener en cuenta los medios empleados en la producción de una mercancía por un sector determinado, sino también cómo se han producido los productos que han servido como medios al sector suministrador de medios producción a la industria considerada antes, y así en un proceso de retroceso en el tiempo que tiene un sólo un fin arbitrario porque, de lo contrario, deberíamos casi llegar al nacimiento del ser humano como transformador y creador de utensilios para el trabajo. Al final del capítulo III entra Sraffa en un nuevo concepto al hacer cero la tasa de salarios en la ecuación que define el sistema (II.4), la cual la traemos aquí a colación

(II.4) $$PY = (1+r) \times P\,X + wL$$

Si en (II.4) hacemos cero la tasa de salarios como quiere Sraffa, obtenemos la ecuación:

valores son independientes de las cantidades producidas: tan sólo lo son del tiempo de trabajo socialmente necesario. Ello conlleva que los precios se alejen de los valores porque los precios de equilibrio (los precios de Sraffa aunque el los llame de producción) sí tienen que tener en cuenta las cantidades producidas y empleadas en la producción para determinar su importe. Este hecho hace que Marx se aleje de la revolución que introduce Sraffa contra lo neoclásico y lo marginalista. En este sentido, y sólo desde el punto de vista de la historia del análisis económico, Sraffa es un revolucionario y Marx es un continuador de Ricardo. Marx es a Ricardo lo que la teoría de la relatividad es a Newton; en cambio, Sraffa es Marshall lo que la mecánica cuántica lo es a la Física clásica.

(II.15) $$PY = (1 + R) \times P\,X$$

donde la tasa de ganancia de la (II.4) ***r*** no puede ser la misma que en (II.15) si queremos que los ingresos ***PY*** de ambas ecuaciones sean los mismos. ***R***, en todo caso, *de momento*, es *sólo la tasa máxima de ganancia* cuando se hace cero la tasa de salarios en la ecuación que define el sistema (II.4). Si se resuelve el sistema de ecuaciones matriciales (II.4) y (II.15) y se despejan los precios se obtiene:

(II.16) $$P = \frac{w}{R - r} \times L\,X^{-1}$$

La (II.16) aún no aparece en Sraffa en estos capítulos, pero diremos algo al respecto. Traemos aquí la ecuación (II.10) de la producción simple *esrafiana* que ya hemos visto.

(II.10) $$P = wL\left[Y - (1 + r)X\right]^{-1}$$

Si comparamos (II.10) y (II.16), vemos dos importantes diferencias: 1) Los precios en (II.16) no dependen de los productos finales. Puede parecer entonces en (II.16) que los precios ***P*** son independientes de los productos finales ***Y***. Este es el gran peligro del uso inadecuado de las matemáticas o, al menos, de no saber interpretarlas. La respuesta es que los productos finales ***Y*** *sí* que afectan a los precios en (II.16), aunque no aparezcan explícitamente, porque lo hacen a través de ***R***, la tasa máxima de ganancia, que viene de (II.15), que *de momento*, precios y tasa máxima de ganancia dependen mutuamente entre sí; 2) más interesante es el denominador de (II.16), porque indica que si la tasa de ganancia ***r*** exigida por las empresas (o empresarios) se acercara a ***R***, los precios crecerían al infinito. Sraffa, en el *apéndice B* de su libro, da un ejemplo para un caso especial, pero este es un caso general.

(II.17) $$si \quad r \to R \quad en \quad P = \frac{w}{R - r} \times LX^{-1} \Rightarrow P \to \infty$$

Sraffa apenas da importancia a esto hecho y confía en que será la propia sociedad y las propias empresas compitiendo entre sí las que desecharán procesos que lleven para financiarse a tasas de ganancia cercanas a $\boldsymbol{R}$, la tasa máxima del sistema. En mi opinión hay aquí una de las semillas esrafianas que pueden fructificar para dos cosas: 1) una posible teoría sobre la inflación, que podríamos llamar con toda justeza *inflación no monetaria esrafiana*; 2) uno de los elementos que pueden posibilitar la construcción de un modelo de planificación distinto de los modelos teóricos basados en la función *paramétrica* de los precios[34]. En efecto, si en lugar de utilizar los precios como datos para que las empresas adapten su nivel de producción según sus costes marginales o la asignación de sus factores según su supuestas productividades marginales, se utiliza un modelo -mucho más complejo, claro está, que el que da (II.10)-, donde se utilicen las $\boldsymbol{n}$ tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_m$ (o $\boldsymbol{R}$), las $\boldsymbol{n}$ tasas de ganancia $\boldsymbol{G}$ reales de cada sector y las $\boldsymbol{n}$ tasas de salarios $\boldsymbol{W}$, y donde se puede acotar, estimular o frenar la producción de bienes y servicios según los intereses colectivos y no meramente individuales. Pero de esto ya hablaremos[35].

Generalización II

Al igual que hemos hecho antes, vamos a generalizar la escuálida ecuación (II.10) para acercarla a la realidad sin que pierda por ello poder explicativo. Traemos aquí la ecuación generalizada de la que ya hemos comentado sus características.

(II.13) $$PY = \left[LW + PX\right] \times \left(1 + G\right)$$

y, al igual que antes, hacemos cero las $\boldsymbol{n}$ tasas de salario $\boldsymbol{W}$, y con ello queda la ecuación:

(II.18) $$PY = PX \times \left(1 + G_M\right)$$

donde $\boldsymbol{G}_M$ es una matriz diagonal de $\boldsymbol{n}$ tasas de ganancia máximas. Resolvemos ahora las ecuaciones (II.13) y (II.18) y queda:

(II.19) $$P = LW(1 + G)(G_M - G)^{-1} X^{-1}$$

donde la (II.19) es la equivalente a la tímida (II.16) de Sraffa, pero aquí la hemos llenado de realismo. Aquí tenemos $\boldsymbol{n}$ precios $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{n}$ inputs de

[34] *On the economic theory of Socialism*, Lange y Taylor, 1938.
[35] Ver *Descifrando a Sraffa: la planificación a partir de Sraffa*, al final del libro.

trabajo $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{n}$ tasas de ganancia $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{n}$ tasas de ganancia máxima $\boldsymbol{G}_M$ y $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$ medios de producción $\boldsymbol{X}$. Al igual que antes, los productos finales $\boldsymbol{Y}$ están presentes indirectamente (implícitamente) a través de $\boldsymbol{G}_M$ por la ecuación (II.18). Aquí la posibilidad de la planificación la tocamos con los dedos, porque las variables de (II.19) pueden ser rellenadas con datos reales. En (II.19) comprobamos de nuevo que los precios son proporcionales a los salarios y crecientes con las $\boldsymbol{n}$ tasas de ganancia $\boldsymbol{G}$, pero sin que podamos decir nada más concreto merced a las dos matrices inversas del lado derecho de la ecuación; ni siquiera podemos asegurar que todos los precios vayan a ser positivos (ver el ejemplo en el anexo I a continuación).

Anexo 1a: Generalización

Producción con excedente

$$P=LW(1+G)(G_m-G)^{-1}X^{-1}$$

$$W=\begin{bmatrix}0{,}5 & & \\ & 0{,}7 & \\ & & 1\end{bmatrix} \qquad L=\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3\end{bmatrix}\quad \text{suma } 1$$

$$G=\begin{bmatrix}15{,}0\% & & \\ & 21{,}0\% & \\ & & 19{,}0\%\end{bmatrix} \qquad G_M=\begin{bmatrix}30{,}0\% & & \\ & 25{,}0\% & \\ & & 20{,}0\%\end{bmatrix} \quad \begin{array}{c}G_M-G\\ 15{,}0\%\\ 4{,}0\%\\ 1{,}0\%\end{array}$$

$$X=\begin{bmatrix}2 & 3 & 7\\ 4 & 9 & 4\\ 7 & 1 & 6\end{bmatrix} \qquad X^{-1}=\begin{bmatrix}-0{,}166 & 0{,}037 & 0{,}169\\ -0{,}013 & 0{,}123 & -0{,}066\\ 0{,}196 & -0{,}063 & -0{,}020\end{bmatrix}$$

$$G_M-G=\begin{bmatrix}15\% & 0\% & 0\%\\ 0\% & 4\% & 0\%\\ 0\% & 0\% & 1\%\end{bmatrix} \qquad (G_M-G)^{-1}=\begin{bmatrix}6{,}67 & 0 & 0\\ 0 & 25{,}00 & 0\\ 0 & 0 & 100{,}0\end{bmatrix}$$

$$1+G=\begin{bmatrix}115\% & 0 & 0\\ 0 & 121\% & 0\\ 0 & 0 & 119\%\end{bmatrix} \qquad LW=\begin{bmatrix}0{,}15 & 0{,}28 & 0{,}30\end{bmatrix}\quad \text{suma } 0{,}73$$

$$LW(1+G) = \begin{bmatrix}0{,}173 & 0{,}339 & 0{,}357\end{bmatrix} \qquad LW(1+G)(G_M-G)^{-1} = \begin{bmatrix}1{,}15 & 8{,}47 & 35{,}70\end{bmatrix}$$

$$P=LW(1+G)(G_M-G)^{-1}X^{-1}=\begin{bmatrix}6{,}694 & -1{,}170 & -1{,}080\end{bmatrix}$$

Se puede ver en este ejemplo de la ecuación (II.19) cómo el precio del primer producto es muy alto (comparado con la masa de salarios ***LW*=0.73**) como consecuencia de que el tercer producto, su tasa de ganancia (**19**%) está muy cerca de su tasa de ganancia máxima (**20**%). Es de notar cómo la pequeña diferencia entre una y otra del *tercer* producto afecta al crecimiento del precio del *primero*. También es de notar la existencia de precios negativos. Si el margen de ganancia entre ***G*** y ***G***$_M$ fuera más grande, los precios negativos desaparecerían, además de bajar estos.

Anexo 1b: Generalización

Producción con excedente

$$P=LW(1+G)(G_m-G)^{-1}X^{-1}$$

$$W=\begin{bmatrix} 0{,}5 & & \\ & 0{,}7 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad L=\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix} \quad \text{suma } 1$$

$$G=\begin{bmatrix} 20{,}0\% & & \\ & 16{,}0\% & \\ & & 9{,}0\% \end{bmatrix} \qquad G_M=\begin{bmatrix} 30{,}0\% & & \\ & 25{,}0\% & \\ & & 20{,}0\% \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} G_m-G \\ 10{,}0\% \\ 9{,}0\% \\ 11{,}0\% \end{array}$$

$$X=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 4 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad X^{-1}=\begin{bmatrix} -0{,}166 & 0{,}037 & 0{,}169 \\ -0{,}013 & 0{,}123 & -0{,}066 \\ 0{,}196 & -0{,}063 & -0{,}020 \end{bmatrix}$$

$$G_M-G=\begin{bmatrix} 10\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 9\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 11\% \end{bmatrix} \qquad (G_M-G)^{-1}=\begin{bmatrix} 10{,}00 & 0 & 0 \\ 0 & 11{,}11 & 0 \\ 0 & 0 & 9{,}1 \end{bmatrix}$$

$$1+G=\begin{bmatrix} 120\% & 0 & 0 \\ 0 & 116\% & 0 \\ 0 & 0 & 109\% \end{bmatrix} \qquad LW=\begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}28 & 0{,}30 \end{bmatrix} \quad \text{suma } 0{,}73$$

$$LW(1+G) = \begin{bmatrix} 0{,}180 & 0{,}325 & 0{,}327 \end{bmatrix} \qquad LW(1+G)(G_m-G)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}80 & 3{,}61 & 2{,}97 \end{bmatrix}$$

$$P=LW(1+G)(G_M-G)^{-1}X^{-1}= \begin{bmatrix} \mathbf{0{,}236} & \mathbf{0{,}322} & \mathbf{0{,}006} \end{bmatrix}$$

En este cuadro, con respecto al anexo I, han cambiado las tasas de ganancia de cada mercancía (o sector), disminuyendo la primera (de **15**% al **10**%), aumentando la segunda (del **4**% al **9**%) y aumentando también la tercera (del **1**% al **11**%). Con ello, el precio de la primera mercancía ha caído notablemente (del **6,69** al **0,236**) y volviendo positivos los precios de las mercancías segunda y tercera). No obstante, como se puede comprobar, no guarda relación los aumentos o caídas porcentuales de las tasa de ganancia con las variaciones en los precios. Las razones ya la hemos explicado en el cuerpo principal del texto.

Capítulos IV y V: La mercancía patrón y la razón-patrón

Nada mejor para abordar este tema que empezar con las palabras de Sraffa: "*La necesidad de tener que expresar el precio de una mercancía en términos de otra que es elegida arbitrariamente como patrón complica el movimiento el estudio de precios que acompañan a una variación de la distribución. Resulta imposible decir, ante cualquier variación particular de precios, si surge como consecuencia de las peculiaridades de la mercancía que está siendo medida, o si surge de las peculiaridades de la mercancía adaptada como patrón de medida*"[36]. Es de esta manera como expone Sraffa el problema ricardiano de *una medida invariable del valor*. Merece la pena ver cómo se expresaba en 1817 David Ricardo al respecto: "*Cuando los bienes variasen en su valor relativo, sería deseable averiguar con certeza cuáles de ellos bajaron y cuáles aumentaron en su valor real, y ello sólo podría lograrse comparándolos sucesivamente con una medida estándar del valor, que no debe estar sujeta a ninguna de las fluctuaciones a las cuales están expuestas los demás bienes*"[37]. La idea es la misma, aunque es mucho más precisa la de Sraffa. También es verdad que han trascurrido siglo y medio entre la una y la otra. El problema que aborda pues en este epígrafe Sraffa no admite mucho más comentario. Marx lo intentó con su teoría del valor-trabajo, pero no lo consiguió, o lo que consiguió, tal como queda en El Capital, no es aceptable. ¿Cómo lo soluciona Sraffa, es decir, como encuentra una mercancía que permita medir las variaciones de los precios del resto de las mercancías con la seguridad de que esos movimientos se deben a aquellos y no a la posible variación de la mercancía que está sirviendo de vara de medir? Oigamos de nuevo a Sraffa: "*Supongamos que segregamos del sistema económico existente aquellas fracciones de las industrias básicas individuales que, conjuntamente, forman parte de un sistema completo en miniatura dotado de la propiedad de que las diferentes mercancías están representadas entre sus medios de producción totales en las mismas proporciones en que lo están entre sus productos*"[38]. Un sistema así, viene a decir Sraffa traducido a lenguaje moderno, el producto neto o excedente neto en términos relativos (en términos de los propios medios de producción) sería igual para todos las mercancías. Además, y esto lo explica Sraffa con

[36] Pág. 37 de *PMPM.*
[37] *Principios de Economía Política y Tributación*, D. Ricardo, pág. 33, edit. FCE, 1973.
[38] Pág. 38 de *PMPM.*

detenimiento, no sólo *los productos netos relativos* -vamos a llamar así a lo anterior- de cada mercancía serán iguales, sino que los medios de producción que entran en cada uno de los productos son a su vez productos finales que guardan con sus medios de producción la misma proporción que estamos considerando. Este es el nudo gordiano de la creación de *la mercancía-patrón* por parte de Sraffa, porque cuando multipliquemos los precios por las ecuaciones que define *el producto neto relativo* en términos físicos, el resultado es que se conservarán las mismas proporciones antes mencionadas, a pesar de que ahora tengamos *valores monetarios* y no sólo valores físicos. Los precios *no* harán variar las proporciones, por lo que tendremos una vara de medir inmune a los precios y Ricardo, el inglés, si lo contemplara, daría un abrazo inmenso a su gran discípulo intelectual Piero Sraffa, el italiano de Turín. Ya, sin más dilación, traemos las ecuaciones equivalentes a las *esrafinas* que expone el economista italiano en su libro porque este trabajo no pretender sustituir la lectura de Sraffa, sino ayudar a su lectura y, en algunas ocasiones, cómo poder hacer fructificar su semilla más de lo que ya se ha hecho (que no comentamos). Sea el sistema de ecuaciones siguiente:

(IV.1) $$u\,y_1 q_1 = x_{11} q_1 + x_{12} q_2 + \cdots + x_{1n} q_n$$

(…) ....

(…) $$u\,y_n q_n = x_{n1} q_1 + x_{n2} q_2 + \cdots + x_{nn} q_n$$

donde $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, ... , $\boldsymbol{q}_n$, son *multiplicadores* que van a convertir los valores reales $\boldsymbol{x}_{ij}$ de medios de producción y los valores de los productos finales $\boldsymbol{y}_i$ en las proporciones que Sraffa buscaba y que Ricardo deseaba; $\boldsymbol{u}$ sería la proporción comentada entre productos finales y medios de producción, igual para todos los sectores. Y (IV.1) es la anhelada *mercancía-patrón*. Veremos ahora su funcionalidad y sus características. Para empezar en (IV.1) tenemos un pequeño problema para hallar los $\boldsymbol{n}$ multiplicadores, porque es un sistema de $\boldsymbol{n}$ ecuaciones y $\boldsymbol{n+1}$ incógnitas: los $\boldsymbol{n}$ multiplicadores $\boldsymbol{q}_i$ mencionados y el coeficiente $\boldsymbol{u}$. La solución viene con la ecuación *esrafiana*:

(IV.2) $$\sum_{1}^{n} l_j q_j = 1$$

Es decir, tomando como numerario (veremos que no el único) los valores trabajo multiplicados por los -valga la redundancia- multiplicadores. En efecto, con (IV.2) añadimos una ecuación más que nos faltaba, pero *sin añadir* ningún otra variable, con lo que el sistema es soluble, aunque de momento no sabemos cómo. Ahora viene un paso decisivo, porque vamos a encontrar en el misterioso coeficiente ***u*** una propiedad muy conveniente. De momento esta variable es sólo un coeficiente que expresa la proporción entre productos finales y medios en términos físicos de la *mercancía-patrón,* dado que en (IV.1) no aparecen los precios.

Cambiamos de escenario y nos vamos a la ecuación ya conocida que define el sistema económico *esrafiano*:

(IV.3) $$PY = (1 + r) \times PX + wL$$

Si hacemos aquí cero la tasa de salarios ***w*** sale:

(IV.4) $$PY = (1 + R) \times PX$$

donde ***R*** es, de momento, *sólo* la tasa de *ganancia máxima* que resulta de hacer cero los salarios en la ecuación (IV.3) que define el sistema. Volvemos a *la mercancía-patrón* (IV.1) y la expresamos en forma matricial como sigue:

(IV.5) $$uYQ = XQ$$

(IV.5 bis) $$u \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

En (IV.5) no hemos añadido nada que no estuviera en (IV.1). Ahora vamos a pre-multiplicar la ecuación matricial (IV.5) por los precios y queda:

(IV.6) $$uPYQ = PXQ$$

Si ahora post-multiplicamos la ecuación (IV.4) por el vector $\boldsymbol{Q}$ de multiplicadores y comparamos el resultado con (IV.6) vemos que ambas ecuaciones, que ¡proceden de hipótesis y problemas diferentes!, son iguales si hacemos:

(IV.7) $$u = \frac{1}{1+R}$$

las dos ecuaciones son ¡la misma ecuación! Es decir, (IV.7) une dos cosas que aparentemente no tienen nada que ver. Resumiendo, $\boldsymbol{R}$ es *la tasa máxima de ganancia* que resulta de hacer cero la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$ en la ecuación que define el sistema, y $\boldsymbol{u}$ es *el coeficiente de proporcionalidad* entre productos finales y medios de producción que sirve para crear una economía en miniatura -llamada *mercancía-patrón*- que tiene la virtud de conservar la propiedad de mantener invariable la relación entre productos y medios para todas las mercancías.

Sraffa, que miraba en lontananza, no se paró en lo anterior, sino que buscando esa vara de medir inmune a los precios que es la mercancía-patrón, y encontrará una de las relaciones (en forma de ecuación) más importes de la economía. Veamos como. Vamos ahora a reunir, como si fueran las piezas de un puzzle, 4 ecuaciones que ya las hemos usado en diferentes sitios:

(IV.8) $$PY = (1+r) \times PX + wL$$

(IV.9) $$PY = (1+R) \times PX$$

(IV.10) $$LI = 1$$

(IV.11) $$PYI - PXI = 1$$

La (IV.8) es la ecuación *esrafiana* que define el sistema; la (IV.9) surge de hacer cero los salarios $\boldsymbol{w}$ en la anterior, por lo que es *linealmente dependiente* de la (IV.8), la (IV.10) es un numerario, y la (IV.11) otro numerario compatible con el anterior puesto que no comparten variables. En este sistema tenemos $\boldsymbol{n}+\mathbf{2}$ ecuaciones *linealmente independientes* **(**que son $\boldsymbol{n}$ de (IV.8), la (IV.10) y la (IV.11)**)**; y $\boldsymbol{n}+\mathbf{3}$ incógnitas **(**$\boldsymbol{n}$ precios $\boldsymbol{p}_i$, la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$**,** la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{R}$**)**.

Hay por lo tanto un grado de libertad. Los inputs de trabajo $\boldsymbol{l}_i$, los medios de producción $\boldsymbol{x}_{ij}$ y los productos finales $\boldsymbol{y}_{ij}$ son datos, por lo que no entran en el recuento de variables. De la resolución del sistema de $\boldsymbol{n}+\mathbf{2}$ ecuaciones sale la ecuación:

(IV.12) $$r = (1 - w)R \qquad\qquad w = \frac{R - r}{R}$$

que relaciona la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}$ con la de salarios $\boldsymbol{w}$ y la razón-patrón $\boldsymbol{R}$, ¡sin mediar para nada los precios! Esta ecuación mide el excedente -la tercera cosa que representa $\boldsymbol{R}$- entre la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}$ y la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$, independientemente de los precios. Por supuesto que a este sistema hemos llegado con un sencillo esquema que representa a la economía en su conjunto, pero que, no obstante, puede ser generalizado. El aspecto formal que toma la ecuación de distribución (IV.12) depende tanto de las hipótesis económicas como de los numerarios elegidos. Si en lugar de la ecuación (IV.22) que toma como numerario la renta neta, hubiera elegido Sraffa el valor total de los medios de producción, es decir, si hubiera tomado como numerario $\boldsymbol{PX}$, la (IV.22) se sustituiría por $\boldsymbol{PX}\mathbf{I}=\mathbf{1}$, y esta ecuación, junto con las otras tres, hubiera dado como relación entre salarios, ganancias y razón-patrón la que sigue:

(IV.13) $$R = \hat{r} + \hat{w}$$

y se hubiera visto explícitamente que la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ es el excedente en términos físicos a repartir entre ganancias y salarios. Sraffa no lo hizo así, pero no por ello hay que lamentarse, porque la elección del numerario no puede cambiar las conclusiones de las hipótesis y, menos aún, su interpretación económica. Hemos puesto un gorrito en (IV.13) a las dos tasas para que se vea que, en este caso, el valor *cuantitativo* de ambas tasas son diferentes, pero la filosofía de hipótesis y resultados es la misma; la razón-patrón $\boldsymbol{R}$, en cambio, será *cuantitativamente* la misma porque depende las variables no monetarias ($\boldsymbol{Y}$,$\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{L}$) del sistema. Visto ahora todo es tan sencillo que puede preguntarse uno cómo es que no se descubrió antes: quizás es que hacer lo complejo sencillo es lo más complejo; quizás era demasiado revolucionario para la época. Incluso en la actual, Sraffa no forma parte del canon de conocimientos de una licenciado.

Merece la pena reflexionar sobre este extraordinario logro de Piero Sraffa, porque la *razón-patrón* y *la mercancía-patrón* no tienen una existencia real y, sin embargo, juegan -como veremos- un papel *real* en los modelos *esrafianos* que se derivan del esquema del italiano. ¿Cómo es esto posible? Quizá esta contradicción es lo que privó a autores anteriores -especialmente a Ricardo- de desarrollar un esquema parecido. En cambio -y como veremos más adelante- Marx lo descubrió desdoblado entre la composición orgánica del capital y la tasa de plusvalía, pero no se dio cuenta de ello porque utilizaba valores-trabajo para las mercancías en lugar de los precios de intercambio[39] -meros instrumento de trueque- que utiliza en la práctica Sraffa, aunque el italiano no lo presente así. Yendo al grano, el instrumento de la mercancía-patrón en realidad es *el teorema del punto fijo* al servicio de un sistema de ecuaciones lineales en lugar de un sistema definido mediante funciones continuas. Visto desde este lado, *la mercancía-patrón* es el resultado de una aplicación del conjunto de precios de una economía modelizada por la ecuación (IV.8) -o similar- en el mismo conjunto. El *teorema Perron-Froebenius* -que luego veremos- nos asegura que existe ese conjunto de precios que *no se mueve* -por eso es del punto fijo- que permite la aplicación del conjunto $\boldsymbol{PX}$ en el conjunto $\boldsymbol{uPY}$, -o más exactamente dicho, de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{A}$-, siendo $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$, $\boldsymbol{u}=\mathbf{1}/(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})$ y $\boldsymbol{P}$ cualquier vector de precios. En realidad, el teorema mencionado es *isomorfo* con los *teoremas de Brower y Kakutani* que permiten demostrar la existencia de un equilibrio competitivo en condiciones ideales en la economía marginalista. Todos estos teoremas son posteriores desde luego a Ricardo y también a Marx, aunque fue el alemán el que estuvo más cerca de encontrar una solución al abordar el problema de la transformación de valores a precios[40]. La diferencia entre los modelos de equilibrio general y el de Sraffa es que los primeros parecen partir de la realidad, pero

[39] Sraffa los llama *precios de producción* y así han sido aceptados por la literatura económica. Se trata -en mi opinión- de un error, quizá el mayor error conceptual cometido por el economista italiano, porque es contradictorio con su esquema, y lo que resulta extraño es que nadie se haya dado cuenta hasta ahora. En realidad, Sraffa no tiene una teoría de los costes, y no puede tenerla porque ello supondría inevitablemente añadir una ecuación más y cerrar con ello su sistema. Si hubiera obrado así Sraffa hubiera perdido el grado de libertad que le permite hablar de la distribución independientemente de las variaciones de los precios. Entonces hubiera tenido un sistema de equilibrio general como el de los marginalistas, pero para funciones de producción lineales y con rendimientos constantes. Hubiera sido un esquema más sin pena ni gloria. El genio del italiano evitó todo esto.

[40] Se considera la solución de Marx como la primera solución del problema de la transformación utilizando las cadenas de Markov.

sometiéndola a condiciones para poder aplicar el teorema; el modelo de Sraffa parte directamente de un modelo que tiene como punto de conexión con la realidad los precios ***P***, los medios de producción ***X***, los productos finales ***Y*** y los inputs de trabajo ***L***. Mayor realismo para unas hipótesis es imposible.

Generalización

Sería la siguiente como sigue. Traemos primero la ecuación (II.13) que sustituye a la ecuación *esrafiana* de definición del sistema (II.4), y que trabaja con ***n*** tasas de salarios $\boldsymbol{w}_{ij}$, ***n*** tasas de ganancia $\boldsymbol{g}_{ij}$ y ***n*** tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{g}_{Mij}$.

(IV.14) $$P = LW(1+G)(G_M - G)^{-1}X^{-1}$$

Si ahora pos-multiplicamos por ***X*** y tomamos como numerario ***PX*I**=**1** queda:

(IV.15) $$1 = LW(1+G)(G_M - G)^{-1}I$$

Y si ahora tomamos a su vez como *tasa de salarios media* $\boldsymbol{w}_M$ tal que cumpla que:

(IV.16) $$LW(1+G)(G_M - G)^{-1}I = w_M L(1+G)(G_M - G)^{-1}I = 1$$

con ello obtenemos la tasa de salarios media $\boldsymbol{w}_M$:

(IV.16b) $$\boxed{w_m = \frac{1}{L(1+G)(G_M - G)^{-1}I} = \frac{LW(1+G)(G_M - G)^{-1}I}{L(1+G)(G_M - G)^{-1}I}}$$

cuya primera igualdad es la ecuación equivalente a la de la razón-patrón de Sraffa (IV.12) para el caso de ***n*** tasas de salarios, ***n*** tasas de ganancia y ***n*** tasas de ganancia máximas. En (IV.15) vemos que si las tasas de ganancia ***G*** aumentan, disminuyen los salarios (disminuye $\boldsymbol{w}_M$ como su representante); también que si al aumentar las tasas de ganancia $\boldsymbol{g}_{ij}$ se acercan, además, *significativamente* a las tasas de salario máximas $\boldsymbol{g}_{Mij}$, entonces los salarios se hacen cero, es decir, se quedan con todo el excedente.

(IV.17) $$si\ \ G \to G_M \Rightarrow w_M = \frac{1}{L(1+G)(G_M - G)^{-1} I} \to cero$$

Y tal como queda (IV.15) casi podemos tomar ya los datos de la realidad. En este caso, las tasas máximas de $\boldsymbol{g}_{Mij}$ juega el mismo papel que la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ de la producción simple, pero sólo como expresión de las ganancias, no como medida invariante del valor, puesto que $\boldsymbol{R}$ la obtuvimos por separado en (IV.5) mediante Perron-Froebenius. Dicho en términos económicos, mientras que $\boldsymbol{R}$ es, al igual que Jano el dios de las dos caras, a la vez razón-patrón (vara de medir) y la tasa máxima de ganancia, las $\boldsymbol{g}_{Mij}$ son *sólo* tasas máximas.

Sobre el capítulo V

Apenas merece mención porque nada nuevo añade, ni conceptualmente, ni como nuevas hipótesis o conclusiones. Sraffa se enfanga en demostrar con argumentos económicos que *la mercancía-patrón* y *la razón-patrón* son únicas, con un sólo valor para lo $\boldsymbol{n}$ multiplicadores $\boldsymbol{q}_j$ y una sola $\boldsymbol{R}$. Pero ambas cosas ya lo hemos demostrado implícitamente, porque es tan sólo un problema matemático, una vez asentadas las hipótesis económicas y de relación lógica. Los $\boldsymbol{n}$ multiplicadores $\boldsymbol{q}_j$ son únicos porque surgen de solucionar un sistema de $\boldsymbol{n}+\mathbf{1}$ ecuaciones con $\boldsymbol{n}+\mathbf{1}$ incógnitas que están en (IV.1) y (IV.2); la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ también es solución simultánea de este sistema de ecuaciones porque de él surge el coeficiente $\boldsymbol{u}$, que luego hemos visto, por otro lado, que mantiene una relación con la razón-patrón tal como $\boldsymbol{u}=\mathbf{1}/(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})$, del que si despejamos $\boldsymbol{R}$ queda, $\boldsymbol{R}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{u})/\boldsymbol{u}$. El sistema de ecuaciones (IV.1) y (IV.2) muestran las condiciones de existencia de la solución y Perron-Froebenius (de lo que aún no hemos hablado) nos dice cómo solucionarlo. Es precisamente este teorema el que nos asegura un autovalor de $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$) que es positivo, real, simple y que es el mayor de todos los autovalores; y que a consecuencia de ello también nos asegurara un vector de precios positivos $\boldsymbol{P}$ si $\boldsymbol{A}$ es irreductible, o de precios no negativos si $\boldsymbol{A}$ es reducible. Por supuesto que $\boldsymbol{A}$ ha de ser cuadrada, no negativa, además de los anterior. No obstante, seguir los razonamientos de Sraffa es siempre muy pedagógico.

El teorema de Perron-Froebenius

Resulta curioso que algo tan imprescindible para entender la producción simple de Sraffa, la mercancía-patrón y la razón-patrón, el autor no lo mencione nunca. Ya hemos dicho el deseo -u obsesión, según se mire- de Sraffa en poner contenido económico casi en exclusiva a su obra. Como economista le honra y si hubiera obrado de otra forma sólo tendríamos un modelo *sólo* matemático más a la manera de el de *Von Neumann* y no una teoría del comportamiento económico; sólo tendríamos (y no es poco) una de estas dos cosas: o un instrumento de medición de la realidad y toma de datos (¿análisis? input-output) o un instrumento formal de política económica. Sin negar la utilidad de ambas, Sraffa quería algo más y, en mi opinión, lo consiguió, aunque no de forma acabada ni mucho menos. Yendo ahora al teorema, dice este en su versión fuerte lo siguiente[41]:

Si ***A*** es una matriz cuadrada, no negativa e irreducible, entonces se obtienen las siguientes conclusiones:

a) ***A*** nos proporciona un autovalor ***t*** positivo, simple y real que es el mayor de los ***n*** autovalores en valor absoluto posibles de ***A***.

b) Este autovalor ***t*** es el único que garantiza un vector (tanto por la derecha como por la izquierda) asociado a ***A*** cuyos elementos son todos positivos[42].

c) El autovalor ***t*** es una función continua creciente de ***A***.

d) El autovalor ***t*** es una raíz simple del determinante de ***t-A***.

e) El valor de ***t*** está comprendido entre el valor menor de las sumas de las filas (columnas) de ***A*** y el valor mayor. Es decir:

$$menor \quad de \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} < t < mayor \quad de \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij}$$

Ya fuera del teorema, si ***A*** es productiva, es decir, si para todas las mercancías se cumple que la suma (por filas) de todas las mercancías utilizadas en los diferentes sectores ***X*** es menor que el producto final de esa mercancía ***Y***, entonces el autovalor ***t*** es menor que uno, lo que garantiza que la razón-patrón ***R*** sea mayor que cero, dado que

[41] Véase el apéndice matemático de Pasinetti en *Lecciones de la teoría de la producción.*

[42] Lo que garantiza el teorema es que cualquier otro autovalor que *no* sea ***t***, es decir, el máximo, tiene al menos un elemento negativo del autovector asociado.

autovalor y razón-patrón guardan la relación $\boldsymbol{R}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{t})/\boldsymbol{t}$. Expresado lo anterior de forma resumida sería que:

$$si \quad \sum_{i=1}^{i=n} x_{ij} < y_i \Rightarrow t < 1 \Rightarrow R > 0$$

La inecuación anterior tiene como conclusión que $\sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} < 1$, dado que los elementos $\boldsymbol{a}_{ij}$ de $\boldsymbol{A}$ provienen de hacer $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$. Esta última relación ya ha aparecido anteriormente en la construcción de la mercancía-patrón y en la definición de razón-patrón. Se puede observar que $\boldsymbol{u}$ es a la vez el coeficiente de multiplicación de los productos finales de la mercancía-patrón y el autovalor máximo de $\boldsymbol{A}$. Esto no es casualidad. La mercancía-patrón se construyó con unos multiplicadores $\boldsymbol{q}_j$ y un coeficiente de multiplicación $\boldsymbol{u}$ tales que cumplían la ecuación:

(IV.18) $$uYQ = XQ$$

Si ahora hacemos $\boldsymbol{Az}=\boldsymbol{XQ}$ y $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{YQ}$ se cumple las condiciones del teorema de Perron-Froebenius en $\boldsymbol{A}$, entonces el coeficiente de multiplicación $\boldsymbol{u}$ de (IV.17) es el autovalor $\boldsymbol{t}$ definido en el teorema anteriormente; es decir, que $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{t}$. Además, los elementos de $\boldsymbol{Q}$, es decir, todos los $\boldsymbol{q}_j$, son mayores que cero.

Esta es la versión fuerte del teorema. La débil es aquella en la que no se exige que la matriz $\boldsymbol{A}$ sea irreducible, sino tan sólo reducible. Eso dará un autovector asociado en el que todos sus elementos serán *no negativos*. Es decir, la diferencia con la versión fuerte es que la débil puede tener algunos de los elementos del autovector iguales a cero. Eso significa para el caso de la mercancía-patrón, que si tomamos el autovector por la derecha en (IV.17) de $\boldsymbol{A}$, algún multiplicador $\boldsymbol{q}_j$ podría ser cero; y si calculamos el autovector por la izquierda en (IV.6), algunos de los precios $\boldsymbol{p}_i$ podrían también pueden ser cero. Hay algunas otras conclusiones, tanto en la versión fuerte como débil, pero estas son las importantes para el caso.

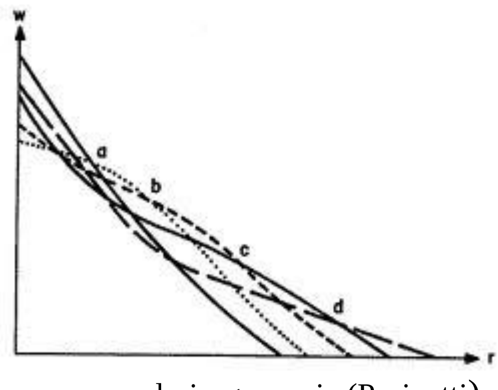
Que la matriz cuadrada $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{A}$ sea irreducible significa en pocas palabras que el rango de la matriz es $\boldsymbol{n}$. Es decir, que ninguna de las ecuaciones (filas o columnas) de $\boldsymbol{A}$ es una combinación lineal del resto; o también que no se puede rebajar el rango de la matriz mediante cambios en filas y columnas. No significa eso que todos los elementos de ***A*** tengan que ser positivos, aunque en el caso nuestro lo que no puede ocurrir en la producción simple es que sean negativos. La razón es que ***Y***, en la producción simple[43]**,** es una matriz diagonal con ceros en el resto de sus elementos, por lo que la inversa de ***Y*** está formada por los inversos de sus elementos -elementos que son todos positivos- y que se colocan sólo en la diagonal principal. Como además todos los elementos de la matriz de medios de producción ***X*** o son positivos o ceros, ***A***, que es el productos matricial de ***X*** por la inversa de ***Y***, no puede tener ningún elemento negativo. Cosa distinta ocurrirá cuando se aborde la producción conjunta, porque allí ya no tenemos una matriz ***Y*** de productos finales cuyos elementos estén sólo en la diagonal principal, sino una matriz con todos sus elementos con valores positivos (o en algún caso cero). Entonces, en la matriz ***A*** que surge de $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$ no se garantiza que todos los elementos $\boldsymbol{a}_{ij}$ de ***A*** sean positivos, porque nada garantiza a su vez que la matriz inversa de ***Y***, es decir, la $\boldsymbol{Y}^{-1}$ de $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$ tenga todos sus elementos positivos. Resumiendo ahora que tenemos el teorema de *Perron-Froebenius*: mientras que en la producción simple podemos aplicar este teorema porque la matriz de productos finales ***Y*** es diagonal y su inversa tiene todos sus elementos positivos, nada de ello se garantiza en la producción conjunta, por lo que en esta modalidad de producción no podemos aplicar el teorema. La consecuencia más importante de ello es que, en este caso de producción conjunta, la ***R*** es *sólo* la *tasa máxima de ganancia*[44], pero no la razón-patrón, o al menos el teorema no lo garantiza porque no es aplicable (si es que la podemos hallar de otra manera y si es que podemos garantizar que sea única[45]). El dios *Jano* de ***R*** pierde una de las dos caras. Estaría tentado de decir que en la producción conjunta no existe razón-patrón, pero Sraffa nos dice lo contrario. En efecto, el italiano busca otra forma de intentar calcular lo que seguimos llamando razón-patrón: con la reproducción simple la obteníamos aplicando Perron-Froebenius a la matriz ***A*** de requerimientos; en la producción conjunta lo intenta ordenando de mayor a menor todos *los productos netos relativos*[46] o *excedentes relativos* de cada mercancía y tomando la menor de todas ellos. ¿Qué es lo que hemos perdido con ello?: que

---

[43] Recordar que la producción simple es aquella en la que cada empresa (o mejor, en cada sector) sólo produce un productos final.
[44] Que la razón-patrón es la tasa máxima de ganancia se demostrará en otro capítulo. Que yo sepa, es la primera vez que se demuestra este hecho.
[45] Yendo más lejos aún, que exista.
[46] Lo que hemos llamado $(y_i - \sum x_{ij}) / \sum x_{ij}$ (con el sumatorio desde ***j*=1** a ***n*** y para todos las mercancías ***i***).

no podemos garantizar que todos los precios sean positivos; tampoco que los multiplicadores que construyen la mercancía-patrón lo sean también. Lo que sí garantiza este método *manual* de obtención de la supuesta razón-patrón es que todas las mercancías podrán soportar la tasa de ganancia (única) del sistema, porque su *producto neto relativo* es mayor (a lo sumo igual) que dicha tasa. Veremos más adelante, sin embargo, que así no se llega a la razón-patrón y que sí hay otra forma.

En cuanto a la posibilidad de precios negativos en la producción conjunta, Sraffa, como intelectual de máximo nivel, no se quedó a buscar algunas condiciones que arreglaran el tema y que llevarían con toda seguridad a desvirtuar su modelo y lo que intentaba explicar con él[47]. Oigamos como lo arregla: "*Sin embargo -y esta es la única restricción económica- mientras las ecuaciones puedan ser satisfechas por soluciones negativas para las incógnitas, sólo son practicables aquellos métodos de producción que, en las condiciones efectivamente dominantes -es decir, al salario dado o al tipo de beneficio dado- sólo implican precios positivos*"[48]. Esta consideración aparece en varios momentos de su libro. Para un economista ortodoxo que trabajara en economía pura esto sería un pecado; en el caso de Sraffa demuestra el grado de libertad que tiene su modelo y la posibilidad de acercamiento empírico a la realidad de que está dotado. Pero la producción conjunta es otro capítulo.



curvas salario-ganancia (Pasinetti)

[47] Que era, básicamente, dos cosas distintas, aunque relacionadas: las variaciones de la distribución independientemente de lo que pasara con los precios y un ataque a la teoría del capital neoclásico mediante la reducción del mismo a trabajo fechado. En ambas tuvo éxito como se ha visto y se verá.
[48] Pág. 68 de *PMPM.* También en pág. 87 (epígrafe 70).

Capítulo VI: la reducción a cantidades de trabajo fechado

A la fecha de hoy quizá este capítulo de la obra de Sraffa no tenga mucho misterio, aunque sí mucho interés, pero en los momentos que desarrollaba -más que cuando se publicó definitivamente el libro en 1960- su obra, Sraffa se estaba enfrentando a las concepciones neoclásicas del capital[49], como las de Bohm-Bawerq, Walras, Wicksell, Knight, etc. Por sintetizar, la teoría del capital presentaba entonces dos problemas distintos: cómo medirlo y si era defendible e indudable una relación inversa (y monótona) entre el tipo de interés del capital y su uso intensivo[50]. Aquí Sraffa puso la semilla de una teoría del capital como suma de trabajos que se han realizado en el pasado para fabricar los medios de producción que es *el capital*. Es desde luego un ataque en toda regla a la teoría del capital como justificadora de una renta propia, pero también se aparta de Marx, porque no entra en consideraciones sobre si el valor creado depende o no del trabajo directo y si el trabajo transfiere valor o no al producto. De hecho, Sraffa no tiene una teoría del valor basado en el trabajo como la tienen Ricardo o Marx, aunque sean distintas[51]. En el libro Sraffa obvia toda posible discusión y entra en el tema diciendo que: "*Denominaremos reducción a cantidades de trabajo fechadas (o para abreviar "Reducción") a una operación mediante la cual, en la ecuación de una mercancía, los diferentes medios de producción utilizados son reemplazados por una serie de cantidades de trabajo, cada una de las cuales lleva su fecha adecuada*"[52]. El mecanismo formal -matemático- de calcular el valor final consiste en ir sustituyendo en la ecuación que define el sistema *esrafiano*:

(VI.1) $$PY = \left(1 + r\right) \times PX + wL$$

cada precio del lado derecho de la ecuación por el valor del precio dado del lado izquierdo. Para ello hay que suponer tres cosas: 1) que los medios de producción están rezagados en una unidad temporal (un año o cualquier medida) en relación a los productos finales; que los precios

---

[49] Hace Sraffa una mención a Wicksell pero sin nombrarlo diciendo que: "*La reducción a términos de trabajo fechados tiene algún alcance en relación con los intentos que se han hecho en encontrar "en el período de producción" una medida independiente de la cantidad de capital...*", pág. 62 de *PMPM*. Y ya no hay más.
[50] Ver *El capital en la teoría de la distribucción*, Garegnani, 1982, edit. Oikos-Tau.
[51] En Ricardo trabajo empleado, en Marx, trabajo socialmente necesario.
[52] Pág. 57 de *PMPM.*

también lo están; que ahora no queda más remedio que dar la razón a Keynes y admitir -aunque no le gustara a Sraffa- que estamos en presencia de rendimientos constantes, porque, de lo contrario, ni los inputs de trabajo se mantendrían, ni los coeficientes $\boldsymbol{a}_{ij}$ de la matriz $\boldsymbol{A}$ de requerimientos serían constantes de un año a otro. Si obramos así -como hace Sraffa- obtenemos una ecuación de reducción a trabajo fechado como (VI.2):

$$P_t = w\left[1+(1+r)+\ldots+(1+r)^{t-i-1}\right]LY^{-1}+(1+r)^i P_{t-i}A^i \qquad \text{(VI.2)}$$

No es esta exactamente la ecuación que pone el italiano en el libro, pero es que la suya no es correcta de acuerdo con sus propias palabras, porque el habla, además de la suma que hay entre corchetes en el lado derecho de (VI.2), de "*un residuo de mercancías compuesta de fracciones pequeñas de cada productos básico*"[53]. Lo cual es inevitable, porque en una teoría realista del capital como reducción al trabajo del pasado en los medios de producción, no puede llegar hasta casi nuestros ancestros, los póngidos. La razón de que Sraffa no haga explícito el residuo es porque no ha puesto fecha a los precios y ha derivado la ecuación de otra forma. Veamos cómo. De la ecuación (VI.1) que se ha traído a colación antes se obtuvo:

$$P = wL\left[Y-\left(1+r\right)X\right]^{-1} \qquad \text{(VI.3)}$$

De esta, a su vez, se obtiene:

$$P = wLY^{-1}\left[I-\left(1+r\right)A\right]^{-1} \qquad \text{(VI.4)}$$

si sustituimos $\boldsymbol{X}$ en (VI.2) por $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AY}$ ($\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$) y operamos. Pero en la expresión que hay dentro del corchete en (VI.4) todo está preparado para aplicar el teorema de Perron-Froebenius, porque $\boldsymbol{A}$ es una matriz cuadrada, no negativa e irreducible (por hipótesis). Con ello se cumple uno de los lemas del teorema (versión fuerte) y la expresión que hay dentro del corchete es (monótona) creciente. Y (VI.4) desarrollada es (VI.2), pero sin el residuo. En realidad (IV.4) es una ecuación de equilibrio de una economía donde el ciclo de producción-distribución-consumo es inalterable, por lo que los precios son los mismos a lo

53 Pág. 58 de *PMPM.*

largo del ciclo, al igual que los inputs de trabajo y los medios de producción.

Visto en (VI.2) la posibilidad de calcular los precios (de producción) sin hacer referencia a los medios de producción -salvo en el residuo-, Sraffa va a sustituir merecidamente satisfecho la tasa de salarios ***w*** por su valor en la razón-patrón, es decir, por:

$$w = \frac{R - r}{R} \tag{VI.5}$$

y (VI.2) queda como (VI.6):

$$P_t = \frac{R - r}{R} \times \left[1 + (1 + r) + \ldots + (1 + r)^{t-i-1}\right] L Y^{-1} + (1 + r)^i P_{t-i} A^i \tag{VI.6}$$

Si ahora observamos (VI.6) vemos que no queda claro que, ante un aumento de la tasa de ganancia ***r***, suban o disminuyan los precios $\boldsymbol{P}_t$ porque a medida que ***r*** aumenta -y si además está ya muy cerca de ***R***-, los precios tenderán a bajar por la expresión (***R***-***r***)/***R***; por contra, por la expresión que hay entre corchetes en el lado derecho de la igualdad, los precios subirán ante la misma subida de tipos de interés de antes, por lo que el resultado no se puede predecir en términos generales. La subida o bajada de los precios $\boldsymbol{P}_t$ va a depender de la cercanía que ***r*** esté de ***R*** y del número de términos a considerar dentro del corchete. Sin embargo, Sraffa, en lugar de seguir desarrollando las posibilidades de la magnífica y significativa ecuación (VI.6), entra a discutir los movimientos de la diferencia de precios de 2 mercancías que difieren en un término entre sí y con los demás supuestamente iguales. Creo que ello no tiene más interés en la época actual, pero la lectura directa de la discusión de Sraffa es siempre interesante. Tampoco me convence que ello suponga un ataque a la teoría del capital, porque hablamos -habla Sraffa- de *la diferencia* de precios y no de su *cociente* (el denominador como posible numerario). La teoría del capital se hecha por la borda cuando se entre en la cuestión de *la frontera salario-ganancia*.

Generalización

Veamos cómo se puede desarrollar algo más (VI.6). Esta puede ser resumida como (VI.7), puesto que (VI.6) es una progresión geométrica.

(VI.7) $$P_t = \frac{w\left(1+r\right)^{t-i}-1}{r} \times LY^{-1} + \left(1+r\right)^{i} P_{t-i} A^{i}$$

Ahora una novedad que Sraffa no entrevió, quizá por no poner fechas a los precios. Supongamos que tenemos ***i*** *tasas máximas de ganancia interanuales* $\boldsymbol{G}_k$ que se corresponden con la ecuación (VI.8) al hacer cero la tasa de salarios en la ecuación que define el sistema (VI.8) y queda (VI.9):

(VI.8) $$P_t Y = (1+r) \times \left[wL + P_{t-1} X \right]$$

(VI.9) $$P_t Y = \left(1+G_1\right) \times P_{t-1}\, X$$

Dos comentarios en (VI.8): 1) la tasa de interés pre-multiplica a todos los costes, tanto a los medios de producción como a la masa salarial del sistema (*pre-factum*). Es una opción tan válida como la de la exclusión de la masa de salarios ***wL*** del tipo de ganancia para calcular los precios (*post-factum*) que es lo que hace Sraffa; 2) seguimos poniendo fechas para distinguir los precios de un período con los de otro, a la vez que sirven para diferenciar los precios de los medios de producción con los de los productos finales. Sigamos. La ecuación (VI.9) se convierte en la (VI.10) sin más que pos-multiplicar (VI.9) por $\boldsymbol{Y}^{-1}$ y sustituir $\boldsymbol{XY}^{-1}$ por la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}$:

(VI.10) $$P_t = \left(1+G_1\right) \times P_{t-1} A$$

Sustituyendo repetidas veces en (VI.10) los precios por su propio valor rezagado en un período de tiempo (un año, por ejemplo), queda:

(VI.11) $$P_t = \left(1+G_1\right) \times \cdots \times \left(1+G_i\right) P_{t-i} A^{i}$$

Y si ahora sustituimos (VI.11) en (VI.6), pero eliminando los precios rezagados $\boldsymbol{P}_{t-i}$, queda la notable expresión:

(VI.12) $$P_t = \frac{R - r_r}{R} \times \left[\frac{1}{1 - \frac{(1+r)^i}{\prod_{k=1}^{k=i}[1+G_k]}} \right] \times \frac{\left[(1+r)^{t-i} - 1\right]}{r} \times L\ Y^{-1}$$

y de aquí se puede extraer algunas conclusiones no triviales:

a) Los precios son linealmente proporcionales a los salarios.

b) En cambio, la relación entre precios y ganancias es más compleja: por un lado tenderán a bajar cuando ***r*** se acerque a ***R***, pero irá en sentido contrario con el último multiplicando de (VI.12) por ser la suma del *trabajo fechado del capital*. La secuencia es:

$$si\ \ r_r \to G_k\ \ tal\ que\ \ 1+r \to \sqrt[i]{\prod_{k=1}^{k=i}[1+G_k]} \Rightarrow 1 - \frac{(1+r)^i}{\prod_{k=1}^{k=i}[1+G_k]} \to cero\ \ \Rightarrow P_t \to INF.$$

y *los precios aumentarían exponencialmente*

c) También influirán en los precios la relación entre el tipo de beneficio ***r*** y las que hemos llamado tasas máximas interanuales, las $\boldsymbol{G}_k$. Lo que nos dice (VI.12) es que cuanto menores sean las ganancias respecto a estas *razones interanuales* más tenderán a bajar los precios; subirán si ocurre lo contrario.

d) Si la economía es muy poco productiva, es decir, si los valores de *las tasas máximas de ganancia interanuales* $\boldsymbol{G}_k$ son pequeñas, las ganancias debieran ser también muy limitados porque, de lo contrario, los precios aumentarían notablemente; y es así porque, como puede comprobarse dando valores a (VI.12), los precios serían relativamente sensibles a las variaciones de ***r*** respecto a $\boldsymbol{G}_k$ si ***r*** estuviera muy cerca de $\boldsymbol{G}_k$.

e) Los precios son directamente proporcionales a *los requerimientos de trabajo por unidad de producto* $\boldsymbol{L}_y = \boldsymbol{LY}^{-1}$, que son los inversos de la productividad del trabajo; y viceversa, a más productividad, menores precios, cosa que se corresponde bastante bien con el mundo real.

f) En todo caso, para que los precios fueran positivos, la tasa de ganancia ***r*** debería ser menor que (VI.13)

$$r \leq \sqrt[i]{\prod_{k=1}^{k=i}\left[1+G_k\right]}-1 \qquad \text{(VI.13)}$$

Piero Sraffa

Capítulos VII, VIII y IX: Producción conjunta

Incluso hoy día el estudio de la producción conjunta en la universidad, por increíble que parezca, es una excepción más que una regla. Y digo increíble porque es difícil encontrar un sector, una empresa, un comercio donde sólo se produzca un bien o servicio final (una mercancía en lenguaje de Sraffa). En la fecha de publicación fue una novedad y mucho más cuando el economista italiano hizo sus primeras elucubraciones sobre el tema. La razón de que no se estudie de la producción conjunta en los modelos marginalistas es que ahí ya no resulta tan fácil asignar productividades marginales de cada factor a cada bien final porque estos últimos son una pluralidad; tampoco ya es tan fácil encontrar soluciones de equilibrio por la simple razón de que -según como se plantee la producción conjunta- podemos tener más incógnitas que ecuaciones. Es esta una de las preocupaciones de Sraffa al abordar la producción conjunta; la otra gran preocupación es la dificultad, en este tipo de producción, de encontrar una razón-patrón porque, aquí -aunque Sraffa no lo menciona explícitamente-, no se puede aplicar el teorema de Perron-Froebenius y con ello asegurar esa razón antes de trabajar con la/s ecuaciones que definen el sistema. Ahora la posible razón-patrón sólo puede intentar obtenerla de una de estas dos formas: o por ordenación de mayor a menor de *la producción neta relativa* de cada producto (mercancía) y tomando la menor; o conjuntamente con la obtención de precios, salarios y ganancias. Ambas formas o sistemas tienen problemas. La obtención de la razón-patrón por ordenación tiene el problema de que el número de bienes cualitativamente distintos tienen que se igual en los productos finales que en los medios de producción para tener sólo tantos precios como mercancía (sea como medios o como productos) y que el sistema sea soluble matemáticamente. La obtención de la razón-patrón conjuntamente con precios, salarios y ganancias tiene afectado el último problema señalado por el otro método: que no podemos asegurar igual número de ecuaciones que de incógnitas (numerario excluido). Y en ambos un problema común: no se puede asegurar que esa relación obtenida de cualquiera de las dos formas de un conjunto de precios todos positivos (o al menos no negativos) sea la razón-patrón, porque eso sólo lo asegura Perron-Froebenius que aquí no se puede aplicar.

Otro problema, pero esta vez buscado por Sraffa, es su distinción entre *bienes básicos* y *no básicos*. Conceptualmente se deriva de los economistas clásicos en su distinción entre bienes de primera necesidad y bienes de lujo. Con ello querían distinguir los bienes que son necesarios par el trabajo (productivo) de aquellos que no lo son. Los primeros deberían influir en todos los precios, es decir, en ellos mismos y en los de lujo, mientras que la producción de estos últimos no debiera influir en los primeros. La razón de ello es que los de lujo no se usaban como medio de producción ni para sí mismos ni para los demás. En principio era una distinción más sociológica que formal, pero que poco a poco ha ido derivando en lo formal, siendo Sraffa la culminación de ese despojo de sentido social primitivo de la distinción entre un tipo de bienes y otros. En Marx, claro está, es fundamental cuando entra en temas como la reproducción simple. En un principio Sraffa da una definición de bienes básicos diciendo que: "*El criterio (de distinción) consiste en si una mercancía entra directa o indirectamente en la producción de todas las mercancías. Las que lo hacen serán denominadas básicas, y las que no lo hacen serán denominadas productos no básicos*"[54]. Así separa Sraffa ambos tipos de productos de forma muy temprana, allá por el capítulo II cuando trata de la producción con excedente. Más tarde -y no me refiero a la paginación del libro- se dio cuenta de que esa distinción, o no era correcta o no era suficientemente significativa, porque había casos dignos de estudio que quedaban dentro de los no básicos. Lo que hizo Sraffa es cambiar de criterio como luego veremos. Al final tiene que ver con la matriz ***A*** de requerimientos, la división en posibles submatrices y su posible o no *reducibilidad*. No obstante, en lo que sigue, trataremos de separar ambos conceptos: producción conjunta y distinción entre bienes básicos y no básicos. Algunos autores han defendido lo innecesario de hacer el último distingo[55].

Entramos ya en harina advirtiendo que el esquema de producción conjunta de Sraffa, con serlo, es un caso muy particular de producción conjunta, porque el economista italiano va a trabajar con procesos -y aquí la idea de empresa se difumina y se abre al sector porque ya son varias las empresas que pueden producir la misma mercancía- en las que el número cualitativo de bienes producidos en la producción conjunta es el mismo que el de medios empleados, independientemente

[54] Pág. 24 de *PMPM.*
[55] Por ejemplo, Schefold.

de si es una empresa que produce varios productos o son variadas empresas la que producen un mismo producto. Claro está que la producción conjunta es típica del primer caso. Oigamos a Sraffa como lo explica: "*Supondremos ahora que dos de las mercancías son producidas conjuntamente por una sola industria* (*o mejor, por un sólo proceso, pues esta denominación resulta más apropiada en el presente contexto*)". En cuanto a la necesidad de la igualdad de mercancías y procesos lo dice explícitamente porque de lo contrario: "*habría más precios a determinar que procesos y, por tanto, habría más precios a determinar que ecuaciones para determinarlos*". Aquí Sraffa se pliega a las matemáticas dejando la semilla de este tipo de producción un poco seca. A pesar de todo da para mucho y se puede ampliar sin caer en un mero empirismo. La ecuación *esrafiana* que define el sistema de producción conjunta es como sigue:

(VII.1) $$PY = (1 + r) PX + wL$$

Aparentemente nada nuevo con respecto a la producción simple. La sola diferencia -claro, que cualitativamente esencial- es que ahora la matriz $\boldsymbol{Y}$ de productos finales no es una matriz diagonal con ceros en los elementos de la matriz que no sea la diagonal principal, sino que ahora todos sus elementos pueden tener un valor mayor que cero (aunque algunos puedan ser cero). Ya hemos explicado que el problema ahora es que no podemos obtener la razón-patrón conjuntamente con los multiplicadores mediante el sistema de $\boldsymbol{n}+\mathbf{1}$ ecuaciones $\boldsymbol{uYQ}=\boldsymbol{XQ}$ e $\boldsymbol{L}\mathbf{I}=\mathbf{1}$ utilizando Perron-Froebenius, sino que tenemos sólo los dos procedimientos mencionados en esa especie de introducción que hemos hechos a este capítulo, por lo que ahora lo omito. Antes de seguir, vamos a sacar el jugo a (VII.1). De esta ecuación, si hacemos cero la tasa de salario $\boldsymbol{w}$ queda:

(VII.2) $$PY = (1 + g_m) PX$$

En (VII.2) hemos sustituido la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ de la producción simple por $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ como *tasa máxima de ganancia,* porque ahora no tenemos una razón-patrón o, al menos, no la tenemos echando mano de nuestra pareja ***P-F***. Entre (VII.1) y (VII.2) obtenemos (VII.3):

(VII.3) $$P = \frac{w}{g_m - r} \times LX^{-1}$$

donde, como siempre, los precios aumentan con el aumento de la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$, la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}$, y disminuyen al aumentar la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ y el vector de la relación capital/trabajo $\boldsymbol{LX}^{-1}$. Además los precios aumentarán exponencialmente si al aumentar $\boldsymbol{r}$, esta tasa está ya muy cerca de la tasa máxima posible $\boldsymbol{g}_m$.

Vamos ahora a establecer el mismo sistema de ecuaciones *esrafiano* que teníamos en la producción simple:

(VII.4) $$PY = (1+r)PX + wL$$

(VII.5) $$PY = (1+g_m)PX$$

(VII.6) $$LI = 1$$

(VII.7) $$PYI - PXI = 1$$

Resolviendo este conjunto de ecuaciones sale, como cabía esperar, la ecuación que relaciona $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{g}_m$:

(VII.8) $$r = (1-w)\,g_m$$

La diferencia respecto a la reproducción simple, es que aquí no tenemos la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ calculada <u>aparte</u> con $\boldsymbol{uYQ}=\boldsymbol{XQ}$ e $\boldsymbol{LI}=\mathbf{1}$ (teniendo en cuenta la relación $\boldsymbol{R}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{u})/\boldsymbol{u}$), porque no estamos en la producción simple debido a que la matriz de productos finales $\boldsymbol{Y}$ no es una matriz diagonal. Con ello no se puede asegurar que algunos de los $\boldsymbol{n}$ precios *no* sean negativos. Es verdad que le queda a Sraffa una forma un último recurso de obtener lo que el sigue llamando reiteradamente razón-patrón como el que "*corresponde al mínimo valor posible de* ***R***"[56]. En definitiva, lo que hemos llamado el método manual de ordenación de los *productos netos relativos* o *excedentes relativos* de todas las mercancías. Ello tendrá siempre la ventaja de que, conocido ese menor excedente relativo, sabremos que la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ tiene que ser menor que el excedente así calculado. Con

[56] Pág. 79 de *PMPM.*

ello quedará un margen para que la tasa de salarios ***w*** sea positiva. Añade Sraffa que también esa razón-patrón así elegida es "*el único producto patrón en términos del cual* <u>*es posible*</u> *que el precio de las mercancías sean finitos para todos los valores del salario desde 1 a 0*"[57]. Y Sraffa tiene razón viendo la ecuación (46), donde mientras la tasa de ganancia ***r*** sea menor que la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$, los precios serán positivos en este modelo de producción conjunta. Todo ello es cierto, pero lo que no lo es -mientras alguien no demuestre lo contrario- es que $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ sea una medida del valor del excedente invariante a los precios. En la producción simple estábamos seguro de ello porque se obtenía de las supuestas propiedades de la matriz ***A*** de requerimientos, matriz que surgía y dependía *sólo* de los valores físicos de los medios de producción ***X***, de los productos finales ***Y*** ($\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$) y de los inputs de trabajo, tomando como numerario ***LQ*** con $\boldsymbol{LQ}=\mathbf{1}$ y aplicando Perron-Froebenius. Ahora no es el caso, porque $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ surge de hacer cero los salarios en la ecuación (47) que define el sistema, donde están los precios. Tenía *además* la propiedad de estar relacionado con el autovalor mayor ***u*** de ***A*** mediante $\boldsymbol{R}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{u})/\boldsymbol{u}$. En cambio, $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ no tiene esa propiedad. Y si empleamos el método de ordenación de mayor a menor -que emplea Sraffa como hemos visto-, eligiendo el menor valor de los *productos netos relativos* o *excedentes relativos,* eso no nos garantiza que esa relación sea la misma que la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ surgida de hacer cero los salarios antes comentada; tampoco que asegure un vector de precios positivos.

Otra forma de ver lo anterior es despejando los precios en la ecuación (VII.4) que define el sistema y que da (VII.9):

(VII.9) $$P = wLY^{-1}\left[I-(1+r)A\right]^{-1}$$

Aparentemente es la misma ecuación que surgía de despejar los precios en la producción simple, pero hay una diferencia que resulta decisiva en la producción conjunta: la matriz ***Y*** de productos finales *no* es diagonal y cabe que algunas de las mercancías sean producidas por una misma empresa. En la producción simple, todos los elementos de la inversa de los productos finales ***Y*** eran positivos porque lo son los valores de ***Y***; en la producción conjunta puede ocurrir -y matemáticamente ocurre- que algunos de sus elementos sean negativos

[57] Pág. 80 de *PMPM.*

(los inversos de ***Y***). Con ello, y a pesar de que la inversa de la expresión entre corchetes de la ecuación (VII.9) sea positiva (porque la tasa de ganancia ***r*** no supera el valor menor del excedente neto relativo del conjunto de las mercancías), algunos de los precios pueden ser negativos porque lo sean los valores de la inversa de ***Y*** en el caso de la producción conjunta que, como hemos comentado, todos sus elementos pueden tener algún valor. La explicación de este hecho es que ahora, a diferencia de la producción simple, no podemos hacer corresponder los ***n*** sectores a una sola mercancía, sino a varias, y lo que antes podíamos decir de una mercancía final en ***Y***, ahora lo tenemos que decir de la suma. Ello lleva a que algunos de los elementos de $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ puedan ser negativos y simultáneamente el resultado de la suma (filas) de ***A*** sean positivos. Damos las dos matrices de ***Y*** según ambos tipos de producción:

(VII.10) $$Y=\begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix} \Rightarrow Y^{-1}=\begin{bmatrix} 1/y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/y_n \end{bmatrix}$$ producción simple

(VII.11) $$Y=\begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow Y^{-1}=\begin{bmatrix} \hat{y}_{11} & \cdots & \hat{y}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{y}_{n1} & \cdots & \hat{y}_{nn} \end{bmatrix}$$ producción conjunta

Vistas las dificultades de encontrar una razón-patrón en la producción conjunta con las mismas propiedades que la encontrada en la producción simple, Sraffa recurre a su distinción que procede del capítulo II de su libro entre bienes básicos y no básicos, sólo que ahora esa diferenciación no resulta válida ahora. Recordemos que Sraffa decía en ese capítulo que bienes básicos eran aquello que entraban en la producción *en todos los demás bienes* (incluido, supuestamente, el mismo) y los que no cumplían esta condición eran productos no básicos. Sin embargo, cuando llevó esa distinción de blanco o negro entre uno y otro tipo de bienes se dio cuenta -o le advirtieron desde un punto de vista matemático- de que debía ampliar el criterio. Incluso tuvo que recurrir a un apéndice para advertir del caso de bienes no básicos con auto-reemplazamiento[58]. La razón de este cambio de criterio -o de ampliación- es porque no quería renunciar a uno de los objetivos de su libro y de su vida: buscar una mercancía-patrón y una

[58] Pág. 125 de PMPM.

razón-patrón invariante al movimiento de los precios y solucionar el problema que no solucionó *David Ricardo* y solucionó mal *Carlos Marx*. Recordemos que una matriz $\boldsymbol{A}$ que fuera cuadrada, no negativa e irreductible tiene -por el teorema de Perron-Froebenius- un autovalor simple, real y positivo que lleva asociado dos autovectores (uno por la derecha y otro por la izquierda) con todos sus elementos positivos. Con esto, en la producción simple obteníamos la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ y los precios $\boldsymbol{P}$ (autovector por la izquierda) y/o los multiplicadores $\boldsymbol{Q}$ (autovector por la derecha) <u>todos positivos</u>. En la producción conjunta no podemos si aceptamos todas las ecuaciones de origen del sistema $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ por lo comentado en el punto y aparte anterior. Ahora bien, si logramos desgajar de $\boldsymbol{A}$ una *submatriz* que cumpla los requisitos del teorema de Perron-Froebenius, habremos alcanzado éxito en la búsqueda de la razón-patrón, aunque ya no tengamos todas las ecuaciones originales si podemos, como dice Sraffa "*eliminar completamente mediante transformaciones lineales las mercancías no básicas del sistema, tanto del lado de los medios de producción como de los productos*"[59]. Matemáticamente significa, primero, que cabe siempre la posibilidad de que, a partir de una matriz $\boldsymbol{A}_{n\times n}$, puede ser reducida a un conjunto de submatrices de la forma:

(VII.12)
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{n-k,n-k} & A_{n-k,n} \\ A_{n,n-k} & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

donde las submatrices $\boldsymbol{A}_{n-k,n-k}$ y $\boldsymbol{A}_{n,n}$ son cuadradas. Si ahora, por los ceros que pueda haber en filas y columnas, se pueden intercambiar estas de tal modo que la submatriz $\boldsymbol{A}_{n,n-k}$ valga cero, entonces se habrá reducido la matriz $\boldsymbol{A}$. El problema es que esto no es siempre posible. Sraffa cree que lo es si "*en un sistema de **n** procesos productivos y **n** mercancías, decimos que una mercancía o, en general, un grupo de **k** mercancías relacionadas son no básicas si de las **n** filas no más de **k** filas son independientes, siendo las otras combinaciones lineales de éstas*"[60]. Dicho de otra manera, si intercambiando filas o columnas en la matriz $\boldsymbol{A}_{n,n}$ original, conseguimos que $\boldsymbol{A}_{n,n-k}=\boldsymbol{0}$ y que el rango de la matriz $\boldsymbol{A}_{n-k,n-k}$ valga $\boldsymbol{n-k}$, es decir, que todas ecuaciones de $\boldsymbol{A}_{n-k,n-k}$ tal que $\boldsymbol{A}_{n-k,n-k} = (\boldsymbol{X}_{n-k,n}\ \boldsymbol{-Y}^{-1}{}_{n-k,n-k})$ sean linealmente independientes y con sus

[59] Pág. 77 de *PMPM.*
[60] Pág. 76 de *PMPM.*

elementos no negativos (ya es cuadrada la submatriz por hipótesis). En este estas condiciones se puede aplicar la versión débil[61] del teorema Perron-Froebenius y *habemus* mercancía-patrón y razón-patrón[62] positiva menor que **1** (esto último sólo si además $\boldsymbol{A}_{n\text{-}k,n\text{-}k}$ es productiva), aunque sólo sea para $\boldsymbol{A}_{n\text{-}k,n\text{-}k}$. Ahora, y como hace Sraffa, llamamos *bienes básicos* a los que entran en esa submatriz y eso nos asegura un vector $\boldsymbol{P}_{n\text{-}k}$ de precios no negativos y también un vector por la derecha $\boldsymbol{A}_{n\text{-}k,n\text{-}k}$ de $\boldsymbol{Q}_{n\text{-}k}$ de ***n-k*** multiplicadores no negativos para componer la mercancía patrón. El problema es que nada garantiza que, partiendo de la realidad, podamos reducir la matriz original $\boldsymbol{A}$ a un conjunto de submatrices con las características enunciadas. El coste que Sraffa ha pagado por esta redefinición[63] y distinción entre bienes básicos y no básicos es, como el mismo Sraffa hace, si "*cabe preguntarse si ha conservado algún contenido económico*"[64]. El problema es que el economista italiano no podía elegir si quería ser riguroso y, afortunadamente, eligió el rigor, aunque por lo que hemos visto, con un exceso de optimismo. Aún así, la distinción sigue teniendo sentido económico.

Bienes básicos y no básicos

Sraffa, a medida que maduraba su obra, se dio cuenta, como queda dicho, que no podía mantener la distinción entre bienes básicos tal y como la había dejado en el capítulo II y ahora, en este capítulo, habla de 3 tipos[65]: 1) El sector de bienes básicos señalado, que viene caracterizado matemáticamente por la submatriz $\boldsymbol{A}_{n\text{-}k,n\text{-}k}$ de *bienes básicos* que se venden y compran entre sí de tal manera que constituyen una economía capaz de entrar en el modelo *esrafiano* de la producción conjunta y calcular *la mercancía-patrón*, *la razón-patrón*, *la tasa de ganancia*, *la tasa de salarios* y *los precios* (no

[61] La versión débil porque la matriz original no era irreducible sino reducible, cosa que hemos hecho.
[62] Tal y como la podemos tener para la producción conjunta que ya hemos explicado.
[63] La definición de bienes básicos que hemos comentado del capítulo II ya no vale porque en la submatriz reducida, donde se han ubicado por la nueva definición los productos básicos, puede haber algunos ceros, es decir, que puede haber sectores que no vendan a todos los demás. Y hay que decir que afortunadamente, porque probablemente no exista en la realidad *un sólo sector* que venda *a todos* los sectores de la economía directamente.
[64] Pág. 80 de *PMPM.*
[65] Pág. 74 de *PMPM*. Aquí he preferido seguir la lógica económica de Sraffa pero con la ecuación (55), por lo que no me he atenido literalmente al texto. De hecho, el grupo segundo mío del texto corresponde al tercero de Sraffa y viceversa.

necesariamente todos positivos) por sí solos, sin necesidad de saber qué pasa con los sectores y mercancías del resto; 2) Este segundo grupo está constituido a su vez por dos: un conjunto de sectores $\boldsymbol{A}_{n,n-k}$ que se compran y se venden entre ellos y venden (pero no compran) a los del grupo $\boldsymbol{A}_{n,n}$. Por hipótesis, esta submatriz $\boldsymbol{A}_{n,n-k}$ valdría cero. El grupo $\boldsymbol{A}_{n,n}$ que, en cambio, sí compra del resto del sistema (las columnas que están por encima y que se corresponden con la submatriz $\boldsymbol{A}_{n-k,n}$ tienen valores positivos, aunque no necesariamente todos), pero sólo se venden entre ellos. Por tanto, este grupo $\boldsymbol{A}_{n,n}$, que se corresponde con la nueva visión sraffiana de bienes *no básicos*, sí depende del resto del sistema para calcular sus precios de producción. Además, si existe una sola tasa de ganancia y una sola de tasa salarios, este sector debe aceptar los calculados por los del grupo primero de bienes básicos. Dicho de otra manera, ha perdido la libertad de fijar o influir en las variables monetarias del sistema; 3) El grupo constituido por la submatriz $\boldsymbol{A}_{n-k,n}$ compra a los sectores del grupo de bienes básicos, pero no les vende a ninguno y, en cambio, si venden a los del grupo de no básicos $\boldsymbol{A}_{n,n}$. Además, al no ser la submatriz $\boldsymbol{A}_{n-k,n}$ cuadrada, no tienen ninguna opción de tener una razón-patrón y una mercancía-patrón propias, y debe aceptar también la tasa de salarios, de ganancias y precios impuestos por los del grupo de básicos $\boldsymbol{A}_{n-k,n-k}$. Como siempre ocurre, al no hacer explícitos Sraffa los desarrollos formales -matemáticos- en los que se basa sus disquisiciones económicas, éstas se hacen difíciles de seguir y también de asentar los supuestos que encierran. Más tarde veremos con ecuaciones estos temas.

Existe una posibilidad de que la submatriz $\boldsymbol{A}_{n-k,n}$ fuera cero. Eso supondría, desde el punto de vista económico, que los sectores del grupo $\boldsymbol{A}_{n,n}$ no compraran a los sectores del grupo anterior (las columnas que quedarían por encima valdrían cero en este supuesto); además, y dado que ya no vendían a ningún sector (hemos partido de que $\boldsymbol{A}_{n,n-k}$ vale cero), eso significaría que los sectores del grupo $\boldsymbol{A}_{n,n}$ serían un grupo independiente del resto de la economía (no conectado) que sólo compran y venden entre sí. Si los sectores de la matriz $\boldsymbol{A}_{n,n}$, que es cuadrada, cumplieran las condiciones de Perron-Froebenius, podrían calcular sus propios precios, tasas de ganancia, salarios, etc., al igual que lo han hecho los sectores del primer grupo. Se trataría de una economía aparte, equivalente en el mundo real a una economía que no comerciara con el resto del mundo. Sraffa lo analice en el apéndice **B** de su libro y nosotros también lo haremos más tarde.

Generalizaciones I

Visto con perspectiva, el empecinamiento de Sraffa en mantener igual el numero de diferentes tipos de mercancías para los productos finales que para los medios ha resultado inútil. El modelo de Sraffa admite muchas generalizaciones. Una viene dada por la ecuación que sigue:

(VII.13) $$\underset{1xm}{P_y}\,\underset{mxn}{Y} = (1+r)\times \underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X} + w\,\underset{1xn}{L}$$

donde la matriz ***Y*** de productos finales ya no es cuadrada, sino que tiene más mercancías distintas que la matriz de medios de producción ***X*** (es decir, ***m***>***n***). También aquí se ha perdido que los precios -en general- de los productos finales $\boldsymbol{P}_y$ sean los mismos que los de medios de producción ***P***. Si ahora quisiéramos obtener directamente los precios de los productos finales $\boldsymbol{P}_y$ podríamos hacerlo mediante:

(VII.14) $$P_y = [(1+r)\times PX + wL]\times Y^T[YY^T]^{-1}$$

Más aún, como siempre podemos obtener la ecuación que relaciona los precios de los medios de producción ***P*** con el resto de las variables (excepto con los precios de los productos finales $\boldsymbol{P}_y$) haciendo cero la tasa de salarios. Con esto sale (VII.15) que ya hemos visto en otros apartados:

(VII.15) $$P = \frac{w}{g_m - r}\times LX^{-1}$$

Y si ahora sustituimos los precios de (VII.15) en los de (VII.14) queda:

(VII.16) $$P_y = \frac{w(1+g_m)}{g_m - r}\times LY^T[YY^T]^{-1}$$

cuyos precios de productos finales $\boldsymbol{P}_y$ ya no dependen *directamente* de los precios de los medios de producción ***P***, pero sí de la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$. Tanto en (VII.15) como en (VII.16), si la tasa de ganancia ***r*** se acerca mucho a la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$, los precios crecen exponencialmente. Otra característica común es que los precios pueden ser negativos por los valores de las inversas que aparecen en ambos sistema de ecuaciones. Sraffa diría que serán las empresas o los empresarios los que rechazarían aquellos métodos de producción (***Y***,***X***,***L***) que dieran tal resultado. Es una opción aceptable como criterio económico y además puede explicar las empresas (mejor sectores) que darían pérdidas si no fuera por las subvenciones (en algunos casos la minería). Sin embargo, ahora que hemos solucionado la restricción se Sraffa a su producción conjunta, surge el problema del rango de la matriz $\boldsymbol{YY}^T$. Para evitar combinaciones lineales dependientes, el producto anterior no puede tener rango inferior a ***n***, lo que obliga a que ***m***<=***n***, es decir, que el número de mercancías de los productos finales *cualitativamente* distintos (o con precios distintos) se inferior o igual al de los medios usados. Dejamos este problema ahí.

Generalizaciones II

Todavía se puede generalizar aún más este modelo de producción conjunta ya no *esrafiana*, si tomamos ***n*** tasas de salario $\boldsymbol{w}_{ij}$, ***n*** tasas de ganancia $\boldsymbol{g}_{ij}$. Si además calculamos las ganancias como un porcentaje de todos los costes (incluidos los laborales). La ecuación generalizada queda:

(VII.17) $$\underset{1xm}{P_y}\underset{mxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{P}\underset{nxn}{X} + \underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W}\right](I_d + \underset{nxn}{G})$$

con ***W*** y ***G*** como matrices diagonales. Si hacemos ahora cero a los salarios queda la ecuación:

(VII.18) $$P_y Y = PX(I_d + G_m)$$

con $\boldsymbol{G}_m$ como matriz diagonal de tasas de ganancia máximas e $\boldsymbol{I}_d$ como vector de uno ***n***x**1**. Si ahora eliminamos términos comunes entre la (VII.17) y la (VII.18), obtenemos:

(VII.19) $$P = LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1}X^{-1}$$

A su vez, entre la (VII.18) y la (VII.19) sale la ecuación de los precios de los productos finales dependiente de las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_m$:

(VII.20) $$P_y = LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1}(I_d + G_m)Y^T\left[YY^T\right]^{-1}$$

La ecuación (VII.20) merece un comentario sobre el uso de las matemáticas. En apariencia, en esta ecuación los precios de los productos finales $\boldsymbol{P}_y$ no dependen de los precios de los medios de producción, cosa que ocurriría si despejáramos los productos finales en la ecuación (VII.17) que define el sistema en este modelo de producción conjunta generalizada no sraffiana pero sin diferenciación entre productos básicos y no básicos. No obstante, eso es sólo la apariencia, porque $\boldsymbol{P}_y$ depende de las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_m$, y estas dependen de los precios en (VII.18), salvo que la sustituyamos por el método *esrafiano* de obtener la razón-patrón mediante la ordenación de los *excedente netos relativos* de todos los sectores y la elección del más bajo. No obstante, eso no garantiza que ese menor excedente neto relativo coincida con $\boldsymbol{G}_m$, aunque pueda estar muy cerca. Todo esto ya lo hemos visto anteriormente. Las matemáticas, en este caso, son como siempre exactas, pero por sí solas no profundizan en la realidad que miden, cuenta o relacionan, sino que establecen relaciones lógicas entre entes que pretenden reflejar algo de la realidad (o a veces nada de la realidad, sino entes abstractos).

Generalizaciones III

Otro modelo matemático de economía que ahora distinguiera de entrada entre productos básicos y no básicos sería el expresado por la ecuación:

(VII.21) $$\underset{1xm}{P_N}\underset{mxn}{Y_N} + \underset{1xn}{P}\underset{nxn}{Y} = \left\lfloor \underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P}\underset{nxn}{X} \right\rfloor \times \left(I + \underset{nxn}{G}\right)$$

Los productos finales no básicos está dado por la matriz $\boldsymbol{Y}_N$ y $\boldsymbol{P}_N$ son sus precios. Ahora la dimensión de $\boldsymbol{Y}_N$ es $\boldsymbol{m}\text{x}\boldsymbol{n}$, es decir, el número de bienes no básicos no tiene porqué coincidir con los básicos. El supuesto de que $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$, es decir, que sea el mismo el número de bienes cualitativamente distintos en los medios que en los productos finales -caro a Sraffa- no puede ser mantenido si se quiere dotar de realismo el modelo de producción conjunto. Con el nuevo supuesto tenemos dos vectores de precios, uno para los básicos y otros para los no básicos, que es lo indicado -insistimos- en aras del realismo. De (VII.21) se pueden despejar los precios $\boldsymbol{P}_N$ de los no básicos y queda:

(VII.22) $$P_N = \left[LW(I_d+G) + P\left[X(I_d+G) - Y\right]\right] Y_N^T \left[Y_N Y_N^T\right]^{-1}$$

En (VII.22) se ve que los precios de los bienes no básicos $\boldsymbol{P}_N$ dependen de los básicos, pero no al revés. Es verdad que matemáticamente podríamos haber dejado como variable dependiente los precios de los básicos, pero el sentido económico de la discusión que llevamos, siguiendo la inestimable guía del maestro italiano haría que tal verdad sólo matemática no tuviera sentido económico. De todas formas, poco nos dice en esta ocasión (VII.22) de los precios de los no básicos porque, a diferencia de anteriores posibles modelos de producción conjunta que hemos visto, estamos jugando ahora con dos vectores de precios distintos. Obtenemos ahora una nueva ecuación haciendo como siempre cero *la matriz* de salarios ***W***:

(VII.23) $$P_N Y_N + PY = PX(I_d + G_m)$$

Y entre (VII.21) y (VII.23) sale como siempre:

(VII.24) $$P = LW(I_d+G)(G_m - G)^{-1} X^{-1}$$

donde nos hacemos con los precios de los básicos y donde, como siempre, para que los precios no aumenten exponencialmente, es condición necesaria que las tasas de ganancia ***G*** no se acerquen a las tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{G}_m$. Si ahora sustituimos los precios de (VII.24) en (VII.22) queda:

(VII.25) $$P_N = LW(I_d+G)(G_m - G)^{-1}\left[I_d + G_m - X^{-1}Y\right] Y_N^T \left[Y_N Y_N^T\right]^{-1}$$

Es verdad que ahora los precios $\boldsymbol{P}_N$ de los no básicos no aparecen como dependiendo de los precios de los básicos, pero ya hemos comentado que eso es pura apariencia.

Frontera salario-ganancia

Lo que sí debemos tratar en este capítulo, aunque sea limitadamente, es *la frontera salario-ganancia* antes comentada porque

Sraffa lo hace en su libro[66]. Habla de la "*posibilidad de que el precio de un producto pueda descender más de prisa que el salario*". Más tarde -y esto tiene interés para la historia de la teoría del capital- habla de la posibilidad de que "*la línea del salario y la línea del precio de la (una) mercancía tengan más de un punto de intersección a medida de que el tipo de beneficios varíe*". Sraffa, como casi siempre, no especifica el modelo (las ecuaciones) que le lleva a esas conclusiones. Tengamos presente que estamos en la producción conjunta y lo que afirma -y en el resto del texto- debe producirse ese contexto y no en la producción simple. Veamos como esto es posible.

(VII.27) $$P = wLY^{-1}\left[I_d - (1+r)A\right]^{-1}$$

Esta ecuación ha surgido de despejar los precios en la ecuación (VII.13). La matriz ***Y*** de (VII.27) es de producción conjunta, es decir, con posibles valores positivos en todos sus elementos ***n***x***n***. Si ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación por **YI** y despejamos la tasa de salario ***w*** de (VII.27) quedará:

(VII.28) $$w = \frac{PYI}{LY^{-1}\left[I_d - (1+r)A\right]^{-1}YI}$$

siendo **I** el vector de uno ***n***x**1**. Sraffa compara esta ecuación -implícitamente, claro, porque casi nunca hace explícitos los aspectos formales (matemáticos) de su razonamiento- con la de la razón-patrón:

(VII.29) $$w = 1 - \frac{r}{R}$$

La ecuación (VII.29) es una *recta* en el cuadrante ***w-r*** con puntos de corte en ***w***(***r***=**0**)=**1** y en ***r***(***w***=**0**)=***R***. Si estuviéramos en la producción simple, el teorema de Perron-Froebenius nos aseguraría que el autovalor máximo de ***A*** que es ***u*** -que mantiene con la razón-patrón ***R*** la relación ***u***=**1**/(**1**+***R***)- es una función creciente de ***A*** si esta matriz es cuadrada, no negativa e irreducible y mientras[67] ***r***<***R***. La función

[66] Pág. 90 de *PMPM.*

[67] Esta última condición no lo dice el teorema, pero es una deducción dado que la matriz **A** se haya multiplicada por (**1**+**r**). Se puede ver este resultado en Pasinetti

(VII.28) es una función cóncava[68] y decrecientemente decreciente. Eso no impediría que tuviera dos puntos de corte, porque toda función así puede tener a lo sumo dos puntos de corte respecto a una recta. Con ello se cumpliría literalmente lo que dice Sraffa en su libro. Pero no es esa la intención, porque estamos en la producción conjunta. Además, el dibujo que acompaña al texto tiene tres puntos de corte de la supuesta función (VII.28) con la (VII.29). Pues bien, si estamos en la producción conjunta -que es, creo, lo acertado en la interpretación de lo que dice Sraffa- lo que cambia es la matriz $\boldsymbol{A}$ de requerimientos. Esta matriz procede de $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$ e $\boldsymbol{Y}$ es, en este caso, una matriz *no* diagonal, es decir, con posibles valores positivos en todos sus elementos, por lo que su inversa puede presentar valores negativos; todo lo contrario que cuando estábamos en la producción simple, en la que $\boldsymbol{Y}$ era una matriz diagonal y su inversa tiene todos sus elementos positivos (damos por hecho que $\boldsymbol{Y}$ es no negativa porque los productos finales pueden ser existir o no, pero no pueden ser negativos[69]). Con la posibilidad de elementos de $\boldsymbol{A}$ negativos, la función (VII.28) puede tomar cualquier valor sin que podamos atenernos a criterio alguno sobre la monotonía de la función. Hay que observar que para que haya 3 puntos de corte de una curva en una recta debe cambiar la función de convexidad al menos una vez. ¿Tiene razón entonces Sraffa? Mi respuesta es que no, al menos tal como lo cuenta, porque si cambia alguno (o varios) elementos de $\boldsymbol{A}$ en la función (VII.28), lo que se produce es un *desplazamiento* de la *curva salario-ganancia* y no un *deslizamiento* por la curva que une estas dos variables. Ya veremos que Sraffa comete este mismo error en el capítulo sobre *la elección de las técnicas*. No es que ande Sraffa totalmente errado, sino que confunde el deslizamiento con el desplazamiento, cosa probablemente debida a que no tenía la ecuación a la vista cuando formuló el problema o porque no tenía claro esa diferenciación. En cualquier caso, si nos vamos a una geometría de 3 variables[70] con $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{A}$, Sraffa está en lo cierto. No es una cuestión

(*Lecciones de teoría de la producción*, pág. 150, FCE), aunque en otro contexto de discusión.

[68] Entiendo cóncava en forma de ***U*** hacia el origen. A veces hay confusión entre lo cóncavo y lo convexo. Yo me guío por la literatura y, en concreto, Homero habla en la Odisea de las "*cóncavas naves*", y una nave es reconocible su forma de **U**.

[69] Podría plantearse en otro contexto, pero entonces ese bien negativo de la matriz de productos finales sería en realidad un medio de producción.

[70] Estrictamente hablando deberíamos irnos a una geometría de ***n***+**2** dimensiones, porque cada columna de la matriz **A** representa una dimensión en un espacio euclídeo y ahí las posibilidades de corte de **A** en el plano ***w-r*** son múltiples.

meramente matemática, sino que afecta a la crítica de la teoría del capital.

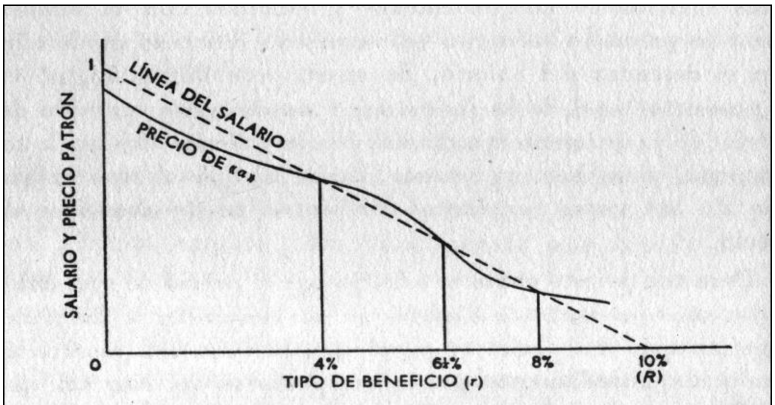


Fig. 5. En un sistema de industrias de productos múltiples son posibles varias intersecciones.

Gráfico extraído del libro de Sraffa
(publicado en Oikos-Tau)

Aprovechando las cuestión de la posibilidad de que la línea del precio-ganancia obtenida a partir de la ecuación que define el sistema con la ecuación del salario ganancia en términos de razón-patrón que hemos visto antes, vamos a plantear por primera vez -pero no será la última- la cuestión de la función de la frontera salario-ganancia surgida de la producción simple o conjunta cuando corta a la línea recta que relaciona a la tasa de salario con la de ganancia a través de la razón-patrón. Eso tiene enorme interés en la teoría del capital y en la discusión sobre si es posible las construcción de una función neoclásica del capital que tenga las propiedades que le atribuye la teoría de la productividad marginal, en definitiva, del marginalismo. Intelectualmente el tema ya se ha saldado hace tiempo con la derrota de neoclásicos y marginalistas y hasta el mismo Samuelson tuvo que inventarse una parábola al modo de los *Nuevos Testamentos* de los católicos. Aún así, también se demostró errores e incoherencias por Pasinetti, Garegnani, Nuti, etc. Yendo al caso que nos ocupa, partimos de 2 ecuaciones:

(VII.30) $$w = \frac{PYI}{LY^{-1}\left[I_d - (1+r)A\right]^{-1} YI}$$

(VII.31) $$w = 1 - \frac{r}{R}$$

Traemos aquí a colación la ecuación (VII.30) que surge de la ecuación (VII.27) que define el sistema y en la que hemos despejado la tasa de salarios ***w***. La (VII.31) es la ecuación de la razón-patrón que, aunque sea casi una prevaricación en un contexto *esrafiano*, podríamos llamarla *ecuación del capital*, porque relaciona la tasa de ganancia ***r*** con la razón-patrón ***R*** que, entre otras cosas que ya hemos visto, es una medida del *capital esrafiano* porque mide la relación que hay entre la matriz de productos finales ***Y*** y la de los medios de producción ***X***. Quizá por eso la metáfora con el dios Jano de las dos caras se queda corta. Y aprovechando esta digresión, que me perdone Sraffa, esté donde esté, por unir la palabra capital a su nombre. Ambas ecuaciones deberían responder a la cuestión planteada por él sobre la posibilidad de que haya más de un punto de corte. La parte que hay entre corchetes de (VII.30) es una función crecientemente creciente siempre que la tasa de ganancia ***r*** sea menor que la razón-patrón ***R.*** La inversa de ello es por tanto una función decreciente. La función (VII.30) puede desarrollarse como:

(VII.32) $$w = \frac{PYI}{LY^{-1}\left[I + (1+r)A + (1+r)^2 A^2 + \cdots + (1+r)^{n-1} A^{n-1}\right]YI}$$

Al eliminar los salarios ***w*** entre (VII.30) y (VII.31) queda:

(VII.33) $$r = \left[1 - \frac{PYI}{LY^{-1}\left[I_d - (1+r)A\right]^{-1}YI}\right] \times R$$

Por el contrario, si lo que sustituimos son los el tipo de interés de la (VII.31) y (VII.30) obtenemos:

(VII.34) $$w = \left[1 - \frac{PYI}{LY^{-1}\left[I_d - (1+(1-w)R)A\right]^{-1}YI}\right] \times R$$

La ecuaciones (VII.33) y (VII.34) representan ¡*todos los puntos de corte entre las ecuaciones* (VII.30) y (VII.31)!, puesto que se ha obtenido eliminado la tasa de salarios ***r***, que es lo mismo que decir que (VII.34) nos da los punto en los que el tipo de interés $\boldsymbol{r}$ es igual para (VII.30) y (VII.32). En ambas funciones las incógnitas están en ambos lados de la desigualdad, por lo que no se pueden despejar directamente $\boldsymbol{w}$. La cuestión que se plantea es si es posible más de un punto de corte[71]. Ambas son cocientes de dos funciones polinómicas de grado $\boldsymbol{n}$**-1** en $\boldsymbol{r}$ (tantos grados posibles como el exponente más alto[72] de $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})$), lo que lleva a la posibilidad de $\boldsymbol{n}$**-1** puntos de corte entre reales, repetidos y complejos. Sraffa llegó a ello con razonamientos puramente económicos, o al menos no hizo explícitos los aspectos formales en su libro. ¡Vistas las ecuaciones (VII.33) y su posible desarrollo polinómico qué simples y desacertados resultan los planteamientos que recogió Harcourt nueve años después de publicarse la obra de Sraffa en un artículo![73] En menos de una década todo lo neoclásico en la teoría del capital quedó arrumbado intelectualmente, aunque se siga explicando en las universidades. Y lo que resulta significativo es con qué supuestos tan racionales y cercanos a la realidad lo consiguió Sraffa. En realidad sólo con dos cosas, una por acción y otras por omisión: por acción, simplemente con tener en cuenta las relaciones intersectoriales; por omisión, con olvidarse de supuestas productividades marginales.

Vemos que en esta discusión que hemos intentado desvelar en torno a la *frontera salario-ganancia*, Sraffa comete dos errores: confunde *deslizamiento* de una función con *desplazamiento*, y compara la producción simple con la conjunta sin tener la precaución de tomar el mismo numerario en ambos tipos de producción. A pesar de todo ello no anula las conclusiones del italiano y la crítica de él y de los que le siguieron a la teoría neoclásica y marginalista del capital. La diferencia es que con igual numerario -porque de lo contrario no es posible la comparación- no nos podemos deshacer de los precios.

Pero todo esto se quedaría en aparentes juegos matemáticos si no viéramos su interpretación económica. En esta parte me aparto algo de la explicación de Sraffa, aunque en esencia es la misma si se lee el capítulo IX de su obra. Cuando estábamos en la producción simple teníamos una ecuación *lineal* (VII.31) que relacionaba tasa de salarios $\boldsymbol{w}$

---

[71] El hecho de que no se pueda despejar $\boldsymbol{r}$ indica que hay (o puede haber) $\boldsymbol{n}$ puntos de corte. La solución general es el teorema fundamental del álgebra demostrado por primera vez por Gauss.

[72] Pero no de $\boldsymbol{A}$ porque esta, recordémoslo, ahora es una constante porque estamos en el espacio bidimensional $\boldsymbol{w}$**-**$\boldsymbol{r}$**.**

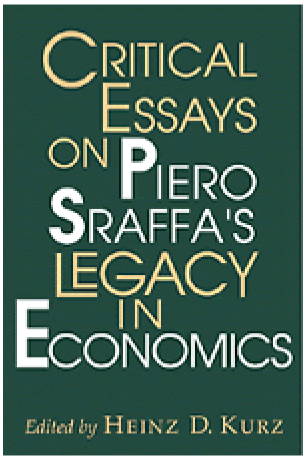
[73] *Some Cambrigde controversies in the Theory of Capital*, 1969.

con tasa de ganancia a través de la mercancía-patrón ***R***; en la producción conjunta cambia todo, porque la matriz de productos finales no tiene adjudicada toda la producción de una mercancía a un sector (matriz *diagonal* ***Y***), sino que tiene asignado el conjunto de todos los medios de producción de la misma mercancía (homogéneos) a un conjunto a su vez de ***n*** productos finales por cada sector, es decir, a $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$ productos finales. Podría interpretarse como una *aplicación biyectiva* entre $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$ medios de producción y $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$ productos finales, pero no necesariamente. El resultado es que, aún cuando la suma de los productos finales de cada mercancía (suma de las columnas de ***Y*** de cada fila) fuera igual en la producción conjunta que el correspondiente sumando (solo uno) en la producción simple, ocurre que *cada* sumando de $\boldsymbol{Y}\mathbf{I}$ en la producción conjunta es una *variable*. Si ahora comparamos el producto de precio por cantidad $\boldsymbol{p}_{\text{si}}\boldsymbol{y}_{\text{ii}}$ en la producción simple con el correspondiente $\boldsymbol{p}_{\text{ci}}\boldsymbol{y}_{\text{ij}}$ en la conjunta en términos de salarios (es decir, dividiendo ambos precios $\boldsymbol{p}_{\mathbf{s}}$ y $\boldsymbol{p}_{\mathbf{c}}$ por la tasa de salarios única e igual para ambos), nos da una relación puede ser fluctuante a pesar de que no lo sea *la de la suma* de todos los productos finales $\boldsymbol{y}_{\text{ij}}$ desde $\boldsymbol{j}=\mathbf{1}$ a ***n*** de la producción conjunta, y que este sea igual al único sumando correspondiente en la producción simple. Sin embargo, esta aparente libertad de fluctuación de cada sumando no puede alejarse demasiado del correspondiente precio de la producción simple porque la variabilidad de los precios en la producción conjunta tiene su límite respecto al de la conjunta. Ello por varios motivos: 1) estamos suponiendo que *las tasas de salarios y de ganancias son las mismas* en ambos tipos de producción para poder obtener el resultado de la comparación; 2) hemos utilizado los dos mismos numerarios -como se recordará- en ambos tipos de producción, uno de los cuales es *el producto neto*, es decir hicimos $\boldsymbol{PY}\mathbf{I}\text{-}\boldsymbol{PX}\mathbf{I}=\mathbf{1}$; 3) hemos desechado[74] posibles precios negativos si estos surgieran del resultado de la resolución de las ecuaciones. Estos hechos acotan la posible variabilidad de cada sumando $\boldsymbol{p}_{\text{ci}}\boldsymbol{y}_{\text{ij}}$ de la producción conjunta. Los precios que juegan en el modelo *esrafiano* son en realidad *precios de intercambio o coeficientes de trueque entre mercancías*, por lo que los grados de libertad[75] que ahora tienen los precios de la producción conjunta están *acotados* al resultado de la suma de precios por cantidades, que han de ser iguales para el único sumando de la

[74] Lo hacemos por la vía de la praxis, a la manera esrafiana, es decir, desechando aquellos métodos de producción que dieran lugar a precios negativos.

[75] Al estar dada la suma por la producción simple, los ***n*** sumandos de la producción conjunta tienen ***n*-1** grados de libertad.

producción simple $p_{si}y_{ii}$ a la suma de los n sumandos (sumas de todas las columnas de cada fila) $p_{ci}y_{ij}$ de la producción conjunta. Quizás al final sea más clara la explicación de Sraffa, que para eso era un genio.



Anexo 2: sobre la frontera salario-ganancia[76]

En la última parte del capítulo IX dedicado a "*otros efectos de la producción conjunta*", inicia Sraffa una discusión sobre la posibilidad de que ante un descenso en los salarios tenga como consecuencia necesariamente un alza en el tipo de ganancia[77]. Sraffa afirma que no siempre ha de ocurrir esto, porque si cambia el patrón de medida (mercancía-patrón), el salario medido en una mercancía-patrón cambiante puede tomar cualquier dirección y compensar -esto es lo que hay que interpretar de las palabras de Sraffa- durante algún tramo el aumento natural del tipo de beneficio ante el descenso de los salarios. Todo ello se deriva indirectamente de que en la producción conjunta tengamos -o podamos tener, según el modelo- más incógnitas que ecuaciones que impiden una única razón-patrón, que tengamos posibles multiplicadores negativos y, por último, unos posibles precios también negativos[78]. Sraffa lo soluciona con criterio económico como hemos visto: es la propia economía y sus actores los que eliminarán soluciones de precios negativos por inviables. Y esto es una pista para ciertos comportamientos que la economía neoclásica y marginalista no puede explicar. Me refiero a que los comportamientos económicos lleven, a pesar de todo, a precios negativos. La necesidad de una subvención casi permanente a ciertos sectores (en Europa, leche, algunos productos agrícolas, carbón, etc.) podrían explicarse a partir de estas posibilidades de precios negativos por las relaciones de costes directos e indirectos de estas industrias o sectores que llevarían a que los precios de sus inputs elevaran sus costes directos e indirectos, de tal forma que la suma de todos estos costes -seguidos a través de la suma de las matrices de requerimientos históricas- fueran tales que superaran los ingresos; ello se debería a que los precios finales (de producción) no pudieran elevarse al mismo ritmo que sus costes por la necesidad que tiene la economía -según estos modelos- de tender a igualar las tasas de beneficios y de salarios; también porque, en todo caso, no hay una única *razón-patrón* que determine la tasa máxima de beneficios, aunque hemos veremos más adelante que está acotada. Sraffa, como casi siempre, no especificó la función que justificaba sus afirmaciones, pero sí dio las explicaciones económicas pertinentes.

[76] Se abandona la diferenciación entre productos básicos y no básicos.
[77] "Producción de mercancías... ", pág. 90.
[78] Ver apéndice IV.

La posibilidad del cambio de convexidad - y por tanto del retorno de las técnicas- depende exclusivamente del cambio de las técnicas y no de los períodos de trabajo fechado, cambio de patrón (Sraffa) o de la actualización del valor del capital físico (Pasinetti, Nuti) exclusivamente.

Desde que Sraffa planteó el problema en los capítulos de la producción conjunta se ha hecho un esfuerzo por demostrar el error de la teoría del capital en el marginalismo. En efecto, en la teoría marginalista la relación entre la intensidad del capital por hora u hombre trabajada con respecto al tipo de interés, es una relación monótona decreciente sin cambio de convexidad. Para la crítica iniciada en el Cambridge inglés, con *Robinson*, *Sraffa*, *Kaldor*, *Dobb*, seguido luego por *Nuti*, *Pasinetti*, *Garegnani*, *Morishima*, etc., se ha demostrado la falsía de esta teoría en lo que respecta a este punto. Y si falla eso, también falla la misma relación respecto a la relación entre la productividad del trabajo de esta misma teoría, porque la frontera salario-ganancia puede ser, en algunos tramos, no monótona decreciente. Y con ello tampoco se cumple el teorema Euler de reparto del producto en función del valor de las productividades marginales de los factores. Sin embargo, a veces se traslada erróneamente la posibilidad del retorno de las técnicas -que es su consecuencia- achacándolo a lo que no es. Así, en el excelente -por otra parte- libro de Ahijado[79], se dice, referido a la función de producción que relaciona tasa de salario con tasa de ganancia $L[I - A(1+g)]^{-1}w = 1$, "*que es una función polinomial muy compleja de orden n-1, que es el orden de la matriz* ***A****, y tiene un trazado irregular*". Son argumentos que recoge a su vez de *Pasinetti*[80]. Desde luego, nada más gratificante que la derrota de unos los aspectos claves del marginalismo, pero me parece que este un argumento falso o, simplemente, un error. Desde entonces parece que perpetúa esta aseveración. Si *la frontera precios/salario-ganancia* es irregular, incluso, como afirmaba antes, no es monótona decreciente[81] en algún tramo, lo es no por lo que dice el autor referido.

---

[79] "Distribución, precios de producción y crecimiento", Manuel Ahijado, 1982, edit. Ceura, pág. 53.
[80] "Lecciones de la teoría de la producción", pág. 116, 1983 (Lezioni di teoria della produzioni, 1975)
[81] Una función es monótona decreciente en el tramo considerado si se cumple que para todo $\mathbf{x}_1<\mathbf{x}_2$ ocurre que $f(\mathbf{x}_1)<f(\mathbf{x}_2)$; si creciente, con el signo de desigualdad cambiado.

La función de los precios en la *producción simple con tasas de salario único ex-post y ganancia única* es como sigue:

(22) $$P = w(1+g)LY^{-1}\left[I - A(1+g)\right]^{-1} \quad \text{con} \quad A = XY^{-1}$$

que multiplicada por la matriz vertical **I** de unos ***n*x1,** despejado el salario y tomado pI como numerario[82] queda:

(23) $$w = \frac{pI = 1}{(1+g)LY^{-1}\left[I + (1+g)A + (1+g)^2 A^2 + \cdots + (1+g)^{n-1}A^{n-1}\right]I}$$

Se ha partido desde el principio de que ***A*** es productiva, es decir, que se cumple que ***X***>***XA***, además de que la tasa de ganancia sea menor que la razón-patrón (***g***<***R***), por lo que está acotada. Con ambas cabe la posibilidad de que la función que hay entre corchetes:

(24) $$S = I + (1+g)A + (1+g)^2 A^2 + \cdots + (1+g)^{n-1}A^{n-1}$$

sea convergente[83]. Por su parte, el teorema de *Perron-Froebenius* nos dice que (24) es una función creciente tanto de ***g*** como de ***A***. Es por lo tanto una función continua por ser suma de funciones continuas; es monótona creciente para cualquier valor de ***g*** (aunque sabemos que está acotada esta tasa). Y si (24) es continua y convergente, (23) es monótona decreciente, con puntos de corte en el eje de ordenadas y tangente en el infinito en el de abscisas. ¿Donde queda entonces la afirmación de Ahijado que el recoge de otros autores? La confusión viene -creo yo- al no distinguir otra vez entre *deslizamiento* a lo largo de la curva (entre salario-ganancia (***w-g***)) y *traslación* de esta misma curva. Para obtener una curva *salario-ganancia* con cambio de convexidad -que es una condición suficiente[84] pero no necesaria para el retorno de las técnicas- es necesario partir de la hipótesis económica de que el comportamiento empresarial consista en dejar fija una de las dos

[82] Se podría utilizar como numerario **pY** y las conclusiones serían las mismas en este epígrafe y en el siguiente.

[83] Con la posibilidad nos vale en este contexto. Lo será si el $1+g < 1/\left|\lambda_m\right|$, siendo λ_m el autovalor máximo de la expresión que hay entre corchetes en (22).

[84] No es necesaria porque hay un caso siempre posible: una recta que nos da la frontera salario-ganancia en la producción simple con salarios ex-ante (*pre-factum*) y una curva que surge bajo otros tipos de supuestos a partir de los salarios ex-post (*post-factum*).

variables monetarias -salarios o ganancias- y que optimice alguna función empresarial -ventas, beneficios, etc.-, variando la elección de las técnicas, es decir, variando ***A*** y/o ***L***. Nuti da en cambio una explicación financiera para el retorno de las técnicas: "*el significado económico de la oscilación es que, en ciertos intervalos de variación de la tasa de interés, una empresa es prestataria en ciertos períodos y prestamista en otros, y gana con un incremento de la tasa de interés como prestamista más de lo que pierde como prestatario, de manera que pueda pagar un mayor nivel de salarios si realiza operaciones de otorgamiento y toma de préstamos con una tasa más elevada de interés*"[85]. Pero esta explicación tiene, creo, dos defectos: 1) hay que recurrir a la reducción de trabajo fechado necesariamente; 2) más importante, en esta explicación no parecen variar ni ***A*** ni ***L***, por lo que no hay cambio de técnicas ni de organización, por lo que la función frontera salario-ganancia *no se desplaza* sino *sólo se desliza*. Con ello no cambia la convexidad y, menos aún, la monotoneidad de la función. Sraffa, por su parte, habla de *cambio de patrón* para justificar una línea oscilante entre salarios y ganancias y lo hace por la "*posibilidad de que el precio de un producto pueda descender más deprisa que el salario*"[86]. El economista italiano no dio la ecuación con la que trabajaba y hay que deducirla a partir de sus hipótesis.

Para la producción conjunta donde ***m***>***n*** (*no esrafiana*), el caso es el mismo, sólo que la ecuación (22) es más complicada por no ser cuadrada la matriz de productos ***Y***. El resultado es la ecuación (25).

$$P = Lw\,(1+g)\times\left[Y - X(1+g)\right]^{T}\times\left[\left[Y - X(1+g)\right]\times\left[Y - X(1+g)\right]^{T}\right]^{-1} \tag{25}$$

La conclusión es la de que sin cambio en las técnicas -es decir, variando ***Y***, ***X***, ***L***, ***A***^{i}, aunque no necesariamente todas- no se ve cómo puedan darse los casos de Sraffa y Ahijado que originan un retorno de las técnicas que hemos discutido. Un cambio de las técnicas debe implicar un tipo de comportamiento empresarial que suponga un desplazamiento de la función frontera salario-ganancia. Sólo se me ocurre una excepción que luego se verá. Sin ello, por más complicada que sea la ecuación característica -que no lo es- que menciona Ahijado,

---

[85] "Capitalism, Socialism and Sleady Growth", D. Nuti (1970).

[86] Pero esto sólo asegura que pueda cambiar la convexidad, no que cambie la condición de la función de ser monótona decreciente. Aunque el mero cambio de convexidad ya es suficiente -no necesaria- para el retorno de las técnicas.

no por eso deja de ser la función de precios continua, monótona y creciente (22), y con ella, monótona decreciente *la función frontera* **w-g**. También puede estar el error de los autores al considerar a $L[I-A(1+g)]^{-1}w=1$ como un polinomio que hay que resolver de forma tradicional[87], calculando los ceros (valores de la función que se obtienen al hacer cero la tasa de ganancia). No es cierto. Lo que se hace es calcular los autovalores de forma tradicional y elegir el único autovalor que cumple el teorema de Perron-Froebenius (**P-F**). No hay polinomio característico[88] de ***n*** ceros, sino un sólo cero: el autovalor de **P-F** elegido, es decir, el autovalor más alto en términos absolutos, que sea real y no repetido. No hay, por tanto, una ecuación algebraica cuyas ***n*** soluciones haya que utilizar en (22), sino un único valor. Y por más que variemos ***g*** para cada ***A*** dado, sólo tenemos un ***w*** bajo una relación monótona decreciente.

a) Retorno de las técnicas sin cambio de convexidad

Ante las dificultades de construir una *función salarios-ganancias* con cambio de convexidad a pesar del cambio de la tecnología (cambios en la matriz ***A*** de requerimientos más los inputs de trabajo ***L***), vamos a presentar cómo se puede construir una función con retorno de las técnicas convexa en todo su recorrido. Esta es la excepción de la que hablábamos antes. Para ello podemos utilizar la ecuación (23) de producción simple *esrafiana* o la (25) de producción conjunta con ***m***>***n***. Utilizamos la (23) en un primer momento de la manera que sigue:

(26) $$w(A_1,L_1,Y_1,g)=\frac{pI=1}{(1+g)L_1Y_1^{-1}\times\left[I+(1+g)A_1+(1+g)^2A_1^{\,2}+\cdots+(1+g)^{n-1}A_1^{\,n-1}\right]I}$$

(27) $$w(A_2,L_2,Y_2,g)=\frac{pI=1}{(1+g)L_2Y_2^{-1}\times\left[I+(1+g)A_2+(1+g)^2A_2^{\,2}+\cdots+(1+g)^{n-1}A_2^{\,n-1}\right]I}$$

Ambas ecuaciones se diferencian en las matrices de requerimientos ***A*** y en los inputs de trabajo ***L***. Ambas ecuaciones cortan en el eje de ordenadas (vertical) para ***g***=**0**, pero en puntos diferentes (salvo que se diera $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{L}_1=\boldsymbol{L}_2$ *e* $\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{Y}_2$) y descienden a medida que aumenta la

[87] Como nos dice Ahijado.
[88] Otra cosa es que para calcular todos los autovalores se tenga que calcular el determinante $I\lambda-AI=0$ de dimensiones **n**x**n**. Aquí si hay un polinomio característico n-dimensional. Pero esto es previo; luego sólo se toma un autovalor: el **P-F**.

tasa de ganancia de forma continua porque el denominador es una función suma de funciones continuas siempre crecientes (la inversa, por tanto, es decreciente). Pues bien, siempre podremos elegir valores de $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{Y}_2$ tales que se cumpla que:

variable	función w-g	envolvente
para $\mathbf{0} <= g < g_1$	$w(A_2,L_2,g) < w(A_1,L_1,g)$	$w(A_1,L_1,g)$
para $g=g_1$	$w(A_2,L_2,g) = w(A_1,L_1,g)$	$w(A_1,L_1,g)$
para $g_1<g<g_2$	$w(A_1,L_1,g) < w(A_2,L_2,g)$	$w(A_2,L_2,g)$
para $g=g_2$	$w(A_1,L_1,g) = w(A_2,L_2,g)$	$w(A_2,L_2,g)$
para $g_2<g<=M$	$w(A_2,L_2,g) < w(A_1,L_1,g)$	$w(A_1,L_1,g)$

y que ambas curvas se corten dos veces en los puntos $\boldsymbol{g}_1$ y $\boldsymbol{g}_2$. La función estaría definida por la curva quebrada *envolvente* que es continua a lo largo de todo ella, derivable -salvo en los puntos de corte $\boldsymbol{g}_1$ y $\boldsymbol{g}_2$- y convexa siempre. No hay pues cambio de convexidad y si retorno de las técnicas. Para su construcción es necesaria el concurso de los empresarios, que tienen a disposición los dos posibles procesos implicados en las curvas (26) y (27) y que maximicen las ganancias cambiando la técnica de producción en los puntos $\boldsymbol{g}_1$ y $\boldsymbol{g}_2$, para pasar de la ecuación (26) a la (27) en $\boldsymbol{g}_1$ y retornar a la (26) de nuevo en $\boldsymbol{g}_2$. La función envolvente es toda ella continua y derivable, salvo en los puntos de cruce entre las dos funciones. Si en lugar de (23) hubiéramos empleado (25) normalizada para $\boldsymbol{P}\mathbf{I}=\mathbf{1}$, las conclusiones hubieran sido parecidas, salvo que los movimientos en el cambio de las técnicas serían más bruscas, con posible aparición de precios negativos, pero en ningún caso y, dado que hemos tomado $\boldsymbol{P}\mathbf{I}$ como numerario, la suma de todos ellos sería positivo y la función siempre decreciente. En ningún caso cambiaría la convexidad quebrada de la curva *envolvente*.

b) Modelo convexo sin retorno de las técnicas

En el modelo anterior hemos supuesto desde el principio (desde $\boldsymbol{g}=\mathbf{0}$) que había 2 procesos definidos por (26) y (27) y que el empresario o gestor (o el conjunto de los que toman decisiones empresariales en un país) elegía, *porque estaba en su mano* a medida que iba aumentando el tipo de beneficio, un proceso u otro con el fin de maximizar los beneficios dado un tipo de salario (se puede entender al revés, porque formalmente da igual, aunque económicamente tenga sentido diferente). De esta manera se podía construir una envolvente que, dado en concreto los tipos de procesos, se daría un retorno de las técnicas. Sin embargo, para que el modelo sea operativo o simplemente realista, el gestor debía tener desde el principio (desde $\boldsymbol{g}=\mathbf{0}$)[89] opción a cualquiera de los 2 procesos. Esto supone una restricción, aunque normalmente no se hace explícito. En este segundo modelo supondremos que el nuevo proceso se hace presente en el momento de la intersección de la curva que define el proceso *en activo*. Dicho de otra manera, no necesariamente teníamos a nuestra disposición el proceso alternativo y sólo surge cuando aventuramos que una nueva técnica podría ser más barata -y obtener con ello más beneficios- que la anterior. Aunque parezca la misma que la del modelo anterior, tiene unas consecuencias distintas. La ecuación que define el proceso general -en singular- es formalmente la misma que las que definían el modelo anterior, pero con una diferencia notable: la del proceso $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{g})$ sólo comienza su andadura cuando el gestor se da cuenta de que hay la posibilidad de cambiar la técnica del proceso, variando $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{L}$, es decir, los medios de producción y los inputs de trabajo. Con este comportamiento ya no vale el modelo (a) de *deslizamiento* a lo largo de las curvas que definen los dos procesos, sino que ahora sólo tenemos una curva que define los dos procesos: el que teníamos hasta $\boldsymbol{g}_2$ y el nuevo que, al variar $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{L}$**,** se produce un *desplazamiento* de la curva que define la función -única función-, de tal forma que lo que obtenemos es una curva quebrada con un salto o, al menos, con una quiebra de la función presente para situarla de nuevo más alejada de ambos ejes. En términos formales, la nueva curva será $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{g})>\boldsymbol{w}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{g})$, para cualquier valor de $\boldsymbol{g}$. La realidad de este modelo es que nunca se produce un cruce de 2 técnicas, porque *el desplazamiento* de la función cuando se van a cruzar es permanente. El resultado es una curva descendente, monótona, quebrada, continua a trozos, derivable también a trozos y convexa. Sería como la (26) o (27), pero definida de esta manera:

[89] Vamos a relacionar la sucesión temporal con el aumento de los beneficios. Esto se hace siempre, pero muchos no se dan cuenta de que lo hacen. Lo ideal sería poder disponer de un espacio tridimensional, pero no es el caso.

(28) $$w(A,L,g)=\frac{pI=1}{(1+g)L\,Y^{-1}\times\left[I+(1+g)A+(1+g)^2A^2+\cdots+(1+g)^{n-1}A^{n-1}\right]I}$$

variable	función w-g	envolvente
para $0<=g<g_1$	$w(A_1,L_1,g)< w(A_1,L_1,g)$	$w(A_1,L_1,g)$
para $g=g_1$	$w(A_1,L_1,g) = w(A_2,L_2,g)$	$w(A_1,L_1,g)$
para $g_1<g<g_2$	$w(A_1,L_1, g) < w(A_2,L_2,g)$	no hay
para $g_2<=g<g_3$	$w(A_1,L_1,g)<w(A_2,L_2,g)<w(A_3,L_3,g)$	$wA_3,L_3,g)$
para $g=g_3$	$w(A_2,L_2,g) = w(A_3,L_3,g)$	$w(A_3,L_3,g)$

con ***R*** como tasa máxima de ganancia y siendo la *función envolvente* continua entre $\boldsymbol{g}=\mathbf{0}$ y $\boldsymbol{g_1}=\mathbf{1}$ y derivable entre $\boldsymbol{g}=\mathbf{0}$ y $\boldsymbol{g_1}<\mathbf{1}$; no existe entre $\boldsymbol{g_1}<\boldsymbol{g}<\boldsymbol{g_2}$*;* es de nuevo continua para $\boldsymbol{g}=>\boldsymbol{g_2}$ y derivable para $\boldsymbol{g}>\boldsymbol{g_2}$ hasta $\boldsymbol{g}<\boldsymbol{R}$; en $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{R}$ sería continua, pero no derivable, obviamente. Para $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g_3}$ la función no se deslizaría por la curva, sino que se produciría *un salto* a una nueva función más a la derecha, con lo cual nunca se volvería a cruzar con una curva que representara una técnica anterior. Y, sin embargo, siempre convexa y monótona decreciente. No hay retorno de técnicas porque la función es única, con las características anteriores. La explicación económica es la siguiente: el gestor o gestores empresariales trabajan con unos medios de producción y de trabajo de acuerdo con un sistema productivo que les permite ir aumentando los beneficios (ganancias); si en un momento determinado estos se estancan de tal manera que, aún cuando disminuyan los salarios relativos apenas aumenten los beneficios (se hace inelástica la curva (28)), buscan un cambio de sistema, de métodos de producción, nuevas recombinaciones del libro de alternativas de producción, de organización, etc., y cambian la matriz de requerimientos ***A*** y el vector de inputs de trabajo ***L***[90], y si no se equivocan, *desplazarán* la curva del proceso productivo a la derecha *en ese momento* (antes no existía como alternativa real), y el sistema será más productivo; si se equivocan, pasará lo contrario, y la curva se desplazará hacia el origen del eje cartesiano de salarios-ganancias. Cuando el gestor (o el sector o el

[90] Al cambiar **A** se sobrentiende que pueden cambiar **Y**, **X** o uno cualquier de los dos, porque **X**=**AY**.

sistema en su conjunto) acierte -dada la competencia que tiende a igualar salarios y beneficios en todos lo sectores (mercancías)- aumentará en un principio los precios de producción y sus beneficios, pero a más plazo, la compra de sus medios serán más caros como consecuencia del incremento de la demanda de esos medios por parte de las empresas que han obtenido beneficios del mismo sector (que el que opera el gestor); también porque habrán disminuido la escala del resto de empresas que sus beneficios estaban por debajo de la media y otras habrán simplemente. Entonces -por este motivo- se encarecerán la oferta de estas empresas de medios para nuestros gestores (del nivel que sean). Resumiendo, tanto por el lado de la demanda de medios que son productos de otras empresas, como de la disminución de la oferta de estas mismas empresas, los precios se adecuarán -o tenderán a ello- de tal forma que los beneficios tiendan a igualarse. Ocurrirá que nuestro gestor tendrá que adecuarse nuevamente, trasladando su curva (28) a la derecha del origen de los ejes de abcisas y ordenadas. Con todo ello intentará combatir el descenso de los beneficios que supone *deslizarse* (variando salarios y ganancias a lo largo de la frontera salarios-beneficios) con *desplazamientos* a la derecha de esta misma curva, es decir, con variaciones de las técnicas de producción, modificando $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{L}$ en un proceso sin fin (o al menos hasta que desaparezca la empresa, empresas o sector o haya que apuntalarlo mediante subvenciones[91]).

c) <u>Modelo de frontera de salario-ganancia con salarios acotados</u>

En un intento de acercarnos a la realidad, se presenta en este epígrafe un modelo donde el gestor (o gestores, sectores o de toda la economía) tienen acotados simultáneamente los salarios por arriba con $\boldsymbol{w}_M=\mathbf{f}(\mathbf{0}<=\boldsymbol{g}<=\boldsymbol{R})$=constante, y por abajo con $\boldsymbol{w}_m=\mathbf{f}(\mathbf{0}<=\boldsymbol{g}<=\boldsymbol{R})$=cte: por arriba, porque son los anteriores los que ponen límite al salario de los trabajadores; por abajo, porque son los mismos trabajadores -o sus representantes sindicales- los que lo acotan mediante mínimos de convenio, acuerdos, mínimos legales (gobiernos), etc. De esta manera, aún cuando las funciones que expresan la frontera salario-ganancia son las mismas que en los casos anteriores, el comportamiento de los gestores se presupone diferente. Este, cuando se haya en un punto de salarios y ganancias dentro del intervalo de salarios ($\boldsymbol{w}_m$ /$\boldsymbol{w}_M$) sigue con

91 Podría ser el caso del sector energético (nuclear) español y los llamados *costes de transformación a la competencia.*

la misma técnica caracterizada por la curva $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{L}_1,\mathbf{g})$, *deslizándose* hacia abajo, es decir, aumentando las ganancias y rebajando los salarios[92], pero hasta el nivel $\boldsymbol{w}_m$, no más. Cuando llega a ese punto donde se cortan la función frontera anterior y la recta que expresa el salario mínimo $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_m$, lo que hace es *desplazar* la curva a la derecha, modificando los valores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{L}$ hasta una nueva posición que se encuentre al menos *dentro* del intervalo ($\boldsymbol{w}_M / \boldsymbol{w}_m$), y así sucesivamente. El esquema es el siguiente:

variable	*función w-g*	*envolvente*
para $0<=g<g_1$	$w_M < w(A_1,L_1,g)$	no existe
para $g=g_1$	$w_M = w(A_1,L_1,g)$	$w(A_1,L_1,g)$
para $g_1<g<g_2$	$w_m < w(A_1,L_1,g) < w_M$	$w(A_1,L_1,g)$
para $g=g_2$	$w_m = w(A_1,L_1,g) < w_M$	$w(A_1,L_1,g)$
para $g_2<g<g_3$	$w_m < w(A_2,L_2,g) < w_M$	$w(A_2,L_2,g)$
para $g_3=g<R$	$w_m =w(A_2,L_2,g) < w_M$	$w(A_2,L_2,g)$

La función pues no existe hasta que se corta con el salario máximo, por lo que es continua entre $\boldsymbol{g}_1<=\boldsymbol{g}<=\boldsymbol{g}_2$ y derivable entre $\boldsymbol{g}_1<\boldsymbol{g}<\boldsymbol{g}_2$; entre $\boldsymbol{g}_2<\boldsymbol{g}<\boldsymbol{g}_3$ la función no existe. En este intervalo surge un problema: si el gestor no es capaz de encontrar unos valores para $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{L}$ que le permitan saltar a la función $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{g})$, la empresa (sector, economía privada) no podrá compaginar las condiciones de tasa de ganancia, tasa de salarios y tecnología. El modelo no da la solución, pero la realidad la dará de alguna manera, aunque sea dolorosamente[93]. Lo mismo ocurría en el modelo anterior ante un *desplazamiento* de la función salario-ganancia, aunque no se haya hecho mención; no así en el modelo primero de retorno de las técnicas sin cambio de convexidad, donde la función envolvente era siempre continua y salarios y ganancias se *deslizaban* a lo largo de la curva sin sobresaltos. Estos modelos -y los que siguen- son acordes con la manera de pensar *esrafiana*: los modelos económicos -todas las teorías sociales son

[92] Siempre en términos de la mercancía-patrón y con la normalización **pl=1**.
[93] En forma de economía sumergida o defraudadora.

modelos en última instancia- no lo explican todo, ni todas la situaciones, pero imponen límites materiales a los comportamientos individuales y colectivos, públicos y privados, en lo que respecta a la producción, distribución y consumo de bienes y servicios. Para acabar este epígrafe, en el tramo $\boldsymbol{g}_3 <= \boldsymbol{g} <= \boldsymbol{g}_4$ la función es continua en todo el y derivable entre $\boldsymbol{g}_3 < \boldsymbol{g} < \boldsymbol{g}_4$.

d) Modelo de frontera salario-ganancia escalonada

En este modelo el salario es único, pero va cambiando según tramos de la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$, y permanece constante hasta el siguiente tramo. Sea $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1(\boldsymbol{g}_0<=\boldsymbol{g}<=\boldsymbol{g}_2)$=cte. el valor de los salarios impuesto por la realidad (o las fuerzas sociales y económicas) entre los tramos que de ganancia que se indica; luego se salta en el siguiente tramo, de tal forma que ahora *la función horizontal de limitación de salarios* $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_2(\boldsymbol{g}_2<=\boldsymbol{g}<=\boldsymbol{g}_4)$=cte. es más alta que la anterior; *la función frontera* $\boldsymbol{w}$-**g** es $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{g})$ y se corta con *la función de limitación* tal que $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1$, es decir, en un punto intermedio entre $\boldsymbol{g}_0$ *y* $\boldsymbol{g}_2$ (tal como $\boldsymbol{g}_1$). La peculiaridad de este modelo es la de que entre $\boldsymbol{g}_1$ y $\boldsymbol{g}_2$, los gestores no pueden hacer compatible los salarios con la función de producción que determina la frontera de salario-ganancia $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{g})$; lo único que pueden hacer es *saltar* a $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{g})$, y lo harán en un punto intermedio de la nueva *función de limitación de salarios* $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_2(\boldsymbol{g}_2<=\boldsymbol{g}<=\boldsymbol{g}_4)$=cte, y así sucesivamente. El resumen sería:

variable	función w-g	f. de salarios
$0<=g<g_1$	no existe	$w=w_1(0<=g<g_2)$=cte.
$g=g_1$	$w(A_1,L_1,g)$	$w=w_1(0<=g<g_2)$=cte.
$g_1<g<=g_2$	no existe	$w=w_1(0<=g<g_2)$=cte.
$g_2<g<g_3$	no existe	$w=w_2(g_2<=g<g_4)$=cte.
$g=g_3$	$w(A_2,L_2,g)$	$w=w_2(g_2<=g<g_4)$=cte.
$g_3<g<=g_4<R$	no existe	$w=w_2(g_2<=g<g_4)$=cte.

Aquí la función envolvente es siempre creciente, obligando a los que deciden (empresa, sector o sectores) a cambiar $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{L}$ para hacer compatible salarios y ganancias siempre crecientes, por tramos los primeros y continuas las segundas.

e) Modelo de frontera salario-ganancia de doble acotación

A diferencia del modelo con acotación de salarios, supondremos que tanto los salarios como las ganancias lo están. Es decir, los trabajadores, merced a acuerdos con los empresarios, gestores, por ley, etc., o merced a su capacidad impedir la bajada de sus salarios como consecuencia del deslizamiento de la función de salario-ganancia aumentando la tasa de ganancia a costa de los salarios, el salario no bajará de un tope $\boldsymbol{w}_{\mathrm{m}}$; tampoco podrán subir más allá de un tope superior $\mathbf{w}_{\mathrm{M}}$ impuesto por la parte contraria. Hasta aquí es el mismo modelo que el que hemos llamado *con acotación de salarios*. La novedad es que también las ganancias están acotadas. En efecto, el gestor y/o empresario o el propio conocimiento tecnológico para ese momento no comenzará la producción de la empresa (sector) hasta no obtener un nivel de ganancias mínimo $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$; tampoco podrá superar como sabemos la razón-patrón o la tasa máxima de beneficios del sistema económico (aunque no coincida con la razón-patrón). Con ello tenemos un espacio cuadrado de soluciones factibles cuyo vértice inferior es el $(\boldsymbol{w}_{\mathrm{m}} /\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}})$ y el superior $(\boldsymbol{w}_{\mathrm{M}} /\boldsymbol{g}=\boldsymbol{R})$[94]. Si ahora la función frontera atraviesa el cuadrado, podrá tocar primero en un punto como el $(\boldsymbol{w}_1/\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}})$, donde $\boldsymbol{w}$ está acotado $(\boldsymbol{w}_{\mathrm{m}}<\boldsymbol{w}_1<\boldsymbol{w}_{\mathrm{M}})$. Luego la gestión podrá aumentar las ganancias de la empresa (o del sector si estamos aplicando el modelo de forma más general), *deslizándose* por *la función frontera* $\boldsymbol{w}$-$\boldsymbol{g}$ hasta el lateral derecho del cuadrado, es decir hasta que $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{L},\boldsymbol{g})=\boldsymbol{w}_{\mathrm{m}}$ y $\boldsymbol{g}_2$ tal que $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}<\boldsymbol{g}<\boldsymbol{g}_2$. A partir de ahí no se puede hacer compatible salarios, ganancias y *la función frontera* $\boldsymbol{w}$-$\boldsymbol{g}$, con lo cual sólo cambiando la técnica y/o la organización, es decir, cambiando $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{L}$, podrá *desplazarse* esta función a la derecha $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{g})$ hasta encontrar un punto del cuadrado factible que ya hemos comentado. Todo eso se puede resumir de la siguiente manera:

	variable	función frontera w-g
para	$0<g<g_{\mathrm{m}}$	no existe

[94] O **M**, si el modelo de función no tiene razón-patrón y sí tasa máxima de beneficios.

para	$g_m <= g <= g_2$	$w_m < w(A_1,L_1,g) < w_1 < w_M$
para	$g_2 < g < R$	$w(A_1,L_1,g) < w(A_2,L_2,g)$
para	$g = R$	$w_m < w(A_2,L_2,g) <= w_M$

Con esta función frontera las ganancias no pasarán del tope máximo de ganancia, porque a partir de $\boldsymbol{g}_2$ no son compatibles a la vez salarios, ganancias y función frontera; sólo lo serán si cambia la matriz de requerimientos ***A*** y la de inputs de trabajo ***L***, y la función frontera se desplace a la derecha del origen de coordenadas, pero no más allá del extremo inferior ($\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_m / \boldsymbol{g}=\boldsymbol{R}$) o del extremo superior ($\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_M / \boldsymbol{g}=\boldsymbol{R}$). Por encima del cual a los trabajadores les encantaría llegar, pero la gestión no podría hacerlo, incluso aunque quisiera (***R*** es el límite máximo de ganancias que le permite el sistema económica merced a la competencia).

Anexo 3: frontera salario-ganancia y producción conjunta

Como complemento al epígrafe sobre la frontera salario-ganancia, vamos a dar algunos desarrollos matemáticos a partir de las ecuaciones implícitas del modelo de Sraffa, apartándonos de las dadas por Schefold y Nutti[95]. El primer caso será el más simple posible:

a) Frontera salario-ganancia srafiano con salarios *pre-factum*.

Partimos de la ecuación *esrafiana pre-factum* que define al sistema:

(1) $$\underset{1xm}{P}\underset{nxn}{Y} = \left[\underset{1x1}{w}\underset{1xn}{L} + \underset{11xn}{p}\ \underset{nxn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{1x1}{g}\right)$$

Si ahora reemplazamos la matriz ***X*** de medios por ***X***=***AY***, con lo que ***A***=***XY***-^{1} y despejamos los precios ***P*** queda:

(2) $$P = w(1+g)LY^{-1}\left[I-(1+g)A\right]^{-1}$$

Para eliminar el factor precios ***p*** vamos a post-multiplicar ambos miembros de la ecuación por ***YI***, siendo ***Y*** los bienes finales e ***I*** el vector vertical de unos. Además haremos del producto ***PY*I** el numerario, es decir, ***PY*I=1**. Con todo ello queda:

(3) $$1 = PYI = w(1+g)LY^{-1}\left[I-(1+g)A\right]^{-1}YI$$

Llegado a este punto parecería que ya hemos arribado al destino simplemente con despejar los salarios de la ecuación y tendríamos una relación inversa entre estos y las ganancias puesto que estas aparecen en dos lugares en la ecuación (3) y ambas de forma creciente: la primera es evidente y la que está pre-multiplicando a la matriz de requerimientos ***A*** lo es por el teorema de *Perron-Froebenius* al suponérsela cuadrada, no negativa e irreductible. Pero vamos a dar un paso más y desarrollamos (3), entonces queda (4):

$$1 = PYI = w(1+g)LY^{-1}\left[I+(1+g)A+(1+g)^2A^2+\cdots+(1+g)^{n-1}A^{n-1}\right]^{-1}YI$$

[95] Capialism. Socialism and Sleady Growth, 1970

Ahora reemplazamos la matriz ***A*** por su valor en (2) y abrimos los corchetes y queda (5):

$$1=PYI = w(1+g)L\left[Y^{-1}IY+(1+g)Y^{-1}XY^{-1}Y+(1+g)^{2}Y^{-1}XY^{-1}XY^{-1}Y+\cdots+(1+g)^{n-1}Y^{-1}XY^{n-1}Y\right]^{-1}I$$

y llamando ahora ***B*** a ***B***=***Y***$^{-1}$***X*** y reemplazando en lo anterior:

$$(6)\quad 1 = w(1+g)L\left[I+(1+g)B+(1+g)^{2}B^{2}+\cdots+(1+g)^{n-1}B^{n-1}\right]I$$

La diferencia de (3) respecto a (6) es que ahora tenemos integrado la matriz de bienes finales ***Y*** dentro del corchete, al cual se puede aplicar también el teorema *Perron-Froebenius*[96] y asegurar el crecimiento de la tasa de ganancia. Despejando los salarios queda:

$$(7)\qquad w = \frac{1}{(1+g)L\left[I-(1+g)B\right]^{-1}I}$$

que es una función decreciente, con un punto de corte en el eje de ordenadas:

$$(8)\qquad para \quad g=0 \quad \Rightarrow \quad w=\frac{1}{L\left[I-B\right]^{-1}I}$$

y con un descenso monótono, decreciente, convexo y tangencial en el eje de abcisas a medida que aumenta la tasa de ganancia. Ahora bien, nosotros sabemos que ese descenso tiene el límite *esrafiano* de la razón-patrón ***R***. Este desarrollo matemático vale tanto si estamos en la producción simple como en la conjunta, puesto que la diferencia es que la matriz ***Y*** de bienes finales sea diagonal (producción simple) o no (producción conjunta), es decir, con valores positivos (puede haber algún cero) en todos los elementos. Pero hay una diferencia notable entre ambos: en la producción conjunta ya no podemos asegurar que ***A*** -y en nuestro caso menos aún ***B***- sea productiva, irreductible y estrictamente mayor que cero, con lo que no podemos recurrir a Perrón-Froebenius. Eso implica que el crecimiento de ***g*** en (2) y siguientes no está asegurado por el teorema; tampoco la convergencia del denominador de (8). Para asegurar esto hay que recurrir al

[96] Suponiendo a **B** irreductible y no negativa, también y que **g**<**R** (criterio de convergencia) para poder pasar de (57) a (58).

comportamiento económico de los actores -tal y como hace Sraffa[97]- de tal forma que sean ellos los que seleccionen aquellos procesos productivos que aseguren precios y salarios positivos y, a largo plazo, una frontera decreciente entre salarios y ganancias, puesto que es imposible que en una economía real y en su modelo explicativo auto-reproductivo sin acumulación y sin variaciones en la técnica (***A***,***L***) y sin aumentos de productividad, puedan crecer simultáneamente salarios y ganancias. No obstante, este hecho, esta necesidad de recurrir a la economía real, demuestra que la teoría neoclásica -donde la relación entre salarios y ganancias es monótona decreciente y convexa- no puede admitirse como cierta con carácter general. Además, esta necesidad de adecuarse a una economía viable, es decir, modificar la matriz de requerimientos ***A*,** supone un *desplazamiento* de la curva frontera de salario-ganancia, con lo que la función más realista de esta frontera sólo tiene sentido en un espacio de 4 dimensiones (***w***, ***g***, ***A*, *L***), donde son más significativos las variaciones de la matriz ***A*** de requerimientos que los *deslizamientos* a través de la línea salario-ganancia.

La limitación de este modelo de producción conjunta srafiano es que el número de procesos ha de ser igual al número de mercancías producidas[98] (***Y*** y ***X*** son del mismo rango).

b1) Frontera salario-ganancia con producción conjunta y con salarios y ganancias múltiples.

Ahora cambiamos el modelo anterior al considerar no un sólo tipo de salario y una sola tasa de ganancia, sino ***n*** tasas de salarios y ***n*** tasas de ganancias, lo cual le añade realismo al modelo. Aquí ya tenemos que

---

[97] Es notable que Sraffa no menciona ni recurre en ningún momento al teorema de Perrón-Froebenius. Es posible que el no lo conociera en un principio, pero sí los dos notables matemáticos de Cambrigde que le ayudaron, y en una obra de varias décadas de maduración es impensable que no fuera avisado de ello. Quizá lo omitió por no desvirtuar el carácter económico de sus explicaciones. Mi explicación en concreto es que Sraffa quería presentar un modelo donde el comportamiento de los actores implicados fuera determinante en él, cosa que se hubiera perdido se fijaba las condiciones formales a priori. Pero esto ha originado, creo yo, una confusión en el punto trascendental de la frontera salario-ganancia al no distinguir entre *deslizamientos* a lo largo de la frontera y *desplazamientos* de esta función, que ocurre siempre que no consideremos dados todas las variables (***A***, precios, ***L***) que no sean precisamente salarios y ganancias. De ahí el esfuerzo que se ha hecho en este modesto trabajo en distinguir ambos movimientos.

[98] Pág. 68 de “Producción de mercancías... “.

caminar solos porque Sraffa nos abandona, puesto que en ningún momento consideró esta posibilidad.

(9) $$\underset{1xn}{p}\underset{nxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{p}\underset{nxn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{nxn}{G}\right)$$

donde ***W*** y ***G*** son matrices diagonales. Ahora haremos lo que hemos hecho en el caso a): despejaremos los precios ***P***, hacemos ***A***=***XY***$^{-1}$ y emplearemos el mismo numerario, es decir, ***PY*****I**=**1**, y después de hacer todo esto queda:

(10) $$1 = PYI = LW(1+G)Y^{-1}\left[I - A(1+G)\right]^{-1} YI$$

Llegado a este punto parecería que no podemos salir de ahí salvo extender la expresión entre corchetes como la suma geométrica que representa. Al hacerlo así y sustituir la matriz de requerimientos ***A*** por su valor queda[99] (11):

$$1 = LW(1+G)Y^{-1}\left[I + XY^{-1}(1+G) + XY^{-1}XY^{-1}(1+G)^2 + \cdots + (XY^{-1})^{n-1}(1+G)^{n-1}\right]^{-1} YI$$

Y si abrimos la expresión entre corchetes para permitir pre-multiplicarla por Y^{-1} y pos-multiplicarla por Y, llamamos ***B*** a $B = Y^{-1}X$ y ***C*** a $C^i = Y^{-1}(1+G)^i Y$ (al igual que el caso anterior) y con las equivalencias siguientes:

1) $Y^{-1} I Y = I$
2) $Y^{-1}XY^{-1}(1+G)Y = BY^{-1}(1+G)Y = BC$
3) $Y^{-1}XY^{-1}XY^{-1}(1+G)^2 Y = B^2 Y^{-1}(1+G)^2 Y = B^2 C^2$

....

n) $Y^{-1}(XY^{-1})^{n-1}(1+G)^{n-1} Y = B^{n-1} Y^{-1}(1+G)^{n-1} Y = B^{n-1} C^{n-1}$

tenemos ahora que:

(12) $$1 = LW(1+G)\left[I + BC + B^2C^2 + \cdots + B^{n-1}C^{n-1}\right] I$$

Y si por comodidad hacemos:

[99] Damos por supuesto que la expresión entre corchetes de (61) sea convergente.

(13) $$D=\left[I+BC+B^2C^2+\cdots+B^{n-1}C^{n-1}\right]$$

es evidente que ***D*** es creciente con respecto a cualquiera de las tasas de ganancias, es decir $d\boldsymbol{C}/d\boldsymbol{g}_i>\mathbf{0}$ (para todo ***i***=**1** a ***n***) debido a que ***C*** depende crecientemente de ***G***. No podemos pasar (13) a la expresión sintética porque no tenemos ahora ninguna garantía de que sea creciente pero convergente. Lo será, en todo caso, si cumple que: *límite de* $B^iC^i \rightarrow$ *a cero si* $i \rightarrow \infty$ (condición necesaria), o también si el sistema $\lambda Y = BCY$ tiene una autovalor máximo tal que $1<1/|\lambda_m|$, siendo λ_m el autovalor máximo (condición suficiente)[100]. Ahora bien, si ***D*** no fuera convergente, entonces puede pasar cualquier cosa, incluso valores disparatados desde el punto de vista económico, en especial porque en ***B*** actúa la inversa de ***Y***. Veamos en forma desarrollada (12):

(14) $$1=(l_1\cdots l_n)\times\begin{bmatrix} w_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_n\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1+g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1+g_n\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix}$$

y visto de forma abreviada:

(15) $$1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l_i w_i (1+g_i) d_{ij}$$

Parecería también que hemos llegado al final, pero si ahora hacemos que para algún $\boldsymbol{w_i}$ o conjunto de valores de ***w*** se cumpla que:

(16) $$1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l_i w_i (1+g_i) d_{ij} = \left(\sum_{i=1}^{n} l_i \hat{w}_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(1+g)_i\, d_{ij}\right)$$

cosa que siempre podemos hacer con tal de respetar (16), donde tenemos una ecuación y ***n*** tasas de salarios (gr. de libertad = ***n***-**1**). Si los actores económicos son capaces de desechar procesos que den valores disparatados, se pude concluir que, si ***D*** es creciente respecto a cada tasa de salarios ***g***, hay una relación inversa entre *masa de salarios* y ganancias de acuerdo con:

[100] Ver el apéndice matemático al libro de Pasinetti “Lecciones de la teoría de la Producción” ya mencionado.

(17) $$\sum_{i=1}^{n} l_i \hat{w}_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(1+g_i)d_{ij}}$$

que es una función decreciente con las consideraciones anteriores. El punto de corte en el eje de ordenadas sería:

(17b) $$para \;\; g_i = 0 \;\; \forall i = 1 \; a \; n \;\; \Rightarrow \;\; \sum l_i \hat{w}_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}}$$

Pero (17) y todo el proceso seguido hasta aquí tiene algunas particularidades que no tenía el caso a) de una frontera con una única tasa de salarios y una única tasa de ganancia:

1) Ahora no tenemos salarios (aunque sean múltiples) para comparar con la ganancia (una o múltiples), sino que debemos tomar el producto de los inputs de trabajo ***L*** y los salarios ***w***. Dicho de otra forma, al tomar las ganancias como variable independiente, no sabemos -en este modelo- qué incidencia tiene sobre una tasa de salarios en particular, sino sólo sobre la masa de salarios ***LW.*** Podría ocurrir que un aumento de las ganancias en un sector provocara a la vez un aumento de los salarios en otro -incluso en el mismo- con tal de que el conjunto de la masa de salarios disminuyera.

2) Como hemos tenido que hacer el cambio de w por $\hat{w}$ para algún salario o para el conjunto de ellos (aunque respectando (16)), no tenemos un único punto de arranque de los salarios en el eje de ordenadas cuando las ganancias son nulas, sino una infinidad posible de puntos de arranque.

3) Aún tomando un punto de arranque cualquiera, es decir, desechando la infinidad de combinaciones posibles (***n*-1**)!, puesto que tenemos una ecuación a respectar) para el punto de arranque, hay otra infinidad (en concreto ***n***) de funciones decrecientes (suponiendo que lo sean) según las distintas tasas de ganancia. La forma de concretar esta última cuestión sería tomar la tasa de ganancia ($\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$) que provoca la masa de salarios menor y la tasa de ganancia ($\boldsymbol{g}_{\mathrm{M}}$), que provoca a su vez

la masa de salarios mayor. Y esto es así si estas tasas se mantienen en sus puestos de menor y mayor tasa de salarios a medida que aumentan sus valores, pero bien podría ocurrir que fueran sustituidas por otras tasas de ganancia (hay ***n***) que le tomaran el relevo. De ocurrir esto, tendríamos que cambiar de tasas de ganancia cada cierto tramo de la variable de tal forma que provocara la menor tasa de salario y la mayor.

4) La cosa se podría complicar más aún, porque podría ocurrir también que esa especie de racimos descendientes que arrancan unidos del eje de ordenadas según (17) se cruzaran entre sí si la velocidad de caída de cada racimo es diferente. Es el caso que planteamos de retorno de las técnicas para tasas únicas de salario y ganancia con funciones convexas. Sería como verlo al microscopio. A los efectos teóricos, pues, puede estudiarse el modelo con tasas de salarios y ganancias únicas, pero desde el punto de vista empírico, este modelo de tasas únicas entiendo que es muy pobre.

b2)<u>Frontera salario-ganancia también srafiana y no srafiana.</u>

Vamos a ver que hay una forma más simplificada que esta y que vale tanto para el caso de Sraffa -donde el número de procesos (o mercancías) de bienes finales son iguales al de los medios de producción- como si son mayores los procesos. Las 3 ecuaciones que van a definir el sistema son:

(18) $$\underset{1xm}{p}\underset{mxn}{Y}=\left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W}+\underset{1xm}{p}\underset{mxn}{X}\right]\times\left(1+\underset{nxn}{G}\right)$$

(19) $$\underset{1xm}{p}\underset{mxn}{Y}=\left[\underset{1xm}{p}\underset{mxn}{X}\right]\times\left(1+\underset{nxn}{R}\right)$$

(20) $$pXI=1$$

siendo (20) el numerario, ***R*** representa la matriz diagonal de tipos de ganancia máximas de cada sector cuando las tasas de salarios se han hecho cero, y que en el caso de que ***m***=***n*** estamos en el caso *esrafiano* de producción conjunta. De este conjunto de ecuaciones obtenemos por sustitución:

(21) $$LW(1+G)I = pX(R-G)I$$

ecuación que desarrollada de forma ordinaria:

(21b) $$\sum_{i=1}^{n} l_i w_i (1+g_i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} \left(R_j - g_j \right)$$

No tenemos, como en el modelo anterior, una única tasa de salarios ni de ganancias, por lo que vamos a sustituir en (72b) las siguientes ecuaciones:

(22) $$\hat{w} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i w_i \left(1+g_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{m} l_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{m} \left(1+g_i\right)\right)}$$

(23) $$\hat{g} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} g_i$$

Ambas, (22) y (23), sustituidas en (21b), dan la fórmula que define en este modelo la frontera salario-ganancia a partir de ***n*** tasas de salarios y ***n*** tasas de ganancias:

(24) $$\hat{w} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} \left(R_j - g_j\right)}{n\left(1+\hat{g}\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)}$$

y ahora sí podemos asegurar que hay una relación decreciente entre salarios y ganancias con tal de que el numerador sea mayor que cero, es decir, que:

(25) $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} R_j > \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} g_j$$

Pero vamos a ir más lejos, porque ahora sustituiremos los $\boldsymbol{R}_{\mathrm{j}}$ (tasas máximas de ganancias de cada sector ***j***) por un ***R*** único como:

(25b) $$\hat{R} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} R_j}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij}}$$

y como además el denominador de (76) vale uno por (71), queda:

(26) $$\hat{w} = \frac{\hat{R} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} g_j}{n(1+\hat{g}) \times \left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)} = \frac{\hat{R} - pXGI}{n(1+\hat{g})LI}$$

Comparando esta expresión[101] con la obtenida en el modelo anterior (17) para el valor de los salarios respecto a las ganancias se puede observar dos avances y un retroceso: 1) no hemos tenido que invertir ninguna matriz, por lo que no tenemos que conjeturar acerca del comportamiento económico de los actores para conjurar los peligros de valores negativos en los precios o salarios; 2) queda más claro aún la relación inversa entre salarios y ganancias, en una relación monótona decreciente con tal de que el denominador de (26) no se haga negativo o cero: 3) esta tercera diferencia va en contra de (26): aquí los salarios dependen, además, del conjunto de precios, cosa que no ocurría en (17). Para solventar el problema hay que partir de que los precios están dados, es decir, la relación entre salarios y ganancias es estable con precios dados. Como dice el refrán, no hay bien que por mal no venga (y al revés).

Alguien podría estar tentado en considerar al ***R*** único como igual a la razón-patrón *esrafiana* de la producción simple. Puede coincidir o estar muy cerca ambas, pero hay que recordar que aquella razón-patrón *esrafiana* tenía su razón de ser al no depender de los precios. Significaba 2 cosas simultáneamente: la tasa de beneficio máxima (y única) y la razón (única) entre la producción neta y los medios empleados en un sistema reducido de la economía. Aquí, la razón ***R*** significa *sólo* la tasa máxima de ganancia de cada sector ***j***.

Interesante en este modelo son los puntos de corte de las variables en los ejes de ordenadas y de abcisas. Veamos:

---

[101] Como se ve, se da en forma ordinaria y en forma matricial.

(27) $$para\ \ \hat{g}=0\ \ y\ \ g_i=0\ \ \forall i=1\ \ a\ \ n\ \ \Rightarrow\ \ \hat{w}=\frac{\hat{R}}{n\sum_{i=1}^{n} l_i}$$

(28) $$para\ \ \hat{w}=0\ \ \Rightarrow\ \ \hat{R}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} g_j$$

Lo notable de estos puntos es que el corte del eje de ordenadas (salarios igual cero) depende sólo de la razón-media de beneficios ($\hat{g}$), del número de medios usados (***n***) y de los valores-trabajo (***L***), y no de los precios ni de la matriz de requerimientos (***A***) o de sus componentes (***Y***,***X***). Podemos concluir que la "cuerda" o función que desciende en (27) hasta el punto de corte de abcisas (28), está anclada en un sólo punto en el eje de ordenadas (vertical); a diferencia de lo anterior, el punto de corte en el eje de abcisas depende de los precios ($\boldsymbol{p}_i$), de los medios de producción ($\boldsymbol{x}_{ij}$) y de las tasas de ganancia por sector o mercancía ($\boldsymbol{g}_j$), por lo que puede haber múltiples puntos de corte en el eje de abcisas (horizontal).

c) Frontera salario-ganancia en producción conjunta generalizada.

En este modelo vamos a completar la máxima generalización posible: ***m*** bienes finales, ***ñ*** medios de producción, ***n*** sectores, ***n*** tasas de salarios y ***n*** tasas de ganancia. La función que define el sistema es como sigue:

(29) $$\underset{1xm}{p}\underset{mxn}{Y}=\left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W}+\underset{1xm}{p}\underset{mxñ}{M}\ \underset{ñxn}{X}\right]\times\left(1+\underset{nxn}{G}\right)$$

y la que nos da el numerario que nos interesa en este caso va a ser:

(30) $$pYI-pMXI=1$$

La matriz ***M*** es sólo un instrumento auxiliar en la que cada uno de sus elementos ($\boldsymbol{m}_{ij}$) indica el medio de producción (***ñ***) del que procede cada bien final (***m***). Después de sustituciones elementales entre (29) y (30) y post-multiplicando el resultado por el vector vertical de unos ***I***, queda:

(31) $$LW(1+G)I = 1 - PMXGI$$

(32b) $$\sum_{i=1}^{n} l_i w_i (1+g_i) = 1 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{ñ}\sum_{k=1}^{n} p_i x_{ij} m_{jk} g_k$$

haremos lo mismo que con el modelo anterior y calculamos el tipo de salario medio ($\hat{w}$) y el de ganancia media ($\hat{g}$) y queda:

(33) $$\hat{w} = \frac{1 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{ñ}\sum_{k=1}^{n} p_i m_{ij} x_{jk} g_k}{n(1+\hat{g}) \times \left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)} = \frac{1 - pMXGI}{n(1+\hat{g})LI}$$

La diferencia con lo anterior es que en este modelo no hemos empleado las razones máximas de beneficio $\boldsymbol{R}_i$ por cada sector. También es evidente que la relación entre el salario medio y las ganancias (media y de cada sector) es decreciente, donde se pueden hacer las mismas consideraciones generales respecto al comportamiento de la función que ya se han hecho. Resulta curioso que la forma más generalizada de la frontera salario-ganancia es la más sencilla formalmente. Aquí, ni hemos empleado ningún ***R*** como se ha dicho, ni hemos invertido ninguna matriz. Es verdad que esta frontera depende de los precios que, en todo momento, son de equilibrio, por lo que si los consideramos dados, la forma de ajuste ante un movimiento de las tasas de ganancia sectoriales es un *deslizamiento* de los salarios en dirección contraria. Ante cualquier variación de los precios se va a producir un movimiento de *traslación* de la frontera w-g, al igual que si se mueven algunos de los componentes de la matriz auxiliar, ***M***, o de los medios de producción, ***X***, o de los inputs de trabajo, ***L***. También es evidente que, si consideramos como variables los precios y los salarios y, en cambio, todas las demás variables dadas, los salarios se moverán en dirección contraria a los precios. Todo lo anterior siempre que el numerador de (33) sea positivo, es decir que:

(34) $$pMXGI < 1 = pYI - pMXI$$

que es lo mismo que decir que:

(35) $$pYI > pMX(1+G)I$$

cosa natural, salvo que consideremos que los salarios sean cero y que estos estén integrados juntos con los medios de producción ***X***, al igual que el hierro, la cebada o las grúas[102]. En cuanto a los puntos de corte, son aún más sencillos:

(36) $$para\ \ \hat{g}=0\ \ y\ \ g_i=0\ \ \forall i=1\ \ a\ \ n\ \ \Rightarrow\ \ \hat{w}=\frac{1}{n\sum_{i=1}^{n}l_i}$$

(37) $$para\ \ \hat{w}=0\ \ \Rightarrow\ \ \hat{R}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{ñ}\sum_{k=1}^{n}p_i m_{ij} x_{jk}}$$

El punto de corte de ordenadas (36) es evidente simplemente dando el valor cero a las ganancias (tanto la media como las sectoriales) en (33). En cambio, (37) exige alguna explicación adicional porque lo que se ha hecho es calcular un tipo único de ganancia máxima $\hat{R}$ tal que cumpla que:

(38) $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{ñ}\sum_{k=1}^{n}p_i m_{ij} x_{jk} g_k = \hat{R}\times\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{ñ}\sum_{k=1}^{n}p_i m_{ij} x_{jk}$$

y que dando el valor cero a la tasa media de los salarios en (83) y reemplazando (38) en el numerador, queda (37).

[102] Cosa que se considera de forma didáctica cuando se estudia el modelo de Leontief cerrado, es decir, sin excedente. El propio Sraffa lo considera en su obra en el primer capítulo.

Anexo 4: Función frontera salario-ganancia con reducción a trabajo fechado

Traemos aquí la ecuación de precios de la producción simple o conjunta *esrafiana* con reducción de mercancías a trabajo fechado del artículo: "Aspectos de la economía de Sraffa"[103]. Los precios $\boldsymbol{p}_t$, como se puede apreciar, dependen proporcionalmente de los salarios $\boldsymbol{w}$, también proporcionalmente de la inversa de la productividad del trabajo $\boldsymbol{L}_y$ y, de forma mucho más compleja, de los tipos de intereses $\boldsymbol{r}$, de *las razones-patrones anuales* ($\boldsymbol{R}_k$, distintas cada año) y, por último, del tiempo de reducción a trabajo fechado (***t-i***)[104].

$$P_t = w \times \left[\frac{1}{1 - \dfrac{(1+r)^i}{\prod_{k=1}^{k=i}(1+R_k)}} \right] \times \frac{(1+r)^{t-i} - 1}{r} \times L_y$$

Si ahora post-multiplicamos esta por ***YI***, siendo ***Y*** como siempre la matriz de productos finales e ***I*** el vector vertical de unos; si consideramos que $\boldsymbol{L}_y = \boldsymbol{LY}^{-1}$, y si además tomamos a ***PYI*=1** como numerario y despejamos el salario ***w***, obtenemos la ecuación:

(29) $$w = \frac{r\left(\prod_{k=1}^{k=i}(1+R_k) - (1+r)^i\right)}{\prod_{k=1}^{k=i}(1+R_k) \times \left[(1+r)^{t-i} - 1\right] LI}$$

que sería *la frontera salario-ganancia srafiana* (simple o conjunta) de la función de precios anterior y que tendría las siguientes propiedades:

a) cuando el tipo beneficio (ganancia) tiende a cero, buscado para encontrar el punto de corte en ordenadas ***w*** cuando ***r***= *0*, obtenemos de (29) que:

[103] Ver bibliografía.

[104] Recordar del artículo original que **t** es el tiempo máximo hacia atrás de la matriz de requerimientos, mientras **i** es el tiempo que estamos considerando. La diferencia entre ambos serían los residuos de los efectos sobre el precio de las matrices de requerimientos desde **i** hasta **t**, es decir: $\mathbf{A}^{i+1}$, $\mathbf{A}^{i+2}$,....,$\mathbf{A}^{t-1}$.

$$(30)\quad \lim.\ de\ w\ cuando\ r \to 0 = \frac{\lim..\ del\ numerador \to 0}{\lim.\ del\ denominador \to 0} = indeterminado$$

Este hecho apunta a la idea de que la frontera de salario-ganancia en el sistema de reducción de trabajo fechado puede ser irregular.

b) para que la tasa de salario ***w*** sea mayor que cero ha de cumplirse que el numerador de (29) sea mayor que cero, y eso es como decir que, tras manipulaciones algebraicas elementales, ocurra:

$$(31)\qquad si\ \ r < \exp\left[\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{k=i}\lg\left(1+R_k\right)\right]-1 \ \rightarrow\ w>0$$

c) si $\boldsymbol{R_m}$ fuera *la razón-patrón media* de $\boldsymbol{R_k}$ desde $\boldsymbol{k}=1$ a $\boldsymbol{k}=i$ de tal forma que se cumpliera:

$$(32)\qquad \left(1+R_m\right)^i = \prod_{i=1}^{k=i}\left(1+R_k\right) \quad \rightarrow \quad r < R_m$$

es decir, para que la tasa de salario sea mayor que cero[105] -en definitiva, para que el sistema sea posible- ha de ocurrir que el tipo de ganancia (beneficio) del sistema sea menor que *la razón-patrón media* (tal como se ha definido).

d) para valorar si la función (29) es creciente o decreciente debemos hallar *el numerador* de la primera derivada. Este es como sigue:

$$(33)\qquad S(1+r)^{t-i}+ri(1+r)^{i-1}+r(t-i)\times(1+r)^{t-1}-S-ri(1+r)^{t-1}-rS(t-i)\times(1+r)^{t-i-1}>0$$

$$siendo\, S = \prod_{k=1}^{k=i}\left(1+R_k\right)$$

Si la anterior inecuación es con el signo >, la función (29) es creciente, y si con el signo <, es decreciente. Como se puede comprobar cualquier cosa es posible. A diferencia del cálculo de la producción simple, conjunta *esrafiana* e incluso no *esrafiana*, donde la relación entre tasa

[105] Salvo en el supuesto que los bienes que los trabajadores directos y sus familias se integren en el sistema como medios de producción, es decir, en **X,** como hizo Sraffa en el I capítulo de su libro (“*Producción de subsistencia*”).

de salario y tasa de ganancia podía ser monótona o no monótona, creciente o decreciente, cóncava o convexa en función de los supuestos (uno de los cuales e imprescindible era el de fijar el comportamiento de los gestores), aquí, con mercancías (sean bienes y servicios de consumo o de producción) reducidas a trabajo fechado, se puede afirmar que cualquier cosa es posible en *la frontera* $w-g$, porque depende de los tiempos (***t***, ***i***) y de la *razones-patrón interanuales* ($\boldsymbol{R}_k$) que consideremos. Hay que advertir que estas razones-patrón, que son a la vez una medida de la productividad del sistema y del excedente, sustituyen, inspirados en Sraffa, a la matriz de requerimientos ***A*** (donde están ***Y*** e ***X***, es decir, matriz de productos y de medios). No obstante, si consideramos dadas las razones-patrón $\boldsymbol{R}_k$, la inecuación (33) nos dice cuándo la ecuación (29) es creciente y cuando decreciente según el signo *mayor o menor que*:

$$(33\,b)\quad S(1+r)^{t-i}+ri(1+r)^{i-1}+r(t-i)\times(1+r)^{t-1}>o<-S-ri(1+r)^{t-1}-rS(t-i)\times(1+r)^{t-i-1}$$

e) el resultado anterior parece muy complejo, pero si llevamos ***i*** hasta el final (***t****-1*), es decir, si llevamos a su máxima extensión en el tiempo la reducción a trabajo fechado, la ecuación de determinación de los precios que hemos traído del artículo “Aspectos de la economía de Sraffa”; si sustituimos además ***i****=t-1* en (29) y normalizamos el trabajo $LI=1$, tras pasos elementales, queda la ecuación:

$$(34)\qquad \boxed{w=\frac{\prod_{k=1}^{k=t-1}(1+R_k)-(1+r)^{t-1}}{\prod_{k=1}^{k=t-1}(1+R_k)}}$$

y donde para que los salarios sean positivos (***w***>*0*) ha de ocurrir que:

$$(35)\qquad \prod_{k=1}^{k=t-1}(1+R_k)>(1+r)^{t-1}$$

Es una conclusión análoga a la obtenida en (31). Ahora la función (29) completa se ha simplificado enormemente en (34), y al hallar la primera derivada de la tasa de salarios ***w*** respecto al tipo de ganancia ***r*** queda:

(36) $$\frac{dw}{dr} = -(t-1)(1+r)^{t-2} \times \frac{1}{\prod_{k=1}^{k=t-1}(1+R_k)}$$

Y (36) es siempre negativa, por lo que la función de la que *deriva* (34) es decreciente. Además la segunda derivada es:

(37) $$\frac{d^2w}{dr^2} = -(t-1)(t-2)(1+r)^{t-3} \times \frac{1}{\prod_{k=1}^{k=t-1}(1+R_k)}$$

que es también negativa, por lo que la función (34) es decrecientemente decreciente (convexa hacia el origen). Además, todas las derivadas tendrán signo negativo:

(38) $$\frac{d^jw}{dr^j} = -(t-1)(t-2)\cdots(t-j)(1+r)^{t-j-1} \times \frac{1}{\prod_{k=1}^{k=t-1}(1+R_k)}$$ para j=1 a j=t-1

La función frontera de salario-ganancia (34) tiene un interés adicional. Si a ***t*** (el tiempo de reducción a trabajo fechado) le damos el valor 1, es decir, sólo consideramos un período de tiempo, los salarios valen cero (***w****=0*); en cambio para ***t****=2* el resultado es muy interesante:

(39) $$w = \frac{(1+R_1)-(1+r)}{1+R_1} = \frac{R_1 - r}{1+R_1}$$

que tiene el mismo punto de corte en el eje de abcisas (***w****=0 /* ***r****=R₁*) que la razón-patrón de la producción simple de Sraffa[106], aunque distinto en el eje de ordenadas (***r****=0 /* ***w****=R₁/(1+R₁)*). Para t=3 se obtiene:

(40) $$w = \frac{(1+R_1)\times(1+R_2)-(1+r)^2}{(1+R_1)\times(1+R_2)}$$

y, en general, para ***t****=j* tendremos:

[106] w=(R-r)/R

(41) $$w=\frac{(1+R_1)\times\cdots\times(1+R_j)-(1+r)^j}{(1+R_1)\times\cdots\times(1+R_j)}$$

La ecuación (41) podríamos pues tildarla de *función generatriz de razones-patrón interanuales de reducción a trabajo fechado*. El nombre es desde luego un poco largo, pero no se me ocurre como reducirlo. Y no por ello deja de ser una *función frontera de salario-ganancia* que se ha simplificado notablemente respecto a las anteriores (23) y (34) merced a la introducción de las razones-patrón interanuales $\boldsymbol{R}_k$ que han sustituido a la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}$ y sus productos, es decir, $\boldsymbol{A}^j$. Pero sigamos. La derivada primera de (41) es:

(42) $$w=-\frac{j(1+r)^{j-1}}{(1+R_1)\times\cdots\times(1+R_j)}$$

que al ser negativa hace que la función (41) se decreciente (como se observa a simple vista). La derivada segunda es:

(43) $$w=-\frac{j(j-1)\times(1+r)^{j-2}}{(1+R_1)\times\cdots\times(1+R_j)}$$

que es también negativa, por lo que la función (41) -como cabía esperar- es decrecientemente creciente, es decir, convexa hacia el origen.

Hay recordar que todos estos resultados se dan en el caso particular de que la función frontera de salario-ganancia (29) se haya llevado hasta el final de los tiempos en la reducción a trabajo fechado (haciendo $\boldsymbol{i}=t\text{-}1$). Este caso no es descabellado porque representa el valor actual de las mercancías -de todas ellas- para poder hacer así comparaciones y obtener además los precios de producción. En este caso se podría decir que la *ontogénesis* de la obtención de los precios actuales coincide con la *filogénesis* de su historia.

En síntesis, de todo esto podríamos decir que, si consideramos que el tipo de ganancia $\boldsymbol{r}$ no puede ser mayor que la razón-patrón correspondiente $\boldsymbol{R}_k$, se concluye que *la función frontera salario-ganancia es siempre decreciente si extendemos hasta el infinito la matriz de requerimientos* (sustituidas por las razones-patrón interanuales), pero si la extensión no es total, ya no se puede afirmar esto. De ahí que Sraffa pudiera comparar el precio de dos mercancías[107] tales como el vino y el roble viejo con diferentes, pero sobre todo parciales, períodos de maduración. Lo correcto es que hubiera hallado el cociente a través de la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}$, entonces Sraffa se habría dado cuenta que el cociente de los precios de dos mercancías, *extendidas ambas al infinito en sus matrices de requeri*mientos ($\boldsymbol{A}^i$, con $\boldsymbol{i}$ al infinito), sólo se diferencian en el trabajo directo, como puede comprobarse en la ecuación de precios traída del trabajo ya mencionado[108]. Y, en todo caso, si no es al infinito, como $\boldsymbol{A}$ es productiva -y cuanto más, mejor- la matriz $\boldsymbol{A}^i$ será siempre residual con respecto al trabajo directo de los diferentes períodos a medida que aumente el tiempo de reducción ($\boldsymbol{i}$). En nuestro caso, se han ido sustituyendo estas matrices por las razones-patrón interanuales a través del mecanismo de reducción de trabajo fechado. Todo esto, llevado a la frontera salario-ganancia, con los numerarios $\boldsymbol{PY}\mathbf{I}=\mathbf{1}$ (lo que significa que se anulan los efectos de los precios en los consumos de las empresas) y $\boldsymbol{L}\mathbf{I}=\mathbf{1}$ (lo que significa que se normalizan los salarios), da lugar a un tipo de funciones cuyas posibles cambios de convexidad, incluso posibles casos de crecimiento, dependen de los supuestos que se hagan sobre el comportamiento de los gestores (empresarios, gobiernos, etc.) y no si sólo depende de las variables salario y ganancia, tal como se ha expuesto. Aunque esto vaya aparentemente en contra de los expuesto por Nuti, Pasinetti, Gareganani, etc., no hay tal, porque si se examinan los argumentos, siempre aparece un comportamiento de los agentes -digamos, empresarios-, tal que les lleva a modificar la matriz de requerimiento y/o los inputs de trabajo; en nuestro caso, las razones-patrón. Incluso en los puntos de truncaje (*truncations*) y de introducción de un proceso indirecto (*roundabout*) que recoge Ahijado (1982) de Schefold (1976), se producen por la introducción de una nueva máquina, donde el residuo al finalizar el año se considera como una nueva máquina producida, aunque más vieja. En definitiva, se varía la matriz de requerimientos ***A*,** y cuando esto sucede, trasladado a nuestro análisis, se produce un *desplazamiento* de la curva *frontera* ***w-g*** y no un *deslizamiento*.

[107] Pág. 61 de “Producción de... “.
[108] “Aspectos de la economía de Sraffa”.

Capítulo X: Capital fijo[109]

Sraffa trata este tema desde el criterio de la producción conjunta porque le pareció -y con razón- que no había manera de abordarlo desde la óptica de la producción simple, es decir, del esquema de análisis según el cual existen múltiples factores o medios para producir una mercancía -bien o servicio-, pero sola una en cada proceso[110]. Con su capítulo sobre *el capital fijo* aborda el economista italiano la problemática de los medios de producción de duración superior a un año, aunque el período a contar es siempre convencional. Así, una máquina, las materias auxiliares, instalaciones, edificios, etc., son comprados o instalados en un momento determinado, pero su duración es o puede ser mayor que el año natural, a diferencia de otras materias primas y medios que son comprados y utilizados y/o desgastados en su totalidad en ese año y que el propio Sraffa llama capital circulante. Hay claramente, bajo este punto de vista, dos tipos de medios de producción según su duración en el proceso productivo. Según esto, ¿cuánto vale al final de un año una máquina que se ha comprado en ese año y que seguirá funcionando al año siguiente? El ejemplo sirve para cualquier medio de producción cuya vida se alarga más allá del período convencional de reproducción del sistema económico, entendido este como un proceso que trasciende la vida de las empresas y afecta al sistema en su conjunto. Oigamos a Sraffa cómo aborda el problema: "*Consideremos los instrumentos duraderos de producción como parte de la absorción anual de factores de producción de un proceso en pie de igualdad con los medios de producción (por ejemplo, materias primas) que son enteramente gastadas en el curso de un año; y lo que queda de ellas al final del año será tratado como una parte del producto anual conjunto de la industria cuya parte más importante consiste en la mercancía susceptible de venta, que es el objeto primordial del proceso*"[111]. Sraffa pone a continuación el ejemplo de una máquina de tejer que "*entra en los medios de producción al principio del año... y al final del año la máquina más vieja y parcialmente desgastada que emerge del proceso será considerada*

---

[109] Desde un punto de vista algo distinto del que aquí se plantea se puede ver *Removing an insuperable obstacle in the way of an objetivistic análisis: Sraffa´s attempts at fixed capital*, Kurz and Salvador, 2008.

[110] Si se quiere, por empresa, aunque creo conveniente en la obra capital de Sraffa referirse a procesos más que a empresas, obligados por sus dos grandes descubrimientos: *la mercancía-patrón* y *la razón-patrón.*

[111] Pág. 94 del capítulo X de Producción de mercancías por medio de mercancías.

como un producto conjunto con el volumen de producción de calcetines del año". Y a continuación resume el tratamiento de estos medios de duración plurianual: "*Este punto de vista implica que la misma máquina, a edades diferentes, debería ser tratada como otros tantos productos diferentes, cada uno con su precio*". Con esta capacidad de síntesis del turinés, cualquier aclaración posterior sobra. Además, y afortunadamente en esta ocasión, hace explícito el sistema de ecuaciones que van a justificar su tratamiento, aunque siempre con su especial nomenclatura que yo modernizaré a los usos actuales. Veamos la ecuación que resume las ecuaciones de Sraffa[112] (X.1):

$$p_{mj}M_j + p_jY_j = (1+r)\left[p_{m(j-1)}M_{j-1} + \sum_{i=1}^{i=n} p_i X_{ij} \right] + wl \quad desde \;\; j = 1 \;\; a \;\; n$$

siendo $\boldsymbol{p}_{mj}$ el precio del bien $\boldsymbol{M}_j$ de *duración mayor de un año* que se obtiene conjuntamente con los bienes finales $\boldsymbol{Y}_j$; $\boldsymbol{M}_{j-1}$ sería el mismo bien que entró a principios de año (a los efectos, año anterior) como medio de producción en el año con su precio de compra $\boldsymbol{p}_{j-1}$. Como siempre, $\boldsymbol{r}$ sería la tasa de ganancia, $\boldsymbol{p}_j$ el precio de los bienes que son a la vez medios como bienes finales, $\boldsymbol{X}_{ij}$ los medios de producción, $\boldsymbol{w}$ la tasa de salario y $\boldsymbol{l}$ el input de trabajo, que en este caso, es invariante a juicio de Sraffa, porque medimos el valor de unos medios dado "*el supuesto de eficiencia constante durante la vida de la máquina*"[113]. Aunque la ecuación (X.1) la plantea Sraffa para la vida de una máquina[114], sin embargo el planteo del italiano puede generalizarse para $\boldsymbol{s}$ máquinas[115]. Sraffa, tras una serie de operaciones que ¡por una vez hace explícitas íntegramente! llega a la ecuación que va a definir su sistema una vez introducido *el capital fijo*[116]:

[112] Pág. 96 de *PMPM*. Kurz y Salvadori relatan las dificultades de Sraffa y la ayuda del matemático y amigo Besicovitch en el artículo *Removing an insuperable obstacle in the way o fan objetivista análisis : Sraffa attempts as fixed capital*, 2008.
[113] Pág. 96 de *PMPM.*
[114] Un planteamiento que sigue al pie de la letra puede verse en Ahijado (*Distribución, precios de producción y crecimiento*, editorial Ceura, cap. III, 1982), que a su vez recoge los planteamientos de Roncaglia, 1978, y Schefold, 1971). Yo he seguido un camino propio porque este trabajo no pretende ser un resumen de otros.
[115] Ver anexo I.
[116] Aleccionador resulta comparar el planteamiento de Sraffa sobre el capital fijo y el que hace Garegnani sobre el mismo tema discutiendo la solución de Bortkiewicz (*El capital en la teoría de la producción*, cap. V, págs. 74-86, 1982 en Oikos-Tau).

(X.2) $$\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{Y} = w\,\underset{1xn}{L} + (1+r)\,\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X} + \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1} \times \underset{1xs}{P_m}\,\underset{sxn}{M}$$

La (X.2) sería una ecuación matricial generalizada a ***s*** máquinas o, en general, ***s*** *medios de vida plurianual,* con sus ***s*** precios $\boldsymbol{p}_s$. De esta forma, se gana en realismo sin perder potencial explicatorio al no tener que coincidir el número de medios plurianuales ***s*** con los de vida anual ***n***, es decir, con los gastados íntegramente en un año durante el proceso de producción. Estos bienes de duración plurianual sólo le exigimos la condición[117] de que $\boldsymbol{s}<\boldsymbol{n}$ por lo que luego se verá. Sraffa a continuación hace algunas consideraciones sobre las formas de amortización que, en mi opinión, carecen de interés en la época actual, aunque son correctas. Cabe pensar que en su tiempo, cuando concibió su obra y no cuando se publicó, la teoría de la amortización empresarial aún no se había desarrollado lo suficiente. Más tarde entra en terrenos más interesantes al considerar el capital fijo como un caso particular de productos conjuntos y de cómo sería un fracaso reducir estos bienes plurianuales a trabajo fechado[118]. De momento, nosotros vamos ir por otro camino más potente hasta llegar a *la frontera salario-ganancia*. Si hacemos -como es habitual en Sraffa- el salario ***w*** igual a cero nos queda la ecuación matricial:

(X.3) $$\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{Y} = (1+g_m)\,\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X} + \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1} \times \underset{1xs}{P_m}\,\underset{sxn}{M}$$

donde $\boldsymbol{g}_m$ sería la tasa máxima de ganancia. El quebrado que multiplica a precios y cantidades de los productos plurianuales es la fórmula de anualización de un capital que aparecen en los libros de matemáticas financieras o, como dice Sraffa, de comercio. De las ecuaciones (X.2) y (X.3) obtenemos los precios de las mercancías que *no* son plurianuales:

[117] Sraffa no sólo era consciente de estos problemas, sino que los entendía también en sus aspectos matemáticos, aunque parezca huir de las explicaciones meramente formales. Eso sí, la ayuda del matemático y amigo Besicovitch fue crucial en ese punto y en todo el capítulo X del libro. Para los problemas de este epígrafe, véase la pág. 76 del capítulo VIII; también el apéndice C y la opción de eliminar en ambos lados de las ecuaciones del sistema los bienes no básicos para obtener la razón-patrón, es decir, para poder -diríamos nosotros- aplicar Perron-Froebenius y obtener precios positivos.
[118] Pág. 98 de *PMPM.*

(X.4) $$P = \frac{w}{g_m - r} \times LX^{-1}$$

donde lo notable de (X.4) es que los precios de los bienes *no* plurianuales ***P*** no dependen de los plurianuales, es decir, de $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}$. Si en (X.3) despejamos los precios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}$, queda la ecuación:

(X.5) $$P_m = \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \times P\left[Y - (1+G)X\right] \times M^T \left[MM^T\right]^{-1}$$

En (X.5) se comprueba que los precios de los productos plurianuales, $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}$, dependen de los precios de los no plurianuales, pero no al revés. En este sentido es por lo que se puede asimilar a los primeros como mercancías no básicas, aunque sí que entran como medio de producción y perduran más de un año. El tema tiene interés y se ve la primacía del concepto sobre su caracterización formal; formalmente (matemáticamente), la cancelación que lleva a cabo Sraffa en los dos lados de la ecuación de definición del sistema hace que los bienes plurianuales no cumplan lo característico de los bienes básicos, porque entran como medios pero no como productos finales. Sabemos las dificultades, ayudas y ensayos que culminaron en la redacción de este capítulo y su aspecto final. De ahí también -entre otras razones- el esfuerzo enorme que hace Sraffa en su libro por explicar los aspectos económicos de su modelo y lo renuente que se mostraba el italiano en hacer explícitos los aspectos formales. Un punto y aparte más adelante incidimos en el tema.

En (X.5) de nuevo vemos ahora porqué se hizo $\boldsymbol{s}<\boldsymbol{n}$, es decir, que los elementos plurianuales fueran menores que los anuales. El rango de la matriz ***M*** vale ***s*** y también el de $\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}}$, con lo cual es esta última invertible sin problemas, salvo los habituales de colinealidad de una fila o columna con otras filas o columnas, lo cual, en el mundo real, es un suceso imposible. Sraffa no impone esta condición ni la hace explícita, pero sí la hizo en el caso de la producción conjunta, con lo cual cabe suponer[119] que era consciente de todo ello.

[119] Mi opinión es que era plenamente consciente porque en otro apartado habla de eliminar ecuaciones con el fin de eliminar los productos no básicos. Eso supone entender matemáticamente el concepto de rango de una matriz.

De las ecuaciones (X.4) y (X.5) se obtiene:

$$P_m = \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \times \frac{w}{g_m - r} \times L\left[X^{-1}Y - (1+g_m)\right] M^T \left[MM^T\right]^{-1} \qquad \text{(X.6)}$$

Ahora los precios de los productos plurianuales $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}$ dependen de todas las variables: $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{M}_{\mathrm{j}}$. También se puede comprobar que, aunque el tipo de interés $\boldsymbol{r}$ permanezca por debajo de la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$, la existencia de las inversas en (X.6) posibilita que algunos de los precios de los productos plurianuales $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}$ sean negativos, al igual que ocurría con la producción conjunta. ¿Cuál es la interpretación económica de todo esto? Oigamos a Sraffa: "*Los instrumentos duraderos* -los que hemos llamado plurianuales-, *si son básicos, habrán de estar representados en la mercancía-patrón por muestras de las diferentes edades en sus debidas proporcion*es"[120]. En efecto, si los bienes plurianuales son básicos, entrarán en pie de igualdad con el resto de los bienes básicos, y si cumple la condición de productividad, es decir, que el total de la producción de ese bien sea mayor que el total de los medios de ese mismo bien, entonces su precio cumplirá una de las condiciones necesarias para que sea positivo[121]. La otra dificultad para conseguir unos precios positivos se deriva de aplicar un mismo tipo de interés, tanto para el cálculo de la amortización -el primer término del lado derecho de la igualdad de (X.6)- como para la tasa de ganancia general. Ello obliga a amortizaciones aceleradas si la tasa de ganancia exigida es muy alta, lo cual provoca que los bienes de producción de un período que son medios en el siguiente -como es el caso de los bienes plurianuales, los $\boldsymbol{M}$- entren a un precio elevado en el resto de los sectores o en el de origen, y con ello a elevar los costes de otros sectores hasta, en algún caso, hacer mayores estos que los ingresos, con el resultado de precios negativos. Es una limitación del modelo que puede ser salvado con dos tipos de interés: uno para las amortizaciones de los bienes plurianuales y otro para la tasa de ganancia general exigida por el modelo. Sraffa no diferenció ambas tasas, pero era consciente del problema cuando, hablando del precio de la maquinaria que envejece, dice: "*El precio...*

[120] Pág. 104 de *PMPM.*

[121] Las otras condiciones son que la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$ sea irreductible, no negativa, y que el tipo de ganancia sea inferior a la razón-patrón si estamos en la producción simple. Fuera de la producción simple -es decir, sin Perron-Froebenius- nada garantiza a ningún bien que su precio sea positivo: sólo la sociología empresarial a la que recurre Sraffa.

no puede explicarse desde el lado del coste de la producción. Resulta exclusivamente de la necesidad de mantener, cuando el tipo de beneficio varía, la igualdad de precio de todas las unidades del producto, cualesquiera que sean las diferencias en edad de los instrumentos mediante los cuales son respectivamente producidos"[122].

I - <u>Frontera salario-ganancia</u>

De la ecuación (X.6) a la frontera salario-ganancia no hay más que un paso. Hacemos ahora:

(X.7) $$LI = 1$$

(X.8) $$P_m MI = 1$$

es decir, tomamos como numerarios las expresiones (X.7) y (X.8)[123], siendo **I** el vector de unos de dimensión ***n***x**1**, puesto que tenemos muchas más incógnitas que ecuaciones. De la (X.6) y despejando el tipo de salario, se obtiene la (X.9):

(X.9) $$w = \frac{r(1+r)^n \times (g_m - r)}{\left[(1+r)^n - 1\right] \times \left[LX^{-1}YI - (1+r)\right]}$$

donde el punto de corte para ***w***=**0** es ***r***=***g***m, y con ***w*** indeterminado para ***r***=**0**, siendo descendiente ***w*** desde ***r***=**0** hasta ***r***=***g***m, pero con tantos puntos de corte posibles como el grado del numerador de (X.9), que es ***n***. Pueden darse, por tanto, ***n*** soluciones, aunque algunas puedan ser repetidas o imaginarias, contra lo esperado por la teoría neoclásica, en la que se afirma que la relación entre la tasa de salarios y la tasa de ganancia ha de ser inversa si se mantiene la misma técnica. Aquí, con este modelo sraffiano tan sencillo, pueden darse el retorno de un mismo tipo de salarios para diferentes tipos de interés: la teoría neoclásica -una vez más- por los suelos. Puede observarse en (X.9) que un aumento de la tasa de ganancia ***r*** que pueda llevar a un aumento del

---

[122] Pág. 104 de *PMPM.*

[123] Tomar como numerario estas dos expresiones supone tomar como numerario algún precio de los productos plurianuales *p*m. La razón es que estos productos M aparecen simultáneamente en (7) y en (8). Siempre es deseable que en los numerarios no aparezcan variables repetidas porque sólo así pueden tomar cualquier valor.

tipo de salario $\boldsymbol{w}$, puede ser a su vez contrarestado por el multiplicador ($\boldsymbol{g}_m$-$\boldsymbol{r}$) si $\boldsymbol{r}$ se acerca a $\boldsymbol{g}_m$, y eso puede ocurrir incluso $\boldsymbol{n}$-**1** veces, es decir, tantas -como máximo- como puntos de corte menos uno. Esta frontera, definida por (X.9) es continua y cambia de convexidad según los puntos de corte de $\boldsymbol{r}$ cuando la tasa de salario $\boldsymbol{w}$ vale cero. Sin embargo, también puede desplazarse a lo largo del primer cuadrante, que es el significativo. La razón es la de que, además de que la tasa de salario depende $\boldsymbol{w}$ de la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}$ y del número de períodos $\boldsymbol{n}$ de anualizaciones de los bienes plurianuales $\boldsymbol{M}$, existe una variable que recoge los movimientos de los medios de producción anuales $\boldsymbol{X}$ y la de los productos finales $\boldsymbol{Y}$. Esta variable, aparentemente inocua, es $\boldsymbol{g}_m$, es decir, *la tasa máxima de ganancia*, porque a cada valor de $\boldsymbol{x}_{ij}$, $\boldsymbol{y}_{ij}$ y $\boldsymbol{M}_{ij}$, varía $\boldsymbol{g}_m$, y eso da lugar a *desplazamientos* de la frontera salario-ganancia definida en (X.9). Si Sraffa hubiera hecho explícitos sus ecuaciones y deducidas sus consecuencias, también formalmente, quizá los economistas hubieran podido ver plasmadas las conclusiones revolucionarias -en el campo del análisis económico, claro- de forma más evidente. O quizá lo contrario, y lo hubieran desechado bajo algún pretexto. Sraffa trabajó, salvo una excepción, con la ecuación (X.1) o la equivalente en las páginas referidas a la producción simple o conjunta, es decir, con la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}$ fuera de los costes de trabajo $\boldsymbol{wL}$ guiado por la discusión sobre el fondo de salarios y sobre la cuestión de si estos eran *pos (post-factum)* o *pre pagables*. En otro artículo homenaje a Sraffa ya publicado[124] ya he anotado que esa discusión no casa con la solución formal que da tanto Sraffa como Ricardo, porque que la tasa de ganancia incluya a los costes salariales afecta *a la cuantía* del cálculo de los precios y no depende, por tanto, *del momento* del pago de los salarios. Y, sin embargo, esa falsa discusión llega a nuestros días. Si la tasa de ganancia incluye a los costes salariales, la ecuación (X.2) se convierte en:

(X.10) $$\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{Y} = (1+r)\times\left[wL + \underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X}\right] + \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}\times \underset{1xs}{P_m}\,\underset{sxn}{M}$$

dejando fuera de la tasa de ganancia sólo a los bienes plurianuales $\boldsymbol{M}$, tal como hace Sraffa, a lo cual no veo inconveniente. Si seguimos los

[124] *A los cincuenta años de la publicación de la obra de Sraffa Producción de mercancías por medios de mercancías*: http://www.eumed.net/ce/2010b/amp.htm

pasos anteriores y hacemos la tasa de salario ***w*** igual a cero para obtener la tasa máxima de ganancia, nos da la ecuación:

$$\underset{1xn}{P}\underset{nxn}{Y} = (1+b_m)\times(\underset{1xn}{P}\underset{nxn}{X}) + \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}\times \underset{1xs}{P_m}\underset{sxn}{M} \tag{X.11}$$

con $\boldsymbol{b}_{\mathrm{m}}$ como máxima tasa de ganancia, distinta de la tasa máxima para el caso anterior, por lo que la hemos cambiado de letra: además tomamos como numerario a ***L*I=1** y a ***PM*I=1**. Sin cambios conceptuales, llegamos a la *frontera salario-ganancia*, que forzosamente es distinta de la del caso anterior porque es distinta la ecuación (X.2) que define el sistema. Esta frontera es:

$$w = \frac{r(1+r)^n\times(b_m - r)}{(1+r)\times\left[(1+r)^n-1\right]\times\left[LX^{-1}YI-(1+b_m)\right]} \tag{X.12}$$

con punto de corte en $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}_{\mathrm{m}}$ cuando los salarios ***w*** son cero y con valor indeterminado para los salarios ***w*** con la tasa de ganancia ***r*** es cero. Al igual que con la frontera salario-ganancia (X.11) del caso anterior, esta varía su forma en función de las anualidades ***n***. Un caso especial es para ***n*=1** que da una frontera definida por la ecuación ***b*=*r*+*w***, es decir, una recta con puntos de corte evidentemente en ***r*(*w*=0)=*b*** y en ***w*(*r*=0)=*b***.

II - Generalizaciones

Sigamos. Hasta ahora hemos trabajado con la producción conjunta al modo *esrafiano*, donde la matriz ***Y*** de productos finales es cuadrada, al igual que la ***X*** de medios de producción, lo cual obliga a una producción conjunta *sui generis*, porque el número de procesos y mercancías han de ser iguales, tanto en medios como en los productos finales. Sraffa no dio el paso de considerar más bienes finales que medios de producción, tanto si la producción era simple como conjunta, porque perdía - o creía perder- todas sus ventajas: perdía la mercancía-patrón, la razón-patrón, los multiplicadores positivos y los precios todos positivos. También se complicaba la frontera salario-ganancia. No es que un genio como el no hubiera podido hacerlo, pero entonces tendría que haber hecho explícitos sus hipótesis formales mediante un sistema de ecuaciones y temía -creo yo- que su obra se convirtiera en un mero juego matemático, tal y como pasó con Von Neumann[125], una de las personas con más alto coeficiente intelectual medido que se conocen. Sraffa escribía para el futuro y para economistas y no para lucirse. Una ecuación que definiera un sistema de producción conjunta, con tasa de ganancia que incluyan los costes salariales, con productos plurianuales con costes anualizados y -y esta es la novedad ahora- con productos finales mayores en su diversidad que medios empleados, vendría definido por la ecuación matricial:

(X.13) $$\underset{1xm}{P_y}\underset{mxn}{Y} = (1+\underset{1x1}{r})\times\left[\underset{1x1}{w}\,\underset{1xn}{L}+\underset{1xn}{P_x}\,\underset{nxn}{X}\right]+\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}\times\underset{1xs}{P_m}\underset{sxn}{M}$$

donde los precios de los productos finales $\boldsymbol{P}_y$ van de **1** a ***m***, a diferencia de los medios, que van de **1** a ***n***, siendo mayor ***m*** que ***n***, como indica la lógica económica. Es el caso más general posible, salvo que diferenciáramos también entre bienes *básicos y no básicos*, o que trabajáramos con tasa de salarios y ganancias diferentes para cada sector, que también es posible[126]. En el caso que nos ocupa es el más general posible, porque ahora trabajamos con tres tipos de precios diferentes: uno para los productos finales $\boldsymbol{P}_y$, otro para los medios de producción anuales $\boldsymbol{P}_x$ y otro para los medios plurianuales $\boldsymbol{P}_m$. La tasa máxima de ganancia vendrá dada, como siempre, haciendo cero la tasa de salario ***w*** y obtenemos una ecuación como la que sigue:

(X.14) $$\underset{1xm}{P_y}\underset{mxn}{Y}=(1+f_m)\,\underset{1xn}{P_x}\underset{nxn}{X}+\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}\times\underset{1xs}{P_m}\underset{sxn}{M}$$

donde hemos llamado $\boldsymbol{f}_m$ a esta *tasa máxima* para distinguirla de los casos anteriores. De las ecuaciones (X.13) y (X.14) sale:

(X.15) $$P_x=\frac{w(1+r)}{f_m-r}\times LX^{-1}$$

donde los precios de los medios de producción $\boldsymbol{P}_x$ dependen de ***w***, ***r***, ***L***, $\boldsymbol{f}_m$ y ***X***, pero no de $\boldsymbol{P}_y$, ***n***, ***M***. Sustituyendo ahora (X.15) en (X.14) se obtiene:

[125] *A model of Economic General Equilibrium,* 1935.
[126] Ver anexo II.

(X.6) $$P_m = \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \times \left[P_y Y - \frac{w(1+r)(1+f_m)}{(f_m - r)} \times L \right] \times M^T \left[M M^T \right]^{-1}$$

Aquí hemos soslayado que los precios de los productos plurianuales dependan $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}$ de los precios de los medios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{x}}$, pero no hay manera de hacer lo mismo con los precios de los productos finales $\boldsymbol{P}_{\mathrm{y}}$. Mirando esta ecuación se ve -creo yo, insisto- porqué Sraffa no quería trabajar en su obra con producción conjunta entendida de la manera más amplia posible. La mayor utilidad de (X.6) es que nos facilita la llegada a la frontera salario-ganancia bajo los supuestos definidos. Si tomamos como numerarios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{P}_{\mathrm{y}}\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{L}\mathbf{I}$, es decir, si hacemos:

(X.7) $$P_m M I = 1$$

(X.8) $$P_y Y I = 1$$

(X.9) $$L I = 1$$

donde se puede observar que ninguna de las variables se repiten en cada una de las ecuaciones del numerario. Tras manipulaciones elementales de álgebra, nos da *la frontera de salario-ganancia* para este caso de *producción conjunta ampliada*:

(X.10) $$w = \frac{\left[(1+r)^n \times (1-r) - 1\right] \times (f_m - r)}{(1+r) \times (1+f_m) \times \left[(1+r)^n - 1\right]}$$

Ocurre que, al igual que los dos casos vistos anteriormente, para $\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$ el punto de corte de la tasa de ganancia se da para $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}$, aunque queda indeterminada la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$ para $\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$. Aunque formalmente es más complicada que las anteriores fronteras, se pueden hacer las mismas consideraciones que en las anteriores, por lo que no nos repetimos. Debe quedar claro que, en general, no coincidirán las diferentes tasas de ganancia, $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$, $\boldsymbol{b}_{\mathrm{m}}$ y $\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}$, y tampoco coincidirán con la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ de la producción simple con medios gastados anualmente y con salarios pre-pagables, que es el caso más simple posible y que estudia Sraffa a partir del capítulo II de su obra capital.

Todo este capítulo gira en torno a dos ideas -casi obsesiones- de Sraffa. Una tiene que ver con el uso del mismo tipo de ganancia $\boldsymbol{r}$ para el cálculo de las anualizaciones y para la parte del excedente correspondiente a la tasa de ganancia. Sraffa trabaja en un sistema de equilibrio que llega al extremo si admitimos -como Sraffa- el mismo tipo de interés para ambas cosas. No es necesario y creo un error, porque ambas -anualizaciones y tasa de ganancia- responden a problemas y motivaciones diferentes. No por hacerlas diferentes se rompe el esquema esrafiano. Hoy sería inadmisible un modelo que no distinguiera ambas tasas. La otra idea-fuerza es la habitual en Sraffa: la de hallar la razón-patrón y los multiplicadores no negativos que posibiliten la mercancía-patrón aunque, como es el caso, no se pueda aplicar Perron-Frobenius. Dice textualmente Sraffa que si "*los instrumentos duraderos* (los plurianuales), *si son básicos, habrán de estar representados en la mercancía-patrón por muestras de las diferentes edades en sus debidas proporciones*"[127]. Sraffa parte siempre del hecho de que siempre una mercancía aparecerá tanto como medio y como producto en una ecuación, es decir, que en la parte de la izquierda aparecerá el precio de la $\boldsymbol{k}$ mercancía ($\boldsymbol{p}_k\boldsymbol{y}_{kj}$) y en el lado derecho ($\boldsymbol{p}_k\boldsymbol{x}_{kj}$), y que además lo hará -después del cálculo de los multiplicadores- en las mismas proporciones que el resto de las mercancías, de tal forma que se puede obtener la mercancía-patrón porque se obtendrían los multiplicadores positivos. Para que eso pueda ocurrir deben aparecer las mismas mercancías cualitativamente en el lado izquierdo (productos finales) que en el lado derecho (medios de producción). Y eso vale para *el capital fijo* del que se trata en este capítulo. El problema que se encontró Sraffa es que en el caso de los bienes de capital había dos excepciones a lo anterior: al principio en la compra del medio de producción fijo (que entra como medio pero no como producto final); y al final del período de amortización, es decir, del residuo de la máquina, porque aparecerá como producto final (chatarra), o simplemente no aparecerá (la última amortización fue del año anterior). La razón de esta cuasi-obsesión de Sraffa es que no podía admitir -y parece lógico que así fuera- que un medio de producción *fijo* fuera comparable a una mercancía no básica, que es lo que ocurre con las mercancías que entran como producto final pero no como medio. La solución a estos dos casos de la vida útil de un "capital fijo", es decir, a la compra y al último período de amortización, la salva Sraffa tras una larga colaboración en años con el matemático mencionado recurriendo al trabajo fechado de tal forma que estén representado en la mercancía-patrón "*por muestras de las diferentes edades en sus*

[127] Pág. 104 de *PMPM.*

debidas proporciones". Es una solución, pero implica una restricción al uso del capital fijo, porque cada elemento del capital debe tener su propio proceso de amortización y obliga a compensar unos con otros de tal forma que se cumpla lo subrayado por Sraffa, es decir, *que los bienes plurianuales entren como productos finales y como medios en la misma proporción que entra la mercancía-patrón, con el fin de* que todos los multiplicadores y precios sean positivos. A Sraffa le pareció al final aceptable la condición, pero a mí no me convence[128] o al menos me parece discutible. Quizá por eso *Schefold* haya sugerido abandonar la distinción esrafiana entre productos básicos y no básicos. Pero, en fin, seguir con este tema y la evolución de la solución exige un estudio aparte y este ya se ha hecho en el artículo de *Kurz* y *Salvadori* mencionado anteriormente.

Todo lo anterior no pretende suplantar la riqueza de las consideraciones de Sraffa con lo que el llama "el capital fijo"; todo lo contrario, sólo se trata de ayudar y estimular a su lectura y ver con rigor algunas -pocas de todas las maneras- de las afirmaciones de Sraffa sin negar, no obstante, que se trata de una interpretación más del capítulo X del libro, que es, por cierto, uno de los mejores, aunque también de los más complicados.

---

128 Inserto el comentario de Kurz y Salvador en *Piero Sraffa: The Man and the Scholar*, pág. 135: "*it was no possible in general to reduce all fiex capital to date quantities of labour because the reduction series exhibits alternanting positive and negative elements*".

Anexo 5: Sobre el cálculo de la anualización del capital fijo

El cálculo de la anualización de Sraffa para los bienes plurianuales lo hace el economista turinés para un único bien porque le parecía suficiente uno sólo, en sus distintos estados anuales tras la amortización, para hacer las consideraciones del capítulo sobre "*el capital físico*"; quizá tampoco se atrevió a generalizarlo por las dificultades formales que conlleva; quizá -y yo apuesto que esta fuera la razón principal- por los problemas de ocultación de los aspectos económicos que podía llevar el desarrollo del aparato formal. Nosotros vamos a abordar y justificar esta generalización, pero siendo lo más fieles posibles al modelo *esrafiano* por un simple imperativo intelectual, porque, a la postre, estamos desarrollando -o intentándolo- el esquema intelectual de Sraffa y no inventando otro. Cosa esta última loable, por otro lado, pero no es esa la intención aquí. Dicho esto, generalizar el ejemplo de Sraffa para ***s*** medios plurianuales exige al menos dar un contenido especial a la expresión:

(1) $$\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1} \times \underset{1xs}{p_m} \underset{sxn}{M}$$

que representa la anualidad constante de una sólo máquina, por más que la hallamos multiplicado por el vector fila $\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{M}$ de dimensiones **1x*s***, es decir, por los ***s*** medios de producción plurianuales. Para subsanar esto vamos a plantear la siguiente ecuación:

(2) $$\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1} \times \underset{1xs}{p_m} = \underset{1xs}{p_q} \times \underset{sxs}{\frac{r(1+r)^{q(s)}}{(1+r)^{q(s)}-1}}$$

donde la anualización de la derecha ya no representaría un único bien plurianual, sino ***s*** bienes -sería una matriz diagonal- cada uno con un número de períodos ***q(s)*** propio de cada bien y dependiente de ***s***. Desarrollado en términos algebraicos sería:

(3) $$\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1} \times \sum_{j=1}^{j=s} p_{mj} = \sum_{j=1}^{j=s} p_{qj} \times \frac{r(1+r)^{q(s)}}{(1+r)^{q(s)}-1}$$

es decir, la anualización del primer término de la izquierda representaría una media aritmética de todas las anualizaciones de los ***s*** bienes, cada uno de ello sujetos a diferentes períodos de amortización ***q(s)***; media aritmética que se obtendría simplemente con despejar $\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ del primer término de la ecuación.

Aunque nos apartamos ahora de Sraffa claramente, la última ecuación nos permite un ejemplo de cómo sería una planificación de la economía con criterios *esrafianos*. Una planificación de esta índole partiría de los precios y períodos de amortización de todos los ***s*** bienes plurianuales de la economía con sus períodos de amortización ***q(s)*** distintos para cada bien. El órgano planificador sólo pondría la condición -por el interés general de la economía- de que se cumpliera:

$$(4) \qquad \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1} = \frac{\sum_{j=1}^{j=n} p_{qj} \times \frac{r(1+r)^{q(j)}}{(1+r)^{q(j)}-1}}{\sum_{j=1}^{j=s} p_{mj}}$$

Este órgano sólo tendría que tener el poder suficiente para hacer cumplir lo anterior, que es una condición muy laxa, porque estamos hablando de resumir en *una* sola fórmula de dos (***r*** y ***n***) variables, ***s*** bienes plurianuales con ***q(s)*** períodos de amortización distintos cada uno. De las posibilidades de planificación a partir de Sraffa se habla más adelante, por lo que concluimos aquí.

Obras y correspondencia de David Ricardo

Anexo 6: Sobre las dificultades de Sraffa sobre el capital fijo

Hemos a la ecuación (X.10) del texto principal de este epígrafe, pero sin contar cómo llegó Sraffa a él, aunque sí vimos la problemática general de los bienes de capital fijo como un conjunto de ecuaciones a lo largo del tiempo en el que la primera un bien de capital fijo entraba como medios pero no como productos final; al finalizar y desgastar (o vender como chatarra) ese mismo bien fijo en el final del período, aparecía como producto final y no como medio. Esto tiene el inconveniente de que al menos dos veces a lo largo de la vida útil del medios de capital fijo no puede ser considerado como bien básico, porque una vez está falto de producto final y otra de medio. Sraffa fue variando de criterio hasta que se decantó por este. Además tuvo la ayuda inestimable del matemático y amigo *Besicovitch.* El caso es que entre ambos (o quizá sólo Sraffa en esta primera parte), se planteó un sistema de ecuaciones similar al que sigue:

$$(1)\quad 1.... \to (1+r)\left[PX + wL\right] = PY + P_m M$$

$$2.... \to (1+r)\left[PX + wL\right] + P_m M \times (1+r) = PY + P_{m1} M$$

$$3.... \to (1+r)\left[PX + wL\right] + P_{m1} M \times (1+r) = PY + P_{m2} M$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n.... \to (1+r)\left[PX + wL\right] + P_{m(n-1)} M \times (1+r) = PY$$

Este es ya un sistema generalizado de s bienes de capital con sus precios de compra y de valor final $\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}$ de **1** a ***s*** y con el conjunto de ***s*** bienes físicos producidos en ***n*** sectores (***M***). El resto de las variables ya son conocidas así como sus dimensiones. En (1) puede verse la asimetría de la primera ecuación y la última: en la primera, $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{M}$ es el momento en el que se produce el elemento de capital fijo (maquinaria, utensilio, herramienta, instalación, etc.) y $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{M}$ recoge el vector de capitales fijos producidos con su precios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}$ en los ***n*** sectores de la economía. Como puede comprobarse en (1), aparecen como producto final pero no como capital fijo. En la última (1…n), ahora, en cambio, sólo aparecen como medio ($\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{n}\text{-}\mathbf{1})\boldsymbol{M}$) y no como productos finales. $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}(\boldsymbol{n}\text{-}\mathbf{1})}\boldsymbol{M}$ es el vector que recoge todos los elementos residuales (o chatarra) de todos los bienes de capital de los ***n*** sectores de la economía. No es que Sraffa lo presente de esta manera de entrada, pero el resultado (intermedio) es el anterior. Ahora procede Sraffa -por indicación de *Besicovitch*- a multiplicar las ecuaciones por $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{-1}$ la pimera ecuación, por $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{-2}$ la segunda, y así todas hasta la ***n***-ésima por $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{-n}$. Luego suma todas las ecuaciones y se deshace los términos comunes y le queda la ecuación:

(A4.2) $$\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{Y} = (1+r)\times\left[wL + \underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X}\right] + \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}\times \underset{1xs}{P_m}\,\underset{sxn}{M}$$

que ya hemos visto anteriormente. Otro método más natural que el anterior sería sustituir el vector de valores de productos finales de capital fijo $\boldsymbol{P}_m\mathbf{M}$ de la primera ecuación en la segunda (lado izquierdo de la igualdad); a continuación hacer lo mismo con $\mathbf{P}_{m1}\boldsymbol{M}$ de la segunda ecuación en la tercera, y así sucesivamente hasta el final. El resultado sería el mismo que por el método anterior y daríamos con (2) tras sumar la progresión geométrica resultante $P_m M\sum(1+r)^i$ desde $\boldsymbol{i}=\mathbf{1}$ a ***n*** y actualizado al momento presente mediante $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{-n}$. Pero el tratamiento de los bienes de capital fijo en Sraffa merece algún comentario. Debemos suponer que estamos en una economía de equilibrio donde cada sector ha producido ***s*** bienes de capital en el momento **1** y que se desaparecen en el curso de los ***n*** períodos. En cada período, salvo en el primero y en el último, el mismo bien que apareció como medio aparece de nuevo como productos final, aunque desgastado. Es decir, es una economía de *reproducción* simple (aunque de *producción conjunta*) ¡hasta para los bienes de capital fijo! Aún así Sraffa no consigue dar el título de bien básico a estos bienes porque el resultado final en (2) es que aparecen como medios pero no como productos finales. Mi conclusión, contraria a la de Sraffa, es que la diferenciación de bienes básicos y no básicos para estos bienes es insostenible o innecesaria. Hasta el mismo *Schefold* lo ha manifestado. No por ello se nos cae el cielo de Asterix en la cabeza y todas las conclusiones de la obra de Sraffa se mantienen, solo que el sueño del italiano de considerar a los bienes de capital fijo como bienes básicos no puede ser mantenido. Al menos en este modelo presentado, que es prácticamente el mismo que el presentado en el libro. Este sueño tenía una lógica: Sraffa no podía admitir que estos bienes, tan importantes para la economía, pudieran no ser básicos de acuerdo con su definición. El problema adicional es que no pueden formar parte de la mercancía-patrón, porque ello exige lo dicho para cualquier bien básico: que entre a la vez en cada ecuación como medio y como producto final, y si no es así, los presuntos multiplicadores de la mercancía-patrón pueden ser (algunos) negativos.

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{N1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix} (1+r) + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_N \end{bmatrix} w$$

ecuación esrafiana de definición del sistema

Capítulo XI:Tierra

Abordamos ahora el capítulo XI de la obra de Sraffa que va referido al viejo tema de la renta de la Tierra. Esta renta, como una de las tres retribuciones de la producción junto con los salarios (de los trabajadores) y las ganancias (de los capitalistas), la rastrea Schumpeter hasta llegar a Quesnay y a Cantillon[129]. Siempre ha tenido mala prensa, incluso entre los economistas que hoy -pero no en su momento- pueden ser considerados ortodoxos. A. Smith la critica y para D. Ricardo es una de las ideas-fuerza de su esquema intelectual. Ricardo la define como: *"... aquella parte del producto de la tierra que se paga al terrateniente por el uso de energías originarias e indestructibles del suelo*"[130]. Tiene esta definición cierto empaque, como de una pretensión de universalidad, como corresponde a un intelectual de máximo nivel que era el economista inglés. Tampoco con ello se limita a las rentas derivadas de los productos agrícolas, sino que también se refiere a las de las minas también. Sin embargo, unos cuantos párrafos más allá, la completa, la concreta y muestra de paso su rechazo a esta retribución cuando dice que: "*Únicamente porque la tierra no es ilimitada en cantidad ni uniforme en calidad, y porque con el incremento de la población, la tierra de calidad inferior o menos ventajosamente situada tiene que ponerse en cultivo, se paga renta por su uso*"[131]. En esta frase queda claro para el que lo lea sin prejuicios, que la renta, en concreto, la de la tierra se deriva de un problema de calidades o, su equivalente económicamente, de distancias. Pero es el propio Ricardo el que origina confusión cuando más tarde dice que: "*Renta es siempre la diferencia existente entre el producto obtenido mediante el empleo de dos cantidades iguales de capital y de trabajo*"[132]. Aquí parece indicar Ricardo que, aún cuando no hubiera diferentes calidades de tierra, el sólo hecho de aumentar el capital y/o el trabajo sobre la tierra origina una renta. De aquí a la ley de los rendimientos decrecientes generalizada para todos los recursos productivos y de las productividades marginales no hay más que un paso. O quizá más de uno, porque esta formulación explícita y generalizada se hace con los marginalistas en el último tercio del XIX. Para los marginalistas y neoclásicos de antes y de nuestros días, todos

---

[129] *Historia del Análisis Económico*, págs. 266 y siguientes, ediciones Ariel.
[130] *Principios de Economía Política y Tributación*, pág. 51. FCE.
[131] Pág. 53 ob. citada de Ricardo.
[132] Pág. 54 ob. citada de Ricardo.

los factores[133] se pagan -¿o querían decir que *deberían* pagarse?- de acuerdo con el valor de sus *productividades marginales*. Y ahí acabó el intento de construir un tipo de conocimiento con marchamo de ciencia, para convertirse en meros gráficos y fórmulas hasta que llegó una rama de este conocimiento -que no ciencia- que fue el keynesianismo[134]. Pero volvamos con Sraffa y su capítulo XI y oigamos sus palabras sobre qué entiende él por renta: "*Puede decirse que los recursos naturales que son utilizados en la producción, tales como la renta y los depósitos minerales, y que por ser su oferta escasa permiten a sus poseedores la obtención de una renta, ocupan entre los medios de producción una posición equivalente a la de los productos "no básicos" entre los productos*"[135]. Puede verse por estas palabras que Sraffa no se queda en la concepción de Ricardo sobre el origen de la renta y, sin desdecir al economista inglés que tanto admiraba y al que dedicó buena parte de su vida a su obra y a su correspondencia, pone el acento el italiano -y quizá toda la partitura- en *la escasez* como origen de la renta. Es verdad que ya en su época era un lugar común hablar de la escasez como una de las características de los llamados fenómenos económicos y, quizá por ello, se hablaba de la economía como *la ciencia lúgubre*. Más tarde aclara Sraffa el porqué de ese acento: "*Si no hubiera escasez, sólo se utilizaría un método, el más barato sobre la tierra, y no podría existir renta*". Aquí ya se aleja de Ricardo -en mi opinión- porque habla de *método*, es decir, de lo que hoy llamaríamos métodos de producción, que ya coge al marginalismo a contrapié, porque nos alejamos de aumentos de la intensidad del capital para hablar de cambios en su composición. Sraffa no da puntadas sin hilo y, poco a poco, sin querer traicionar a sus maestros clásicos, va llevando el agua a su molino hasta dejar seco el molino de los marginalistas.

Sin más preámbulos, vamos a exponer las ecuaciones, que esta vez ¡también! las hace explícitas Sraffa y que recojo en forma matricial:

(XI.1) $$\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{Y} = \underset{1xn}{P_t}\,\underset{nxn}{T} + w\,\underset{1xn}{L} + (1+r)\,\underset{1xm}{P}\,\underset{mxn}{X}$$

[133] El lenguaje se hace más aséptico y ya no se habla de trabajo, capital o tierra, sino de factores, todos en pie de igualdad.

[134] Otra injusticia histórica, porque cuando se habla de Keynes o keynesianismo, hay que mencionar al lado a Kalecki.

[135] Pág. 108 de *PMPM.*

donde la novedad respecto a las ecuaciones que definen el sistema esrafiano es la de la inclusión de $\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{T}$, siendo $\boldsymbol{P}_t$ la renta (unitaria) de la tierra (o minas, por ejemplo) y $\boldsymbol{T}$ una matriz diagonal $\boldsymbol{n}x\boldsymbol{n}$ que representa las cantidades de las diferentes tierras según sus cualidades. La otra posible novedad es la de que los precios de los medios de producción se llevan desde **1** a $\boldsymbol{m}$, en lugar de $\boldsymbol{n}$. Yo no entiendo porqué. De momento haré $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$ y en un anexo daré la ecuación y sus posibles consecuencias para el caso de que $\boldsymbol{m}$ fuera diferente a $\boldsymbol{n}$. De (XI.1), al hacer cero la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$, obtenemos:

(XI.2) $$\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{Y} = \underset{1xn}{P_t}\,\underset{nxn}{T} + (1+g_m)\underset{1xnnxn}{PX}$$

siendo $\boldsymbol{g}_m$ la tasa máxima de ganancia. Ahora, de (XI.1) y (XI.2) sale:

(XI.3) $$P = \frac{w}{g_m - r} \times LX^{-1}$$

donde los precios de los productos y de los medios -es decir, las *no rentas*- no dependen de las rentas $\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{T}$. La (XI.3) es muy acorde con lo que decía D. Ricardo: "*Dicho cereal no se encarece porque hay que pagar una renta, sino que debe pagarse una renta porque el cereal es caro*"[136]. Los precios de los productos finales $\boldsymbol{P}$, sean genéricos o sea el trigo como bien final, no dependen de $\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{T}$, es decir, de las rentas. Ya queda dicho que el economista inglés, sin título universitario, era una inteligencia suprema. De (XI.2) y (XI.3), sustituyendo los precios de (XI.3) en el lado derecho de (XI.2) pero no en el lado izquierdo, queda:

(XI.4) $$\boxed{P_t = PYT^{-1} - \frac{w(1+g_m)}{g_m - r} \times LT^{-1}}$$

Ahora las rentas unitarias $\boldsymbol{P}_t$ aumentan con el aumento de los precios finales $\boldsymbol{P}$, con la productividad de la tierra $\boldsymbol{YT}^{-1}$, con la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_m$; disminuyen en cambio con los salarios $\boldsymbol{w}$, con la tasa de ganancia (interés, beneficios) $\boldsymbol{r}$ y con la saturación de la mano de obra en relación a la tierra $\boldsymbol{LT}^{-1}$. De nuevo aquí las rentas (unitarias) de la tierra $\boldsymbol{P}_t$ dependen de los precios del producto $\boldsymbol{P}$, pero no al revés. Creo que D. Ricardo, de la mano de Sraffa, estaría satisfecho. También

[136] Pág. 56 de ob. citada.

Pasinetti[137] con su pequeño modelo ricardiano y su ecuación diferencial:

$$R = f(N) - N\frac{df}{dN} \tag{XI.5}$$

siendo ***R*** la renta de la tierra buscada, f(***N***) la función de producción (del trigo o bien final), ***N*** el número de trabajadores (u horas de trabajo) y d**f**/d***N*** la productividad (marginal) del trabajo.

Una generalización del modelo esrafiano que él no se atrevió a formular podría venir dado por la ecuación:

$$\underset{1xm}{P_y}\underset{mxn}{Y} = \underset{1xn}{P_t}\underset{nxn}{T} + (1+r)\times(w\underset{1xn}{L} + \underset{1xs}{P_x}\underset{sxn}{X}) \tag{XI.6}$$

donde hay ***m***+***n***+***s*** precios diferentes entre productos finales $\boldsymbol{P}_y$, rentas unitarias $\boldsymbol{P}_t$ y precios de los medios $\boldsymbol{P}_x$, y con el tipo de ganancia ***r*** abarcando todos los costes. Al seguir los mismos pasos dados para deducir (XI.4), obtenemos la ecuación:

$$P_t = P_y Y T^{-1} - \frac{w(1+r)(1+g_m)}{g_m - r}\times L X^T\left[X X^T\right]^{-1} X T^{-1} \tag{XI.7}$$

que no cambia nada las conclusiones de la ecuación (XI.4)[138]. Y, al igual que en la anterior, nada nos asegura desde el punto de vista formal la existencia de rentas negativas, lo cual no tendría sentido económico. Sólo podría evitarse al modo *esrafiano* acudiendo a la realidad y con los propietarios o empresarios huyendo de posibles métodos de producción -que dependen de ***L*** y ***X***- en la agricultura que dieran lugar a semejante desaguisado.

La principal dificultad de los modelos planteados, tanto del *esrafiano* más puro -el mencionado de Pasinetti- como el ampliado, es la de que las matemáticas tienen enorme dificultad para distinguir la

---

[137] *Crecimiento económico y distribución de la renta*, 1983, pág. 21, Alianza Editorial [*Growth and Income Distribution - Essays in Economic Theory*, 1974.]

[138] Al no ser ahora ***X*** cuadrada se ha tenido que recurrir al cálculo de $\boldsymbol{X}^T[\boldsymbol{XX}^T]^{-1}$ para despejar las rentas unitarias; y para no tener problemas con la inversa se ha puesto una limitación en el modelo: que ***s***<***n***, es decir, que el número de medios de producción sea menor que el número de procesos.

calidad de la cantidad. Hemos visto que de Ricardo arranca dos posibles interpretaciones de la renta (diferencial) de la tierra: la debida a los cambios de calidad y la del aumento de la cantidad de tierra manteniendo la misma calidad, es decir, con cantidades homogéneas susceptibles de suma. A posteriori, ambas interpretaciones caben formalmente, pero las consecuencias reales son distintas por más que las matemáticas no puedan distinguirlas. Sraffa se percató de ello con su proverbial sentido de la observación y lo explicó mejor en el epígrafe 89 de su libro, uno de los más brillantes del italiano. En el siguiente plantea el sempiterno problema de los medios de producción que no son producidos (la tierra, las minas) y de la posibilidad -como es el caso del trigo- de varios métodos de producción para obtener el mismo bien final. En concreto dice Sraffa que: "*Las máquinas de tipo obsoleto son similares a la tierra en la medida en que son empleadas como medios de producción aunque ya no son producidas... Y como la tierra, tales instrumentos obsoletos tienen la propiedad de los productos no básicos y son excluidos de la composición de la mercancía patrón*"[139].

Sraffa muestra su deseo de reducir todo ello a un modelo equivalente al de la producción por -aunque el no lo diga- las ventajas formales que tiene y que hemos visto. Creo que es un intento baldío y hay que dejar la producción simple (y en especial la de que todos los productos sean básicos) por sus aspectos pedagógicos, pero se debe llegar siempre a la producción conjunta, a la diversidad de métodos para un mismo producto, a la anualización de las rentas del capital fijo, a la reducción del trabajo fechado, a la diversidad de tasas de salario y de tasas de ganancia[140], etc. Sraffa ni mucho menos resolvió todos los problemas que planteó, pero sembró la semilla; quedarse sólo en lo que concibió el genio hace ya casi 90 años sería casi una traición. Claro, que peor es, como ocurre en la enseñanza universitaria de la economía hoy día, licenciarse y saber que Sraffa forma parte del pasado, no porque se le haya superado, sino porque se le ha ignorado. Las tesis doctorales al respecto, los artículos en revistas especializadas no son suficientes si sus conceptos, su teoría, su modelo, los problemas que plantea, no pasan al *corpus* canónico del conocimiento de un graduado y, no digamos, de un doctorado.

[139] Pág. 112 de *PMPM*.
[140] Ver anexo II.

Anexo 7: Generalización de la renta diferencial a partir de Sraffa

El caso más amplio al que se alude en el cuerpo principal de este texto es el definido por la ecuación:

(1) $$\underset{1xm}{P_y}\underset{mxn}{Y} = \underset{1xs}{P_t}\underset{sxn}{T} + (\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P_x}\underset{nxn}{X})(1+\underset{nxn}{F})$$

donde los precios de los productos finales $\boldsymbol{P}_y$, las rentas unitarias $\boldsymbol{P}_t$ y los precios de los medios de producción $\boldsymbol{P}_x$ son independientes entre sí y con diferente número de bienes o rentas; donde hay $\boldsymbol{s}x\boldsymbol{n}$ tipos diferentes de tierras, y donde ahora las tasas de salarios $\boldsymbol{W}$ y de ganancias $\boldsymbol{F}$ son matrices diagonales con $\boldsymbol{n}$ términos, es decir, tantos como procesos. En total hay $\boldsymbol{n}$ ecuaciones para $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{s}+\boldsymbol{n}$ precios, más $\boldsymbol{n}$ tipos de salario y $\boldsymbol{n}$ tasas de ganancia: total de variables: $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{s}+\boldsymbol{3n}$. Es decir, $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{s}+\boldsymbol{2n}$ grados de libertad. Hemos supuesto que los productos finales $\boldsymbol{Y}$, las tierras $\boldsymbol{T}$ y los medios de producción $\boldsymbol{X}$ son datos, aunque muy bien podría considerarse, bajo otros criterios, también variables. Si ahora hacemos, como es habitual, igual a cero los salarios $\boldsymbol{W}$, tenemos la ecuación siguiente con la máxima tasa de ganancia $\boldsymbol{F}_m$ para cada proceso:

(2) $$\underset{1xm}{P_y}\underset{mxn}{Y} = \underset{1xs}{P_t}\underset{sxn}{T} + \underset{1xn}{P_x}\underset{nxn}{X}(1+\underset{nxn}{F_m})$$

Entre las dos ecuaciones anteriores, eliminando términos comunes y despejando los precios de los medios de producción $\boldsymbol{P}_x$, obtenemos:

(3) $$P_x = LW(1+F)\times(F_m - F)^{-1}X^{-1}$$

y sustituyendo $\boldsymbol{P}_x$ de la última ecuación en la anterior queda:

(4) $$P_t = \left[P_y Y - LW(1+F)\times(F_m - F)^{-1}\times(1+F_m)\right]T^T\left[TT^T\right]^{-1}$$

expresión[141] donde se explican $\boldsymbol{s}$ rentas unitarias $\boldsymbol{p}_t$; expresión que no deja de ser explicativa, pero que se acerca cada vez más a lo empírico, es decir, a la contrastación de hipótesis. Aunque no lo parezca, (4) es la

[141] Por ejemplo, la relación entre las rentas unitarias $\boldsymbol{p}_t$ y la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{F}$.

renta ricardiana (unitaria) de la tierra, pero pasada por el tamiz discontinuo del modelo *esrafiano*. O, al menos, se deduce de él. En términos aritméticos, (4) sería:

(5) $$p_k = \left[\sum_{h=1}^{m} p_{yh} \sum_{j=1}^{n} y_{hj} - \sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}(1+f_{ij}) \times (1+f_{mij})}{f_{mij} - f_{ij}} \right] \times \hat{t}_{jk}$$

Capítulo XII: Desplazamientos en los métodos de producción

Se aborda en este artículo el capítulo XII del libro de Piero Sraffa *Producción de mercancías por medio de mercancías*, capítulo que titula el economista italiano "*Desplazamientos de los métodos de producción*". No es la intención del autor de este trabajo -al igual que en otras ocasiones- hacer una recopilación histórica de las aportaciones referidas a lo que ahora se llama *el problema de la elección de técnicas*, que es lo mismo a lo que se refiere Sraffa en este capítulo. Eso ya está hecho. La primera vez que leí el capítulo XII -hace de eso bastantes años- acepté como buena no sólo la argumentación, sino el gráfico que aparece en la pág. 115 de su obra. Con el tiempo he llegado a la conclusión que el gráfico es erróneo a pesar de que no he encontrado en la argumentación motivo de rechazo. Resulta curioso que el mismo *Pasinetti* recoja el gráfico -uno similar- a la par que desarrolla o concreta la argumentación. La cuestión, sin embargo, no tiene mayores consecuencias para el desarrollo de *la frontera salario-ganancia* porque esta es en esencia correcta. Es más -como veremos con las ecuaciones- si el gráfico de Sraffa fuera correcto, no se llegaría a una frontera salario-ganancia convexa[142]. En todo caso no es la intención tampoco de este trabajo -como en los anteriores- suplir los razonamientos económicos que hace Sraffa que, en general, son acertados, sino de dotar de instrumentos formales para asentar las hipótesis y las conclusiones que se derivan de la obra de Sraffa. De paso, por supuesto, alguna crítica con el fin de acotar y precisar tanto hipótesis como conclusiones que, sin desarrollos formales a la vista, se hacen mucho más difíciles; y con los desarrollos formales y sin perder el criterio económico, se atisban nuevas posibilidades de crecimiento de la semilla *esrafiana*. Hay que tener en cuenta que Sraffa trabajó su libro durante decenios; además, porqué no decirlo, él era un genio y los demás... simples mortales... Por último, se hacen algunas reflexiones sobre la posibilidad de la planificación -la semilla- a partir de un modelo generalizado obtenido a partir de Sraffa.

[142] Siempre hay lío entre lo cóncavo y lo convexo. Yo me guío por la literatura y Homero en la Ilíada habla de las "cóncavas naves". Es decir, cóncava según esto, sería una curva en forma de ***U*** hacia el origen de coordenadas. Matemáticamente, una curva cóncava vendría dada por una función continua cuya primera derivada fuera negativa y la segunda también negativa (decrecientemente decreciente); una curva convexa sería aquella representada por una función cuya primera derivada fuera también negativa, pero la segunda positiva (decrecientemente creciente).

I - <u>Desplazamientos de técnicas para productos no básicos</u>

Dice Sraffa que “*se conocen dos métodos alternativos para la producción de una de las mercancías. Y para comenzar por el caso más sencillo, supongamos que la mercancía en cuestión es un producto* <u>*no*</u> *básico*”[143]. Lo de que es el caso más sencillo es discutible. Una ecuación que pudiera representar el caso que habla Sraffa vendría dado por:

(XII.1) $$\underset{1x1}{P_a}\,\underset{1xn}{Y_a} + \underset{1xn}{p_b}\,\underset{nxn}{Y_b} = \underset{1x1}{(1+g)}\left[\underset{1x1}{w}\,\underset{1xn}{L} + \underset{1xn}{P_b}\,\underset{nxn}{X}\right]$$

donde $\boldsymbol{P}_a$ y $\boldsymbol{P}_b$ son los precios de los productos no básicos y básicos, respectivamente; $\boldsymbol{Y}_a$ y $\boldsymbol{Y}_b$ los productos finales no básicos y básicos; $\boldsymbol{g}$ la tasa de ganancia; $\boldsymbol{w}$ la tasa de salario; $\boldsymbol{X}$ los medios de producción. El bien *no* básico $\boldsymbol{Y}_a$ es cualitativamente el mismo, pero es producido desde $\boldsymbol{n}$ métodos de producción diferentes ($\boldsymbol{n}$ columnas). Es pues una generalización del problema planteado por Sraffa que habla de “*una mercancía*” desde dos métodos diferentes. De momento la ecuación es única, por lo que corresponde a un método de producción. Cuando hablemos de más de un método, introduciremos tantos sistemas de ecuaciones matriciales como métodos, porque ello supone que al menos $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{X}$ van ser diferentes. Si en la ecuación (XII.1) hacemos que lo salarios $\boldsymbol{w}$ valgan cero para obtener la tasa máxima de ganancia, es decir, hacemos el supuesto de que todo el excedente se lo lleva las ganancias, entonces la ecuación queda:

(XII.2) $$p_a Y_a + p_b Y_b = (1+g_m)\, p_b X$$

donde $\boldsymbol{g}_m$ es la tasa máxima de ganancia. De entre ambas ecuaciones obtenemos, como es habitual, los precios de los productos básicos:

(XII.3) $$p_b = \frac{w(1+g)}{g_m - g} \times LX^{-1}$$

Con estas tres ecuaciones y con los dos numerarios definidos como:

---

[143] Pág. 115 de *Producción de mercancías por medio de mercancías* (en adelante *PMPM*).

(XII.4) $LI = 1$

(XII.5) $Y_a I = 1$

donde **I** es el vector de unos de dimensión ***n*x1**, ya podemos obtener la ecuación intermedia:

(XII.6) $$P_a Y_a = \frac{w(1+g)}{g_m - g} \times (1 + g_m - LX^{-1} Y_b)$$

Para mayor comodidad, vamos a llamar ***f*** a $\boldsymbol{LX^{-1}Y_b}$. Además vamos a post-multiplicar (XII.6) por el vector de unos **I** de dimensión ***n*x1**. Entonces (XII.6) se convierte en:

(XII.7) $$P_a = \frac{w(1+g)\left[1 + g_m - f\right]I}{(g_m - g)}$$

es decir, la relación *precio de producto no básico-tasa de ganancia*. Esta función es crecientemente creciente porque son positivas las derivadas primera y segunda. También puede comprobarlo el lector a simple vista, puesto que el numerador aumento con aumentos de la tasa de ganancia ***g*** y, sobre todo, disminuye el denominador (por lo que aumenta el quebrado) a medida que ***g*** se acerca a la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g_m}$. Es decir, la función es siempre monótona creciente sin cambio de convexidad, por lo que no se corresponde con los gráficos mencionados de Sraffa y Pasinetti[144]. Sraffa no hace explícita la ecuación que justifica su gráfico -cosa habitual-, pero Pasinetti sí lo hace[145] con:

(XII.8) $$P_q = PA_q(1+r) + l_q w$$

donde $\boldsymbol{p_q}$ es el precio de la mercancía no básica, ***P*** los precios del resto -que son bienes básicos-, ***r*** el tipo de ganancia, $\boldsymbol{l_q}$ el input de trabajo de la mercancía no básica y ***w*** la tasa general de salarios[146]. La ecuación

[144] *Lezioni di teoria delle produzione*, 1975 [*Lecciones de la teoría de la producción*, 1983, pág. 197, edit. FCE].
[145] Pág. 199 libro anterior.
[146] Para nada afecta a la discusión que la tasa de ganancia comprenda todos los costes -incluidos los salariales- como que excluya a estos últimos. Difiere la forma de la ecuación de precios y la de la frontera salario-ganancia, pero lo esencial

(XII.8) es creciente respecto al tipo de interés cuando están dadas el resto de las variables. Al igual que ocurre con la ecuación (XII.7), los precios de las mercancías no básicas (en la (XII.8), $\boldsymbol{p}_q$) pueden bajar si, por ejemplo, un cambio en la técnica, hace cambiar $\boldsymbol{A}_q$ y $\boldsymbol{l}$, es decir, los medios y el trabajo. Pero entonces debemos hablar de un *desplazamiento* de la curvas (XII.7) y (XII.8) y *no de un deslizamiento* a lo largo de la curva *precio-tasa de ganancia*, que es lo que dibujan los gráficos mencionados. Quizá en la época que concibió Sraffa su obra esa diferenciación entre deslizamientos y desplazamientos no estaba bien asentada, pero en la época que escribe Pasinetti ya no había dudas. Lo curioso es que esto no tiene consecuencias serias para la frontera salario-ganancia, ni para el problema y el debate sobre la elección de técnicas y el retorno de las mismas. Ese debate se ha ganado por los críticos al neoclasicismo y al marginalismo, donde ha descollado el mismo *Pasinetti*, junto con *Kaldor, Robinson, Garegnani, Nuti*, etc., y, por supuesto, de forma pionera y por encima de todos, Piero Sraffa.

Un aspecto interesante que se deriva de las ecuaciones (XII.3) y (XII.7) es la pregunta de cuál de los precios crecen más deprisa, si los de los bienes básicos o los de los no básicos. Si dividimos ambas ecuaciones y tras alguna manipulación algebraica elemental se obtiene la conclusión que los bienes no básicos tendrán un crecimiento mayor que el de los básicos si $\boldsymbol{g}_m > \boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}_b\mathbf{I}\text{-}\mathbf{n}$; será menor si la inecuación anterior tiene signo contrario.

Un cambio de técnicas en la ecuación vendrá reflejado por cambios en la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_m$, y por un cambio en $\boldsymbol{f}$, es decir, en los inputs de trabajo $\boldsymbol{L}$ y en los medios de producción $\boldsymbol{X}$, incluso en los productos finales de los bienes básicos $\boldsymbol{Y}_b$. Por esto, ese cambio se notará gráficamente con *desplazamientos* de la curva definida en (XII.7) para los bienes no básicos y en la curva (XII.3) para los básicos. Podrá haber puntos de cruce entre curvas definidas por (XII.7) si un método de producción ha generado una tasa de ganancia $\boldsymbol{g}_1$ mayor que otro método con una tasa de ganancia $\boldsymbol{g}_2$ menor, pero con distintas funciones técnicas $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}_b$, es decir, con diferentes inputs de trabajo $\boldsymbol{L}$, medios de producción $\boldsymbol{X}$, y productos finales básicos $\boldsymbol{Y}_b$, que hagan que la curva que viene por debajo -la segunda- crezca más deprisa que la primera que parte de una posición más alta. En el punto

permanece. Pasinetti sigue la ecuación que supuestamente sigue Sraffa y que es la habitual en el economista italiano para la producción simple.

de cruce se producirá un cambio de la técnica, eligiendo el empresario o gestor aquella técnica (aquella parte de la curva) en cada momento que, a cada nivel de precios, da mejor tasa de ganancia ***g***. Aún así, la envolvente de la curva será monótona creciente con puntos de discontinuidad precisamente en el cambio de una técnica por otra.

La frontera salario-ganancia.

Vayamos ahora a esta frontera. La ecuación (XII.7) nos ha dejado el terreno preparado para ello, porque con un tercer y último numerario[147] como $\boldsymbol{p}_a$ es decir, con:

(XII.9) $$p_a = 1$$

que es el precio de la única mercancía *no* básica. Con (XII.9) obtenemos la frontera buscada simplemente despejando la tasa de salario en (XII.7):

(XII.10) $$w = \frac{g_m - g}{(1+g)(1+g_m - f)I}$$

que es una función convexa, es decir, decrecientemente creciente y con puntos de corte:

(XII.11) $$w\,(g=0) = \frac{g_m}{1+g_m - fI} \qquad \text{y} \qquad g(w=0) = g_m$$

La (XII.10) guarda cierta analogía con la ecuación de *la razón-patrón* de Sraffa ***w***=(***R***-***r***)/***R***. Ambas curvas pueden cortarse como máximo una vez si los valores de ***g***, ***fI*** y ***R*** son convenientemente obtenidos, puesto que (XII.10), como hemos visto, es un curva convexa con sendos puntos de corte en ordenadas y abcisas, y la razón-patrón de Sraffa es una recta con puntos de corte en **w**(***r***=**0**)=**1** y ***r***(***w***=**0**)=***g***. Es precisamente que ambas curvas toquen el eje de abcisas en el mismo punto -el ***g***- lo que hace que sólo puedan cortarse una vez. Sin embargo, en este caso sería

[147] En realidad podemos tomar tantos numerarios como queramos con tal de que no entren las mismas variables en cada uno de ellos, como ocurre en (4), (5) y (9), donde las variables ***L***, $\boldsymbol{Y}_a$ y $\boldsymbol{P}_a$ no se repiten.

mejor comparar (XII.10) con la razón-patrón *esrafiana* para el caso en el que las ganancias se calculen sobre todos los costes, es decir, incluidos los laborales $\boldsymbol{wL}$. En esta caso, $\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})/[(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{r})\boldsymbol{R}]$, es decir, *la razón-patrón* de Sraffa se parece mucho más a (XII.10) que antes.

El desplazamiento de los métodos de producción

... o de *elección de técnicas* -que es el tema del capítulo XII de Sraffa- podemos abordarlo desde la función (XII.7) *precios de productos no básicos-tasa de ganancia* o desde la ecuación (XII.10) *frontera salario-ganancia*. El resultado es el mismo. Desde la función precio-ganancia se plantea el problema de dos técnicas representadas por dos funciones tipo (XII.7), pero con diferentes tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{g}_{m}$ y con diferente función técnica $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}_{b}$, lo que dará lugar a diferentes precios de la mercancía no básica. El punto de corte será aquel en el que se igualen los precios. Veamos estos con las ecuaciones:

(XII.12) $$p_{a1}=\frac{w(1+g)}{(g_{m1}-g)\left[(1+g_{m1}-f_1)I\right]}$$

(XII.13) $$p_{a2}=\frac{w(1+g)}{(g_{m2}-g)\left[(1+g_{m2}-f_2)I\right]}$$

Al igualar $\boldsymbol{p}_{a1}$ con $\boldsymbol{p}_{a2}$ y resolver (XII.12) y (XII.13) se obtiene la tasa de ganancia:

(XII.14) $$g=\frac{g_{m2}\left[(1+g_{m2}-f_2)I\right]-g_{m1}\left[(1+g_{m1}-f_1)I\right]}{(g_{m2}-g_{m1})-(f_2I-f_1I)}$$

La ecuación (XII.14) nos daría el punto de corte propicio para el cambio de técnicas, donde, al mismo precio, hay dos sendas que puede seguir el empresario o gestor para maximizar su ganancia; y de haber $\boldsymbol{n}$ técnicas diferentes podría haber hasta $\boldsymbol{n-1}$ cambios posibles. Esta es una de las grandes novedades y conclusiones del análisis *esrafiano*, por contraposición al análisis marginalista de maximización de funciones. Con Sraffa, el gestor puede maximizar su ganancia, pero cambiando de técnica, porque las variables monetarias -precios, salarios y ganancias- se determinan simultáneamente y no como consecuencia de funciones de producción inanes a los precios. Este sólo hecho, esta sola ventaja, por sus dosis de realismo y a pesar del nivel de abstracción en el que aún nos movemos, bastaría para arrinconar los modelos marginalistas de maximización de funciones. En Sraffa, como se ve, también apela a comportamientos de optimización pero con otros supuestos.

II - <u>Desplazamientos de técnicas para productos básicos</u>.

En contra de lo que afirma Sraffa, este caso es, al menos formalmente, más sencillo porque nos hemos desprendido de los bienes *no* básicos y las ecuaciones que van a definir el tema se simplifican. La ecuación que define el sistema será muy esrafiana:

(XII.15) $$\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{Y} = \underset{1x1}{(1+r)} \times \left\lfloor \underset{1x1}{w}\,\underset{1xn}{L} + \underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X} \right\rfloor$$

donde todos los bienes son básicos y donde la matriz de productos finales ***Y*** puede ser diagonal (producción simple) o no diagonal (producción conjunta *esrafiana*), es decir, sólo con ceros para ***i*** distintos de ***j*** (simple) o con todos sus elementos no negativos (conjunta). La ecuación ahora que surge de dar valor cero a la tasa de salarios ***w*** es:

(XII.16) $$PY = (1+R)PX$$

donde ahora le hemos llamado a la tasa de ganancia máxima ***R***, que si estamos en producción simple será también *la razón-patrón de Sraffa*, y si estamos en producción conjunta será sólo la tasa máxima de ganancia. De (XII.15) y (XII.16) obtenemos, de forma análoga a como hacíamos antes con los productos *no* básicos, la ecuación:

(XII.17) $$P = \frac{w(1+r)}{R-r} \times LX^{-1}$$

que nos da la relación entre precios ***P*** y tasa de ganancia ***r***. Más claro que antes queda que esta función es creciente; más aún, es crecientemente creciente y se hace infinita si la tasa de ganancia ***r*** aplicada por los empresarios a sus negocios se acercara a la tasa máxima ***R***. Ahora vamos hacer los siguiente: 1) vamos a multiplicar a (XII.17) por ***YI***, es decir, por la matriz de productos finales y por el vector de unos de dimensión ***n***x**1**; 2) vamos a tomar como numerario ***pY*I**, es decir, ***pY*I**=**1**; 3) vamos a llamar por comodidad ***f*** o función técnica a ***f***=***LX***$^{-1}$. Hechas estas 3 cosas en (XII.17) y despejado la tasa de salarios ***w***, queda la ecuación que va a definir *la frontera salario-ganancia* de este epígrafe:

(XII.18) $$\boxed{w=\frac{R-r}{(1+r)\,fI}}$$

que es una función crecientemente decreciente (con primera derivada negativa respecto a ***r*** y segunda positiva). Es decir, es una función convexa con puntos de corte ***w***(***r***=**0**)=***R***/***fI*** y ***r***(***w***=**0**)=***R***. Para cambiar, vamos ahora a partir de la frontera salario-ganancia definida en (XII.18) en lugar de hacerlo con la relación precios-tasa de ganancia que hemos hecho en el epígrafe anterior. Los resultados son exactamente los mismos, pero en este caso las maniobras algebraicas son más sencillas. Dos técnicas diferentes se notarán en (XII.18) porque la tasa máxima de ganancia ***R*** y la función técnica ***f*** serán diferentes. Ello dará lugar, en general, a tasas de salario ***w*** diferentes para una misma tasa de ganancia ***g***. Los puntos de corte, por tanto, al igual que ocurría en el caso de los productos no básicos, se darán cuando se igualen las tasas de salario. Veamos las dos ecuaciones:

(XII.19) $$w=\frac{R_1-r}{(1+r)\,f_1I}$$

(XII.20) $$w=\frac{R_2-r}{(1+r)\,f_2I}$$

El resultado de igualar (XII.19) y (XII.20) y despejar la tasa de ganancia ***r*** es:

(XII-21) $$\boxed{r=\frac{R_2\,f_1I-R_1\,f_2I}{f_1I-f_2I}}$$

Con 2 técnicas podrá haber como máximo 2 puntos de corte[148], pero también puede haber uno o ninguno. Con varias técnicas las cosas se complican extraordinariamente. El empresario o gestor tendrá la oportunidad de conducirse por una senda (un proceso técnico) hasta que encuentre otro que, para la misma tasa de salarios, obtenga una mayor tasa de ganancia. En el punto de cruce será crucial su decisión, porque será el único momento (si las funciones se cortan un vez) que ambos procesos productivos le serán indiferentes si sólo valora los salarios y las ganancias, porque en ese momento serán iguales para ambos. En ese momento, si no se equivoca, tendrá la posibilidad de elegir un proceso que le reportará más ganancias con los mismos costes salariales[149]. Y sin embargo, nada asegura que aproveche la oportunidad.

III - Elección de técnicas para producción conjunta, con bienes no básicos y con tasas de salarios y de ganancias múltiples.

Este es el caso más complejo que podemos tratar sin salirlos del espíritu de la obra de Sraffa y que el economista italiano nunca formuló. No suele ser objeto de tratamiento las posibles generalizaciones del modelo de Sraffa porque se piensa que las conclusiones a las que se llegaría son las mismas que las que se obtienen bajo hipótesis más sencillas que ya hemos visto. Ocurre lo mismo con las funciones marginalistas de producción. Pero a veces la generalización y su consiguiente agregación depara ingratas sorpresas, como es el caso del equilibrio parcial marshaliano, el caso del equilibrio general, que ambos sortearon sin darse cuenta las paradojas de la agregación; la teoría de los juegos a partir del dilema del prisionero, o el teorema de la imposibilidad de Arrow. Hay que adelantar que, en efecto, desde un punto de vista conceptual, nada aporta al modelo, pero en cambio, al acercarnos a la realidad cobra más realismo la posibilidad de contrastar sus conclusiones o, al menos, de construir modelos que, sin dejar de ser explicativos, es decir, teóricos, se hagan más realistas. También alguna posibilidad más que se verá en

[148] Depende del radio de convexidad y de los puntos de corte en los ejes de ambas ecuaciones.
[149] En modelo tan sencillo asimilamos tasa de salarios con costes salariales. No obstante, el modelo puede ser generalizado a costes salarios con tal de sustituir la tasa por estos costes en la función que define el sistema.

el siguiente epígrafe. La ecuación que definiría el sistema con las consideraciones del título de este epígrafe sería:

$$\text{(XII.22)} \qquad \underset{1xs}{P_a}\,\underset{sxn}{Y_a} + \underset{1xn}{p}\,\underset{nxn}{Y} = \left\lfloor \underset{1xn}{L}\,\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X} \right\rfloor \times \underset{nxn}{(1+G)}$$

donde el número de bienes *no* básicos ***s*** se han obtenido de ***n*** sectores; donde los salarios están definidos por la matriz diagonal ***W***, es decir, donde hay ***n*** salarios diferentes (tantos como sectores); donde la matriz de medios ***X*** consta, como es habitual, de igual números de medios que de sectores ***n***, y donde la tasa de ganancia ***G*** es también una matriz diagonal con ***n*** tasas diferentes, al igual que los salarios. Los precios $\boldsymbol{P}_a$, y ***P*** quedan definidos en función de los productos y medios. Si ahora se hacen cero todas las tasas de salario ***W*** se obtiene, como es habitual, la ecuación que hace máxima la ganancia $\boldsymbol{G}_m$, con la salvedad que ahora $\boldsymbol{G}_m$ será también una matriz diagonal con ***n*** tasas máximas de ganancia *diferentes* posibles.

$$\text{(XII.23)} \qquad \underset{1xs}{P_a}\,\underset{sxn}{Y_a} + \underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{Y} = \left\lfloor \underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X} \right\rfloor \times \underset{nxn}{(I+G_m)}$$

Ahora, de las ecuaciones (XII.23) y (XII.24), se obtiene la función de precios ***P*** de los medios de producción:

$$\text{(XII.24)} \qquad P = LW(I+G)(G_m - g)^{-1}X^{-1}$$

y sustituyendo (XII.24) en (XII.23) se eliminan los precios de los productos básicos ***P*** y se obtienen los precios de los productos no básicos $\boldsymbol{P}_a$:

$$\text{(XII.25)} \qquad P_a = LW(I+g)(G_m - g)^{-1}(I+G)(I+G_m - X^{-1}Y)Y_a^T(Y_aY_a^T)^{-1}$$

Parece difícil llegar a una *frontera de salario-ganancia* a partir de (XII.25) dado que tenemos en este caso múltiples salarios y múltiples tasas de salario, pero casi todo tiene solución, salvo para lo contradictorio. Para este fin vamos a tomar como numerario el lado izquierdo completo de (XII.23) haciendo:

(XII.26) $$P_a Y_a I + P Y I = 1$$

y también ¡el lado derecho de la ecuación![150] (XII.25) dado que no se repiten las variables:

(XII.27) $$LW(I+G)(G_m-G)^{-1}(I+G_m)I=1$$

Pero ahí no queda la cosa, porque vamos a llamar $\boldsymbol{w}_{\mathrm{m}}$ *la tasa media de salarios* que va a satisfacer la ecuación (XII.28):

(XII.28) $$w_m L(I+G)(G_m-G)^{-1}(I+G_m)I = LW(1+G)(G_m-g)^{-1}(I+G_m)I=1$$

Esta tasa media se calculará con la condición (XII.28), despejando simplemente $\boldsymbol{w}_{\mathrm{m}}$ porque los dos miembros de la ecuación son ahora un escalar. Ahora se obtiene:

(XII.29) $$w_m = \frac{LW(I+G)(G_m-G)^{-1}(I+G_m)I=1}{L(I+G)(G_m-G)^{-1}(I+G_m)I}$$

Para ver el punto de corte en el eje de ordenadas, es decir, el valor de la tasa media de salario $\boldsymbol{w}_{\mathrm{m}}$ para $\boldsymbol{g}_{\mathrm{ij}}=\mathbf{0}$ para todos los $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$, quizá sea más fácil la expresión aritmética de (XII.29):

(XII-30) $$w_m = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{(1+g_{ij})(1+g_{mij})}{g_{mij}-g_{ij}}}$$

La *frontera salario-ganancia* se obtiene de (XII.28):

(XII.31) $$w_m = \frac{1}{L(I+G)(G_m-G)^{-1}(I+G_m)I}$$

Hemos dado (XII.30), que es la misma que (XII.31), porque nos permite ver mejor el punto de corte del *salario medio* $\boldsymbol{w}_{\mathrm{m}}$ cuando los tipos de

[150] Cosa que se puede hacer porque, al igual que antes, no hay ninguna variable en el lado derecho que lo esté en el izquierdo.

salario (todos absolutamente) se hacen cero. En efecto, para $\boldsymbol{g}_{ij}=\mathbf{0}$ para todo $\boldsymbol{i}=\mathbf{1}$ a $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{j}=\mathbf{1}$ a $\boldsymbol{n}$, se obtiene el punto de corte:

(XII.32)
$$w_m(g_{ij}=0)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1+g_{mij}}{g_{mij}}}$$

Lo notable de (XII.30) y (XII.31) es que la distribución entre salarios y tasas de ganancia no depende directamente ni de los precios ni de los valores físicos de medios y productos finales, acorde con la idea *esrafiana* de encontrar una medida de la distribución que no dependiera de los precios; indirectamente sí depende de los medios y productos finales a través de las tasas de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_{mij}$. En todo caso, $\boldsymbol{g}_{mij}$ no depende de los precios. Más notable aún es que (XII-30) y (XII.31) nos dan una aproximación a la planificación, dados los medios y productos finales, como veremos más adelante en un apéndice.

Apéndice B: Productos no básicos que se auto-reproducen

Remata Sraffa su extraordinario libro *Producción de mercancías por medio de mercancías* con 4 apéndices a modo de notas aclaratorias, como si no le merecieran simplemente una nota a pie de página. Una de ellas, que lleva el largo título de "*Nota sobre productos no básicos que se auto reproducen*", es algo más que una nota aclaratoria como se verá. Sraffa dice que "*consideremos una mercancía que entra en su propia producción en un grado desusadamente grande*". Párrafos más tarde aclara lo de *desusadamente grande* como la mercancía cuyo *producto neto relativo*[151], es decir, el cociente que surge dividir la diferencia entre el producto y el medio de producción, y el propio medio de producción supera a la tasa de ganancia del sistema. Sraffa no lo dice con estas palabras, pero es lo que quiere decir. Pone un ejemplo -no pone muchos a lo largo de su obra- y dice que si se recogieran 110 unidades de habas de cada 100 sembradas, el sector de las habas no tendría problema mientras la tasa *general* de ganancia del sistema permaneciera igual o menor al 10%, que es justamente el producto neto relativo (o excedente relativo) de las habas[152]. El problema surge si la tasa general de ganancia sube por encima del 10% por una bajada, por ejemplo, de los salarios[153]. Y he dado una pista dos veces sobre el punto crucial y es el de que *la tasa general de ganancia* depende del conjunto del sistema; un segundo punto decisivo es que la mercancía protagonista -las *habas*- no puede influir en la tasa de ganancia general porque es una mercancía *no básica*, es decir, no es consumida como medio de producción por ningún otro sector de la economía, por lo que tampoco puede influir en los precios del resto del sistema y, por ende, en la tasa de ganancia[154] general, dado que, en el sistema *esrafiano*, tanto precios como tasa de ganancia y tasa de salarios se determinan conjuntamente, aunque con al menos un grado de libertad. Para terminar con el planteamiento de Sraffa, dice el autor que la subida de la tasa de ganancia general hasta llegar al 10% "*haría aumentar sin límite*" el precio de este producto (las habas del ejemplo). Y si se rebasara el 10% de tasa de ganancia general, sólo sería posible "*el*

[151] Este concepto no es de Sraffa sino de este modesto autor, por lo que pido disculpas por tal atrevimiento.
[152] (110 habas recogidas - 100 habas sembradas) / 100 habas sembradas = 10%
[153] Aunque no parece posible que otra variable monetaria puede influir en la subida de la tasa de ganancia general
[154] Tampoco puede influir este sector -el de las habas- el salario general del sistema, pero Sraffa centra inteligentemente en la tasa de ganancia en lugar del salario por lo que luego se verá.

reemplazamiento de las otras materias primas si se obtuvieran gratuitamente". Lo cual tiene su lógica, porque el precio de las habas se haría infinito en términos relativos[155] dado que llegado a ese punto, los medios que emplean las habas como medio de producción deberían comprarse a precio cero, es decir, en forma de regalo. Es verdad que todo esto se hace difícil de seguir sin ayuda de las matemáticas por más que se empeñara el gran Sraffa en utilizar exclusivamente razonamientos económicos, cosa que hace, por cierto, magistralmente casi siempre.

Antes de entrar en los aspectos formales habría que aclarar que el caso planteado por Sraffa no es el caso extremo de un sector que no tuviera comunicación con el resto del sistema, aunque compartiera las mismas tasas de ganancia y de salarios, porque, si bien este sector -el de las habas- no es suministrador de esos bienes al resto del sistema, si compra del resto del sistema -y se puede suponer que de todo el sistema- como medios de producción los productos finales de este. No es, por lo tanto, un sistema aislado. No estamos en el caso del *trigo ricardiano*, donde se vendía a sí mismo el trigo (igual que el caso de las habas) a la par que no utilizaba ningún medio ni compraba nada del resto del sistema (aquí está la diferencia). Para caracterizar formalmente lo que nos dice Sraffa en este apéndice hay que particionar en 4 trozos, tanto la matriz de productos finales del conjunto del sistema ***Y*** como de medios de producción ***X*** de la siguiente manera:

(Ab.1) $$Y = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & \cdots & Y_{1,n-1} & Y_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_{n-1,1} & \cdots & Y_{n-1,n-1} & Y_{n-1,n} \\ Y_{n,1} & \cdots & Y_{n,n-1} & Y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n-1} & X_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_{n-1,1} & \cdots & X_{n-1,n-1} & Y_{n-1,n} \\ X_{n,1} & \cdots & X_{n,n-1} & X_n \end{bmatrix}$$

Las matrices de productos finales ***Y***, de medios ***X***, de trabajo ***L*** y de precios ***P*** serán:

(Ab.2) $$Y = \begin{bmatrix} Y_A & Y_B \\ Y_C & Y_D \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_A & X_B \\ X_C & X_D \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} La & Lb \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_a & P_b \end{bmatrix}$$

donde:

---

155 Es decir, en términos de las mercancías suministradas.

(Ab.3) $Y_A = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & \cdots & Y_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n-1,1} & \cdots & Y_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \qquad Y_B = \begin{bmatrix} Y_{1,n} \\ \vdots \\ Y_{n-1,n} \end{bmatrix} \qquad Y_C = \begin{bmatrix} Y_{n,1} & \cdots & Y_{n,n-1} \end{bmatrix} \quad Y_D = Y_n$

(Ab.4) $X_A = \begin{bmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n-1,1} & \cdots & X_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} X_{1,n} \\ \vdots \\ X_{n-1,n} \end{bmatrix} \qquad X_C = \begin{bmatrix} X_{n,1} & \cdots & X_{n,n-1} \end{bmatrix} \quad X_D = X_n$

(Ab.5) $L_A = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \cdots & L_{1,n-1} \end{bmatrix} \qquad L_B = L_n \qquad P_a = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_{n-1} \end{bmatrix} \qquad P_b = P_n$

De estas matrices podemos establecer la ecuación que define el sistema que responde al problema planteado por Sraffa en su *apéndice B.*

(Ab.6) $$\begin{bmatrix} Pa & Pb \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y_A & Y_B \\ Y_C & Y_D \end{bmatrix} = (1+g)\left[w\begin{bmatrix} L_a & L_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_a & P_b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_A & X_B \\ X_C & X_D \end{bmatrix} \right]$$

La (Ab.6) nos da las ecuaciones de precios, tanto la de los precios $\boldsymbol{P}_{a}$ de las ***n*-1** mercancías básicas, como la del precio $\boldsymbol{P}_{b}$ de la singular mercancía de la que habla Sraffa: las habas. Estas son:

(Ab.7) $$P_a Y_A + P_b Y_C = (1+g) \times \left[wL_a + P_a X_A + P_b X_C \right]$$

(Ab.8) $$P_a Y_B + P_b Y_D = (1+g) \times \left[wL_b + P_a X_B + P_b X_D \right]$$

De la (Ab.8) se despeja el vector de precios $\boldsymbol{P}_{a}$ de bienes y servicios básicos y queda:

(Ab.9) $$P_a = \left[w(1+g)L_a Y_A^{-1} - P_b Y_C Y_A^{-1} \right] \times \left[I - (1+g)A_a \right]^{-1}$$

siendo $\boldsymbol{A}_{a}=\boldsymbol{X}_{A}\boldsymbol{Y}_{A}^{-1}$ la matriz de requerimientos de las mercancías básicas. Viendo (Ab.10) parecería que los precios de los bienes básicos $\boldsymbol{P}_{a}$ dependiera, entre otras variables, del precio del bien de autoabastecimiento no básico $\boldsymbol{P}_{b}$, es decir, de las habas de Sraffa. Pues no es cierto, porque el vector $\boldsymbol{Y}_{C}$ es cero, dado que es precisamente el vector fila que suministra -debiera suministrar- medios de producción (las habas) a los otros sectores, es decir, al resto de las columnas excepto la última, que es justamente la de las habas y que se suministra así mismo ($\boldsymbol{Y}_{D}$). Si $\boldsymbol{Y}_{C}$ vale cero, la (Ab.10) queda:

(Ab.10) $$P_a = \left[w(1+g)L_a Y_A^{-1}\right] \times \left[I-(1+g)A_a\right]^{-1}$$

En (Ab.10) se comprueba que los precios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{a}}$ de los bienes básicos dependen sólo de sus propios medios ($\boldsymbol{A}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{X}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{A}}^{-1}$), de sus propios productos finales ($\boldsymbol{Y}_{\mathrm{A}}$), de la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$ y de la tasa de ganancias $\boldsymbol{g}$, que se determinan conjuntamente por este sistema de $\boldsymbol{n}$**-1** ecuaciones con $\boldsymbol{n}$**+1** incógnitas. En efecto, tenemos $\boldsymbol{n}$**-1** precios, una tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$ y una tasa de salario $\boldsymbol{w}$. Hay, por lo tanto, dos grados de libertad. Una de ellos se puede eliminar tomando un precio como numerario; el otro grado de libertad no se puede eliminar si se quiere respectar la filosofía que entraña la obra de Sraffa. Según esta, la distribución de la renta y riqueza -representada en el modelo por el conjunto de valores de tasa de ganancia y de salarios que satisfacen (Ab.10)- no es resuelta técnicamente por ningún elemento del sistema, sino por la sociología, por las relaciones de conflicto de la sociedad o, simplemente, por la luchas de clases, según los gustos. Aquí no hay *productividades marginales,* ni *relaciones marginales de sustitución, ni costes marginales,* ni *utilidades marginales* que determinen precios, salarios y ganancias, niveles de producción y utilización de factores por sí solos, sino que es el conjunto del sistema, representado en esta ocasión por (Ab.10), quien lo determina, aunque siempre con un grado de libertad.

Vayamos ahora a la ecuación (Ab.8) y despejemos de ella el precio de la mercancía objeto de análisis de Sraffa y de este artículo: las habas. Sale que:

(Ab.11) $$P_b = \frac{w(1+g)L_b + P_a\left[(1+g)X_B - Y_B\right]}{Y_D - (1+g)X_D}$$

De (Ab.11) son destacables al menos tres cosas: 1) En primer lugar vemos que, a diferencia de la ecuación anterior de precios del sistema de mercancías básicas, aquí el precio de las habas, es decir, de la mercancía *no básica con autoabastecimiento,* depende del resto de los precios del sistema $\boldsymbol{P}_{\mathrm{a}}$; 2) Las tasas de salarios $\boldsymbol{w}$ y de ganancia $\boldsymbol{g}$ vienen dadas por el sistema anterior y no puede este sector (el de *las habas*) influir en ellas. Diríamos, emulando a la teoría de la competencia perfecta, que este sector es *ganancia-aceptante* y *salario-aceptante*; 3) Si nos fijamos en el denominador de (Ab.11), se puede comprobar que tiende a cero si $\boldsymbol{X}_D$ tiende a $\boldsymbol{Y}_D/(1+\boldsymbol{g})$, y si eso ocurre los precios tienden a infinito. Quedaría:

$$\text{(Ab.12)} \qquad si \;\; X_D \rightarrow \frac{Y_D}{1+g} \Rightarrow P_b \rightarrow \infty$$

con lo que se cumple lo que señala Sraffa en el apéndice para las mercancías no básicas que se autoabastecen (las habas del ejemplo) porque que se cumpla (Ab.12) es como decir que el *producto neto relativo* o *excedente relativo* de este producto tiende a cero. Sraffa dice que eso no ocurriría para las mercancías básicas. Es verdad que, contemplada la ecuación (Ab.10) de mercancías básicas, no parece que eso pueda ocurrir, pero a mí la explicación que da Sraffa no me convence[156]. Luego veremos el tema con más detenimiento. Si ahora sustituimos los precios del sistema de mercancías básicas $\boldsymbol{P}_a$ -es decir, la ecuación (Ab.10)- en la ecuación de la mercancía que se autoabastece (Ab.11) queda:

$$\text{(Ab.13)} \qquad P_b = \frac{w(1+g)L_b + L_a Y_A^{-1}\left[I-(1+g)A_a\right]^{-1} \times \left[(1+g)X_B - Y_B\right]}{Y_D-(1+g)X_D}$$

Viendo (Ab.13) en un primer momento resultaría sorprendente que el precio $\boldsymbol{P}_b$ de esta mercancía dependa de las mercancías básicas, teniendo en cuenta que hemos dicho que no suministra su producto al resto del sistema, aunque sí parece lógico que le influya la ***n***-ésima columna, es decir, la columna que representa las compras del sector de las habas al resto de los sectores. Sin embargo, el resto del sistema influye en el considerado por Sraffa, no sólo por las tasas de salario y de ganancia determinadas autónomamente por el sector de bienes básicos, sino que estos sectores lo hacen *indirectamente* en el de las habas porque todo el sistema es suministrador (las ***n*-1** filas de la matriz ***Y***, es decir, $\boldsymbol{Y}_A$) de los sectores que a su vez suministran al de las habas (columna ***n***-ésima de ***Y***, es decir, $\boldsymbol{Y}_B$). ¿Qué ocurriría si el resto del sistema dejara de vender productos al sector de las habas y tuviera éste que contentarse con utilizar su propio producto como *único* medio de producción (el caso del trigo ricardiano)? Ocurriría que la ***n***-ésima columna de ***Y*** hasta el elemento ***n***-ésimo sería cero, por lo que $\boldsymbol{X}_B$ y $\boldsymbol{Y}_B$ también lo serían, y (Ab.13) quedaría en:

---

156 Ver apéndice 1.

(Ab.14) $$P_b = \frac{w(1+g)L_b}{Y_D - (1+g)X_D}$$

donde la determinación del precio $\boldsymbol{P}_b$ sólo depende del trabajo $\boldsymbol{L}_b$ utilizado en la siembra y recolección de las habas, de la cantidad de habas empleada $\boldsymbol{X}_D$ y de la cantidad $\boldsymbol{Y}_D$ cosechada. Aún así, no perdería este bien *el cordón umbilical* que le une al resto del sistema, porque éste le daría como datos las tasas de salario $\boldsymbol{w}$ y de ganancia $\boldsymbol{g}$. También puede considerarse, en este caso, que ambas tasas son independientes del resto del sistema: todo depende de las hipótesis de partida.

Hemos dejado pendiente la discusión sobre la idea de Sraffa de que el sector de bienes básicos no le afectaría una subida de la tasa de ganancia -como consecuencia, por ejemplo, de una bajada de salarios- hasta el punto de llegar al infinito si contemplamos el precio de un bien que tiende supuestamente al infinito en términos de otro bien, también básico, que también tiende al infinito, dado que ambos cocientes podrían dar una relación estable y finita. Sraffa no lo dice con estos términos, pero esa es la idea. Formalmente tiene razón el gran economista italiano, porque en un cociente de dos expresiones que tienden al infinito puede pasar cualquier cosa: tender a infinito, a cero o estabilizarse en torno a una constante. Mi opinión es que se trata de un mal uso de las matemáticas, porque si ambos bienes tienden al infinito -junto con el resto- se puede afirmar que en el modelo que tratamos se hacen infinitos los precios. Si, por ejemplo, un bien fuera el aceite y otro el alquiler de los pisos, si ambos crecieran exponencialmente, el conjunto de los precios de los bienes crecería exponencialmente, aunque sea verdad que el precio del aceite en términos del precio de los alquileres se estabilizara. En todo caso se trataría de un mal uso del numerario, porque todo modelo que se acerque a la realidad exige que el sector que produce este producto ha de tener una estabilidad. Esta preocupación viene al menos desde David Ricardo[157].

Otra explicación de este escapismo al infinito es la de que un sector cuya *producto neto relativo*[158] o *excedente relativo* es menor que

[157] Ver *Principios de Economía Política y Tributación*, pág. 33, edit. FCE.
[158] Cociente entre la diferencia del producto final y el medio de producción y el medio de producción.

la tasa de ganancia que le exige el resto del sistema es inviable, salvo que se recibiera como regalo de un sector que no fuera de este mundo las habas necesarias para mantener la tasa de ganancia exigida exógenamente a este sector (Sraffa habla del país de las *hadas* con *"*d*"*). Además, y dado que la relación entre precio y tasa de ganancia tiene dos ramas, una que se *va* al infinito en el cuadrante positivo de precio-ganancia y otra que *viene* del infinito en el cuadrante negativo, sería como si el resto de los bienes tomaran valor cero, según Sraffa. En mi opinión volvemos al mal uso de las matemáticas, porque muchas de las soluciones de un modelo concretado formalmente en (Ab.11) pueden no tener sentido económico y no hay que buscarles tres pies al gato: carece de sentido las soluciones negativas[159] que *vienen* del infinito negativo (no las que *van* al infinito positivo) en el modelo *esrafiano*, por mucho que Sraffa las busque. Otra cosa es un análisis parcial de un sector donde, para compensar los posibles precios negativos -que no infinitos- se entienda que ello viene compensado por *las subvenciones*. Esto puede contemplarse y modelizarse para algunos sectores concretos, como los de la leche, mantequilla, minería, etc., que históricamente han necesitado de las ayudas para sobrevivir. El problema con los modelos *esrafianos* es que estos se compadecen mal con análisis sectoriales o parciales por la filosofía del autor y derivado de la necesidad del sistema de tener en cuenta la totalidad de las relaciones intersectoriales. Igual ocurre con el análisis input-output, cuyas relaciones con los modelos de Sraffa son evidentes, aunque nacieran en mundos intelectuales y físicos diferentes y como respuestas a problemas diferentes[160].

Retornamos de nuevo a la discusión de Sraffa sobre la imposibilidad de precios tendentes al infinito para el caso de las mercancías básicas, pero con otros argumentos aparentemente.

---

[159] Los valores negativos así como los valores complejos surgidos de la resolución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones no siempre admiten una interpretación desde el mundo real. Hay que pensar que son soluciones derivadas de propiedades del sistema matemático que llamamos álgebra y a su vez han nacido por la obligación de cerrar el sistema sobre sí mismo, de tal forma que el resultado de ciertas operaciones (resta, multiplicación extracción de raíces, etc.) formen elementos del mismo conjunto originario. A veces ocurre lo contrario, como fue el caso de Paul Dirac y las soluciones negativas de las ecuaciones de la mecánica cuántica o el caso de las ecuaciones algebraicas de tercer grado (curiosamente no las de segundo).
[160] A este duo de modelos *esrafiano* y de Leontief hay que añadir el modelo de Von Neumann.

Supongamos que la ecuación que define el sistema, sea de reproducción simple o compuesta *esrafiana*, es como sigue:

(Ab.15) $$PY = (1+g)\left[wL + PX\right]$$

Supongamos ahora que la ecuación que surge de (Ab.15) al hacer cero la tasa de salarios es:

(Ab.16) $$PY = (1+g_m)PX$$

siendo $\boldsymbol{g}_m$ la tasa máxima de salarios como consecuencia de la condición anterior. De (Ab.15) y (Ab.16) sale que:

(Ab.17) $$P = \frac{w(1+g)}{g_m - g} \times LX^{-1}$$

En (Ab.18) vemos que la existencia de precios con tendencia al infinito es posible con tal de que la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$ tienda a la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$. De hecho, y aunque en el *apéndice B* que comentamos lo niega, en el capítulo VII sobre la producción conjunta lo afirma y lo demuestra de forma brillante, aunque, como siempre, no haga explícitas las ecuaciones. La explicación de esta aparente contradicción es la de que el *apéndice B* es en realidad una nota a pie de página del capítulo V que trata sobre *la mercancía-patrón*. Es muy posible que a la altura del capítulo V aún no tuviera desarrollada la producción conjunta y sus consecuencias sobre los precios (y también sobre los multiplicadores de la mercancía-patrón). Conclusión: ni los genios nacen sabiendo.

Aunque la causa de que en (Ab.17) tienda los precios al infinito parezca diferente que en (Ab.11), (Ab.13) y (Ab.14), ello es sólo la apariencia, porque la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ es equiparable formalmente a una relación entre el producto neto de un sector real o virtual[161] y su medio de producción, es decir, lo que hemos llamado *excedente relativo*. Sí hay un aspecto que diferencia el tratamiento del movimiento de los precios a causa del movimiento del excedente relativo del movimiento de la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ es la de la

[161] Si hoy se tradujera el libro de Sraffa creo que el traductor llamaría *razón-virtual* a la razón-patrón de la traducción de Luis Ángel Rojo.

posibilidad de la planificación utilizando modelos en los que aparezca esta última. Ya lo he mencionado en anteriores epígrafes por lo que no voy a entrar en ello. Sraffa nunca debió imaginar esta posibilidad que abría su sistema porque sus preocupaciones y el entorno intelectual en el que se movía era otro.

La ecuación (Ab.18) que traigo a colación nos permite hacer un supuesto interesante que Sraffa no pudo preveer al no hacer explícitas sus ecuaciones o que, simplemente, no la juzgó el interesante.

$$P_b = \frac{w(1+g)L_b + L_a Y_A^{-1}\left[I-(1+g)A_a\right]^{-1} \times \left[(1+g)X_B - Y_B\right]}{Y_D - (1+g)X_D} \qquad \text{(Ab.18)}$$

Hacemos ahora en (Ab.18) que la tasa de salario ***w*** se haga cero[162] porque suponemos asimilado dicha tasa a los bienes-salario que consumen los asalariados y sus familias, y que, por lo tanto, están integrados con los medios de producción ***X*** *en pie de igualdad* con el resto de medios. Es esta una opción analítica perfectamente factible y nada deshonrosa para la clase social que consume bienes-salario, y si Sraffa no la contempló -salvo en el capítulo I a modo de introducción- fue precisamente porque su interés al concebir su libro era discutir sobre la distribución de la renta y, para ello, necesitaba hacer explícitos los salarios y ganancias, primero; segundo, dotar al modelo de un grado de libertad. Pues bien, si hacemos la tasa de salario ***w*** lo dicho, la (Ab-13) se convierte en:

$$P_b = \frac{L_a Y_a^{-1}\left[I-(1+g)A_a\right]^{-1} \times \left[(1+g)X_B - Y_B\right]}{Y_D - (1+g)X_D} \qquad \text{(Ab.19)}$$

Y ahora, si queremos que el precio de las habas ***P***b sea mayor que cero ha de ocurrir en (Ab.19) que:

$$\left[Y_B - X_B\right] \times X_B\left[X_B X_B^T\right]^{-1} < g < \frac{Y_D - X_D}{X_D} \qquad \text{(Ab.20)[163]}$$

[162] Este supuesto no está en Sraffa.

[163] Matemáticamente también se puede cumplir cambiando el signo de la inecuación con ***g*** en medio, pero eso carece de sentido económico.

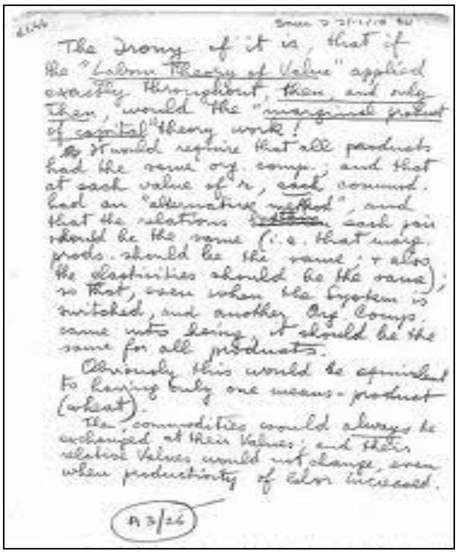
Del lado derecho de la inecuación ya nos advierte Sraffa y, en realidad, toda la discusión del *apéndice B* gira en torno al hecho de que la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$ le viene impuesto al sector de las habas, por lo que el *excedente neto relativo* de esta mercancía ha de ser mayor que la tasa de ganancia general $\boldsymbol{g}$. De lo que no nos advierte el economista italiano es del lado izquierdo de la inecuación[164], es decir, de que para que el precio de las habas -la mercancía no básica con auto-reemplazamiento- sea positivo, el *excedente neto relativo* del sector ($\boldsymbol{Y}_B$,$\boldsymbol{X}_B$) suministrador de la mercancía habas ($\boldsymbol{Y}_C$,$\boldsymbol{X}_C$) ha de ser menor que la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$. La explicación económica es la siguiente: dado que la tasa de ganancia le viene impuesto al agricultor de las habas, éste ha de comprar a sus suministradores ($\boldsymbol{Y}_B$,$\boldsymbol{X}_B$) a unos precios que incorporen una productividad (el excedente relativo podemos tomarlo como una medida de la productividad) más alta que la productividad del sector comprador (el de las habas). Eso es así porque, como se ve en (Ab.19), no tiene el agricultor de las habas ninguna variable monetaria que pueda subir para compensar los costes provocados por sus suministradores. La doble inecuación (Ab.20) nos dice los márgenes tan delicados en los que se mueve este agricultor para obtener una recompensa positiva por su trabajo al ser *ganancia-aceptante*, es decir, al no poder influir en la tasa de ganancia general. Más aún, no hay dificultad analítica para extender el caso de las habas a otros sectores que cumplan los mismos requisitos, es decir, que su producto sólo sea utilizado por el propio sector o por otros sectores. Lo que sí existe es un mundo autónomo representado por ($\boldsymbol{Y}_A$,$\boldsymbol{X}_A$) de bienes básicos (la submatriz principal) tales que determinan las tasas de ganancia y salarios, y que los imponen al conjunto de la economía, es decir, al conjunto del sector ($\boldsymbol{Y}_C$,$\boldsymbol{X}_C$). Podríamos entender esto como el caso de *la competencia perfecta del modelo esrafiano*, pero que en lugar de ser los precios la variable (su posible *variabilidad discrecional*) que determina el grado de competencia, fuera la tasa de ganancia y su imposible variabilidad la que caracterizara el grado de competencia.

Hemos visto ya varios productos de la semilla de Sraffa, además de las apuntadas ya por otros autores como las del comercio internacional en sus versiones de teoría pura y monetaria, la de los efectos sobre el modelo de la introducción de aspectos fiscales, de la

---

[164] No lo hace porqué nunca trabaja con el supuesto de salarios cero, es decir, con el salario integrado en la matriz X de medios de producción. Con ello mantiene el papel de los salarios fuera de la tasa de ganancia, pero nos ahorra a sus lectores consecuencias útiles de su modelo.

demanda efectiva, etc. Aquí se ha visto -no me refiero a este epígrafe de las mercancías que se autoabastecen- una posible teoría de la inflación no monetaria, una posible práctica de la planificación y, ahora, una teoría de los mercados según grados de competencia derivados de las relaciones de abastecimiento intersectoriales.



The Irony of it is, that if the "Labour Theory of Value" applied exactly throughout, then, and only then, would the "marginal product of capital" theory work!

It would require that all products had the same org. comp.; and that at each value of r, each commod. had an "alternative method", and that the relations ~~between~~ each pair should be the same (i.e. that marg. prods. should be the same; + also the elasticities should be the same); so that, even when the system is switched, and another Org. Comp. came into being, it should be the same for all products.

Obviously this would be equivalent to having only one means-product (wheat).

The commodities would always be exchanged at their Values; and their relative Values would not change, even when productivity of labour increased.

A 3/26

Escritos preparatorios de Sraffa

Anexo 8: Generalización del trabajo fechado

Una forma alternativa de resaltar la idea de Sraffa en su *apéndice B* es la de recurrir a las ecuaciones que formalizan su propia y acertada idea del capital como trabajo fechado. Estas pueden ser representadas por (1)[165]:

(1) $$\boxed{p_t = w[1+(1+r)+(1+r)^2+\cdots+(1+r)^{t-i-1}]L_y+(1+r)^i p_{t-i} A^i}$$

El segundo sumando del lado derecho de la ecuación anterior indica el resto del capital físico que no se ha reducido a trabajo fechado. Para eliminar este sumando hemos creado la ecuación (A6.2):

(2) $$p_t = \prod_{k=1}^{k=i} [1+G_k]\, p_{t-i} A^i$$

que enlaza los precios de un año con los anteriores a través de unas *tasas máximas de ganancia*, que he llamado *interanuales* $\boldsymbol{G}_k$, porque se refiere a ese concepto *esrafiano*, pero como relación entre productos finales de un año y los medios de producción del año anterior[166]. Con ello nos salimos del modelo de equilibrio de Sraffa y no nos obligamos a mantener constante a lo largo de los años las tasas máximas de ganancia. El producto de estas tasas se expresan como:

(3) $$\prod_{k=1}^{k=i}(1+G_k) = (1+G_1)\times\cdots\times(1+G_i)$$

El resultado de las 3 ecuaciones anteriores es:

(A6.4) $$p_t = w \times \left[\frac{1}{1-\dfrac{(1+r)^i}{\prod_{k=1}^{k=i}(1+R_k)}} \right] \times \frac{(1+r)^{t-i}-1}{r} \times L_y$$

165 Ver *Aspectos de la economía de Sraffa*: http://www.ucm.es/info/nomadas/23/index.html

166 En el caso de que no fueran *razones-patrón* porque no cumplieran sus requisitos, siempre serían al menos tasas máximas de ganancia, que para lo que sigue pueden valer.

donde ocurre en (A6.4) que, si la expresión $\mathbf{1}+\boldsymbol{r}$ tiende a la media geométrica de las tasas máximas de ganancia interanuales $\sqrt[i]{\prod_{k=1}^{k=i}[1+G_k]}$, entonces los precios tienden a infinito:

(A6.5) $$si\ r \to R_k\ tal\ que\ 1+r \to \sqrt[i]{\prod_{k=1}^{k=i}\left[1+G_k\right]} \Rightarrow 1 - \frac{(1+r)^i}{\prod_{k=1}^{k=i}\left[1+G_k\right]} \to cero \Rightarrow p_t \to INF.$$

A partir de aquí, completando lo anterior con la teoría del capital que hemos visto, se puede construir una teoría *esrafiana* de la inflación no monetaria.

Piero Sraffa

Anexo 9: Generalización del caso de las habas

Quizá uno de los supuestos que resultan más molestos para la credibilidad del modelo *esrafiano* es el de la unicidad de la tasa de ganancia y de salarios. Hay que considerar que el modelo, tal y como él lo expuso, es un modelo pedagógico y sencillo que es útil siempre y cuando, como todo modelo, al generalizarse sus supuestos o hipótesis no haga variar las conclusiones, cosa que ha ocurrido con los modelos *marshalianos* y marginalistas del equilibrio parcial (la paradoja de la agregación, la diferencia entre costes privados y sociales de Pigou, los efectos externos, los juegos no cooperativos, etc.). Afortunadamente en el caso de los modelos de origen *esrafiano* no ocurre esto. La razón es que, a pesar de la simplificación, parte Sraffa del conjunto de la economía, entendida esta como el estudio de las relaciones intersectoriales y de la distribución de la renta. A diferencia de la economía marginalista, en la economía esrafiana no sólo no es un problema la agregación, sino que es uno de sus presupuestos. Para acercarlos a la realidad sólo hay que relajar los supuestos y generalizarlos. Según esto, la ecuación (ABII.2):

(1) $$P_a Y_A + P_b Y_C = \left[L_a W_a + P_a X_A + P_b X_C\right] \times (1 + G_a)$$

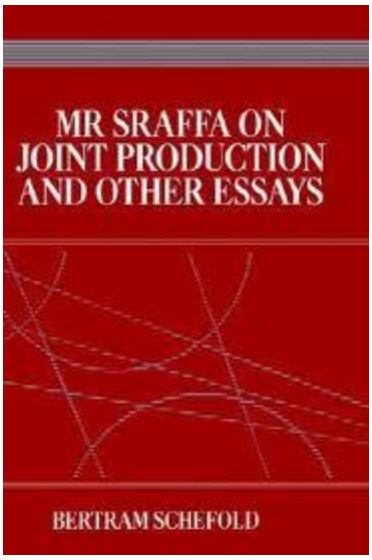
representaría, por ejemplo, al sistema económico, pero con ***n-1*** tasas de salario en la diagonal principal de $\boldsymbol{W}_a$; a su vez $\boldsymbol{G}_a$ nos dice sobre las ***n*-1** tasas de ganancia, también en su diagonal principal: tantas tasas de salario y de ganancia como sectores (o mercancías). Si despejamos de (A7.1) los precios $\boldsymbol{P}_a$ de bienes básicos y recordando que $\boldsymbol{Y}_C$ e $\boldsymbol{X}_C$ valen cero según lo que hemos comentado en el texto principal, queda:

(2) $$P_a = \left[L_a W_a (1 + G_a)\right] \times \left[Y_A - (1 + g) X_A\right]^{-1}$$

Por otro lado y con estos supuestos, la ecuación que define el precio de las habas vendrá de sustituir (A7.2) en la ecuación (A7.1) del texto principal y sale:

(3) $$P_b = \frac{w(1+g)L_b + \left[L_a W_a (1+G_a) \times \left[Y_A - (1+G_a) X_A\right]^{-1}\right] \times \left[(1+g) X_B - Y_B\right]}{Y_D - (1+g) X_D}$$

¡Pobre agricultor! Es mejor que no sepa nunca que los precios de producción -mejor de intercambio- se determinan de forma tan compleja[167]. Las conclusiones son las mismas que las obtenidas en el texto principal y con los supuestos simplificados de tasas únicas de salario y de ganancia, pero ahora estamos tan cerca de la realidad que casi podemos sustituir los datos reales en el modelo.



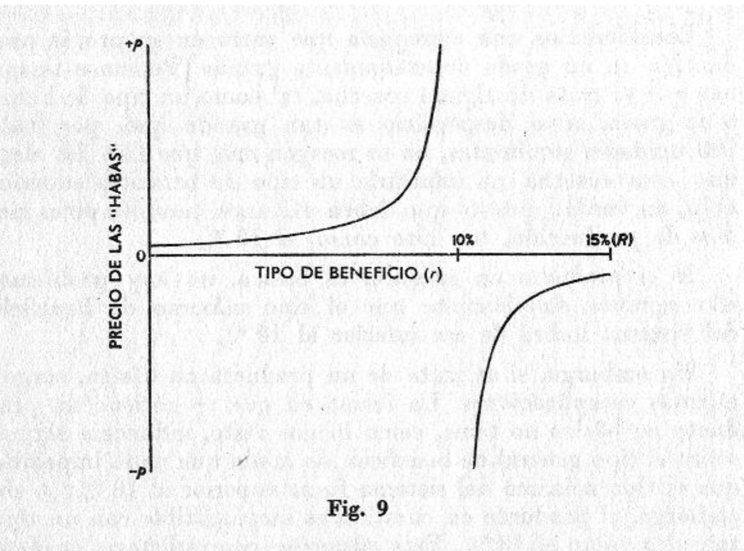
[167] Y hay que recordar que estamos en un sistema de reproducción simple y sin reducir a trabajo fechado los medios de producción del pasado.

Anexo 10: Comentario sobre el gráfico de Sraffa

Un comentario sobre el gráfico que aporta Sraffa en su libro en el *apéndice B* comentado. Este gráfico sale de una ecuación como:

(1) $$P = \frac{w(1+g)}{g_m - g} \times LX^{-1}$$

cuyo precios tiende al infinito si la tasa de ganancia normal $\boldsymbol{g}$ se acercara a la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$. Y esto no sólo se da para el caso de las habas (mercancía no básica con auto-reemplazamiento), sino con todas las mercancías, incluyendo los productos básicos. La diferencia es la que los productos no básicos no arrastran con su subida de precios al resto de los precios de la economía y los de los productos básicos sí. Esta propiedad permitiría contrastar el modelo de Sraffa con la realidad al comprobar empíricamente (o no) que las subidas de precios originados en las mercancías básicas arrastran a todo el sistema y las de las no básicas no lo hacen. El problema es que en el mundo real no se da esa división dicotómica entre bienes básicos y no básicos, pero si podría relajarse ambos extremos y establecer la comparación entre bienes *cuasi básicos y bienes cuasi no básicos* y comprobarse el grado de arrastre de la inflación general ante la subida de un grupo importante de unos y de otros.



pág. 126 de *Producción de mercancías por medio de mercancías* de Sraffa.
(tomado de la edición en español de Oikos-Tau).

Anexo 11: El caso de las habas y bienes básicos y no básicos

Confieso que la primera vez que leí la obra de Sraffa -hace ya años- me tomé su apéndice de las habas como lo que indica el propio Sraffa: una nota a pie de página demasiada larga y que por ello se vio obligado a dejarlo como un apéndice más de los cuatro del libro. Sin embargo, la segunda vez que lo leí tomé conciencia de su importancia por varios motivos: 1) el primero de todos lo dice su título: notas sobre productos no básicos que se auto-reproducen. Hasta ese momento Sraffa había caracterizado a los productos básicos como aquellos que entran a la vez como medios y como productos finales, aunque tuviera que ir matizando más tarde (capítulo VIII) esa diferenciación conceptual. Si hay productos no básicos que se auto-reproducen es que son básicos en el micromundo de estos productos (las habas); 2) dado que el tipo de ganancia le venía impuesto a este subsector de la economía por *el núcleo duro* de la economía, es decir, por el sector que sólo utiliza sus productos finales como medios en el ciclo económico, el tipo de ganancia de los productos *tipo-habas* no puede sobrepasar ese nivel de tipo de ganancia; de hacerlo, como por ejemplo por una caída de los salarios del núcleo duro, ocurriría que el tipo de ganancia daría lugar a unos costes superiores a los ingresos, lo que daría lugar justo antes de llegar a ese momento a un aumento exponencial de los precios de los productos finales (las habas) de este sector; 3) la diferenciación primitiva de Sraffa se hace añicos aún más. Ya pasó con la producción de mercancías de *capital fijo* (capítulo X), donde estos bienes, al final, entraban como medios de producción pero no como productos finales. Ahora hay bienes no básicos que se auto-reproducen. Por eso yo me atrevería a dar una definición de bienes básicos y no básicos de semejante jaez: *bienes básicos son los que entran al menos una vez en un proceso como medios y salen, también al menos una vez, como productos finales*. Bienes no básicos serían los que no cumplen este requisito. Esta diferenciación permitiría aplicar el teorema Perron-Froebenius en la matriz ***A*** de requerimientos del núcleo duro. Veremos que además este apéndice da para más. Como siempre, vamos a generalizar el planteamiento de Sraffa mediante una ecuación. Sea (1):

$$\begin{bmatrix} P & P_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underset{nxn}{Y_A} & \underset{nxs}{Y_B} \\ \underset{sxn}{Y_C} & \underset{sxs}{Y_D} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} L & L_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underset{nxn}{W_A} & \underset{nxs}{W_B} \\ \underset{sxn}{W_C} & \underset{sxs}{W_D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P & P_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underset{nxn}{X_A} & \underset{nxs}{X_B} \\ \underset{sxn}{X_C} & \underset{sxs}{X_D} \end{bmatrix} \right] \times \begin{bmatrix} \underset{nxn}{1+G} & \\ & \underset{sxs}{1+G_N} \end{bmatrix}$$

En esta, $\boldsymbol{P}$ son los precios de los productos básicos, $\boldsymbol{P}_N$ los de los no básicos. De forma análoga con $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{L}_N$ y con $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{G}_N$. Se ha dividido la economía en 4 sectores *A, B, C* y *D*, y la ecuación anterior sintetiza el modelo. Como se ve, se ha generalizado los salarios y las tasa de ganancia de tal forma que tenemos $\boldsymbol{n}+2\text{x}\boldsymbol{s}\text{x}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{s}$ tasas de salario y $\boldsymbol{n}+\boldsymbol{s}$ tasas de ganancia. De (A9.1) sale las dos siguientes ecuaciones:

(2) $$PY_A + P_N Y_C = \lfloor LW_A + L_N W_C + P\,X_A + P_N X_C \rfloor \times (I_d + G)$$

Sin embargo, nos interesa estudiar el caso de que la matriz en general $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ sea reducible para poder aplicar en su momento el teorema Perron-Froebenius, al menos en su versión débil. Sraffa supone en otro capítulo que eliminando determinadas ecuaciones[168] (filas) se llega al teorema. No es verdad, porque las matrices reducibles son un caso especial de matrices. Sraffa aquí peca de optimismo. Pero aquí vamos a suponer que la matriz general dada por los 4 subsectores es reducible, tanto en productos, medios y en tasas de salarios. Esto va a suponer dos cosas: 1) los valores de la matriz *C*, tanto de productos, medios y de salarios, van a ser cero; 2) la matriz *D* va a ser cuadrada. Ello permitirá que las submatrices *A* y *D* de la diagonal principal de la matriz general cumplan los requisitos de las matrices reducibles. Como se ve, a pesar de la generalización, la realidad es aún más general. Según esto, la ecuación (2) queda:

(3) $$PY_A = \lfloor LW_A + P\,X_A \rfloor \times (I_d + G)$$

Sigamos. La segunda ecuación que se deriva de (ABIV.1) es:

(4) $$PY_B + P_N Y_D = \lfloor LW_B + L_N W_D + P\,X_B + P_N X_D \rfloor \times (I_d + G_N)$$

De la ecuación anterior, si despejamos los precios de los productos no básicos se obtiene (5):

$$P_N = \left[\lfloor LW_B + L_N W_D \rfloor \times (I_d + G_N) + P\left[X_B (I_d + G_N) - Y_B\right]\right] \times \left[Y_D - X_D (I_d + G_N)\right]^{-1}$$

[168] Página 77 de *PMPM*.

donde se comprueba que los precios de los bienes no básicos dependen de los precios de los bienes básicos. Los precios de los productos no básicos $\boldsymbol{P}_N$ dependen de 10 variables explícitas más las 4 no repetidas de los que dependen los precios $\boldsymbol{P}$ en (3). Se ve ahora la importancia de que el sector *D* de lugar a matrices tales como $\boldsymbol{Y}_D$ y $\boldsymbol{X}_D$ *cuadradas*: de no ser así nunca podríamos haber hallado la inversa de $\boldsymbol{Y}_D$-$\boldsymbol{X}_D(\mathbf{I}_d+\boldsymbol{G}_N)$[169]. Podríamos ahora a su vez sustituir los precios de los productos básicos $\boldsymbol{P}$ que salen de (3) en (5) y dejar los precios de los productos no básicos $\boldsymbol{P}_N$ dependientes de 14 variables. No lo hacemos porque no nos cabría la ecuación.

Cambiamos de tercio. Si ahora hacemos cero las matrices de salarios $\boldsymbol{W}_B$ y $\boldsymbol{W}_D$ en (5) sale:

$$(6)\qquad P_N\left[Y_D - X_D(I_d + G_{mN})\right] = P\left[X_B(I_d + G_{mN}) - Y_B\right]$$

Esta ecuación tiene un gran interés. Sraffa no lo pudo entrever por la dificultad de llegar a ella por análisis meramente económicos. Ahora $\boldsymbol{G}_{mN}$ es la matriz de *tasas máximas de ganancia* al hacer cero los salarios. De la ecuación anterior se puede expresar la condición de que los vectores de *precios* sean *no negativos* de la siguiente manera:

$$(7)\qquad I_h X_D^{-1} Y_D I_v <= I_h G_{mN} I_v <= I_h\left[X_B^T X_B\right]^{-1} X_B^T\left[Y_B - X_B\right] I_v$$

También se puede dar la inecuación con los signos cambiados, pero siempre con la matriz de tasas máximas de ganancia de los productos no básicos $\boldsymbol{G}_{mN}$ en medio. La ecuación anterior es muy importante porque nos da una acotación de estas tasa máximas de ganancia, cuya dificultad de cálculo en la práctica son máximas. La matriz inversa del lado derecho de (7) es calculable si suponemos que su rango es $\boldsymbol{s}$ y se cumple que $\boldsymbol{s}<\boldsymbol{n}$. Cabe conjeturar que el lado izquierdo de la inecuación (7) es la matriz de tasas máximas del sector *D* (sector no básico que se auto-reproduce) y el lado derecho es la matriz de tasas máximas del sector *B* (sector que vende a *D* pero que no compra de él). *La ley económica dice que para que este modelo de economía reducible sea viable* (*una de las condiciones*), *es necesario que las tasas máximas de ganancia de los productos no básicos estén comprendidas entre las tasas de los productos no básicos que se auto-reproducen y las tasas*

[169] Tampoco haber aplicado Perron-Froebenius.

máximas de los sectores a los que compran productos estos sectores, pero a los que no venden ninguno. Relajando estos supuestos y generalizándolos, puede dar lugar a una teoría de los mercados, sólo que en lugar de que sean los precios las variables estratégicas para definir el tipo de mercados donde actúan la oferta y la demanda (competencia, competencia monopolística, oligopolio, monopolio, etc.) lo sean las tasas de ganancia y las tasas máximas de ganancia permitidas. Es verdad que entonces no se podrían mantener estas dicotomías entre bienes básicos y no básicos, al menos al modo *esrafiano*. Pero las relaciones estrechas o laxas entre sectores, jugando el papel de compradores y vendedores de bienes y servicios, pueden ser la concreción de las dicotómicas definiciones de Sraffa o de la que yo he dado anteriormente. Por ejemplo, un conjunto de sectores podríamos llamarles muy competitivos si la desigualdad (A9.7) fuera muy estrecha, de tal forma que tuvieran las empresas de ese sector poco margen de maniobra en cuanto a sus tasas máximas; un sector o conjunto de sectores con intervalos muy amplios en la ecuación mencionada estarían actuando en condiciones de oligopolio o -en el caso extremo- de monopolio. Hay que tener en cuenta que estas tasas máximas de ganancia son tasas de referencia, porque ya hemos demostrado que si los empresarios de una empresa, sector o conjunto de sectores trabajaran con tasas de ganancia próximas a las tasas máximas, los precios crecerían exponencialmente.

<u>De la mano de Sraffa*: Planificación a partir de Sraffa*</u>

Este tema ya ha salido varias veces, pero nunca nos hemos detenido en él. Ahora lo haremos aunque sea brevemente. Imaginemos que queremos dotarnos de un organismo que planificara la relación salarios-ganancias o, dicho en lenguaje económico actual, *la distribución de la renta* en una primera aproximación. Podría partir como dados las tasas máximas de ganancia por sectores -sumas de $\boldsymbol{g}_{mij}$ de todas las ***j***- y establecería una relación dialéctica entre salarios y ganancias, bien por sectores, bien por productos. Hecho eso, la ecuación (P.1) daría el salario medio de la economía. Eso no significa que todos los sectores, todas las empresas y todas las categorías tuvieran el mismo salario. Lo único que tendría que calcular el órgano planificador es *el salario medio resultante* $\boldsymbol{w}_{m}$ de todos los salarios. Alternativamente, podría fijar ese salario medio, con su abanico de salarios, también por sectores, empresas y categorías, y les diría al conjunto de la economía que podrían fijar sus tasas de ganancia, pero con la limitación de que todas ellas deberían cumplir con (P.1). De no cumplirse, el ministro de economía tomarías las medidas pertinentes para su cumplimiento con la información dada por el órgano planificador. También podría el órgano planificador indicar lo conveniente de determinados formas de producción para que, al mejorar en según qué sectores, ello permitiera unas tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{g}_{mij}$ mayores y, por lo tanto, repartir el excedente en la forma que políticamente se determinara. Vemos que $\boldsymbol{g}_{mij}$ aparece en (P.1), tanto en el numerador como en el denominador del denominador. Eso significa que *no* todo aumento de las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{g}_{mij}$ va a favorecer por igual al conjunto del excedente, sobre todo si algunas tasas de ganancia $\boldsymbol{g}_{ij}$ sectoriales se acercaran demasiado a su tasa máxima, porque entonces en (P.1) se dispararían los precios. La razón económica es que un aumento de la tasa de ganancia en determinados sectores cuyos productos finales son medios en otros sectores haría subir los precios de estos últimos si utilizan ese bien final como medio de forma intensiva. Esta ecuación o similar, junto con las derivadas del *Capital Fijo* y las de *la Tierra*, posibilitarían una planificación indicativa muy laxa en cuanto a la toma de decisiones, pero muy precisa a la hora de observar sus efectos globales y, por ello, la posibilidad de tomar medidas si se consideran perjudiciales para el conjunto de la economía; también el grado de incidencia de decisiones sobre los beneficios en determinados sectores que serían muy graves para el conjunto de la economía. Permitiría además valorar el efecto en el conjunto de la economía de las subvenciones, de los impuestos, del gasto público y de los ingresos públicos. Como caso particular, Sraffa ya se percató de los efectos sobre los precios de determinados bienes finales que se utilizan como medio en el mismo sector. Más en concreto -y como hemos visto- lo analiza para el caso de "... *una mercancía que entra en su propia producción en un grado desusadamente grande*"[170]. Podemos concretar que ello depende de la cercanía o lejanía de las tasas de ganancia sectoriales $\boldsymbol{g}_{ij}$ a sus tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{g}_{mij}$, como muy bien aprecia Sraffa, aunque sin aportar una ecuación que lo demuestre. Su razonamiento es económico, pero sin hacer explícitos formalmente sus supuestos[171].

No me puedo alargar con este tema que por sí solo podría constituir un artículo aparte e, incluso, un libro. Sólo quisiera ahora enumerar algunas de las características que tendría una planificación a partir del modelo *esrafiano*, modelo que se nutre de y nutre las dos visiones de la economía: la positiva y la normativa. En efecto, puede concretarse hasta llegar a modelos susceptible de la contrastación; puede también decirnos algo sobre el qué hacer, cómo regular los comportamientos económicos, aunque sea de forma muy laxa:

1) Las únicas variables de la ecuación que traemos aquí a colación ahora son $\boldsymbol{g}_{ij}$, $\boldsymbol{g}_{\mathbf{m}ij}$ y $\boldsymbol{w}_{\mathbf{m}ij}$

---

170 Pág. 125 de *PMPM.*

171 Para el italiano sería un caso de *auto-reemplazo*, aunque el no considera esta mercancía en su ejemplo -*las habas*- como necesariamente básica, porque podría ser utilizada sólo en su propio sector. Es un caso particular el que expone en el *apéndice B*, pero interesante. El problema se deriva de que los precios -y con ellos sus tasas de ganancia- de los sectores de bienes no básicos no influyen en el resto, por lo que sus ganancias y sus precios se pueden disparar sin que sus efectos se salgan del sector; no ocurriría así con el auto-reemplazamiento, que sería como una pescadilla que se mordiera la cola, una espiral expansiva de ganancias-precios-ganancias, porque el resto de sus productos podrían ser básicos, con lo que serían enviados al mercado con tasas de ganancia desorbitadas que harían aumentar exponencialmente los precios de algunos sectores o mercancías. Ver págs. 125 a 127 de *PMPM* y comparar en especial el gráfico de la pág. 126 del libro de Sraffa y el gráfico que se derivaría de la ecuación (P.1) de este trabajo.

(P.1) $$w_m = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{(1+g_{ij})(1+g_{mij})}{g_{mij}-g_{ij}}}$$

con $\boldsymbol{n}$ tasas de salarios *embutidos* en la media $\boldsymbol{w}_{\mathrm{m}}$ de los salarios $\boldsymbol{w}$ por sectores (o por bienes y servicios), $\boldsymbol{n}$ tasas de ganancia máximas por sectores $\boldsymbol{g}_{\mathrm{mij}}$ (o por bienes y servicios), $\boldsymbol{n}$ inputs $\boldsymbol{l}_{\mathrm{i}}$ de trabajo. Eso no significa que el resto de las variables físicas, como los bienes básicos $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{b}}$, y no básicos $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{a}}$ y los medios de producción $\boldsymbol{X}$, no jueguen ningún papel en (P.1). Lo juegan a través de las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{mij}}$. Ocurre que, una vez fijadas las tasas máximas de ganancia, ya no entran explícitamente en (P.1).

2) Las tasas de ganancia -tanto las sectoriales $\boldsymbol{g}_{\mathrm{ij}}$ como las máximas $\boldsymbol{g}_{\mathrm{mij}}$- pueden ser consideradas como aquellas que surgen tras las amortizaciones y provisiones que dejen intacto el equipo de sus recursos productivos, es decir, que mantienen la reproducción simple sin acumulación neta del capital.

3) El punto delicado del modelo es precisamente la fijación de las tasas máximas. Estas, según este modelo, surgen al hacer cero los salarios $\boldsymbol{w}_{\mathrm{ij}}$ en la ecuación que define el sistema. No obstante, puede hacerse mediante aproximaciones sucesivas en la práctica, pero ello implica un ejercicio muy delicado por dos cosas. Primera porque si, por ejemplo, las tasa máximas $\boldsymbol{g}_{\mathrm{mij}}$ las ponemos muy bajas, habría empresas o sectores que aumentarían sus reservas y provisiones en demasía en relación a sus servicios y productos finales para que sus ganancias no sobrepasaran las máximas. Con ello, aumentaremos la solvencia en detrimento de la oferta de sus bienes y servicios que lanzan al mercado, provocando -si estas empresas son una parte importante de los oferentes- un aumento de los precios; por el contrario, si estas tasas $\boldsymbol{g}_{\mathrm{mij}}$ las ponemos muy altas, existirá la tentación de muchas empresas de elevar sus ganancias a repartir, en detrimento de su solvencia. La segunda cuestión de la delicadeza a la que me refería antes es la de que, aunque atinemos meritoriamente con las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathbf{m}\mathrm{ij}}$ adecuadas en función de $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{a}}$, $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{b}}$ y $\boldsymbol{X}$, si algunas empresas, con tasas de ganancia muy altas, se acercaran a su tasa máxima sectorial, podrían originar aumentos de precios de determinados bienes o servicios que, si son usados como medios en

otros de forma intensiva, ello podría originar a su vez una espiral de precios en el sector e, incluso, en la economía en su conjunto[172]. Todo esto formaría parte de una teoría de la inflación no monetaria esrafianas. Pero sigamos con lo anterior. Bajo estos criterios, puede estudiarse el caso de las empresas de energía, en general, que son oligopolios sin apenas competencia y sin productos sustitutivos. No tendría importancia que esto ocurriera en las empresas de la cultura, por ejemplo, porque estas no se usan como medios de producción, al menos a corto y medio plazo[173]. Es un ejemplo para que se vea que todo esto no son meras abstracciones sin posibilidad de concretarse.

4) La interrelación entre el órgano planificador y las variables que puede o desea controlar ha de ser siempre dialéctica con el mundo empresarial: unas veces podrá plantear como deseables determinados valores de las variables $\boldsymbol{w}_{mij}$, $\boldsymbol{g}_{ij}$ y $\boldsymbol{g}_{mij}$, o de algunos de ellas, y otras, en función de la política económica general, querrá fijar unas variables u otras. Estas decisiones, es decir, los objetivos, deben ser políticos en un sistema democrático, es decir, fijados por los gobiernos y parlamentos y no por los burócratas del órgano planificador para evitar el paso del gobierno de los elegidos democráticamente por el gobierno de los funcionarios.

5) Lo dicho de los salarios pueden extenderse sin problema a los costes empresariales laborales sin mayor problema. Según esto, el órgano planificador tendría un grado de influencia que vendría dado por el sector privado de la economía de acuerdo con la ecuación:

Renta Nacional = Rentas salariales del trabajado asalariado + Beneficios netos + Resto de rentas fuera del control del órgano planificador (salarios de funcionarios, autónomos, pensionistas, paro no financiado desde las empresas, etc.).

Este es un tema abierto, novedoso que tiene muchas aristas y muchos temas a desarrollar. Por comparación me viene a la mente la discusión de *Von Mises, Hayek y Robbins,* con *Barone*, *Taylor* y *Oskar Lange*[174] sobre la posibilidad teórica (primero) y práctica (después) de

---

[172] Todo esto formaría parte de una teoría de la inflación no monetaria *esrafiana.*
[173] Cosa distinta es el tema de los sistemas educativos y los recursos financieros aportados.
[174] *On the Economic Theory of Socialism*, 1938 [*Sobre la teoría económica del socialismo*, 1969 y 1971, edit. Ariel].

la gestión de la economía de forma racional en un sistema socialista de producción a través de lo que se dominó *función paramétrica de los precios*. Independientemente de lo que pasó después, tanto en el terreno teórico como en el práctico, las diferencias entre los modelos de los autores citados -excepto *Von Mises* que los combatía- y una posibilidad de planificación a partir de los modelos *esrafianos* son notables. Diré unas pocas: 1) Aquí no fijamos ni decimos nada de la fijación de los precios. Este puede ser tema de otros organismos o de ninguno, aceptando en general -salvo significativas excepciones- los precios de mercado. En cambio, el objeto principal -o al menos, muy importante- en el modelo de los *Barone*, *Taylor* y *Lange* es la fijación de los precios a partir de los propios precios de mercado *históricos*, mediante un sistema de prueba y error que de lugar a asignaciones eficientes de los recursos escasos; 2) En el modelo *esrafiano* propuesto no aparecen explícitos los valores físicos de los medios y productos finales: son, en principio, datos; en los modelos de los teóricos del socialismo es el objeto principal, como queda dicho: 3) Aquí, en los modelos de raíz *esrafiana*, no se habla de asignaciones eficientes directamente, pero la relación dialéctica entre realidad y norma puede llevar a ello, aunque no a través de los precios sino a través de la distribución de la renta y, en especial, a través de la fijación de las tasas máximas de ganancia sectoriales $\boldsymbol{g}_{\mathrm{mij}}$. No tengo espacio para demostrar esta posibilidad, pero esta está relacionada con el uso de los medios según sus relaciones marginales de sustitución, y ello es posible porque trabajamos con suficientes grados de libertad para incorporar esta condición; 4) En este modelo *esrafiano* no aparece la demanda explícitamente -cosa que ocurre en el modelo de los teóricos del socialismo-, pero si lo hace indirectamente al tomar como datos los medios y productos finales. Que sean datos no significan que no haya que ir cambiando los mismos cada cierto tiempo para ir pegados a la realidad. Ahí, en la toma de datos con máxima frecuencia, estaría la demanda y el posible estudio de sus elasticidades según bienes y servicios. Y como no quiero convertir este tema en principal del artículo puesto que es ajeno a Sraffa -al menos al Sraffa de sus escritos- doy por concluido este epígrafe.

De la mano de Sraffa: *La reproducción simple de Marx*

I - Sobre la teoría del valor-trabajo y la plusvalía

Antes de entrar en la reproducción simple de Marx con los anteojos de Sraffa, diré unas palabras sobre la teoría del valor-trabajo[175] del alemán y lo haré con dos preguntas que pueden parecer sorprendentes: ¿*la teoría del valor-trabajo es una ley económica o una definición*? ¿*La teoría de la tasa de plusvalía (no la plusvalía absoluta) es una ley económica o es también una definición*? Acepto de entrada el principio *popperiano* de la falsibilidad, es decir, que una ley aplicada o proveniente de cualquier campo del conocimiento, para ser cierta, ha de poder ser falsa, de tal manera que sólo la contrastación empírica le puede dar marchamo de fenómeno regular merecedora del calificativo de ley. De esta forma podemos saber cuando un enunciado de pretendida *cientificidad* es una ley o una definición. Popper negaba el carácter científico al marxismo y al psicoanálisis porque no podían ser falsos. Yo creo que en el caso del psicoanálisis Popper no había entendido nada. Sigamos. Para dar respuesta a las preguntas que hacíamos sobre la teoría del valor-trabajo las podemos desdoblar a su vez en dos: ¿*depende la plusvalía y la tasa de plusvalía del nivel de salarios*? ¿*Puede ser la tasa de plusvalía, según Marx, diferente para los diversos sectores en alguna circunstancia*? A la primera pregunta contestan *Seton*, *Okishio* y *Morishima* con el teorema fundamental marxiano (versión Morishima) diciendo que para que "*exista un conjunto de precios y un tipo de salarios reales capaz de producir beneficios positivos, en otras palabras, para que pueda mantenerse una sociedad capitalista, es condición necesaria y suficiente que los capitalistas exploten a los trabajadores*"[176]. Yo he demostrado[177] que en la versión de *Morishima* de este teorema no son válidas ni la condición necesaria ni suficiente, es decir, no hay demostración; por contra, lo que se demuestra es que puede haber salarios sin explotación y precios positivos; que a partir de un cierto nivel de salarios, estos

[175] Daré aquí la mejor, en mi opinión, definición del valor-trabajo de Marx: "*El valor de las mercancías se determina por el tiempo de trabajo necesario contenido en ellas y no por el tiempo de trabajo que en ellas se encierra*", El Capital, tomo III, pág. 100, FCE. Es decir, según Marx, el trabajo necesario depende del tiempo medio de trabajo de la competencia empleado en la producción de la mercancía. De nada sirve conocer el trabajo empleado en una empresa si no se conoce el tiempo de trabajo del sector empleado en cada mercancía.

[176] *Marx Economics*, 1973

[177] *Morishima y el teorema fundamental marxiano*: http://www.eumed.net/ce/2010b/amp4.htm

sólo son posibles si hay explotación. Steedman recoge la demostración[178] de que puede haber salarios y precios positivos aún con tasas de explotación negativas, aunque conceptualmente no se puede admitir la posibilidad de una tasa de explotación negativa, al menos en un contexto marxiano. A la segunda pregunta sobre si puede haber diferentes tasas de explotación según sectores, yo nunca advierto en *Marx* esa posibilidad, sea cual sea la longitud de la jornada de trabajo. La explotación marxiana depende -me atrevo a decir- *sólo* de la posibilidad del alargamiento de la jornada de trabajo *sea cual sea el nivel de salarios*. Al menos *Morishima* no tiene duda: "*El problema de la determinación del grado de explotación se reduce al de la duración de la jornada de trabajo*"[179], lo cual es coherente con el resto de su libro. Con respecto a *Marx* yo no tengo dudas: leyendo el conjunto de su obra, para el alemán la tasa de plusvalía es única para todos los sectores, aunque pueda haber algún texto particular que pueda indicar lo contrario o, al menos, establecer alguna duda. Hay que tener en cuenta que para *Marx* sólo el trabajo crea y *transfiere* valor. Esta constancia de la tasa de plusvalía es inaceptable sea cual sea el contexto en que se establezca, incluso en un contexto plenamente marxiano. Y menos aún que esa constancia pueda ser independiente de la tasa de salarios. Aún más dificultad se añade el hecho de que no plantee *Marx qué* fuerzas obligan o llevan a la constancia de la tasa de plusvalía en todos los sectores, cosa que sí hace con la tasa de ganancia. Por esta última dificultad es por lo que traíamos a colación a *Popper*, gran epistemólogo de la ciencia por más reaccionario que se presente y se nos presente. El criterio de *Popper* es aceptable, aunque no siempre sea estrictamente el laboratorio el juez de la verdad, como por ejemplo en la astrofísica. Y en las ciencias sociológicas el laboratorio son las encuestas, las estadísticas y la Historia. Por ello -al menos desde mi punto de vista-, o la tasa de plusvalía marxiana es una mera definición que no añade nada al conocimiento de la realidad social[180] y, en particular, del laboral, o se han de admitir tres cosas: primero, que las tasas de explotación (de plusvalía) han de ser variables según sectores (incluso según empresas); segundo, que han de depender de los salarios[181] y no sólo de la jornada de trabajo; tercero,

[178] *Marx after Sraffa*, 1977.
[179] Marx´Economics, 1973.
[180] Kant diría que es un juicio analítico a priori.
[181] Para ver porqué la tasa de plusvalía ha de depender del nivel de salarios podemos recurrir a uno de esos experimentos mentales que hacía Einstein para la Física, pero aquí en lo social. Supongamos que aumentan los salarios hasta un nivel tal que con

que ha de demostrarse que existe una ley sobre esta tasa (de plusvalía) al respecto propia del sistema capitalista -objeto de análisis de *Marx* en *El Capital*- que no se daría en otro sistema social teórico y que no se ha dado en otros sistemas de producción del pasado.

Pero es que además hay otra dificultad insalvable para la constancia sectorial de la tasa de plusvalía. Existe una relación formal -matemática- producto de las definiciones de tasa de plusvalía, de composición orgánica de capital y de la tasa de ganancia, que lleva a que una de ellas depende de las otras dos[182]. Ocurre entonces que si mantenemos el criterio de la tendencia a la igualación -al menos como tendencia- de la tasa de ganancia en el sistema capitalista producto de la competencia y el criterio marxiano de la constancia sectorial de las tasas de plusvalía, ello nos da como resultado la constancia sectorial de las composiciones orgánicas de capital, lo cual es rechazable de entrada: ¿cómo pensar, por ejemplo, que la relaciones capital/trabajo son iguales en el sector del automóvil que en la recolección del trigo, en el de la construcción de obra civil o en el de los servicios bancarios? ¿Qué ley económica puede imaginarse que lleve al mismo puerto la igualdad de composiciones orgánicas a estos sectores? Ninguna, y si alguien la propusiera, la rechazaríamos por cuestiones de contrastación empírica, porque hoy sabemos que ha sectores muy intensivos en trabajo (construcción, turismo, servicios sociales) y otros en capital y tecnología (investigación, informática).

Si se quiere integrar a Marx en el mundo del conocimiento, en el universitario, en pie de igualdad con otros grandes economistas[183], se ha de actualizar a Marx o abandonarlo, al menos como economista. También, en mi opinión, se debe abandonar la teoría del valor-trabajo

---

los ingresos salariales pueden los asalariados comprar todo el excedente que se produce, es decir, que sólo se deja de cobrar lo necesario para la reproducción de los medios de producción del sistema. Las ganancias serían cero. ¿Habría en ese caso explotación? La respuesta es no porque todo el capital variable y toda la llamada plusvalía han ido a parar a los asalariados. Conclusión: la tasa de plusvalía debe depender del nivel de salarios. Si Z son los salarios, X los medios de producción, Y los productos finales, L el input de trabajo, P los precios y W los salarios, entonces, si $WL=PZ$ y $X=Y-PZ$, no hay excedente y tampoco plusvalía. Si no es así se cae en una contradicción insoslayable: aunque los ingresos por salarios alcancen todo el excedente ($Y-X$), sigue habiendo tasa de plusvalía (según Marx) y la teoría de la explotación de Marx se viene abajo.

[182] Véase apéndice III.

[183] No entro en el resto de los campos del conocimiento en los que entró Marx porque mi conocimiento de ese *resto* no es lo suficiente para juzgarlo. Wittgenstein *dixit.*

según para qué fines. En realidad a mí siempre me ha parecido una *teoría contable* de los costes buscando la independencia de los precios para evitar la volatilidad de aquellos (costes) en función de la variabilidad de los últimos (precios)[184]. Como teoría contable no me parece aceptable porque tiene defectos de coherencia interna, como se ha señalado repetidamente, y ejemplos de eso son la imposibilidad de tener tres leyes (las mencionadas sobre las tasas de ganancia, plusvalía y la composición orgánica) *diferentes*; la posibilidad de tasas de ganancia positivas con tasas de explotación negativas[185]; la incorrecta transformación marxiana de valores a precios, etc. Puede ser mantenida la teoría de la explotación en el mundo de los valores-trabajo porque eso no depende sólo del nivel cuantitativo, sino del cualitativo, de las relaciones sociales de producción que se producen en el mundo del trabajo asalariado, con distinción entre *valor del trabajo* y *valor de la fuerza de trabajo*. Ello puede mantenerse de alguna manera porque vemos que *la población activa* es siempre menor que la población en general, y menor la activa aún que *la ocupada* merced al paro indeseado (incluso aunque no sea tal). El problema es cómo demostrar que bajo otro sistema no capitalista de trabajo asalariado pueda desaparecer la teoría de la explotación. En el pasado, en el estudio de la Historia o en la evolución de las relaciones de producción (primitiva, esclavista, feudal, asiática) ha ocurrido siempre que la población *ocupada* es menor que la población *alimentada*. De todas las maneras, y aun cuando desecháramos la teoría del valor-trabajo como simple método contable y pasáramos a Marx por el tamiz, por ejemplo, del modelo *esrafiano* (el de la mercancía-patrón, de la razón-patrón, de la producción simple y conjunta, de la distinción entre productos básicos, y no básicos), aún tenemos mucho Marx. Tenemos al Marx de la caída (o no) de la tasa de ganancia, el del las esferas de circulación de mercancías y capitales, el del trabajo abstracto y concreto, el del fetichismo de la mercancía (sociología), el de la rotación de los capitales, el de la acumulación primitiva, el de las rentas diferenciales, el de las teorías del subconsumo y sobreproducción, el de los ciclos, el de la reproducción simple y ampliada, etc. Y esto sólo lo que respecta a la economía. Vayamos ahora al caso de la teoría de la reproducción simple de Marx.

---

184 Similar a la búsqueda de Ricardo de una distribución independiente de los precios.

185 *Marx after Sraffa*, Steedman, 1977

II - La reproducción simple en Marx

En el tomo II de *El Capital*[186] plantea *Marx* la reproducción simple en términos, claro está, de valor-trabajo. El mismo *Marx* nos dice líneas más atrás que "*la reproducción simple a la misma escala constituye una abstracción, puesto que, de una parte, la ausencia de toda acumulación o reproducción en escala ampliada es, sobre una base capitalista, un supuesto absurdo y, de otra parte, las condiciones en que se reproduce no permanecen absolutamente iguales en distintos años*". Y lo dice porque una cosa es, para el economista y revolucionario alemán, la reproducción en términos de valor y otra la reproducción en términos de unidades físicas de productos: aquélla puede permanecer en equilibrio entre dos sectores y sin embargo corresponder a cantidades y calidades de productos distintos, porque lo primero depende del valor incorporado socialmente a los productos y el trabajo acumulado en los medios, y lo segundo puede variar con los cambios tecnológicos, de organización, etc. No se trata sólo del lenguaje *hegelés* de Marx del que nos habla la gran economista Joan Robinson, sino de una forma de aproximación al conocimiento de las cosas a partir de diferentes grados de abstracción. El mundo de los valores-trabajo se mueve en un plano diferente de el mundo de los precios y de las cantidades físicas, al igual que el mundo de las ideas y de las realidades platónicas[187]. No por ello hay que pensar que el mundo de los valores-trabajo está por encima del de las cantidades físicas y precios, porque el propio Marx habla de "*ascender de lo abstracto a lo concreto*"[188], que parece casi una provocación metodológica. Mi opinión personal es que este doble lenguaje y esta doble construcción de conceptos ha sido más una tara que un acicate para que el marxismo económico pase a los estudios económicos universitarios y, en general, a integrarse en el mundo del pensamiento occidental, y esto lo afirmo bajo la conciencia de ser tachado de ingenuo, porque quizá pesen mucho más los factores ideológicos para esta postergación. Iré ahora al grano.

---

[186] El Capital, II tomo, pág. 352 y siguientes.

[187] "*Plusvalía y cuota de plusvalía son, en términos relativos, lo invisible y lo esencial que se trata de investigar, mientras que la cuota de ganancia y, por tanto, la forma de la plusvalía como forma de ganancia se manifiestan en la superficie de los fenómenos*", El Capital, tomo III, pág. 58, FCE. Quizá aquí se muestre más kantiano que platónico.

[188] "*Mientras que el método que consiste en elevarse de lo abstracto a lo concreto es, para el pensamiento, la manera de apropiarse lo concreto, o sea, la manera de reproducirlo bajo la forma de lo concreto pensado*", Fundamentos de la Crítica de la Economía Política", pág. 42, edit Grijalbo. Esto le viene de Hegel.

A pesar de la prevención inicial de Marx sobre la reproducción simple, plantea en el II tomo[189] de *El Capital* el caso de la reproducción simple de dos sectores que producen medios de producción y medios de consumos desagregados sus valores de la siguiente forma:

(R.1) $4.000\ K_1 + 1.000\ V_1 + 1.000\ S_1 = 6.000$ VF (medios)

(R.2) $2.000\ K_2 + 500\ V_2 + 500\ S_2 = 3.000$ VF (consumo)

Para Marx el equilibrio se encuentra si el capital variable del primer sector ($1.000V_1$) más su plusvalía ($1.000S_1$) se intercambia por el capital constante del segundo sector ($2.000K_2$), lo cual resulta todo muy lógico porque es el resultado que obtendríamos si igualáramos la segunda ecuación -la de los consumos (oferta)- con la sumas de los capitales variables y constantes del ambos sectores (demanda) y elimináramos términos comunes. *Ello supone que las rentas de los trabajadores y las plusvalías de los poseedores de los medios de producción se destinan íntegramente al segundo sector, es decir, al consumo*. Estaríamos ante una economía estacionaria en términos de valor, aunque, como señala Marx, no en términos de reproducción de los mismos bienes físicos ni, tampoco, a los mismos precios[190]. Por mi parte renuncio, en este trabajo al menos, al nivel de abstracción de los valores-trabajo y me quedo con el de los precios y cantidades físicas, pero, para no quedar varado en un terreno sin sistema, me voy al mundo de Sraffa y su concepción de las mercancías como medio de consumo unas veces y como medios de producción en otras. Las dos ecuaciones análogas a las anteriores en la concepción de Sraffa serían como sigue:

(R.3) $$\underset{1xm}{P_1}\ \underset{mxm}{Y_1} = \left[\underset{1xm}{L_1}\ \underset{mxm}{W_1} + \underset{1xm}{P_1}\ \underset{mxm}{X_1}\right] \times (\underset{mxm}{I_d} + \underset{mxm}{G_1})$$ de medios

(R.4) $$\underset{1xn}{P_2}\ \underset{nxn}{Y_2} = \left[\underset{1xn}{L_2}\ \underset{nxn}{W_2} + \underset{1xn}{P_2}\ \underset{nxn}{X_2}\right] \times (\underset{nxn}{I_d} + \underset{nxn}{G_2})$$ de consumo

[189] Pág. 354 del tomo II de la edición en el FCE.
[190] Esto es ya más discutible.

donde $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$ son los vectores $\mathbf{1}$x$\boldsymbol{m}$ y $\mathbf{1}$x$\boldsymbol{n}$ de inputs de trabajo; $\boldsymbol{G}_1$ y $\boldsymbol{G}_2$ son las matrices diagonales $\boldsymbol{m}$x$\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ de tasas de ganancia[191] donde $\boldsymbol{g}_{ij}=\mathbf{0}$ si $\boldsymbol{i}<>\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{P}_1$ y $\boldsymbol{P}_2$ son los vectores de precios $\mathbf{1}$x$\boldsymbol{m}$ y $\mathbf{1}$x$\boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{X}_2$ son las matrices $\boldsymbol{m}$x$\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ de medios de producción; $\mathbf{I}$ el vector de unos $\boldsymbol{n}$x$\mathbf{1}$, e $\mathbf{I}_d$ la matriz diagonal $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ de unos. Para completar todo esto, de la ecuaciones (R.3) y (R.4) diríamos que $\boldsymbol{Y}_1$ e $\boldsymbol{Y}_2$ serían las matrices *esrafianas* de producción conjunta de dimensiones $\boldsymbol{m}$x$\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$. Aquí procederemos de igual manera que hace Marx e igualamos el valor en términos de precios de los bienes (mercancías) del sector de bienes de consumo ($\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Y}_2$) con los ingresos salariales y las ganancias de ambos sectores de tal forma que obtenemos (R.5):

$$[L_2W_2 + P_2X_2] \times (I_d + G_2)I = L_1W_1I + [L_1W_1 + P_1X_1]G_1I + L_2W_2I + [L_2W_2 + P_2X_2]G_2I$$

que nos da la ecuación de equilibrio al eliminar términos comunes:

(R.6) $$L_1W_1(I + G_1)I + P_1X_1G_1I = P_2X_2I$$

(R.7) $$\sum_{i=1}^{n} l_{1i} \sum_{j=1}^{n} w_{1ij}(1 + g_{1ij}) + \sum_{i=1}^{n} p_{1i} \sum_{j=1}^{n} x_{1ij} g_{1ij} = \sum_{i=1}^{m} p_{2i} \sum_{j=1}^{m} x_{2ij}$$

Puesta la (R.6) de otra forma queda:

(R.8) $$L_1W_1I + [L_1W_1 + P_1X_1] \times G_1I = P_2X_2I$$

donde se puede resumir que *un (posible, pero no único) modelo de equilibrio marxiano de dos sectores(o de múltiples sectores agrupados en dos) a partir de las ecuaciones de Sraffa que definen el sistema económico, es aquel en el que las rentas salariales del sector (sectores) de medios de producción más las ganancias del mismo sector (sectores), se igualan al valor de reposición de los medios de producción del sector (sectores) de bienes de consumo.* Es el mismo equilibrio que el de Marx en términos de valor-trabajo, solo que aquí, como veremos, tenemos la inmensa suerte -gracias a Sraffa- de que

[191] Si estuviéramos en la producción simple de Sraffa con una sola tasa de ganancia y una sola tasa de salarios podríamos hablar de la razón-patrón de Sraffa. Sin estas condiciones -que las creo muy restrictivas- tenemos que contentarnos con las $\mathbf{G}_M$, es decir, las tasas máximas de ganancia. Estas no garantizan que todos los precios sean positivos.

podemos eliminar los precios y mantener el equilibrio de la reproducción simple. Un comentario: si un gobierno -mejor *un gobierno mundial*- estuviera dotado de instrumentos políticos y económicos capaces de mantener este equilibrio -también a nivel mundial-, no habría crisis ni ciclos económicos o, al menos, estos serían mucho más benignos. Obsérvese que (R.8) está tan cerca de la realidad que casi podemos sustituir los datos reales en la ecuación y obtener resultados. Esa es la razón por la que hemos partido de ***n*** tasas de salario y ***n*** tasas de ganancia.

De las ecuaciones (R.3) y (R.4) se pueden obtener los precios y dejarlos explícitos:

(R.9) $$P_1 = L_1W_1(1+G_1)\times\left[Y_1 - X_1(I+G_1)\right]^{-1}$$ (medios)

(R.10) $$P_2 = L_2W_2(1+G_2)\times\left[Y_2 - X_2(I+G_2)\right]^{-1}$$ (consumo)

¡Y ahora viene la gran oportunidad gracias a Sraffa de eliminar los precios! Sólo tenemos que sustituir las ecuaciones de precios explícitos del sistema (R.9) y (R.10) en la ecuación última (R.8) de equilibrio y obtenemos (R.11):

$$L_1W_1(1+G_1)\times\left[I+\left[Y_1 - X_1(I+G_1)\right]^{-1}\right]X_1G_1I = L_2W_2(1+G_2)\times\left[Y_2 - X_2(1+G_2)\right]^{-1}X_2I$$

Aunque Marx no lo reconozca en ningún momento, su marcha al mundo de los valores-trabajo -además de otras razones- tuvo la consecuencia de soslayar el problema ricardiano de cómo encontrar una medida de la distribución entre las diferentes rentas independiente de las posibles variaciones de los precios. Sraffa lo encontró a través de *la mercancía-patrón y de la razón-patrón*. Quizá por eso podemos abordar los problemas de Marx en *El Capital*, pero con el instrumental conceptual de Sraffa, aunque tampoco el economista italiano hiciera explícita esa intención.

Anexo 12: Generalización de la producción conjunta

En el cuerpo principal de este trabajo hemos partido de el caso de la producción conjunta *esrafiana*, donde el tamaño de la matriz de productos finales ***Y*** es el mismo que el de la matriz de medios ***X***. Esto se puede generalizar para el caso de que no coincidan *cualitativamente* las mercancías (bienes y servicios) del producto final con el número de mercancías que se utilizan como medio, aunque coincidan los sectores. Seguimos con dos sectores, pero para lo que sigue no es preciso duplicar las ecuaciones y sólo vamos a trabajar con una única ecuación. Partimos de la ecuación *esrafiana* que define el sistema:

(1) $$\underset{1xm}{P_a}\underset{mxn}{Y} = \left\lfloor \underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P}\underset{nxn}{X} \right\rfloor \times (\underset{nxn}{I_d} + \underset{nxn}{G})$$

donde el vector de precios de productos finales ***P***a tienen dimensiones **1**x***m***, mientras que el de precios de medios es **1**x***n***. La otra diferencia con respecto a la producción conjunta *esrafiana* es la de que el vector de productos finales ***Y*** consta de ***m*** mercancías y ***n*** sectores. Si hacemos ahora cero las tasas de salario ***W*** para calcular las tasas máximas de ganancia ***G***M queda como siempre:

(2) $$\underset{1xm}{P_a}\underset{mxn}{Y} = \underset{1xn}{P}\underset{nxn}{X} \times (\underset{nxn}{I_d} + \underset{nxn}{G_M})$$

Y si ahora igualamos las dos ecuaciones anteriores, eliminamos términos comunes y despejamos los precios de los medios ***P*** sale:

(3) $$P = LW(1+G) \times (G_M - G)^{-1} X^{-1}$$

que es la ecuación de los precios ***P*** de los medios de producción dependiente de las tasas máximas de ganancia ***G***M. Ahora sustituimos los precios de esta ecuación en la primera que define el sistema y nos da la ecuación de productos finales ***P***a sin dependencia de los precios de producción:

(4) $$P_a = LW(1+G) \times (G_M - G)^{-1} \times (1+G_M) Y^T \left[Y Y^T \right]^{-1}$$

La gran diferencia entre las ecuaciones (3) y (4) es la de que los precios de los productos finales $\boldsymbol{P}_a$ dependen, entre otras variables, de la producción de los productos finales $\boldsymbol{Y}$, mientras que los precios de los medios de producción $\boldsymbol{P}$ son independientes directamente de estos productos finales. No obstante, la dependencia indirecta se mantiene a través de las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_M$. La otra característica que es común a ambas ecuaciones es que si las tasas de ganancia $\boldsymbol{G}$ se acercaran a las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_M$, los precios aumentarían exponencialmente, como ya nos advierte Sraffa[192]. Y eso ocurre con todos los precios, tanto de los medios $\boldsymbol{P}$ como de los productos $\boldsymbol{P}_a$, y no sólo, como señala Sraffa en su *apéndice B*, para el caso de los productos no básicos que se auto reproducen. En cuanto a las ecuaciones de equilibrio son las mismas que hemos visto para el caso de la producción conjunta *esrafiana* porque este equilibrio no depende de los productos finales ni de sus precios.

[192] Apéndice B de *Producción de mercancías por medio de mercancías*.

Anexo 13: los tres coeficientes económicos de Marx

Si definimos la tasa de plusvalía ***e*** como ***e***=***P***/***V***, la composición orgánica de capital ***q*** como ***q***=***C***/***V*** y la tasa de ganancia ***g*** como ***g***=***P***/(***C***+***V***) se obtiene la relación:

(1) $$g = \frac{e}{1+q}$$

Y si despejamos la composición orgánica de capital ***q*** a los efectos aritméticos sale:

(2) $$q = \frac{e-g}{g}$$

Aquí se ve que si las tasas de explotación ***e*** y las tasas de ganancia ***g*** son únicas (iguales para todos los sectores), también lo son las composiciones orgánicas de capital ***q***. Por ello no podemos establecer -suponiendo que se consiga- leyes de formación económicas *distintas* para cada una de las tres, porque eso nos llevaría a una contradicción entre los 3 coeficientes. Una de ellas sobra y una manera de salvar la cuestión es que dos de ellas sean distintas según sectores. La otra opción es abandonar como ley de formación a una de las tres.

Anexo 14: Reproducción simple en Marx a la luz de Sraffa

Hay otra manera de mostrar el equilibrio de la reproducción simple con las anteojeras de Sraffa. Supongamos que los medios de producción que se emplean en la ecuación (R.3) -para a su vez producir medios- son los mismos que se emplean para producir productos finales de consumo en la ecuación (R.4). Es una hipótesis con mucho sentido. Supongamos además que todas las matrices de productos y medios de los dos sectores (o conjunto de sectores) tienen la misma dimensión $\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{n}$. Esto supone una cierta restricción que pierde generalidad. Ocurre entonces que la ecuación de equilibrio:

(1) $$L_1W_1(I+G_1)I+P_1X_1G_1I=P_2X_2I$$

queda como sigue:

(2) $$L_1W_1(I+G_1)I+P_1X_1G_1I=P_1X_1I$$

Lo que ha cambiado es que hemos hecho iguales los precios y cantidades de los medios de producción de ambos sectores, es decir, que $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X}_1$, porque son los mismos medios. De la última ecuación obtenemos la ecuación de equilibrio general del sistema económico tal y como se ha definido:

(3) $$L_1W_1(I+G_1)I=P_1X_1(I-G_1)I$$

que en términos aritméticos es:

(4) $$\sum_{i=1}^{n} l_{1i}\sum_{j=1}^{n} w_{1ij}(1+g_{1ij})=\sum_{i=1}^{n} p_{1i}\sum_{j=1}^{n} x_{1ij}(1-g_{1ij})$$

Al igual que decíamos en el cuerpo principal de este trabajo, un gobierno nacional o mundial que tuviera suficiente poder político y económico (no existe actualmente) que fuera capaz de implementar políticas económicas capaces de hacer observar el equilibrio de la ecuación anterior, tendría mucho avanzado para combatir los ciclos y las crisis. Ha de observarse también -y es significativo- que no hay que preocuparse por los salarios, tasas de ganancia y precios de los sectores de bienes de consumo (que no aparecen en la ecuación), sino tan sólo por estas variables del sector de medios de producción. Intelectualmente no puede ser más sencillo. Eso sí, las dificultades ideológicas y de poder son inmensas. También vale esta ecuación de equilibrio -así como aquella de la que procede- para una economía abierta (con sector exterior), porque podemos asimilar las importaciones como una parte de los productos finales y las exportaciones como medios de producción para obtener precisamente las anteriores[193]. ¡Y todo esto ha surgido de la simple conjunción de Marx y Sraffa! De la ecuación (4) se desprende que si aumentan las ganancias sin que se muevan las demás variables, la ecuación se desequilibra, y para encontrar de nuevo la condición de equilibrio han de subir los precios del sector (el de medios) o han de bajar los salarios o aumentar los despidos, o una combinación ponderada de las tres cosas a la vez. ¡Con esta ecuación tendrían los sindicalistas argumentos para que no suban las ganancias en períodos de equilibrio o de crecimiento moderado y sin situaciones de crisis![194]

$$\begin{array}{l}
\mu y_1 q_1 = x_{11} q_1 + x_{12} q_2 + \cdots + x_{1n} q_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu y_n q_n = x_{n1} q_1 + x_{n2} q_2 + \cdots + x_{nn} q_n \\
\sum_{1}^{n} l_j q_j = 1
\end{array}$$

ecuaciones de la mercancía-patrón

[193] Cosa que se hace en las tablas Input-Output.
[194] Recuérdese que partimos de una situación de reproducción simple en términos físicos.

Anexo 15: Mercancía-patrón, razón-patrón y producción conjunta

Creo que Sraffa debió sentirse angustiado cuando salió de su producción simple para entrar en las inesperadas y sorprendentes tierras de la producción conjunta. En su época era una novedad porque los economistas se mecían en las cómodas hamacas de la producción simple y daban por supuesto que las conclusiones que se obtenían de la simple valían para la conjunta. En su época era una apuesta arriesgada. En el modelo de Sraffa se verá que las conclusiones son significativamente diferentes. No tengo constancia de ello y quizá no queden testimonios de sus sensaciones ante este tema[195]. Pero digo lo anterior por lo siguiente: Sraffa dedica tres capítulos a la producción conjunta cuando, por ejemplo, sólo dedica uno y -en mi opinión- alicorto, a la reducción del capital a trabajo fechado, cuyo tema es trascendental en su obra y aún más en la historia de la teoría del capital; lo digo porque dedica todo un capítulo -el octavo- a demostrar la existencia y unicidad en la producción conjunta -tal como él la entiende- de la razón-patrón y la mercancía-patrón; *ítem* más, Sraffa considera los tres capítulos dedicados a la producción conjunta como una especie de introducción a los capítulos siguientes dedicados a la teoría del "Capital Fijo" y de la "Tierra", y advierte que se pueden saltar si "*los lectores los encuentran demasiado abstractos*"[196]; por último, me llama la atención de cómo empieza este octavo capítulo. Dice Sraffa: "*Tan pronto como consideramos en detalle la construcción de un sistema patrón con productos conjuntos, resulta obvio que puede que algunos de los multiplicadores tengan que ser negativos*"[197]. Es decir, como para curarse en salud de cara el lector, afirma lo que ha de demostrar, aunque, según él, a pesar de esos *multiplicadores*, ello no implica que no pueda haber razón-patrón. Y concluye el capítulo VIII mezclando los bienes básicos con los no básicos. ¿Cuál es lo correcto de todo esto? En este artículo se va a

[195] He leído recientemente el libro de Kurz, Pasinetti, Salvadori y otros "*Piero Sraffa: The Man and the Scholar*" y no me ha resultado esclarecedor en ese aspecto, aunque sí en otros. Es desde luego un aspecto colateral, pero resultaría apasionante un estudio psicológico y gnoseológico sobre cómo Sraffa fue descubriendo (o inventando) su obra, tanto por el carácter que sí sabemos tenía el gran economista italiano, como por la longitud temporal en la elaboración de su obra. Coincidió, además en el tiempo, con la revolución keynesiana/kaleckiana, que aun cuando era un ataque también a los neoclásicos y marginalistas, lo era desde otro punto de vista. Además, Sraffa, cuando comenzó, estaba solo. Rectifico. Le acompañaba un gigante del pasado: David Ricardo.

[196] Pág. 67 de *Producción de mercancías por medios de mercancías* (PMPM).

[197] Pág. 71 de *PMPM.*

intentar esclarecer un poco lo anterior utilizando una consideración que quizá se le escapó a Sraffa. En todo caso servirá, creo yo, para la lectura de los capítulos VII, VIII y IX. Vamos a sintetizar algunos aspecto del/los modelo *esrafianos* que hemos visto hasta ahora, por lo que el lector avanzado puede saltarse este primer epígrafe sobre la producción simple.

1 - Producción simple

Para entender el problema de manera más formal que económica -aunque ambas deben ir unidas y más cuando se trabaja con algún grado de libertad- se ha de partir de la producción simple. La ecuación que define el sistema *esrafiano* en este tipo de producción es como sigue:

$$PY = (1+r) \times PX + wL \tag{1}$$

donde ***P*** es el vector de precios **1**x***n***, ***Y*** la matriz diagonal de ***n*** productos finales ***n***x***n***, ***r*** el tipo de ganancia, ***X*** la matriz ***n***x***n*** de ***n***x***n*** medios de producción, ***w*** la tasa de salarios y ***L*** el vector trabajo **1**x***n***. Hemos subrayado lo de diagonal en la matriz de productos finales ***Y*** porque esa es la diferencia (única) entre la producción simple -en la que estamos- con respecto a la producción conjunta esrafiana. Y hay que subrayar también lo de *esrafiana*, porque esta es una producción conjunta muy simple. La ecuación matricial de (1) es (2):

$$\begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & y_{nn} \end{bmatrix} = (1+r) \times \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} + w \times \begin{bmatrix} l_1 & \cdots & l_n \end{bmatrix}$$

Es a partir de la producción simple como construye Sraffa su mercancía-patrón y su razón-patrón. La razón de ello -valga la redundancia- es que se puede construir una economía en pequeño que tenga la propiedad de que los productos netos se encuentran en relación con sus medios de producción igual en todos los sectores de la economía. Hoy llamaríamos a esa mercancía-patrón muy probablemente *mercancía virtual*. Lo curioso es que esos multiplicadores se obtienen a partir de los datos reales mediante estos dos sistemas de ecuaciones:

(3) $$uYQ = XQ$$

(4) $$LQI = 1$$

donde $\boldsymbol{u}$ es un coeficiente, $\boldsymbol{Y}$ la matriz diagonal anterior, $\boldsymbol{Q}$ el vector de multiplicadores $\boldsymbol{q}_j$ de dimensión $\boldsymbol{n}\text{x}\mathbf{1}$, y $\boldsymbol{L}$ el vector también anterior de trabajo. Desarrollado en sus términos, (3) queda:

(5) $$u \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

La mercancía patrón es la ecuación (3). Entre (3) y (4) hay $\boldsymbol{n}+\mathbf{1}$ ecuaciones con $\boldsymbol{n}+\mathbf{1}$ incógnitas ($\boldsymbol{n}$ multiplicadores $\boldsymbol{q}_j$ y el coeficiente $\boldsymbol{u}$) Los multiplicadores se obtienen haciendo $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AY}^{-1}$ y aplicando el teorema de Perron-Froebenius a (3). Para ello, la matriz $\boldsymbol{A}$ debe cumplir 3 requisitos: ha de ser cuadrada, irreductible y no negativa. Con ello se asegura una autovalor (que es $\boldsymbol{u}$), que es el mayor de los posibles $\boldsymbol{n}$ multiplicadores de (3). Este multiplicador asegura, a su vez, que existen dos *autovectores*, uno por la izquierda (los precios $\boldsymbol{p}_i$) y otro por la derecha (los multiplicadores $\boldsymbol{q}_j$), que son todos estrictamente positivos (versión fuerte del teorema)[198]. Si además $\boldsymbol{A}$ es productiva, es decir, si $\boldsymbol{A}^i > \boldsymbol{A}^{i+1}$, entonces el autovalor $\boldsymbol{u}$ es menor que $\mathbf{1}$ y con ello la razón-patrón, que es $\boldsymbol{R}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{u})/\boldsymbol{u}$, es mayor que cero.

2 - Producción conjunta *esrafiana*

¿Qué pasaría si la matriz de productos finales $\boldsymbol{Y}$ no fuera diagonal y fuera de producción conjunta, es decir, que pudiera tener un valor positivo en cualquier columna de cualquier fila? Porque esta es la versión *esrafiana* de la producción conjunta. En lugar de la ecuación (AIX.5) tendríamos:

(6) $$u \times \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

[198] Puede verse los aspectos matemáticos en el apéndice de *Lecciones de la teoría de la producción*, de L. Pasinetti, FCE, 1983.

Pero ahora $\boldsymbol{Y}$ no es diagonal y el cálculo de $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$ no puede asegurar que todos los elementos de $\boldsymbol{A}$ sean positivos, y con ello no se cumple la condición de no negatividad de esta matriz, por lo que no se puede aplicar Perron-Froebenius. Al hacer cero la tasa de salarios en la ecuación que define el sistema, obtenemos una tasa máxima de ganancia, pero eso no nos asegura que sea esta tasa además la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ que surge del coeficiente $\boldsymbol{u}$ de (5). Sraffa en el capítulo VIII se enzarza en una demostración de lógica económica -de acuerdo con su sistema- por reducción al absurdo, según la cual obtiene la existencia de esta razón-patrón y su unicidad. Veamos cómo se puede hacer los mismo desde el punto de vista matemático, es decir, desde el punto de vista lógico a partir de la lógica económica del italiano. Vamos a partir de una matriz de productos finales $\boldsymbol{Y}$ de producción conjunta, es decir, con todos sus elementos pudiendo ser (aunque no necesariamente todos) mayores que cero. Pero ahora la vamos a *diagonalizar*, agrupando todos los valores de $\boldsymbol{Y}$ por filas (son todos la misma mercancía, por lo que son sumables) y los resultados de la sumas los vamos a colocar en la diagonal principal de forma que:

(7) $$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \hat{y}_{ii} > 0 \quad para\,todo \;\; i=1 \;\; a \;\; n$$

Ello dará una matriz diagonal tal como:

(8) $$\begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} y_{1j} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum\limits_{j=1}^{n} y_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{y}_{nn} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Y}_D$$

Y ahora la matriz $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{D}}$ *diagonalizada*[199] es una matriz de las mismas características que la de la reproducción simple, es decir, cuadrada, irreductible y no negativa (por hipótesis) en (7), por lo que se puede aplicar el teorema de Perron-Froebenius; ello es así porque nos hemos asegurado de que la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{D}}^{-1}$ sea positiva al ser $\boldsymbol{X}$ estrictamente positiva, y al ser la inversa de la matriz diagonal $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{D}}$ positiva al ser sus elementos los inversos de la matriz diagonal $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{D}}$.

[199] Esta diagonalización no tiene que ver con el mismo término que se emplea en el álgebra.

¡Sraffa puede dormir tranquilo, que su mercancía-patrón y su razón-patrón son posibles para su producción conjunta! Ahora vamos a ver si es posible extenderla a otros tipos de producción conjunta. En todo caso, lo anterior *no* puede sustituir a la lectura del capítulo VIII del libro de Sraffa, pero sí ayudar a su comprensión y a la correcta deriva de sus conclusiones.

Sin embargo -y salvo que alguien demuestre lo contrario- esta producción conjunta es la única y la última que puede dar lugar a la mercancía-patrón y a la razón-patrón tan cara a Sraffa. Tiene esta producción conjunta al menos dos limitaciones importantes: 1) Los precios que aparecen multiplicando a los productos finales ***Y*** son los *mismos* que los que lo hacen con los medios ***X***. Según esto, no hay creación neta de productos nuevos que obliguen a nuevos precios ni nuevos productos. Dicho de otra manera, en la producción conjunta *esrafiana* no puede haber productos *no básicos*; 2) El número de productos finales son cualitativamente iguales al número de medios. No hay productos nuevos, aunque los ya existentes como medios aumenten en cantidad como productos finales.

Plantea Sraffa en el capítulo VIII señala precisamente la posibilidad de que existan ***n*** razones-patrón en el caso de la producción conjunta (esrafiana) y emplea el método del recuento para elegir el menor valor de todos ellos. Lo que resulta sorprendente es entonces su afirmación de que, calculadas todas las posibilidades, la razón-patrón única que da lugar a un vector de precios positivos es el menor de todos los ***n*** valores de ***R*** calculados. Su demostración es por reducción al absurdo y con razonamientos económicos. Pero ello no es suficiente. Veamos porqué. En la ecuación (8) se ve el porqué. En efecto, la suma de los productos finales por cada mercancía de todos los sectores, es decir, $\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \hat{y}_{ij}$ puede ser colocada en cualquiera de las ***n*** columnas de la matriz de productos finales y, por tanto, dar lugar a ***n*** razones-patrón en la ecuación $\boldsymbol{YQ}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{XQ}$, porque ***Y*** será diferente en cada una de las ***n*** posibles posiciones de $\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \hat{y}_{ij}$. Pero existe una posición -como hemos visto en (8)- para las distintas sumas, que es precisamente *la de la diagonal principal*, que *convierte la producción conjunta esrafiana en una producción simple*. Sabemos por Perron-Froebenius que existe un autovalor simple, real y positivo y que es el más alto de todos ellos que asegura dos cosas: 1) que la razón-patrón a que da lugar es la más baja posible de la solución del sistema $\boldsymbol{YQ}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{XQ}$; 2) que el vector de precios a que da lugar (autovector) es estrictamente positivo si la matriz $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ de requerimientos es irreducible. Con ello quedan desvelados los razonamientos -insustituibles, por otra parte- de Sraffa en este capítulo sobre la existencia y unicidad de la razón-patrón y mercancía-patrón para *su* producción conjunta. Decía que el razonamiento de Sraffa no es suficiente porque si no demuestra -y no lo hace- la posible transformación de la matriz $\boldsymbol{Y}$ de productos finales en una matriz diagonal susceptible de aplicar Perron-Froebenius, no puede deducirse la existencia y unicidad de la razón-patrón. Es de esperar que con lo anterior se haya completado formalmente el razonamiento económico de Sraffa.

3 - Producción conjunta con bienes básicos y no básicos

Vamos a intentar también en la producción conjunta, pero con separación de bienes básicos y no básicos, si se puede prorrogar a este caso la construcción de una mercancía-patrón y una razón como en la producción simple *esrafiana*. La ecuación que definiría un sistema así sería:

$$P_N Y_N + PY = (1+r)\times PX + wL \tag{9}$$

donde en (A13.9) la única novedad es el vector de precios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}$ de los bienes no básicos de dimensión $\mathbf{1}\mathrm{x}\boldsymbol{m}$ y la matriz de bienes no básicos $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N}}$ de dimensión $\boldsymbol{m}\mathrm{x}\boldsymbol{n}$. Aquí parecería que andamos por el buen camino, porque si hacemos la tasa de salarios $\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$ obtenemos:

$$P_N Y_N + PY = (1+g_m)\times PX \tag{10}$$

En (A13.10) no tenemos el vector de rentas salariales $\boldsymbol{wL}$ porque los salarios los hemos hecho cero, por lo que ahora la tasa de ganancia se ha hecho la máxima $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$. Si ahora añadimos las ecuaciones:

$$P_N Y_N I + PYI - PXI = 1 \tag{11}$$

que es el primer numerario, siendo **I** el vector de unos ***n*x1** y un segundo numerario como:

(12) $$LI = 1$$

Con las 4 últimas ecuaciones sale la ya conocida:

(13) $$r = (1 - w)g_m$$

La cuestión que se plantea ahora en la producción con diferenciación entre bienes básicos y no básicos es si la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_\text{m}$ coincidirá con la razón-patrón, si es que esta existe. Veamos. Para que exista tendríamos que encontrar un conjunto de precios $\boldsymbol{P}_\text{D}$ y una matriz diagonal (o diagonizable) $\boldsymbol{Y}_\text{D}$ tal que cumpliera que:

(14) $$¿\, P_N Y_N + PY = P_D Y_D \,?$$

Pero la ecuación (A13.14) es un imposible, porque las cantidades por filas de las matrices $\boldsymbol{Y}_\text{N}$ e $\boldsymbol{Y}$ son distintas cuantitativamente y cualitativamente. Además, no necesariamente son de la misma dimensión. En cuanto a los vectores de precios, les pasa lo mismo. En todo caso, si alguien consigue hacer el milagro de igualar el lado izquierdo de (14) con el derecho, *habemus* razón-patrón y mercancía-patrón para la producción conjunta con diferenciación entre bienes básicos y no básicos. Para este caso, Sraffa no encontró la solución. La razón económica es la de que tal y como se ha definido los productos básicos, estos han de entrar en el lado derecho e izquierdo en la ecuación que define el sistema económico. Eso no ocurre con los bienes *no básicos*, porque son productos finales pero *nunca* medios de producción. Y lo que ocurra con los precios en esta cuestión ocurrirá con los multiplicadores, porque estos son la solución por la derecha de la ecuación ***uYQ***=***AYQ*** junto con ***L*I**=**1**, mientras que los precios son la solución por la izquierda de ***uPY***=***PAY*** con ***L*I**=**1** también. Según eso, si puede haber precios negativos ocurrirá lo mismo con los multiplicadores y viceversa: Perron-Froebenius *dixit*. Al llegar a la producción conjunta con diferenciación entre bienes básicos y no básicos, el sueño de Sraffa (al menos parte de el) se desvaneció. Sraffa entonces se lanza por lo que he llamado el método del *recuento* *manual*: se calculan los *excedente netos relativos* de todos los bienes y servicios $\boldsymbol{i}$, es decir:

$$(15)\qquad \frac{y_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}} \qquad \text{para todo } \boldsymbol{i} = \mathbf{1} \text{ a } \boldsymbol{n}$$

y se toma *el menor* de todos ellos. Con ello se asegura Sraffa que ningún sector va alcanzar al excedente de su propio sector por más que crezca la tasa de ganancia hasta llegar a su tasa máxima $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$. El problema es que, salvo que se demuestre otra cosa, *sólo* aplicando Perron-Froebenius se puede asegurar un vector de precios positivos y de multiplicadores positivos, por lo que no tenemos mercancía-patrón; tampoco tenemos garantía de que la supuesta razón-patrón obtenida mediante el método manual de recuento coincida con la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$. En los anexos III y IV se puede ver cómo el excedente de uno de los tres sectores del ejemplo vale cero (no hay excedente) y sin embargo existe una tasa de ganancia máxima calculada por el método de prueba y error con el criterio de la frontera entre el paso de los precios positivos a negativos. Sin embargo no todo está perdido. En un epígrafe posterior diremos algo más al respecto.

4 - Tasa máxima de ganancia y razón-patrón

El genial invento -¿o es descubrimiento?- de la mercancía-patrón y de la razón-patrón parecería, visto el libro de Sraffa, sólo es aplicable a la producción simple, es decir, al esquema de producción en el que cada sector produce un solo producto. Una situación así tiene la ventaja de que el esquema puede ser formalizado mediante la ecuación de definición del sistema $\boldsymbol{PY}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{PX}$, la cual es susceptible de aplicarse el teorema de *Perron-Froebenius* y obtener con ello un vector de precios *no* negativos y un autovalor que asegure una tasa de ganancia $\boldsymbol{R}$ positiva y única para todos los sectores. $\boldsymbol{P}$ es el vector de precios $\mathbf{1}\mathrm{x}\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{Y}$ la matriz *diagonal* de productos finales y $\boldsymbol{X}$ la matriz cuadrada de medios de producción, ambas de dimensiones $\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{n}$. Es necesaria la ayuda de la ecuación $\boldsymbol{LQ}\mathbf{I}=\mathbf{1}$ para obtener los multiplicadores a partir de la ecuación matricial $\boldsymbol{uYQ}=\boldsymbol{XQ}$, que está íntimamente relacionada con la de definición del sistema. $\boldsymbol{L}$ es el vector trabajo, $\boldsymbol{Q}$ el vector $\boldsymbol{n}\mathrm{x}\mathbf{1}$ de multiplicadores y $\boldsymbol{u}$ un multiplicador escalar que es a la vez un autovalor. Además, con ello relacionamos el autovalor $\boldsymbol{u}$ con $\boldsymbol{R}$

mediante la ecuación $\boldsymbol{u}=\mathbf{1}/(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})$ que surge de la aplicación del teorema. Así calculamos $\boldsymbol{R}$. De esta manera, $\boldsymbol{R}$ será simultáneamente la tasa máxima de ganancia y la razón-patrón que buscaba Sraffa[200]. Todo ello es posible, no obstante, porque $\boldsymbol{Y}$ es una matriz *diagonal*, es decir, que tiene todos los productos finales de las mercancías colocados en la diagonal principal: el resto de los elementos de la matriz son cero. Si estamos en la producción conjunta, es decir, en la producción donde en cada sector -y en cada empresa- produce más de un producto, la matriz de productos finales $\boldsymbol{Y}$ ya *no* es diagonal y la consecuencia funesta para el esquema *esrafian*o es que ahora no se puede aplicar *Perron-Froebenius*, con lo cual no podemos asegurar ni un vector de precios no negativos $\boldsymbol{P}$, ni unos multiplicadores no negativos $\boldsymbol{q}_{\mathrm{j}}$, ni que la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ coincida con la razón-patrón $\boldsymbol{R}$, suponiendo que la podamos calcular. Sin embargo, casi todo tiene solución. Sraffa la encuentra en el capítulo VIII de su libro eliminando "*completamente mediante transformaciones lineales las mercancías no básicas*[201] *del sistema, tanto del lado de los medios de producción como del lado de los productos*"[202]. En términos matemáticos eso equivale a realizar operaciones lineales de combinaciones de filas y columnas en la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$) de dimensiones $\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{n}$, de tal forma que quede una matriz de cuadrada de *rango* igual al número de filas (=columnas). Con ello se puede calcular el determinante de $\boldsymbol{u}\mathbf{I}$-$\boldsymbol{A}$ y resolver el polinomio de grado $\boldsymbol{n}$ (número de filas o columnas). El teorema de *Perron-Froebenius* nos asegura una solución real, simple y positiva, como hemos visto. El problema es que para llegar a ello en la producción conjunta han de ocurrir dos cosas: 1) que la matriz $\boldsymbol{A}$ sea ya irreducible o reducible, aunque ninguna de las dos cosas la podemos asegurar de antemano; 2) que se parta del supuesto, como hace Sraffa, de que el número de bienes de productos finales sea el mismo que el de medios de producción, aunque esté repartido en $\boldsymbol{n}$ sectores de productos finales. Este es un supuesto muy restrictivo, pero Sraffa nunca salió de él porque se aferraba a sus queridos inventos -¿o son descubrimientos?-de la mercancía-patrón y de la razón-patrón. Y no es para menos.

---

[200] También será una medida del excedente y un índice de productividad.

[201] Mercancías no básicas son aquellas que surgen como productos finales en el proceso productivo pero que nunca se utilizan como medios de producción. Las básicas son lo contrario: entran como medios y como productos. Según Sraffa en todos los sectores sin excepción. No obstante, ese todos no es necesario para la existencia de una solución de vectores no negativos y un autovalor positivo, simple y real.

[202] Pág. 77 de *Producción de mercancías por medio de mercancías.*

Hemos visto que el caso de la producción conjunta *esrafiana* puede resolverse diagonalizando la matriz de productos finales mediante la ecuación $\boldsymbol{Y}_{S}=\boldsymbol{Y}_{C}\boldsymbol{D}$, obtenido como $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{Y}_{S}^{-1}\boldsymbol{Y}_{C}$, que es equivalente a sumar todos los productos finales por columnas de la matriz de productos finales $\boldsymbol{Y}_{C}$ en la producción conjunta y colocar estas sumas en la diagonal de la matriz $\boldsymbol{Y}_{S}$ como en la producción simple según sectores. Así podemos transformar la producción conjunta esrafiana en un modelo de ecuaciones igual al de la producción simple. A Sraffa no se le ocurrió este sistema, pero su discusión sobre la razón-patrón mínima mediante reducción al absurdo[203] es equivalente a lo anterior. Sraffa lo hizo así para no perder -y que no perdiera el lector- el hilo de su discusión económica y no meramente formal. La cuestión surge sobre qué pasa si los productos no-básicos aparecen diferenciados de los básicos formalmente en el modelo y si ambos no coinciden en el número de productos diferentes, cosa ya cercana a la realidad. ¿Tenemos entonces razón-patrón y mercancía-patrón o no? ¿Y si tenemos razón-patrón, es ésta igual a la tasa máxima de ganancia? ¿La podemos obtener de otra forma? Sraffa no pudo contestar a estas preguntas de manera formal, es decir, con alguna demostración. Empezaremos con alguna respuesta no satisfactoria. Para empezar, el método del recuento consistente en comparar todos los productos netos relativos (excedentes relativos) y tomar el menor de ellos, falla porque Perron-Froebenius nos da siempre un vector de precios no negativos y un autovalor positivo que da lugar a una razón-patrón *que no tiene porqué coincidir con el menor valor del excedente relativo*. He llamado excedente relativo de un sector a la ecuación:

$$\text{(15)} \qquad Exc.\ relativo\ de\ i=\frac{Y_i-\sum_{j=1}^{n}X_{ij}}{\sum_{j=1}^{n}X_{ij}} \quad para\ i=1\ a\ i=n$$

Pues bien, esa solución es compatible con un sector cuyo excedente relativo es cero. Vamos a ver ahora que sí hay solución para modelos *no esrafianos*, pero desarrollados a partir de la semilla que nos dejó el genial italiano. Vamos hacerlo de la forma que tanto adolece el libro de Sraffa: planteando de entrada el sistema de ecuaciones con el que vamos a trabajar:

[203] Pág. 79 de *PMPM.*

(16) $$P_N Y_N + PY = (1+r)\left[PX + wL\right]$$

(17) $$P_N Y_N + PY = (1+g_m)PX$$

(18) $$PY = (1+R)PX$$

(19) $$PYI - PXI = 1$$

(20) $$LI = 1$$

Como se verá, estas ecuaciones no están elegidas al azar, sino con mucho cálculo y muchos intentos. Son, creo, naturales, reflejan bien el espíritu esrafiano y son susceptibles de concretarse y acercarse a la realidad con una generalización de tasas de ganancia y de salarios, como luego veremos. La ecuación (16) es la de definición del sistema, donde $\boldsymbol{P}_N$ es el vector de precios $\mathbf{1}\mathrm{x}\boldsymbol{m}$ de productos *no-básicos*, $\boldsymbol{Y}_N$ es la matriz no cuadrada $\boldsymbol{m}\mathrm{x}\boldsymbol{n}$ de productos finales *no básicos*, $\boldsymbol{P}$ es el vector de precios $\mathbf{1}\mathrm{x}\boldsymbol{n}$ de precios de productos *básicos*, $\boldsymbol{Y}$ la matriz cuadrada $\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{n}$ de productos finales básicos, $\boldsymbol{r}$ la tasa de ganancia, $\boldsymbol{X}$ la matriz $\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{n}$ de medios de producción, $\boldsymbol{w}$ la tasa de salarios, $\boldsymbol{L}$ el vector $\mathbf{1}\mathrm{x}\boldsymbol{n}$ de inputs de trabajo y $\mathbf{I}$ es el vector de unos $\boldsymbol{n}\mathrm{x}\mathbf{1}$. La ecuación (17) es el resultado de hacer cero la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$. Con ello obtenemos una ecuación cuya tasa de ganancia $\boldsymbol{g}_\mathrm{m}$ es la máxima posible manteniendo siempre el mismo excedente, es decir, ***PY-PX*** en términos monetarios. Hasta ahora nada nuevo bajo el sol de Sraffa. Una tasa de ganancia más alta que hiciera que $\boldsymbol{Y}<\boldsymbol{X}$ para alguna mercancía en términos físicos no sería viable porque el sistema no se podría reproducir al ser menor para uno o varios bienes y servicios (mercancías) los productos finales que los medios de producción utilizados. Hay que recordar que estamos en un modelo de *reproducción simple*, aunque de producción conjunta, porque ni los precios ni los bienes (mercancías) están fechados, además de ser un modelo de equilibrio. Sigamos. La ecuación (18) es crucial en la demostración de lo que viene, porque es la misma que la de la producción simple, con $\boldsymbol{R}$ como presunta razón-patrón del subsistema de ecuaciones que representa esta ecuación matricial. Sobre esta ecuación hay que detenerse, lo mismo que sobre la siguiente, porque $\boldsymbol{R}$ surge independientemente de los precios por aplicación del teorema de *Perron-Frobenius*. Si $\boldsymbol{R}$ dependiera de los precios y/o de las tasas de ganancia y salarios no habría demostración y nada de lo que sigue tendría ningún valor. La (19) es el numerario *esrafiano*. Aquí cualquiera hubiera estado tentado de elegir un numerario del tipo

$\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{Y}_N\mathbf{I}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}\mathbf{I}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}\mathbf{I}$ de la ecuación, es decir, del producto neto, incluidos los ingresos de los productos *no-básicos* $\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{Y}_N\mathbf{I}$. Obrando así no hubiéramos llegado a la demostración. Estas consideraciones son decisivas en lo que viene. La (20) es el segundo numerario ya conocido y utilizado por Sraffa. De las ecuaciones (16) y (17) sale la ecuación:

(21) $$P=\frac{w(1+r)}{g_m-r}\times LX^{-1}$$

El lector del libro de Sraffa debiera tener *in mente* esta ecuación y es lástima que Sraffa nunca la hiciera explícita. La (21) nos dice al menos dos cosas importantes: a) que los precios de los productos básicos ***P*** *no* dependen de los precios de los no-básicos P_N; b) que si la tasa de ganancia general del sistema ***r*** se acercara (muy cerca) a la tasa máxima de ganancia, los precios crecerían exponencialmente. Secundariamente nos dice que los precios son proporcionales a los salarios y a los *inputs* de trabajo e inversamente proporcionales a la tasa máxima de ganancia y a los medios de producción. También es notable que para llegar a la tasa máxima de ganancia y a la razón-patrón no necesitemos resolver un sistema de ecuaciones, ni resolver la ecuación (21): tan sólo con despejar los precios en la ecuación (16) que define el sistema y aumentar la tasa de ganancia hasta llevar los precios al *rubicón* del más infinito al menos infinito. Obrando así obtenemos la razón-patrón y la tasa máxima de ganancia (que tienen el mismo valor sólo en ese momento).

De (18) y (19) se obtiene:

(22) $$1=RPXI$$

Sustituyendo los precios de (21) en (22) y con la (20) ya tenemos una ecuación sin precios, que además define la frontera entre salarios y ganancias:

(23) $$w=\frac{g_m-r}{(1+r)R}$$

donde los puntos de corte son $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}_m$ para $\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$ y $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{g}_m/\boldsymbol{R}$ si hacemos $\boldsymbol{g}=\mathbf{0}$. Seguimos. De las ecuaciones (16), (18), (19) y (20) se obtiene la singular ecuación:

(24) $$P_N Y_N I + 1 = \frac{r}{R} + (1+r)w$$

Obsérvese que la (24) está muy cerca de la ecuación fundamental *esrafiana* $\boldsymbol{r}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{w})\boldsymbol{R}/(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})$, es decir, de la ecuación de la razón-patrón para sistemas de pago *pre-factum* y no *post-factum*, como utiliza Sraffa. Las consecuencias son las mismas, sólo que el multiplicador $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})$ está afectando a la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$. Si eliminamos $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})$ en todas las ecuaciones resultantes, tenemos el sistema empleado por Sraffa, aunque él no llegara nunca a demostrar lo que sigue. Ahora estamos preparados para eliminar una variable entre las ecuaciones (23) y (24), dado que no son una combinación lineal o de otro tipo entre ambas. Ello es así porque en la (24) no se ha utilizado la (17) y, en cambio, sí se ha hecho en la (23) a través de la (21). El resultado es:

(25) $$\boxed{P_N Y_N I = \frac{g_m - R}{R}}$$

Y en la (25), a simple vista, se puede comprobar que para que la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_m$ sea igual a la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ es suficiente que el lado izquierdo de la ecuación, es decir, la suma de los productos de precios y cantidades de productos finales de los bienes *no-básicos* $\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{Y}_N\mathbf{I}$ sea cero. O dicho de otro modo: la ecuación (25) nos asegura la *condición suficiente* de que la tasa máxima de ganancia sea igual a la única razón-patrón $\boldsymbol{R}$ si la suma de todos los productos finales de la matriz $\boldsymbol{Y}_N$ de bienes no básicos vale cero. En cambio, sí tenemos con ello probado lo que queríamos demostrar: que al menos en la producción simple o conjunta *esrafiana* (pero *diagonalizada*), la tasa máxima de ganancia y la razón-patrón tienen el mismo valor aún cuando sean conceptos distintos: *la razón-patrón* es el coeficiente común que permite pasar de la realidad a la mercancía-patrón con la ayuda de los multiplicadores; *la tasa máxima de ganancia* surge de hacer cero la tasa de salarios en la ecuación (16) que define el sistema. Lo anterior puede resumirse de la siguiente manera:

(26) $$\boxed{si \;\; Y_N = 0 \;\; \forall i, j \;\Rightarrow\; \frac{g_m - R}{R} = 0 \;\Rightarrow\; g_m = R}$$

También se demuestra lo contrario: que si existen bienes *no-básicos* diferenciados de los *básicos*, la tasa de ganancia máxima es mayor que la razón-patrón:

(27) $$si \;\; Y_N > 0 \;\; \forall i, j \;\Rightarrow\; \frac{g_m - R}{R} > 0 \;\Rightarrow\; g_m > R$$

Pero aquí no acaba la cosa, porque de (21) sabemos cómo calcular la tasa máxima de ganancia, tanto en la producción simple y en la conjunta *esrafiana*, pero con ***Y*** diagonalizada. Simplemente tenemos que obrar por el método de prueba y error sobre la tasa de ganancia ***r***. Traemos a colación la ecuación:

(28) $$P = \frac{w(1+r)}{g_m - r} \times LX^{-1}$$

En (28) vemos que si la tasa de ganancia ***r*** se acercara a la tasa máxima de ganancia ***g***m, los precios tenderían -como ya hemos visto- a infinito primero, *para pasar bruscamente a menos infinito*. En esa situación y en el instante anterior de pasar a menos infinito ocurre que ***r***=***g***m=***R***, con lo cual tenemos un método para calcular la razón-patrón sin necesidad de resolver el sistema ***u*I-*A***=**0** para los sistemas antes aludidos: dar valores a ***r*** (aumentándola) hasta pasar la frontera de los precios del *más* infinito al *menos* infinito. Veamos el resumen:

(29) $$si \;\; r \to g_m \;\; en \;\; P = \frac{w(1+r)}{g_m - r} \Rightarrow P \to \inf \Rightarrow r \to R$$

En los anexos se puede ver algunos ejemplos. Si en lugar de la ecuación se hubiera partido de la más típica de Sraffa:

(30) $$P_N Y_N + PY = (1+r)PX + wL$$

el resultado hubiera sido que:

(31) $$P_N Y_N I + 1 = \frac{r}{R} + w$$

Y ahora la ecuación deducida que relacionara ***r***, ***w*** y ***R*** sería:

(32) $$w = \frac{g_m - r}{R}$$

en lugar de la (23), que sustituida en la (31) da igualmente la (25). Cambiaría sólo la (21) que sería ahora:

(33) $$P = \frac{w}{g_m - r} \times LX^{-1}$$

Aquí se obtienen las mismas conclusiones anteriores cuando ***r*** se acerca a $\boldsymbol{g}_m$, pero con unos valores ligeramente diferentes por el factor (**1**+***r***), que ahora no existe. Que el lector elija.

<u>Generalización</u>

El teorema puede ser generalizado a ***n*** tasas de ganancia mediante la matriz diagonal ***G*** y a ***n*** tasas de ganancia máxima mediante la matriz también diagonal $\boldsymbol{G}_m$. Las ecuaciones respectivas serían:

(34) $$P_N Y_N + PY = [PX + LW] \times (1+G)$$

(35) $$P_N Y_N + PY = PX \times (1+G_m)$$

(36) $$PY = (1+R)PX$$

(37) $$PYI - PXI = 1$$

(38) $$LI = 1$$

No vamos a repetir el proceso anterior, pero de este conjunto de ecuaciones sale:

(39) $$P_N Y_N I = LW(1+G)(G_m - G)^{-1}(G_m - R)I$$

que desarrollada en términos aritméticos quedaría:

(40) $$\sum_{i=1}^{m} p_{Ni} \sum_{j=1}^{n} y_{Nij} = \sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}(1+r_{ij})(g_{mij}-R)}{g_{mij}-r_{ij}}$$

donde todos los $\boldsymbol{w}_{ij}$, $\boldsymbol{r}_{ij}$ y $\boldsymbol{g}_{mij}$ valen cero si $\boldsymbol{i}$<>$\boldsymbol{j}$. En (40), si el primer término de la ecuación es igual a cero, es decir, si vale cero la suma del producto del conjunto de precios por sus respectivos productos finales de bienes *no-básicos*, entonces la parte de la derecha de la suma *sólo* vale cero si se cumplen las dos condiciones siguientes: 1) que *todas* las tasas de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_{mij}$ sean iguales a la única razón-patrón $\boldsymbol{R}$; 2) que estas tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{g}_{mij}$ sean mayores o iguales a la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}_{ij}$, pero con una al menos que sea mayor estrictamente.

Con este teorema -que yo sepa nunca demostrado antes- acotamos las posibilidades de utilizar la razón-patrón y de construir la mercancías-patrón tan cara a Sraffa. Podemos añadir que con bienes *no-básicos* no se ve la forma de construir una mercancía-patrón y una razón-patrón. Al menos desde este modelo o similares. Sin embargo, no por ello la semilla plantada por el italiano deja ni dejará de fructificar, al igual que la incoherente teoría del valor-trabajo de Marx es sostenible más allá de la teoría de la explotación. Ambos sembraron, pero sus críticos constructivos deben seguir su tarea, por encima de los que quieren destruir sus obras o la de los meros apologistas que quieren perpetuarla con sus defectos y limitaciones. Ambos grupos no interesan al conocimiento que se reputa como científico o que, al menos, lo intenta.

Anexo 16a: Producción simple

PY=(1+g)PX+wL

				sumas					sumas
Y=	13	0	0	**13**	X=	4	4	3	11
	0	11	0	**11**		3	5	2	10
	0	0	20	**20**		4	8	4	16
w=	0,7	g=	**4%**		L=	0,4	0,5	0,1	1
Y^{-1}=	0,077	0,000	0,000		$A=XY^{-1}$	0,308	0,364	0,150	
	0,000	0,091	0,000			0,231	0,455	0,100	
	0,000	0,000	0,050			0,308	0,727	0,200	

$P=wLY^{-1}(I-(1+g)A)^{-1}$= 0,07 0,15 0,04

Anexo 16b: Producción conjunta

PY=(1+g)PX+wL

				sumas					sumas
Y=	3	4	6	**13**	X=	4	4	3	11
	7	2	2	**11**		3	5	2	10
	5	3	12	**20**		4	8	4	16
w=	0,7	g=	**4%**		L=	0,4	0,5	0,1	1
Y^{-1}=	-0,10	0,17	0,02		$A=XY^{-1}$	1,09	0,36	-0,35	
	0,42	-0,03	-0,20			1,67	0,22	-0,70	
	-0,06	-0,06	0,13			2,70	0,16	-1,05	

$P=wLY^{-1}(I-(1+g)A)^{-1}$= 0,46 0,16 -0,16

Puede comprobarse en estos anexos 14a y 14b que, a pesar de que la suma del producto final de cada mercancía (fila) es la misma en la producción simple que en la conjunta, el resultado de su inversa $\boldsymbol{Y}^{-1}$ es distinto, por lo que los precios finales son distintos. En cuanto a la matriz $\boldsymbol{A}$ de requerimientos tiene elementos negativos en la producción conjunta y no puede haberlos en la producción simple.

Anexos 16c y 16d

Excedente neto físico y tasa de ganancia máxima

modelo: **PY** = **(1** + **g) PX** + **wL**

L=	0,19	0,31	0,50	1,0

	productos finales			sumas		medios de producción			sumas
Y=	180	0	0	180	X=	90	50	40	180
	0	450	0	450		120	125	40	285
	0	0	480	480		60	150	200	410

w= 0,7 *g* = **19,99%**

$A=XY^{-1}$	0,500	0,111	0,083	0,69
	0,667	0,278	0,083	1,03
	0,333	0,333	0,417	1,08
	1,500	0,722	0,583	

$Y^{-1}=$	0,0056	0	0
	0	0,0022	0
	0	0	0,0021

0,694 < autovalor < 1,083

excedente físico relativo

0,0%	57,9%	17,1%

44% < **R** < 71%

$P=wLY^{-1}(I-(1+g)A)^{-1}=$ **16,74** **6,09** **4,57**

Excedente neto físico y tasa de ganancia máxima

modelo: **PY** = **(1** + **g) PX** + **wL**

L=	0,19	0,31	0,50	1,0

	productos finales			sumas		medios de producción			sumas
Y=	180	0	0	180	X=	90	50	40	180
	0	450	0	450		120	125	40	285
	0	0	480	480		60	150	200	410

w= 0,7 *g* = **20,01%**

$A=XY^{-1}$	0,500	0,111	0,083	0,69
	0,667	0,278	0,083	1,03
	0,333	0,333	0,417	1,08
	1,500	0,722	0,583	

$Y^{-1}=$	0,0056	0	0
	0	0,0022	0
	0	0	0,0021

0,694 < autovalor < 1,083

excedente físico relativo

0,0%	57,9%	17,1%

44% < **R** < 71%

$P=wLY^{-1}(I-(1+g)A)^{-1}=$ **-16,74** **-6,09** **-4,56**

La única diferencia entre los cuadros de los anexos 14c y 14d es la tasa de ganancia. En el 14c, la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$ es **19,99**%; en el 14d, la tasa es de **20,01**%. En ambos se toma esta tasa como variable independiente. Con 19,99% los precios aún son positivos; con **20,01**% ya hemos pasado a negativos. El ejemplo es el mismo que pone Sraffa en su libro y él calcula que la razón-patrón es el 20%. Vemos aquí que la tasa máxima de ganancia (que aquí es $\boldsymbol{g}$) coincide con la razón-patrón porque ambos están en la frontera del paso de los precios positivos a negativos. El autovalor *mayor* (que es el único que garantiza un vector de precios positivos) de $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$ es $\boldsymbol{u}$=**0,8333**, con el cual se haya la razón-patrón mediante $\boldsymbol{R}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{u})/\boldsymbol{u}$, que es justamente igual a **20**%. El método del recuento de Sraffa falla. En efecto, el menor valor del excedente relativo se da en la primera mercancía y vale cero, a pesar de lo cual sí hay un autovalor -como hemos visto- que garantiza un vector de precios positivo.

Anexo 16e

Excedente neto físico y tasa de ganancia máxima (p. simple)

P Y = **(1** + **g) P X** + **w L**

L=	0,188	0,313	0,500	1,00

	productos finales			sumas
Y=	450	0	0	450
	0	21	0	21
	0	0	60	60

	medios de producción			sumas
X=	186	54	30	270
	12	6	3	21
	9	6	15	30

w= 0,7   ***g*** = **48,253%**

Y^{-1}=	0,002	0	0
	0	0,048	0
	0	0	0,017

$A=XY^{-1}$ =	0,413	2,571	0,500	3,48
	0,027	0,286	0,050	0,36
	0,020	0,286	0,250	0,56
	0,460	3,143	0,800	

0,460 **<** autovalor máximo **<** 3,143

u=1 / (1+ g=G_m)

u = **0,6745**

excedente físico relativo

66,7%	0,0%	100%

Pasinetti, pág. 130

Razón-patrón= **48,25%**

P = w LY^{-1}(I-(1+g)A)$^{-1}$ = **191** **1563** **409**   **PYI=** 143.270,4

Este anexo y los tres siguen se han tomado de ejemplos de los libros de Pasinetti (*Lecciones de la teoría de la producción*) y de J.M.Vegara (*Economía política y modelos multisectoriales*). En los tres se ha llegado a las razones-patrón mediante el método de prueba y error, haciendo variar la tasa de ganancia ***g*** hasta encontrar un valor para ***PYI*** tal que pase del más infinito a menos infinito. Por supuesto que aquí se trata de grados de aproximación, y nos hemos detenido en las milésimas del porcentaje. En el anexo 14e lo hemos hecho cuando la tasa de ganancia valía **48,253**%, en el anexo 14c cuando era de **19,999**% y en el anexo 14d cuando era de **18,537**%. En los tres casos un aumento en la tercera cifra decimal pasaría el valor de ***PYI*** de más a menos. En los tres casos coinciden la tasa máxima de ganancia así obtenida con las razones-patrón calculadas por los autores de los libros mediante Perron-Froebenius.

Anexo 16f

Excedente neto físico y tasa de ganancia máxima

modelo: **PY** = **(1** + **g) PX** + **wL**

L=	0,19	0,31	0,50	1,0

	productos finales			sumas
Y=	180	0	0	180
	0	450	0	450
	0	0	480	480

	medios de producción			sumas
X=	90	50	40	180
	120	125	40	285
	60	150	200	410

w= 0,7   ***g*** = **19,99%**

$A=XY^{-1}$	0,500	0,111	0,083	0,69
	0,667	0,278	0,083	1,03
	0,333	0,333	0,417	1,08
	1,500	0,722	0,583	

Y^{-1}=	0,0056	0	0
	0	0,0022	0
	0	0	0,0021

0,694 **<** autovalor **<** 1,083

excedente físico relativo

0,0%	57,9%	17,1%

44% **< R <** 71%

$P=wLY^{-1}(I-(1+g)A)^{-1}$= **16,74** **6,09** **4,57**

Anexo 16g

Excedente neto físico y tasa de ganancia máxima (p.simple)

P Y = (1 + g) P X + w L

L=	0,188	0,313	0,500	1,00

	productos finales			sumas
Y=	450	0	0	450
	0	21	0	21
	0	0	60	60

	medios de producción			sumas
X=	222	78	90	390
	12	6	3	21
	12	8	20	40

w= 0,7 *g* = **18,537%**

Y^{-1}=	0,002	0	0
	0	0,048	0
	0	0	0,017

$A=XY^{-1}$ =	0,493	3,714	1,500	5,71
	0,027	0,286	0,050	0,36
	0,027	0,381	0,333	0,74
	0,547	4,381	1,883	

0,547 **<** autovalor máximo **<** 4,381

u=1 / (1+ g=Gm)

u = **0,8436**

excedente físico relativo

15,4%	0,0%	50%

Pasinetti, pág. 190

Razón-patrón= **18,54%**

$P = w\,LY^{-1}(\,I-(1+g)A)^{-1}$ = **218** **2021** **838** **PYI=** 190.605,5

De la mano de Sraffa: *la razón-patrón en El Capital*

Lo que vienes ahora es una sorpresa que sólo ha sido atisbada[204] pero no demostrada formalmente. Por supuesto que también depende de las hipótesis -siempre discutibles- que se hagan. La obra de Sraffa y de Marx cada vez más me parecen como las dos caras de *Alicia en el país de las Maravillas*, pero con una asimetría: el libro del italiano parece escrito para enmendar los fallos del alemán, aunque esa no fuera ni mucho menos la intención de Sraffa, porque su libro era *un preludio a una crítica a la teoría del Capital*. De hecho *Producción...* podría haberse escrito sin haber leído una línea de El Capital ni ninguna obra de Marx: no hay referencias a él, no hay una teoría del valor en el italiano porque se aceptan la contabilidad de los precios; no tiene una teoría de la acumulación o de la reproducción; tampoco nada sobre las crisis. Es -la del italiano- ahistórica y sólo hace referencia al tiempo cuando trata el tema del trabajo fechado, pero lo hace en un contexto de permanencia de medios y productos cada año, de equilibrio, por lo que hay que suponer, como dice Keynes, rendimientos constantes. Y sin embargo, cualquier esfuerzo que hagamos para tratar los problemas que plantea Marx a la luz de los instrumentos de Sraffa resulta fructífera. Lo hemos visto en la reproducción simple de Marx con las ecuaciones que definen el mundo esrafiano, y ahora lo vamos a ver con *la razón-patrón* y algunos de los conceptos (que no adelanto para no quitar la sorpresa) de Marx.

Abandonamos por un momento ahora la noble guía *esrafiana* para adentrarnos en la volcánica *marxista*. En efecto, vamos a mezclar ahora precios y cantidades con los valores-trabajo de Marx sin entrar a discutir la teoría del valor-trabajo de Marx. Lo que haremos será plantear unas hipótesis concretadas en un sistema de 7 ecuaciones sin más. Como todo esquema es discutible, pero al menos no llama a engaño: lo que se avecina es cierto bajo esas hipótesis; si se cambia algunas de ellas (o varias) ya no lo es. La vara de medir será si son fieles al esquema de ideas de cada uno de los autores, cada uno las suyas: 4 ecuaciones son de Marx, 2 de Sraffa y una de conexión entre ambos esquemas de pensamiento. En el de Marx, la formación de los valores en la producción de mercancías (hoy diríamos bienes y servicios) vendría expresado por esta fórmula:

[204] *Mr. Sraffa´s Rehabilitation of Classical Economics*, R.L. Meek, 1961.

(C.1) $$HY = C + V + S$$

donde ***HY*** sería el valor trabajo del producto final de cada mercancía, que lo hemos diseccionado como el producto del valor-trabajo unitario ***H*** por la cantidad de mercancías producidas ***Y***; ***S*** sería la plusvalía generada; ***V*** el capital variable que representa el valor de los bienes de consumo del trabajador para la subsistencia de él y de su familia, por último, ***C*** es el capital constante o, como diría J. Robinson, *el ambiente* (*los medios de producción) que acompaña al trabajador*. En términos matriciales sería:

(C.2) $$\begin{bmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{bmatrix}$$

La segunda ecuación sería la tasa de explotación (de plusvalía).

(C.3) $$e = s_j / v_j$$ para todo ***j***=**1** a **n**

donde, siguiendo a Marx, todos los sectores (o mercancías) llevan aparejados la misma tasa de explotación. De aquí surgen ***n*-1** ecuaciones linealmente independientes. La tercera característica que a veces acompaña al esquema marxista , junto a los valores trabajo y la teoría de la explotación, es su consideración de *la composición orgánica de capital* como cociente entre el capital constante y el capital variable igual para todos lo sectores. La ecuación:

(C.4) $$Ko = c_j / v_j$$ para todo ***j***=**1** a ***n***

de donde salen también ***n*-1** ecuaciones linealmente independientes. En términos matriciales ambos sistema de ecuaciones serían:

$$\begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} = e \times \begin{bmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_n \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} ko_1 & & \\ & \ddots & \\ & & ko_n \end{bmatrix} = ko \times_{x} \begin{bmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_n \end{bmatrix}$$

junto con el vector de precios ***n*x1 *P***, el de multiplicadores ***Q***, también ***n*x1**, y el vector unitario $\boldsymbol{I}_{nx1}$. Añadimos las ecuaciones de la *razón-patrón* y la de la normalización del sistema de Sraffa, haciendo que el producto neto sea igual a **1.** A estas añadimos dos ecuaciones más que ahora explicamos:

(C.5) $HY = S + V + C$

(C.6) $S = \varepsilon V$

(C.7) $C = \theta V$

(C.8) $PY = (1 + R)PX$

(C.9) $QV\mathrm{I} = 1$

(C.10) $PY\mathrm{I} - PX\mathrm{I} = 1$

(C.11) $QHY\mathrm{I} = PY\mathrm{I}$

Las tres primeras primera ya se han comentado. La (C.9) es equivalente a la ecuación de normalización del trabajo de los modelos anteriores, solo que en este caso se trata del capital variable. Es la ecuación clave de este modelo de conexión (transformación) de valores a precios, porque elimina un grado de libertad a los multiplicadores al estar en ***Q*** también en (C.11) y porque no hemos dicho bajo qué criterio se calculan estos coeficientes de transformación. Los tomamos como datos, sean cuales sean. La (C.10) es la ecuación de normalización habitual en Sraffa y representa al producto neto global en términos monetarios. Por último, la (C.11) es las suma del producto bruto de toda la economía en términos de valor a la misma macromagnitud en términos de precios. Hacemos ahora el recuentos de ecuaciones y variables y sale:

ecuaciones		variables		datos	
de (C5)	n	H	n	**Y**	n
de (C6)	n-1	S	n	**X**	n
de (C7)	n-1	V	n	**p**	n
de (C8)	n	C	n	**z**	n
(C9)	1	ε	1	**q**	n
(C10)	1	θ	1		
(C11)	1	R	1		
total	**4n+1**	total	**4n+3**		

Es discutible, porque se puede demostrar que, bajo otros criterios aceptables (Morishima[205]) desde el punto de vista marxiano, los precios son siempre mayores que los valores transformados con los

[205] Pág. 83 *de La teoría económica de Marx*, 1977 (*Marx´Economics*, 1973).

coeficientes. Pero también se puede aceptar como marxiano porque está en Marx, aunque no siempre. Si ahora hacemos el recuento entre variables y ecuaciones, aceptando como datos los que se ven también en el cuadro, vemos que el resultado [$4n+3-(4n+1)$] son 2 grados de libertad. Del resultado de solucionar el sistema de ecuaciones anterior surge la ecuación sorpresa:

(C.12)
$$\boxed{R = \frac{1}{e + ko}}$$

¡La razón-patrón estaba en Marx!

Es verdad que bajo los criterios anteriores, pero ahí queda la ecuación. La razón-patrón *esrafiana* es la inversa de la suma de la tasa de explotación y de la composición orgánica de capital marxianas[206]. Era de esperar un resultado así, puesto que la razón-patrón es la diferencia entre la producción final y los medios de producción empleados en términos de estos últimos y, por tanto, representa la participación de los salarios y los beneficios por unidad de medios de producción empleadas (en términos monetarios); mientras, la suma de la tasa de explotación y composición orgánica de capital representan la inversa de la participación del factor variable (el trabajo) y su plusvalía (ganancias derivadas del trabajo) por unidad de capital constante (medios de producción). Como quiera que detrás de las ganancias está –según la concepción marxista- la plusvalía, la cosa parecía abocada a este desenlace.

Curiosa relación de Sraffa con Marx. El alemán se sirve de la teoría del valor-trabajo, lo centra en la explotación (plusvalía) y lo desarrolla, entre otros supuestos, con lo que define él como *composición orgánica de capital*; Sraffa lo centra sobre la *razón-patrón* y la reducción del capital a trabajo fechado. Lo decíamos antes, son el complemento, como los dos lados del espejo de *Alicia*… Lo que necesitó decir Marx en dos mil páginas lo escribe Sraffa en un centenar. Uno trabaja con valores, el otro con precios. Para Marx *el*

[206] Luigi L. Pasinetti casi llega a esta conclusión en su artículo *Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth* cuando dice que “Sraffa está postulando precisamente la misma relación entra la tasa media de beneficios y las condiciones de producción en su industria estándar que la relación postulada por Marx entre la tasa media de beneficios y las condiciones de producción en su industria de composición orgánica media de capital”.

capital es una relación social, para Sraffa es trabajo actual y del pasado fechado. En ninguno de los dos aparece el *capital físico* como merecedor de una renta. Marx es determinista[207]; Sraffa nos deja en libertad… condicional. Y sin embargo, se puede pasar de un lado al otro del espejo con la guía de *la razón-patrón* (Sraffa) desde una cara y, desde la otra, con *la tasa de explotación* y *la composición orgánica de capital* (Marx).

El último punto y aparte era una digresión. El problema del lado del espejo de Marx en esta digresión es que la igualdad de las composiciones orgánicas por sectores en la economía es inaceptable por simple contrastación empírica. Aún más, como ya se ha visto en un anexo, si parece aceptable la proposición marxista de la tendencia a la igualación de las tasas de ganancia en la economía y además se da la igualación de las tasas de plusvalía (¿por definición o es una ley?), eso nos lleva a la igualdad de las composiciones orgánicas (inaceptable), por lo que se produce una contradicción en el esquema marxista y sólo quedan dos caminos: o relajar los supuestos o abandonar el esquema del alemán, al menos, en estos temas.

[207] Caída del capitalismo por disminución de las ganancias ante el aumento de las composiciones orgánicas de capitales.

De la mano de Sraffa: *una teoría de la reproducción.*

Leyendo literalmente la obra de Sraffa *Producción de mercancías por medio de mercancías* no podría decirse que tiene el economista italiano una teoría explícita de la reproducción y, menos aún, de la acumulación, como tiene, por ejemplo, Marx. Sin embargo su modelo lo es de equilibrio general y tiene por ello una teoría explícita de, al menos, reproducción simple. Lo tiene por los siguientes motivos: 1) en la ecuación que define su sistema -que luego veremos- no están fechadas sus variables; 2) la razón-patrón ***R*** interrelaciona los medios de producción con los productos finales en términos físicos y esto exige dos momentos diferentes del tiempo; 3) la mercancía-patrón se calcula a partir de unos multiplicadores que, al igual que la razón-patrón, interrelaciona medios y productos que no pueden ser simultáneos; 4) la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$ que relaciona también medios y productos se supone constante a lo largo del tiempo, incluso cuando llega Sraffa a la reducción del capital a trabajo fechado; 5) la propia aplicación del teorema Perron-Froebenius exige una matriz de requerimientos ***A*** varada en el tiempo para obtener un vector de precios no negativos. Se podría añadir algún argumento más, pero quizá sería redundante. Además, cuando Sraffa nos señala el tipo de economía (modelo) objeto de análisis nos dice en el prefacio que: "*La investigación se ocupa exclusivamente de aquellas propiedades de un sistema económico que no dependen de variaciones en la escala de producción o en las proporciones de los factores*"[208]. Es verdad que la diana a la que apunta es el marginalismo, pero con ello está suponiendo -quizá sin querer- o rendimientos constantes a lo largo del tiempo o reproducción simple o ambas cosas. De hecho, en la ecuación que define el sistema en la reproducción simple se pueden despejar los precios (únicos) en función del resto de las variables. No hay originalidad en todo esto, pero sí creo que la hay si se logra demostrar que los modelos que Sraffa va exponiendo, pasando por la producción sin excedente, con excedente, la reducción a trabajo fechado, la producción conjunta, la diferenciación entre bienes básicos y no básicos, y la producción con capital fijo, no sale en cualquier caso *de la reproducción simple*. Se puede presentar ese recorrido por sus esquemas como un caso particular de un modelo de reproducción y acumulación parecido pero distinto al de Marx, que es, por otro lado, al

[208] Pág. 11 de *Producción de mercancías por medio de mercancías* (en adelante *PMPM*).

que más se parece, y ello a pesar de que uno trabaje con lo que llama precios de producción[209] (Sraffa) y el otro con valores-trabajo (Marx). No es este el momento, pero no me resisto a afirmar que el italiano no tiene justificación en llamarles precios de producción y en el alemán los valores-trabajo da lugar a una definición de teoría de la explotación en lugar de una ley económica. Sólo en el interesantísimo *apéndice B* se ve obligado Sraffa a hablar explícitamente de "*productos no-básicos que se auto-reproducen*"[210]. No es que Sraffa se negara a admitir que su modelo implica la reproducción simple, sino que, dado que su interés se centraba en la distribución, dejó, digamos, cojo su esquema. Nada que objetar, porque hasta los genios deben pararse a descansar. Los simples mortales vamos a tratar modestamente de completar su esquema.

Reproducción simple

Vamos a entrar directamente en la reproducción simple haciendo explícitos el sistema de ecuaciones que pueden definirla. Por supuesto que éstas no han sido elegidas al azar sino tras algunos intentos de comprobar si la meta final no traicionaba el modelo *esrafiano* original. Son estas las ecuaciones:

(1) $$P_{C,k+1}Y_{C,k+1} + P_{k+1}X_{k+1} = (1+g)\left[P_k X_k + wL_k\right]$$

(2) $$P_{C,k+1}Y_{C,k+1} + P_{k+1}X_{k+1} = (1+g_M)P_k X_k$$

(3) $$X_{k+1}I = X_k I \quad y \quad P_{k+1} = P_k = P$$

(3 bis) $$\sum_{j=1}^{n} x_{k+1,ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{k,ij} \quad para\ todo\ i = 1\ a\ n$$

(4) $$P_{C,k+1}Y_{C,k+1}I = 1$$

(5) $$L_k I = LI = 1$$

La ecuación (1) es la de *definición del sistema* y se ha diferenciado los bienes no-básicos $\boldsymbol{Y}_{C,k+1}$ que aquí vamos a llamar *de consumo*, sea cual

[209] En mi opinión son sólo precios de intercambio porque Sraffa no tiene una teoría de costes ni una función de costes. Llamarlos precios de producción induce al error.
[210] Pág. 125 de *PMPM.*

sea el consumidor y que son aquellos que se consumen en el período considerado (por ejemplo, un año) y no son medios de producción; $\boldsymbol{Y}_{C,k+1}$ es una matriz *no* cuadrada $\boldsymbol{m}\text{x}\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{P}_{C,k+1}$ es su vector de precios $\mathbf{1}\text{x}\boldsymbol{m}$. Por su parte, $\boldsymbol{X}_{k+1}$ es la matriz de bienes básicos $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$, pero que aquí los consideramos como medios de producción producidos. Ello supone quizá forzar las definiciones *esrafianas* de bienes básicos y no-básicos, pero no queda otro remedio[211]. Creo, a pesar de todo, que no supone traición al menos a su espíritu. $\boldsymbol{P}$ es el vector de precios $\mathbf{1}\text{x}\boldsymbol{n}$**,** que es común a los medios de producción como a los productos finales que sirven para producir; este vector de precios permanece constante a lo largo del tiempo, por lo que hemos omitido la referencia temporal. Por último, $\boldsymbol{X}_k$ es la matriz de medios de producción $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$. Se ha *pre-multiplicado* también en (1) la masa salarial $\boldsymbol{wL}_k$ por la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$, a pesar de que Sraffa suele trabajar con lo que el llama salarios *post-factum*. Hoy día eso es inadmisible y la razón de trabajar así -y que procede de Ricardo- está mal justificada por el italiano[212]. No obstante, los resultados son esencialmente los mismos, solo que con un factor $(\mathbf{1}+\boldsymbol{g})$ pegado a $\boldsymbol{w}$. Que la matriz $\boldsymbol{Y}_{C,k+1}$ sea *no* cuadrada se ha hecho en aras del realismo, porque que el número de mercancías (hoy bienes y servicios) destinadas al consumo ($\boldsymbol{m}$ en $\boldsymbol{Y}_{C,k+1}$) sea igual al número de mercancías destinadas a la reproducción de los medios ($\boldsymbol{n}$ en $\boldsymbol{X}_{k+1}$ y $\boldsymbol{X}_k$) es *un suceso* casi imposible. La ecuación (2) surge de hacer cero la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$. La (3) es la ecuación estratégica de este modelo. En ella se expresa la igualdad entre el total de los medios de producción $\boldsymbol{X}_k$ en *términos físicos* de un período y los productos finales de medios de producción $\boldsymbol{X}_{k+1}$ del período siguiente, también en términos físicos. Es decir, el sistema se reproduce así mismo sólo en los medios de producción, mercancía a mercancía, en el total de los sectores. Insisto que no se exige que cada sector produzca la misma cantidad de mercancías período a período, sino que la igualdad se de para *la suma* de todos los sectores (pero mercancía a mercancía). Si el modelo se ve muy rígido, vale con que se cumpla la ecuación en términos de *valor* $\boldsymbol{PX}_{k+1}\mathbf{I}=\boldsymbol{PX}_k\mathbf{I}$, donde $\mathbf{I}$ es el vector de unos $\boldsymbol{n}\text{x}\mathbf{1}$. No obstante, en mi opinión debe mantenerse la ecuación tal y como está en (3), es decir, como *suma en términos físicos de todos los sectores* por cada mercancía por dos motivos: 1) porque creo que es más acorde con el

[211] Schefold ha hablado de abandonar la distinción de *bienes básicos y no-básicos* porque traen más complicaciones que dilucidan conceptos.

[212] Y no solo por Sraffa sino por todos los economistas posteriores. Se ha confundido *la forma* de cálculo (que es lo que hace Sraffa) con *cuando* se cobran los salarios (que es lo que cree Sraffa que hace).

espíritu *esrafiano* que se desprende de su obra; 2) porque hacerlo en términos de valores, es decir, como $\boldsymbol{PX}_{k+1}\mathbf{I}=\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{X}\mathbf{I}$, se corre el peligro de llegar *sólo* a una igualdad total y tautológica entre *demanda agregada*[213] en términos de valor (derivada de las rentas salariales y las ganancias) y *oferta agregada* como suma, en términos de valor, de los bienes de consumo $\boldsymbol{Y}_{C,k+1}$ más los bienes finales de producción $\boldsymbol{X}_{k+1}$. Insisto que el peligro es acabar en una igualdad contable en lugar de un equilibrio derivado de leyes económicas. El sistema es de *reproducción simple*[214] porque lo que indica (1) y (3) es que con las rentas obtenidas por la venta de $\boldsymbol{X}_{k+1}\mathbf{I}$ se compran nuevamente medios de producción para el período siguiente, que son idénticas si $\boldsymbol{X}_{k+1}\mathbf{I}=\boldsymbol{X}_{k+2}\mathbf{I}$; alternativamente pueden serlo en términos de valor y por el total, si hacemos que se cumpla $\boldsymbol{PX}_{k+1}\mathbf{I}=\boldsymbol{PX}_k\mathbf{I}$. Las ecuaciones (4) y (5) son los numerarios que se van a aplicar y que no se han elegido al azar precisamente. Hemos dejado para lo último la explicación sobre el período temporal que llevan el resto de las variables. En la ecuación que define el sistema (1) se ha diferenciado el período $\boldsymbol{k}+\mathbf{1}$ donde se obtienen los bienes de consumo $\boldsymbol{Y}_{C,k+1}$ y de productos finales de medios $\boldsymbol{X}_{k+1}$ -así como sus respectivos precios- de los períodos de las variables $\boldsymbol{L}_k$ y $\boldsymbol{X}_k$ del lado derecho de la ecuación y que se supone que entraron en la producción en un período anterior $\boldsymbol{k}$. No obstante, dado que estamos en la reproducción simple, las referencias temporales desaparecen porque se supone que tanto el trabajo como los medios de producción se repiten en diferentes períodos, así como los productos de consumo $\boldsymbol{Y}_C$. Las tasas de salario $\boldsymbol{w}$ y de ganancia $\boldsymbol{g}$ permanecen constantes en el modelo. Queda claro pues, que la (3) es una ecuación de comportamiento que permite alternativas, es decir, que es una ley económica y no una mera definición. De la ecuaciones (1) y (2) sale la ecuación explícita de precios de medios y productos finales.

(6) $$P=\frac{(1+g)w}{g_M-g}\times L\ X^{-1}$$

---

[213] Eso pasó con la demanda agregada de origen keynesiano, y el propio Keynes y epígonos se enfrascaron con conceptos como la demanda ex-ante y ex-post para evitar la tautología.

[214] No hay que confundir que lo sea o no de *producción simple o conjunta*. En este caso podría valer para ambas, porque nada se ha dicho sobre la matriz $\boldsymbol{Y}$ de productos finales de medios de producción: si no fuera diagonal habría también en estos productos producción conjunta- aparte de los bienes de consumo $\boldsymbol{P}_C$- y si $\boldsymbol{Y}$ fuera diagonal lo sería de producción simple para estos productos.

Una vez calculada la (6), del conjunto de $\boldsymbol{n}+\mathbf{2}$ ecuaciones que van de la (3) a la (5) más las $\boldsymbol{n}$ ecuaciones de (6) nos da, todo ello, la ecuación fundamental de este sistema:

$$w = \frac{g_M - g}{(1+g)g_M} \tag{7}$$

¡Si reemplazáramos $\boldsymbol{g}_M$ por la razón-patrón *esrafiana* $\boldsymbol{R}$, sería la ecuación fundamental de Sraffa de esta razón en su versión *pre-factum* en el pago de salarios! Es por supuesto una analogía, puesto que $\boldsymbol{R}$ no saldría de este conjunto de ecuaciones ni aún cuando añadiéramos la ecuación $\boldsymbol{PX}_{k+1}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{PX}_k$, porque ello exigiría un numerario tal como $\boldsymbol{PX}_{k+1}\mathbf{I}-\boldsymbol{PX}_k\mathbf{I}=\mathbf{1}$, cosa que *no* hemos hecho y que no podríamos hacer porque ya hemos tomado como numerario $\boldsymbol{P}_{C,k+1}\boldsymbol{Y}_{C,k+1}$ en (4), cosa que ha sido imprescindible para llegar a la ecuación (7). O lo uno o lo otro.

<u>Frontera salario-ganancia</u>

Cambiando de tema, esta ecuación es además la frontera de salarios-ganancias con puntos de corte en $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{g}=\mathbf{0})=\mathbf{1}$ y $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}=\mathbf{0})=\boldsymbol{g}_M$. La función (7) entre tasa de salario y de ganancia como variables es crecientemente decreciente, puesto que tiene la primera derivada negativa y la segunda positiva. La (7) implica otra ecuación que no hemos hecha explícita, que es como sigue:

$$P_{C,k+1}Y_{C,k+1}I = wL_kI + g(wL_kI + P_kX_kI) \tag{8}$$

La (8) nos dice que las rentas totales[215] del lado derecho de la ecuación, es decir, las derivadas del trabajo más las ganancias sobre las masa de salarios y medios de producción (*demanda*), han de comprar todos -pero sólo- los medios de consumo $\boldsymbol{P}_{C,k+1}\boldsymbol{Y}_{C,k+1}\mathbf{I}$ (*oferta*). Es la segunda ecuación de equilibrio del sistema, complementaria con la (3), pero en términos de valor, es decir, como $\boldsymbol{PX}_{k+1}\mathbf{I}=\boldsymbol{PX}_k\mathbf{I}$. Con ello completamos la reproducción simple. Podemos enunciarlo así: *un posible sistema de equilibrio y reproducción simple esrafiano es aquel en el que el conjunto de todos los bienes de consumo son comprados con el*

[215] No se puede llegar sólo a una ecuación como $P_CY_C = wL + g(wL + PX)$ a partir *sólo* del sistema de ecuaciones original.

conjunto de las rentas del trabajo más las ganancias empresariales y que, complementariamente, el valor de los productos finales se destinan íntegramente a comprar los mismos productos como medios de producción.

Reproducción ampliada

Debemos avanzar porque lo dicho hasta ahora está implícito en la obra de Sraffa, aunque el no pudiera llegar a (7) ni a definir explícitamente (8). Ahora sí nos adentramos en terrenos no explorados por el genial italiano, porque vamos a suponer dos *tasas de acumulación* (o de reproducción ampliada) del sistema. Una -llamémosla $\boldsymbol{v}$- en la reproducción de los medios de producción $\boldsymbol{X}$ y otra -que será $\boldsymbol{u}$- para la reproducción de los bienes de consumo $\boldsymbol{Y}_C$. Ambos hechos quedan reflejados en las ecuaciones que siguen:

(9) $$X_{k+1}I = (1+v)\times X_k I \quad con\ v>0$$

(9 bis) $$Y_{C,k+1}I = (1+u)\times Y_{C,k} I \quad con\ v>0$$

En (9) el sistema ya no simplemente se auto-reproduce, sino que deja el margen $\boldsymbol{vX}_k\mathbf{I}$ destinada a aumentar los productos finales de medios de producción $\boldsymbol{X}_{k+1}\mathbf{I}$ por ese misma cantidad física para todas los medios de producción del conjunto de los sectores. Además se aumentan los bienes de consumo final $\boldsymbol{Y}_{Ck}$ un porcentaje igual a $\boldsymbol{u}$. Alternativamente -y al igual que antes- podemos suponer que el sistema se acumula en términos de valor, aplicando $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{PX}_k\mathbf{I}$ directamente para obtener $\boldsymbol{PX}_{k+1}\mathbf{I}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{v})\boldsymbol{PX}_k\mathbf{I}$ y $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{P}_{Ck}\mathbf{X}_{Ck}\mathbf{I}$ y nos da $\boldsymbol{P}_{C,k+1}\boldsymbol{Y}_{C,k+1}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{u})\boldsymbol{P}_{C,k}\boldsymbol{Y}_{C,k}$. Como curiosidad podemos añadir que la diferencia entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es un índice de productividad *no laboral*[216] del sistema. Si ahora resolvemos el conjunto de ecuaciones originales, pero sustituyendo la (3) por la (9) y (9 bis), nos da la significativa ecuación:

(10) $$w = \frac{(1+u)\times(g_M - g)}{(1+g)\times(g_M - v)}$$

[216] No laboral dado que no interviene explícitamente ***L***.

donde vemos que (10) se diferencia de (7) en que el segundo multiplicando del denominador ya no es $\boldsymbol{g}_M$ sino $\boldsymbol{g}_M\text{-}\boldsymbol{v}$ y que en el numerador aparece un nuevo multiplicando: $(\mathbf{1}+\boldsymbol{u})$. La tasa de ganancia se obtendría de (10):

(10bis)
$$g=\frac{g_M(1+u-w)-vw}{1+u+w(g_M-v)}$$

Despejando ahora *la tasa de acumulación* (o de reproducción) ***v***:

(10bis b)
$$v=\frac{g_M\left[(1+g)w-1-u\right]+g(1+u)}{(1+g)w}$$

Y la tasa de crecimiento de los bienes de consumo:

(10bis c)
$$u=\frac{(g_M-v)\left[(1+g)w-1\right]}{g_M-g}$$

Uno de los mantras de la teoría del crecimiento neoclásica es que, bajo ciertas condiciones, la tasa de crecimiento de una economía es proporcional (incluso igual) a la tasa general de ganancia del sistema. No entramos si la realidad se adecua a esta conclusión neoclásica porque la realidad -y más la actual- la ha dejado herida de muerte. En el modelo *esrafiano* no existe proporcionalidad. Calculamos la primera derivada de (12) y a pesar de su terrible aspecto, queda:

(13)
$$\frac{dv}{dg}=\frac{(1+u)\times(g_M-g)}{(1+g)^2 w}>0 \quad si\;\; g_M>g$$

La segunda derivada es:

(14)
$$\frac{d^2v}{dg^2}=-\frac{(1+u)\times(1+g_M)}{(1+g)^3 w}<0$$

Es decir, la primera derivada positiva y la segunda negativa significa que la función (12) es decrecientemente creciente. Además, su crecimiento se detiene tangencialmente con la recta: $v=(1+g_M)/w$ que es, por lo tanto, su tope máximo. Los puntos de corte son:

(15) $$v(g=0)=\frac{g_M(w-1-u)}{w} \quad con \;\; v>0 \quad si \;\; w<1+u$$

(16) $$g(v=0)=\frac{g_M(1+u-w)}{1+u+wg_M} \quad con \;\; g>0 \quad si \;\; w<1+u$$

En el caso que nos ocupa, la ecuación de reproducción del sistema equivalente a la (8) de la reproducción simple sería como sigue:

(17) $$(1+u)P_{C,k}Y_{C,k}I=(g-v)P_kX_kI+(1+g)wL_kI$$

donde el lado derecho de la ecuación son las ganancias y salarios que van a demandar los bienes de consumo (lado izquierdo). Se puede observar en (17) que las ganancias derivadas de los medios de producción (***g*-*v***)***PX***k**I** son menores que en (8) -que eran ***gPX***k**I-** por la necesidad de dedicar parte de ellas (***vPX***k**I**) en (9) a aumentar la demanda de productos finales de medios de producción ***X***k+1. Por ello, ahora las ganancias correspondiente a la masa salarial ***gwL***k**I** han de servir para compensar esa menor demanda.

Generalización I

Una generalización del sistema de *reproducción simple* de origen *esrafiano* vendría dado por el sistema de ecuaciones:

(18) $$P_{C,k}Y_{C,k+1}+P_kX_{k+1}=\lfloor P_kX_k+L_kW\rfloor\times(1+G)$$

(19) $$P_{C,k}Y_{C,k+1}+P_kX_{k+1}=P_kX_k(1+G_M)$$

(20) $$X_{k+1}I>X_kI$$

(9) $$X_{k+1}I=(1+v)\times X_kI \quad con \;\; v>0$$

(9bis) $$Y_{C,k+1}I=(1+u)\times Y_{C,k}I \quad con \;\; v>0$$

donde lo que cambia respecto al modelo anterior de reproducción ampliada es que ahora ya no tenemos tasas unitarias de salarios y ganancias, sino matrices diagonales de salarios ***W***, de salarios, ***G*** y de ganancias máximas $\boldsymbol{G}_M$. De las ecuaciones (19), (9) y (9bis) sale la ecuación de equilibrio del sistema:

$$P_{C,k}Y_{C,k}I = \frac{1}{1+u} \times LW(1+G)(G_M - G)^{-1}(G_M - vI_d)I \tag{21}$$

Es esta una ecuación que implica un doble equilibrio. Por un lado indica la necesidad de igualar la oferta de bienes de consumo (lado izquierdo de la ecuación) con las rentas salariales y gananciales que representa el lado derecho; por otro es un equilibrio temporal, porque si el sistema respecta (21), ello indicaría que la senda de crecimiento de los bienes de consumo ***u*** se equilibra con la demanda derivada de las rentas producidas en los dos sectores en los que hemos divido la economía: el de medios de producción y el de bienes de consumo. Un gobierno que tuviera el poder político y económico capaz de obligar a mantener ese equilibrio en el conjunto de la economía podría dominar las crisis y evitar o, al menos, aplanar muchísimo los ciclos internos de la economía. Mejor aún si ese poder fuera un poder mundial. Pero eso es una utopía. Volviendo a la ecuación de equilibrio (21), de ella y de la de definición del sistema de este epígrafe, es decir, de la (18), junto el resto, obtenemos la complementaria de equilibrio y que es una alternativa a la (21):

$$(1+u)P_{Ck}Y_{Ck}I - P_kX_k(G_M - vI_d)I = L_kW(1+G)I \tag{23}$$

En esta no tenemos la matriz diagonal de ganancias máximas $\boldsymbol{G}_M$ y en la (21) está ausenta la matriz de medios $\boldsymbol{X}_k$. Juntas son redundantes. No es este el único modelo posible de reproducción simple o acumulada respetuoso con el espíritu *esrafiano*, pero es el más simple posible porque sólo hemos exigido que se reproduzca -o se amplíe- los productos finales ***X*** de un período que serán medios de producción en el período siguiente y que se haga lo propio con los bienes de consumo $\boldsymbol{Y}_C$. Incluso la reproducción ampliado de los medios de producción no es necesaria. Es decir, la tasa de reproducción ***v*** podría ser cero. No se me ocurre otra manera más adecuada de equiparar en lo posible los bienes de consumo de la macroeconomía convencional con el criterio de bienes *no-básicos* de Sraffa. Aunque se ha expresado el equilibrio en términos monetarios, el origen de los equilibrios en la reproducción del sistema se ha hecho a partir de la igualdad -o del crecimiento- *en términos físicos* de los productos finales de medios de producción de un período con el de medios de producción del siguiente. En este modelo de equilibrio de inspiración *esrafiana*, los precios juegan un papel pasivo y sólo intervienen como relaciones de intercambio, a diferencia de los precios de los modelos de *equilibrios competitivos* del análisis convencional, donde determinan *los excesos de demanda* que supuestamente vacían los mercados[217]. Los precios, en el equilibrio *esrafiano*, no son una guía para el conocimiento sobre la escasez de bienes y servicios, sino que expresan relaciones de intercambio entre bienes y servicios (mercancías, *commodities*, en lenguaje *esrafiano*). En Sraffa puede haber equilibrio mediante el trueque, sin precios, porque las propias relaciones de truque sustituyen y son equivalentes a los cocientes de precios. En el (o los) equilibrios *esrafianos* no hay funciones de producción ni funciones de demanda explícitas, porque medios y productos son datos surgidos del intercambio. No obstante, ello es compatible con las funciones anteriores siempre y cuando estas no determinen salarios y ganancias. La razón es la de que en cualquier modelo *esrafiano* de reproducción o de acumulación o, simplemente, de equilibrio, la relación entre salarios y ganancias se determinan exógenamente, sociológicamente, y no tecnológicamente o por efectos de supuestas productividades o utilidades. Sraffa, como heredero de *Torrens*, *Ricardo*, *Smith*, *Mill*, *Marx*, etc., es decir, de los clásicos, abre un mundo nuevo, alternativo al marginalismo y en parte al neoclasicismo, e incompatible con ellos. Eso sí, ese mundo hay que completarlo y, porqué no, también crearlo.

Generalización II

El modelo que venimos proponiendo permite una generalización aún mayor, porque ahora vamos a suponer que existen $\boldsymbol{n}$ tasas de acumulación en la producción de bienes de consumo $\boldsymbol{u}_{ij}$ tales que para $\boldsymbol{u}_{ij}=\mathbf{0}$ si $\boldsymbol{i}<>\boldsymbol{j}$ y con $\boldsymbol{u}_{ij}>\mathbf{0}$ si $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$, concretadas en la matriz diagonal $\boldsymbol{U}$; también $\boldsymbol{n}$ tasas también de acumulación $\boldsymbol{v}_{ij}$ en la producción de medios de producción tales que $\boldsymbol{v}_{ij}=\mathbf{0}$ si $\boldsymbol{i}<>\boldsymbol{j}$ y con $\boldsymbol{v}_{ij}>\mathbf{0}$ si $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$, concretadas a su vez en la matriz diagonal $\mathbf{V}$. Con ello las ecuaciones (9) y (9bis) del modelo anterior se convierten en:

(24) $$Y_{C,k+1}I = Y_{C,k}(1+U)I \quad con\ v>0 \quad si\ \ u_{ij} <> 0$$

[217] *General competitive analisys*, Arrow y Hahn, 1971.

(25) $$X_{k+1}I = X_k(1+V)I \quad con\ v_{ij} > 0 \quad si\ \ v_{ij} <> 0$$

Ahora, sustituidas estas ecuaciones en la (19) del modelo anterior, nos da la ecuación de equilibrio tal como:

(26) $$P_{Ck}Y_{Ck}(1+U)I - P_k X_k (G_M - V)I = L_k W(1+G)I$$

donde, como siempre, *la parte de la izquierda de la ecuación es la oferta de bienes de consumo en términos de valor menos el valor de medios de producción minorado de la tasa de crecimiento (acumulación) de estos bienes, que ha de ser igual -también en términos de valor- a las rentas salariales aumentadas por las tasas de ganancia*. Al igual que hemos hecho antes, podemos hacer desaparecer los precios de los medios de producción con una ecuación análoga a la (21) y se obtiene:

(27) $$P_{C,k}Y_{C,k}I = LW(1+G)(G_M - G)^{-1}(G_M - V)(1+U)^{-1}I$$

Esta ecuación de equilibrio desde el punto de vista formal es más sencilla puesto que sólo tenemos un sumando a cada lado de la ecuación. Su interpretación económica viene a ser que el equilibrio con crecimiento -tanto en el sector de bienes de consumo como de producción de medios- se da si la oferta en términos de valor global de bienes de consumo se igual a las rentas laborales modificadas por todos los factores que aparecen como multiplicandos en el lado derecho de la ecuación. Hay dos cosas significativas en (27): 1) que estamos muy cerca ya de los empírico, por lo que una política económica deliberada tendente a impedir crisis y ciclos debiera guardar este equilibrio si el un gobierno tuviera el poder político y económico capaz de hacerlo observar. En una economía de *mero* mercado es imposible llegar a ese poder, pero hay que ser consciente de lo que se pierde con ello; 2) que se puede observar que los precios de los medios de producción no aparecen explícitos en (27). Eso significa que una planificación de la economía basada en (27) sólo tendría como dato -sea del mercado o planificado- los precios de los bienes de consumo. En términos aritméticos (27) sería:

(27bis) $$\sum_{h=1}^{m} p_{C,k,h} \sum_{j=1}^{n} y_{C,k,hj} = \sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}(1+g_{ij})\times(g_{Mij}-v_{ij})}{(g_{Mij}-g_{ij})\times(1+u_{ij})}$$

Piero Sraffa

<u>De la mano de Sraffa: *una teoría de la inflación no monetaria* (*y una estimación sobre la tasa máxima de ganancia*)</u>

Que pudiera tener una Sraffa una teoría de la inflación o que al menos pudiera desarrollarse a partir de su obra Producción de mercancías por medio de mercancías puede resultar sorprendente leyendo su obra. Es verdad que posteriormente a la obra del italiano se ha desarrollado teorías del crecimiento inspiradas en su obras, así como aspectos fiscales o del comercio internacional, pero nada referente al tema aludido. Las razones son varias: 1) Sraffa trabaja con valores físicos reales de las mercancías (hoy, bienes y servicios) y los precios que utiliza, aunque los llama de producción, son meras relaciones de intercambio. Su/s modelo/s económicos podría emplearse para estudiar una economía de trueque; 2) no interviene ningún sector financiero o, al menos, el sector financiero de la economía es un proveedor de servicios y préstamos, pero no influyen monetariamente ni crediticiamente en la relaciones de intercambio ni en la distribución de la renta, que es uno de los fines de su modelo; 3) no aparece explícitamente el sector público ni las autoridades monetarias como creadoras de dinero como prestamistas de últimas instancia.

Y sin embargo sí tiene Sraffa una teoría implícita y no monetaria de la inflación aunque el italiano no se diera cuenta o, simplemente, no le interesara. En el momento actual básicamente hay dos teorías monetarias: la derivada de la oferta monetaria, es decir, de la facilidad crediticia otorgada por los bancos centrales de los países -el BCE en la Unión Monetaria en Europa- y en su posibilidad de comprar títulos emitidos por los Estados o empresas privadas. Ambas son dos formas de préstamo. La inflación será posible o no si la tasa de crecimiento de la oferta monetaria por encima del aumento de la producción de un país; la otra corriente de la teoría convencional de la inflación se inscribe en los aumentos de la demanda agregada sin que la oferta pueda seguirla. En principio nada de esto se podría desprender o desarrollar en una visión rígida de la obra de Sraffa mencionada, aunque sería más fácil hacerlo a partir de esta segunda corriente de pensamiento mencionada sobre la inflación. Sin más comentarios al respecto, vamos a desarrollar las ecuaciones de definición del sistema de Sraffa para hacer así de entrada visibles las hipótesis de partida. Parte el italiano de la ecuación de definición de su sistema:

(1) $$PY = (1+r)PX + wL$$

con ***P*** como vector **1**x***n*** de precios, ***Y*** como matriz diagonal ***n***x***n*** de ***n*** productos finales, con ***r*** como tasa de ganancia, ***w*** como tasa de salarios y ***L*** como el vector **1**x***n*** de inputs de trabajo. Ahora se calcula la tasa máxima de ganancia que permite el sistema definido en (1) haciendo cero la tasa de salario y queda:

(2) $$PY = (1+g_M)PX$$

De ambas ecuaciones se obtiene:

(3) $$P = \frac{w}{g_M - r} \times LX^{-1}$$

La ecuación (3) representa una función crecientemente creciente porque las primera y segundas derivadas son positivas. Tiene además un punto de corte en el plano cartesiano salario-ganancia (***P***-***r***) tal como:

(4) $$P(r=0) = \frac{w}{g_M} \times LX^{-1}$$

Pues bien, lo más significativo para el tema que nos ocupa es que como puede observarse en (3), a medida que la tasa de interés ***r*** se acerca a la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{M}}$, los precios ***P*** aumentan; además lo hacen exponencialmente cuando ***r*** está muy cerca de $\boldsymbol{g}_{\mathrm{M}}$. En cambio, los salarios ***w*** también pueden aumentar los precios, pero lo hacen proporcionalmente. La diferencia es notable. Podríamos pues asimilar la inflación de Sraffa a una inflación de costes derivado del comportamiento de los empresarios tendente a mantener sus ingresos trasladando sus costes a los precios cuando ello implique aumentar la tasa de ganancia. Podemos exponerlo así:

(5) $$en \quad P = \frac{w}{g_M - r} \times LX^{-1} \quad si \quad r \rightarrow g_M \Rightarrow P \rightarrow \infty$$

Como se ve, esta posible teoría que se desprende de Sraffa a partir de este modelo tan sencillo es una inflación que puede ser verificada empíricamente o no porque tiene algunas características especiales. Con ello cumplimos el principio de *falsibilidad* de Popper que dice que una teoría científica para que pueda ser digna de tal adjetivo ha de ser posible que sea falsa. Yo añado que si ello no fuera posible no estaríamos ante una ley científica sino ante una definición o una mera conclusión de una mera definición. Estas características son: 1) la inflación esrafiana es no monetaria: 2) se deriva de un aumento de los precios como consecuencia del intento logrado de los empresarios de traslados sus deseos de ganancias a los precios, incluso aun cuando ello no venga causado por un aumento de los costes; 3) la inflación no se produce tanto por un aumento de las tasas de ganancias de los empresarios, sino que estos aumentos se aceleran cuando sus tasas de ganancia ya están *muy cerca* de las tasas máximas de ganancias, tasas máximas que son aquellas tasas teóricas que permitirían a los empresarios acaparar todo el excedente, es decir, hacer cero los salarios; 4) la transición de la estabilidad de precios a situaciones graves de inflación es lenta, pero cuando se produce es exponencial; 5) los supuestos aumentos de la inflación derivados del aumento de las tasas de ganancia no puede venir compensado por la consiguiente disminución de las tasas de salarios -de acuerdo con la relación inversa esrafiana entre ambas tasas- porque el efecto del aumento a consecuencia de la ganancia es *exponencial*, mientras que la consiguiente disminución de los salarios es sólo *proporcional*. En la economía moderna parecería que estos fenómenos no puedan darse por el grado de conocimiento que tienen las autoridades monetarias de los aspectos monetarios de la inflación. En parte ello es cierto y se trata de una conquista intelectual de primera magnitud. Quizá el problema de dilucidar o separar los aspectos monetarios de los no monetarios de la inflación es que ambos no se pueden separar de la realidad; también porque las dos teorías básicas de la inflación que hemos mencionado, es decir la monetarista y la keynesiana, o son meramente monetarias o necesitan de la trasmisión monetarista del comportamiento de los bancos centrales y de los bancos privados para dar su capacidad explicativa. No existe una teoría económica convencional no monetarista de la inflación. Sraffa nos da una posibilidad. Sigamos.

Hasta ahora hemos supuesto constante el resto de las variables que intervienen, pero no debemos limitarnos a ello por más que la hoja de papel o la pantalla del ordenador tenga -hasta ahora- sólo dos dimensiones. El hecho es que los precios en (3) también dependen de $\boldsymbol{LX}^{-1}$, que podemos considerarlo como la inversa de la relación capital/trabajo de las teorías convencionales del crecimiento, con lo que cuanto mayor sea o crezca esta relación, menos inflación, y cuanto menor, mayor inflación. ¿Y dónde está ***Y***, es decir, la matriz de productos finales? ¿O es que acaso estos productos no van a tener nada que ver con la inflación? Ello sería un desastre porque no puede ser indiferente a la inflación el movimiento creciente, decreciente o constante de la producción. Podemos contestar que ***Y*** sí está presente, porque la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_M$ se ha obtenido a partir de la ecuación (1) haciendo cero los salarios. Ello nos ha dado la (2), donde podemos despejar la tasa máxima de ganancia y obtener:

(6) $$g_M = \frac{P(Y-X)I}{PXI}$$

El problema de esta ecuación es que no hemos podido deshacernos de los precios, pero aún así (6) nos dice que esta tasa máxima depende de los productos finales ***Y*** y de los medios de producción ***X***, ¡pero no depende de los inputs de trabajo! En el modelo de Sraffa, no obstante, si estamos en la producción simple, es decir, si ***Y*** y ***X*** dan lugar a una matriz de requerimientos ***A*** tal que $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ y ocurre que ***A*** es cuadrada, no negativa e irreducible, existe un autovalor mayor que cero -que es el mayor de los autovalores- que mantiene con $\boldsymbol{g}_M$ la relación $\boldsymbol{g}_M=(\mathbf{1}-\boldsymbol{u})/\boldsymbol{u}$. Es decir, se cumplen los requisitos del teorema de Perron-Froebenius. Si además ***A*** es productiva, $\boldsymbol{g}_M$ será menor que uno y con ello obtendremos $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{g}_M$, siendo ***R*** la razón-patrón de Sraffa. Con ello tenemos una tasa máxima de ganancia que coincide con la razón-patrón, y que se ha obtenido independientemente de los precios, pero sí dependiente de ***L***, ***Y*** y ***X***. Sin embargo, el caso de producción simple es un caso especial y su razón patrón es difícilmente extendible al caso de la producción conjunta, por lo que deberemos contentarnos en principio con las tasas máximas de ganancia para la teoría de la inflación *esrafiana* y abandonar más adelante este caso sencillo.

La dificultad es la de hallar la tasa máxima de ganancia en condiciones normales. Por (3) sabemos como aproximarla: aumentando la tasa de ganancia normal r a partir de un vector de precios ***P*** positivos hasta que estos se lancen al infinito. Entonces esa r será la tasa máxima. Es un avance notable para calcular este importante dato a falta -en general- de la razón-patrón porque no se pueda aplicar *Perron-Froebenius*. Existe, no obstante, otra forma de aproximación. Si en la ecuación que define el sistema (1) despejamos los precios queda:

(7) $$P = wLY^{-1}\left[I - (1+r)A\right]^{-1}$$

siendo $\boldsymbol{A}$ la matriz de requerimientos tal que $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$. Si ahora comparamos la (7) con la (3) que traemos aquí:

(3) $$P = \frac{w}{g_M - r} \times LX^{-1}$$

vemos que podemos conjeturar (no deducir exactamente) que entre (3) y (7) debe haber alguna relación tal como:

(8) $$\frac{1}{g_M - r} \times X^{-1} = \tilde{n} \times Y^{-1}\left[I_d - (1+r)XY^{-1}\right]^{-1}$$

siendo $\tilde{\boldsymbol{n}}$ un factor de proporcionalidad e $\mathbf{I}_d$ la matriz diagonal de unos. Si ahora tomamos *la inversa* de ambos términos de la ecuación y tras operaciones elementales en ambos términos de la ecuación obtenemos:

(9) $$g_M = \frac{1}{\tilde{n}}\left[(\tilde{n}-1)r + I_h X^{-1} Y I_v - n\right]$$

siendo $\mathbf{I}_h$ el vector de uno $\mathbf{1}\text{x}\boldsymbol{n}$ y $\mathbf{I}_v$ de unos también, pero $\boldsymbol{n}\text{x}\mathbf{1}$. En el caso particular de que diéramos a $\tilde{\boldsymbol{n}}$ el valor de **1** quedaría:

(10) $$g_M(\tilde{n}=1) = IX^{-1}YI - n$$

La ventaja de la estimación o conjetura de la tasa máxima de ganancia es la de que no depende de los precios, a diferencia de la tasa máxima que se podría obtener de (3): sólo dependen de los productos finales ***Y*** y de los medios de producción ***X***; tampoco depende -y esto es notable- de los inputs de trabajo. En realidad (10) es una medida del excedente, porque cada uno de los elementos de $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}$ son cocientes del producto final (y total[218]) de una mercancía divida por la suma de esa misma mercancía de todos los sectores. Son por tanto homogéneas todas la sumas. Se puede comprobar en los anexos que si no hay excedente, es decir, si ***Y*I**=***X*I** para cada una de las mercancías (filas de ambas matrices), la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_M$ vale cero.

Cabe preguntarse porqué a Sraffa se le escapó o no prestó atención a esta posible teoría de la inflación que se desprende de su modelo, sobre todo cuando se generaliza. Una primera respuesta sería que escapaba a la esfera de sus preocupaciones; otra, que lo consideraba un fenómeno monetario, cosa nada alejada de sus investigaciones a raíz de sus trabajos en Italia sobre la banca italiana que tan extraordinaria impresión causó a Keynes y que fue, a la postre, uno de los motivos por lo que el inglés se quiso llevar -y se llevó- al italiano a su *Cambridge* inglés. Pero existe una razón que se desprende de su modelo. Hemos dicho que si aumenta la tasa de ganancia puede llevar a la inflación -incluso a una hiperinflación- si $\boldsymbol{r}$ se aproxima a la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_M$. Pero ocurre también entonces que la tasa de salarios disminuirá por ese aumento de la tasa de ganancia. ¿Cómo quedará el resultado final sobre los precios? En el modelo *esrafiano* sólo existe razón-patrón en la producción simple, con los matices que hemos vistos sobre la matriz $\boldsymbol{A}$ de requerimientos. Podemos también obtener una razón-patrón para la producción conjunta esrafiana -que es muy particular- si llevamos la suma de los productos finales de cada mercancía a las diagonales de una matriz. Pero fuera de estos dos modelos no se ve la forma de calcular una razón-patrón. En estas condiciones, Sraffa demostró la siguiente relación entre tasa de salario y tasa de ganancia, con salarios pagados *post-factum*:

(11) $$r = (1 - w)R$$

Si ahora despejamos de la tasa de salarios y la reemplazamos por la misma tasa en (3) se obtiene:

(12) $$P = \frac{R - r}{(g_M - r)R} \times LX^{-1}$$

[218] Si ***Y*** es diagonal, cada elemento de la matriz es el total del producto final de todos los sectores, porque además cada sector -en este modelo de producción simple- sólo produce una mercancía.

En este modelo así planteado, si la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_M$ y la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ de Sraffa fueran la misma cosa, es decir, $\boldsymbol{g}_M = \boldsymbol{R}$, quedaría la ecuación:

$$P = \frac{1}{R} \times LX^{-1} \qquad (13)$$

¡y los precios no dependen de ninguna variable monetaria! Tan sólo de los inputs de trabajo $\boldsymbol{L}$, los medios de producción $\boldsymbol{X}$ y la razón-patrón $\boldsymbol{R}$, que depende a su vez de las dos variables anteriores y de los productos finales $\boldsymbol{Y}$. La ecuación (13) puede resultar desconcertante, porque indica que, dados $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{X}$, *sólo* existe un vector de precios compatible con el sistema, cuando en el modelo *esrafiano* los precios se determinan conocidos los salarios y las ganancias. Además, según esto, la inflación sería imposible. Y sin embargo, esto es lo que ocurre con la producción simple. En este modelo hay dos sistemas de ecuaciones -la (11) y la (13)- que son independientes, porque su único nexo común es $\boldsymbol{R}$, es decir, la razón-patrón, que sólo depende de datos del sistema, como son $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{X}$, y no de las variables monetarias $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{g}$. Por ello podemos decir que la inflación no monetaria en Sraffa se produce de forma natural en la producción conjunta y/o con diferenciación de bienes básicos y no básicos, y no puede existir en la producción simple tal como la presenta Sraffa. Ahí, en efecto, no hay razón-patrón. Ello implica que puede haber productos finales que no participan como medios; además, que una misma empresa produzca varios -o muchos- productos y que varias empresas puedan producir cada una por su cuenta un mismo producto. Con ello los precios ya no serán meras relaciones de intercambio -como ocurre en la producción simple[219]-, sino que comienzan a ser en, efecto, precios de producción, aunque no puedan asignarse costes unitarios a cada producto final por ser estos múltiples productos por empresa o proceso. Con la generalización de la producción simple se podrá ver mejor esta cuestión.

[219] A pesar de que Sraffa los llama -en mi opinión erróneamente- precios de producción.

Generalización I

Todo esto lo podemos generalizar para ***n*** tasas de ganancia ***G***, para ***n*** tasas de salarios ***W*** y pagados pre-factum, como parece más natural. Queda entonces la ecuación de definición del sistema:

(13) $$PY = [LW + PX](1+G)$$

siendo ***G*** la matriz diagonal de ganancias, al igual que ***W***. Además, ***Y*** , es decir, la matriz de productos, la podemos tomar como diagonal para no abandonar la producción simple o no diagonal para tener en cuenta la producción conjunta *esrafiana*. Si en esta ecuación hacemos cero esta matriz de salarios con el fin de hallar las tasas máximas de ganancia (ahora en plural), queda:

(14) $$PY = PX(1+G_M)$$

donde $\boldsymbol{G}_M$ es la nueva matriz diagonal de tasas máximas de ganancia. Entre (11) y (12), eliminando ***PY***, sale:

(15) $$P = LW(1+G)(G_M - G)^{-1}X^{-1}$$

En (15) ya se ve de forma más natural la influencia de la tasa de ganancia sobre los precios en la matriz inversa de $\boldsymbol{G}_M$-***G***, y como -al igual que ocurría en el caso de la producción simple- a medida que las tasas de ganancia de cada mercancía $\boldsymbol{g}_{ij}$ (sólo para ***i***=***j***, porque para ***i***<>***j***, $\boldsymbol{g}_{ij}$=**0**) se acercan a su tasa máxima $\boldsymbol{g}_{Mi}$, la inflación se dispara. También comprobamos, en cambio, que los salarios tienen un efecto sólo proporcional sobre los precios.

Ahora despejamos los precios en la ecuación de definición del sistema (13) y obtenemos:

(16) $$P = LW(1+G)[Y - X(I+G)]^{-1}$$

Al igual que en el caso de la producción simple *esrafiana* anterior podemos *conjeturar* que entre (15) y (16) se da la siguiente proporción:

(17) $$\left[Y - X(I+G)\right]^{-1} = \tilde{n}(G_M - G)^{-1}X^{-1}$$

siendo ***ñ*** un escalar que expresa la proporcionalidad y que puede ser mayor o menor que uno. Si ahora tomamos la inversa en ambos lados de la igualdad y trasponemos términos queda:

(18) $$G_M = (1-\tilde{n})G + \tilde{n}\left[X^{-1}Y - I_d\right]$$

donde $\mathbf{I}_d$ es la matriz diagonal de unos. Al igual que antes, muchas de estas tasas **-*n*** tasas- de ganancia máxima serán negativas, por lo que la conjetura mejorará si las sumamos todas para exigir *una tasa de ganancia máxima por mercancía*:

(19) $$G_M I = (1-\tilde{n})GI + \tilde{n}\left[X^{-1}YI - I\right]$$

La tasa máxima del sistema económico en su conjunto[220] sería:

(20) $$I_h G_M I_v = (1-\tilde{n})I_h G I_v + \tilde{n}\left[I_h X^{-1} Y I_v - n\right]$$

donde hemos llamado $\mathbf{I}_h$ al vector horizontal de unos $\mathbf{1}$x$\boldsymbol{n}$ e $\mathbf{I}_v$ al vector vertical $\boldsymbol{n}$x$\mathbf{1}$, también de unos. Se ve aquí más claro que en la producción simple la tasa máxima de ganancia es una medida del excedente, aunque no sea exactamente el excedente porque este vendría dado por:

(21) $$Excedente_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}} \quad para \quad i = 1 \quad a \quad n$$

Puede aceptarse que la inflación que se desprende o puede desprenderse del modelo *esrafiano* no es incompatible con explicaciones monetaristas de la inflación; en cambio entraría probablemente en colusión con explicaciones no monetaristas que no hicieran responsable del aumento de los precios el comportamiento empresarial consistente en un aumento de las ganancias. ¿Cómo evitar

[220] En el caso de que diéramos el valor de **1** a ***ñ*** quedaría: $I_h G_M I_v = \left[I_h X^{-1} Y I_v - n\right]$

estos aumentos? Pues mediante la competencia. En esto el modelo *esrafiano* no es diferente a la economía clásica, aunque Sraffa no tenga tampoco una teoría explícita de los mercados, pero de su obra se puede desprender una teoría *no marginalista* de la competencia. Por ello se preocupó desde el principio de la producción conjunta, a diferencia de los neoclásicos y marginalistas de su época[221], porque señala explícitamente el economista italiano la posibilidad de que dos o más empresas produzcan el mismo producto y no sólo que una empresa produzca muchos productos, para caracterizar este tipo de producción. Pero este es otro tema que abordaremos en otra ocasión.

Generalización II

Si ahora diferenciamos entre productos básicos y no básicos[222] como hace Sraffa, la ecuación de definición del sistema queda:

(22) $$P_N Y_N + PY = \left[LW + PX\right](1+G)$$

donde $\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{Y}_N$ son los precios y productos finales no básicos, con $\mathbf{1}\text{x}\boldsymbol{s}$ como la dimensión del vector de precios y $\boldsymbol{s}\text{x}\boldsymbol{n}$ como dimensión de la matriz no cuadrada bienes no básicos. El restos de las variables son las mismas que las vistas en la generalización anterior. De (22) se obtiene al hacer cero la matriz diagonal de tasas de salario $\boldsymbol{W}$:

(23) $$P_N Y_N + PY = PX\,(1+G_M)$$

De (22) y (23) sale como en el caso anterior:

(24) $$P = LW(1+G)(G_M - G)^{-1}X^{-1}$$

Y ahora entre las ecuaciones (23) y (24) sale:

---

[221] Y de la actual, como he demostrado en otra parte de este libro. La producción conjunta -es decir, la habitual- se ha relegado a las revistas especializadas y artículos que sólo sirven para obtener doctorados y aumentar el curriculum.

[222] Recordamos que vienes básicos son aquellos que entran como medio y como producto, minetras que los no básicos serían aquellos que se obtienen como producto pero que no se emplean como medio de producción. Podemos asimilar estos últimos a los bienes de consumo en la terminología actual. Valga esto como una primera aproximación, porque Sraffa en los capítulos sobre la producción conjunta se vio en la necesidad de especificar estos criterios.

$$(25)\qquad P_N = LW(1+G)(G_M - G)^{-1}(I + G_M - X^{-1}Y)Y_N^T(Y_N Y_N^T)^{-1}$$

En la (25) la única limitación -pero es importante- es la de que el rango de la matriz $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N}}$ sea menor o igual que el rango de $\boldsymbol{Y}$ para evitar combinaciones lineales dependientes que hagan incalculable la inversa de $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N}}$ por su traspuesta. Si comparamos la ecuación de precios de productos básicos en (24) con la de los no básicos en (25) vemos que estos últimos están sujetos a mayor variabilidad que los primeros merced al multiplicando implicado por la inversa de $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N}}$. Al igual que en (24) tampoco se pueden garantizar precios positivos, por lo que será el propio empresario quien, como dice Sraffa, tendrá que elegir los procesos que impliquen precios positivos. Es verdad que el italiano no contempla la posibilidad de las subvenciones. Lo que no cambia respecto al modelo simple y la generalización anterior es el aserto de que si las tasas de ganancia $\boldsymbol{G}$ se acercan a las tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}$, los precios aumentarían exponencialmente.

Anexo 17a

Tipos de ganancia máxima a partir de Sraffa

	sectores (productos)			sumas
$\boldsymbol{Y}$ =	6	3	3	12
	3	11	5	19
	3	5	10	18

	sectores (medios)			sumas
$\boldsymbol{X}$ =	2	3	7	12
	4	9	4	17
	7	1	6	14

inversa de X		
-0,166	0,037	0,169
-0,013	0,123	-0,066
0,196	-0,063	-0,020

	sectores			neto
(Y-X)I=	4	0	-4	0
	-1	2	1	2
	-4	4	4	4

	sectores				$\mathbf{G_m I}=X^{-1}Y\ \mathrm{I} - \mathrm{I_d}\ \mathrm{I}$
	-0,379	0,751	1,379	1,751	**75,08%**
$\mathbf{G_m=X^{-1}\,Y}$ =	0,090	0,980	-0,090	0,980	**-1,99%**
	0,927	-0,206	0,073	0,794	**-20,60%**
	0,638	1,525	1,362	3,525	**52,5%**
$\mathrm{I}x\mathbf{G_m}=\mathrm{I}\ X^{-1}Y - \mathrm{I}\ x\ \mathrm{I_d}$ =	**-36,2%**	**52,5%**	36,2%	52,5%	$\mathbf{I\ G_m I}$

Puede observarse en el ejemplo que aun cuando todos los sectores producen más de lo que gastan (neto), las tasas de ganancias máximas no necesariamente son positivas, aunque siempre lo sea la tasa general (**I*G*M I**=52,5%). La razón es la de que no sólo importa para el cálculo de la tasa de ganancia sectorial (***G*MI**) los sectores proveedores directos, sino los indirectos y las tasas de ganancia incorporadas a los precios de todos los sectores, directos e indirectos. Puede comprobarse también dando valores a la matriz de productos finales, que los resultados sectoriales (y global) de las tasas de ganancia máximas son iguales, tanto si estamos en la producción simple (matriz diagonal de ***Y***) como si estamos en la producción conjunta esrafiana (todos los elementos de ***Y*** tienen o pueden tener algún valor). Los resultados cambian si estamos en la producción conjunta no esrafiana (se diferencian en 2 matrices los bienes básicos de los no básicos). También puede comprobarse que si el producto neto es cero, es decir, que ***Y*I-*X*I=0**, las tasas máximas de ganancia valen cero (el total de las filas) de ***G*M*I*** valen cero, cosa que puede comprobarse en el siguiente cuadro:

Anexo 17b

Tipos de ganancia máxima a partir de Sraffa

	sectores (productos)			sumas
	12	0	0	12
Y =	0	17	0	17
	0	0	14	14

	sectores (medios)			sumas
	2	3	7	12
X =	4	9	4	17
	7	1	6	14

inversa de X		
-0,166	0,037	0,169
-0,013	0,123	-0,066
0,196	-0,063	-0,020

	sectores			neto
	10	-3	-7	0
(Y-X)I=	-4	8	-4	0
	-7	-1	8	0

	sectores			G_m I	$\mathbf{G_m I} = X^{-1}Y$ I - I_d I
	-1,993	0,621	2,372	1,000	**0,00%**
$\mathbf{G_m} = X^{-1}Y$ =	-0,159	2,090	-0,930	1,000	**0,00%**
	2,352	-1,073	-0,279	1,000	**0,00%**
	0,199	1,638	1,163	3,000	**0,0%**
$\mathbf{I}$x$\mathbf{G_m}$= I $X^{-1}Y$ - I x I_d =	-80,1%	63,8%	16,3%	0,0%	**I $\mathbf{G_m}$I**

Puede observarse en este anexo que si no hay producto neto, las tasas de ganancia máximas por bienes y servicios $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$**I** son cero y, por ello, cero la *tasa máxima de ganancia global* **I**$\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$**I**.

Anexo 18: Sobre la tasa máxima de ganancia y nuevo numerario

Hay una posibilidad de concretar la ecuación para el cálculo de la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_M$ al menos en la producción simple de Sraffa. Vamos a ver que depende de un detalle apenas sin importancia. Vamos a plantear el sistema de ecuaciones casi habitual de Sraffa

(1) $$PY=(1+r)PX+wL$$

(2) $$PY=(1+g_M)PX$$

(3) $$PYI=1$$

(4) $$LI=1$$

La diferencia con el sistema habitual es que hemos cambiado el numerario habitual ***PY*I-*PX*I=1** por el (3) . Ello va a impedir que la razón-patrón del sistema -que sigue existiendo porque es una propiedad de los supuestos sobre $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ están en (1)- coincida con la tasa máxima de ganancia. A cambio, resolviendo el sistema de ecuaciones planteado se obtiene:

(5) $$P=\frac{w}{g_M-r}\times LX^{-1}$$

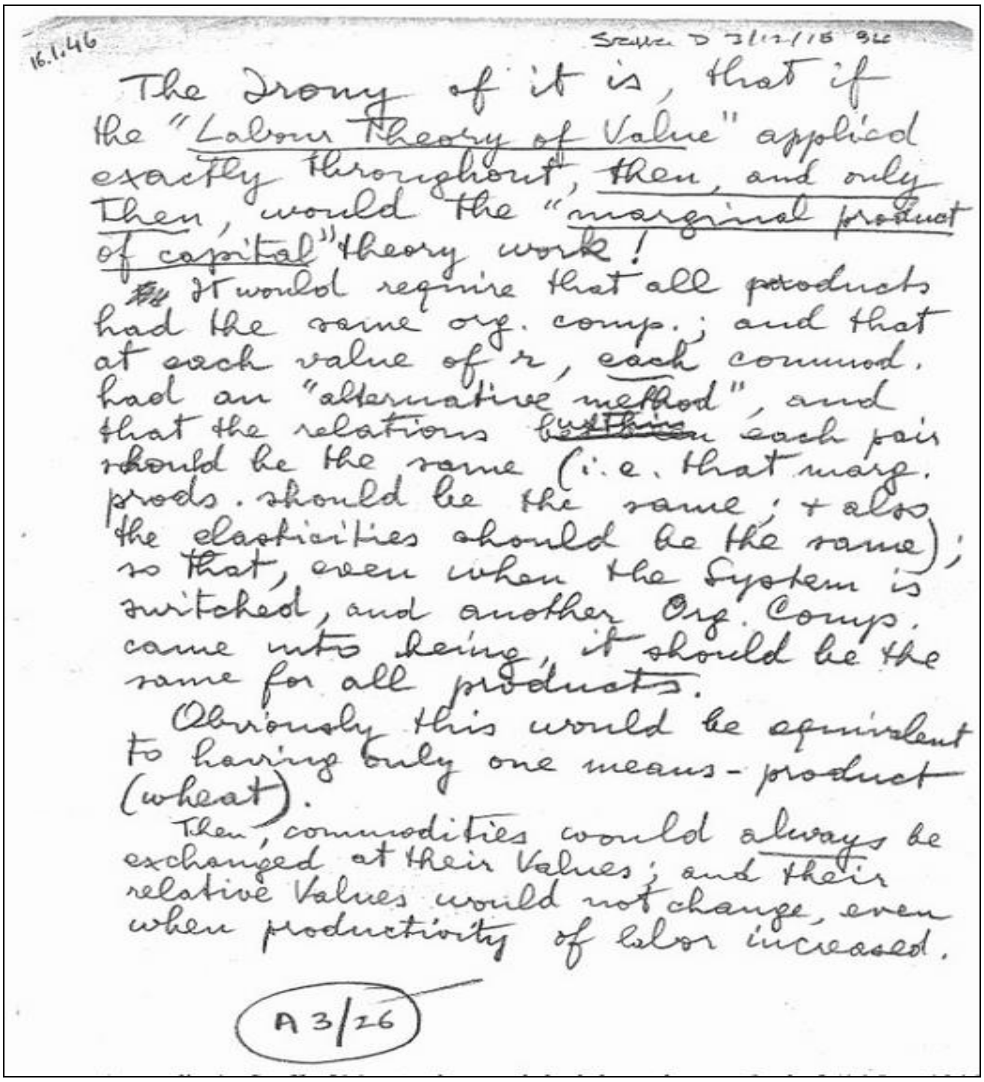
Del conjunto de los 4 sistemas de ecuaciones de definición del sistema sale la ecuación equivalente a la razón-patrón de Sraffa:

(6) $$w=\frac{g_M-r}{1+g_M}$$

Si la (5) la pos-multiplicamos por ***Y*I** y teniendo en cuenta que ***PY*I**=**1** de acuerdo con (3) y (6) queda:

(7) $$g_M=LX^{-1}YI-n$$

¡Y hemos hallado la tasa máxima de ganancia, que, como se ve en (7), es independiente de los precios! El vector de inputs de trabajo ***L*** sustituye al factor de proporcionalidad ***ñ*** de las ecuaciones (8) y (9), que no dejaban de ser unas conjeturas *ad hoc*, aunque con la lógica derivada del modelo de producción simple de Sraffa. Aquí no hay conjeturas. El problema es que el coste pagado para llegar a (6) ha sido muy alto: la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_M$ ya no coincide con la razón-patrón de Sraffa ***R***.



16.1.46

Sraffa D 3/12/15 36

The Irony of it is, that if the "Labour Theory of Value" applied exactly throughout, then, and only Then, would the "marginal product of capital" theory work!

It would require that all products had the same org. comp.; and that at each value of r, each commod. had an "alternative method", and that the relations ~~between~~ each pair should be the same (i.e. that marg. prods. should be the same; + also the elasticities should be the same); so that, even when the System is switched, and another Org. Comp. came into being, it should be the same for all products.

Obviously this would be equivalent to having only one means-product (wheat).

Then, commodities would always be exchanged at their Values; and their relative Values would not change, even when productivity of labor increased.

A 3/26

Cuadernos de Sraffa

Anexo 19: Sobre Perron-Froebenius y el teorema del punto fijo

Los tratamientos sobre el equilibrio general competitivo de *Debreu*, *Arrow* y *Hahn*, etc., suelen estructurarse de forma axiológica, enumerando las hipótesis formales para llegar a las conclusiones. Nada más alejado del interés de Sraffa. El italiano parte, camina y concluye en el mundo de las proposiciones económicas, aunque se tenga que atener a la disciplina de las matemáticas o, al menos, utilizarlas como mero instrumento, para no errar en las conclusiones. Ambos métodos tienen sus ventajas e inconvenientes, además de que siempre se ha de distinguir entre el método de investigación y el de exposición. Visto el desarrollo de su libro, Sraffa fue sacando a la luz sus conclusiones sin tener un conjunto axiomático de hipótesis que le iluminaran al final del túnel. Por eso tuve que rectificar, por ejemplo, su consideración sobre los bienes básicos y no básicos cuando abordó la producción conjunta y/o se vio contrariado con su propia definición cuando llegó a la producción conjunta, aún cuando ésta la tuviera *in mente* desde el principio. También demuestran estos avances y titubeos con las consideraciones en el *apéndice B* de su libro *Producción de mercancías por medios de mercancías* cuando convirtió -en mi opinión con acierto- en un apéndice lo que en un principio debía ser sólo una nota a pie de página. A pesar de ello, hay que agradecer a Sraffa que fuera mostrando sus resultados a medida que los descubría, porque ello ha resultado mucho más pedagógico. Ha sido y es una de las tareas de sus epígonos: matizar sus hipótesis si son incoherentes con sus fines, solucionar sus errores y desarrollar su obra. Lástima que esos desarrollo -aún muy insuficientes- no hayan llegado a los manuales universitarios de economía y sólo han quedado para tesis doctorales o artículos con los que aumentar algún currículo. Siguiendo con el contenido de lo que veníamos comentado, no tiene Sraffa un desarrollo axiomático que nos permita cerciorarnos de que su sistema parte, conduce y llega a un equilibrio, aunque no tenga sentido llamarle en principio *competitivo*. Mi opinión es que tampoco es incompatible con él, porque las cantidades de medios, productos e inputs de trabajo están dadas. De hecho sí se puede afirmar que Sraffa trabaja siempre -e incluso cuando reduce el capital a trabajo fechado- con un conjunto de ecuaciones que implican un equilibrio. Eso es notorio por dos cosas: 1) las variables *no* están fechadas; 2) el vector de precios de productos finales es el mismo que el vector de medios. Sin embargo, Sraffa ni siquiera hizo en su libro consideración o mención alguna al respecto, aún cuando los avances sobre los aspectos formales de los equilibrios competitivos se estaban produciendo al mismo tiempo que el desarrollaba su obra[223]. Las razones pueden ser varias, además quizá del desconocimiento que tuviera sobre estos tratamientos axiológicos. Una razón profunda es la absoluta diferencia que tiene la consideración de los precios entre los análisis mencionadas y lo que pretendía Sraffa: para los primeros, los precios son la guía de la asignación de los recursos y baremo de la escasez, mientras que para el italiano los precios son meros *coeficientes* de intercambio. Empleo el término *coeficiente*, consciente de que Sraffa no emplea un término ni parecido (podría ser *ratio*, por ejemplo), porque probablemente su temor a sufrir un rechazo -por si no bastaba ya el sufrido- por parte de sus compañeros de profesión que fuera total. Sraffa los llama *precios de producción*, a pesar de que no tiene una teoría de los costes ni trabaja con funciones de producción explícitas. En realidad el nombre le debió importar poco. El norte de Sraffa, como ya he señalado en otros artículos, era doble: el estudio del excedente y sus límites, y el mayor -y definitivo- ataque a la teoría de la producción neoclásica-marginalista. Sin embargo, al centrarse en estas dos cuestiones, creo que no se dio cuenta de que su modelo se acercaba a los desarrollos del equilibrio general de la época, que -y esta es una opinión muy personal- y compartía con ellos lo que supone un ataque a la teoría del capital y, en general, del mercado competitivo de la economía, por la necesidad de hacer explícitos los teóricos del equilibrio competitivo los supuestos vaporosos y paradójicos en los que se sustentaban la microeconomía de entonces (de *Marshall*) cuando se pasaba del análisis parcial al general. En concreto, Sraffa no menciona nunca nada referido al teorema de *Perron-Froebenius* y menos aún, claro, a los teoremas del punto fijo de *Kakutani*[224], que son básicos para modelizar los modelos de equilibrio competitivo. En el fondo es un mérito extraordinario del italiano y una muestra de su genialidad y confianza en sí mismo que, sin tener el báculo de las matemáticas que se desarrollaban en su época, pudiera culminar su obra y llegar a conclusiones económicas normalmente correctas y significativas.

Cuando Sraffa plantea la ecuación:

(1) $$PY = (1+R)PX$$

[223] Véase la Introducción histórica de la obra de Arrow y Hahn *Análisis General Competitivo.*
[224] *A generalization of Brouwer´s fixed-point theorem* (1941).

como hemos visto que surge a su vez de la ecuación de definición de su sistema al hacer cero la tasa de salarios, Sraffa está planteando una relación de equilibrio no demostrada, porque los precios son los mismos en el lado izquierdo de la ecuación (productos finales ***Y***) de los del lado derecho (medios de producción ***X***). Ya hemos comentado que las preocupaciones de Sraffa son otras, pero la visión actual, para poder propiciar el avance de sus modelos, deber ser también otra. Si llamamos como siempre ***A*** a la matriz de requerimientos tal que $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AY}$, por lo que $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$, la (1) se transforma en:

(2) $$P=(1+R)PA$$

Hemos visto que ***R*** surge de la resolución de un sistema de ecuaciones tales como $\boldsymbol{YQ}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{XQ}$ y $\boldsymbol{LQ}\mathbf{I}=\mathbf{1}$, siendo ***Q*** el vector $\boldsymbol{n}\text{x}\mathbf{1}$ de multiplicadores, por lo que $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{L},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$, y *no de los precios* ***P***. Si ahora reemplazamos los precios ***P*** de la ecuación (2) en el lado derecho de la misma ecuación de forma reiterada, llegaríamos a una función tal como:

(3) $$P=(1+R)^n PA^n$$

Esta aplicación transforma precios (el conjunto ***P***=dominio de definición de la aplicación) en $(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})^{n}\boldsymbol{PA}^{n}$ (conjunto imagen). Parecería que fuéramos bien para llegar al terreno del teorema de Kakutani, pero no es así porque dado que ***R*** ha de ser mayor que cero, el conjunto imagen es mayor que el conjunto dominio y todo se va al garete. Eso no ocurrirá si hacemos directamente que (2) sea:

(4) $$P=\frac{1+r}{1+R}PA$$

con tal de que $\boldsymbol{r}<\boldsymbol{R}$. Y tras sucesivas sustituciones de ***P***:

(5) $$P<=\left(\frac{1+r}{1+R}\right)^n PA^n$$

Se ha añadido la posibilidad del menor porque ello es imprescindible para aplicar Kakutani, por lo que (5) es una construcción (una aplicación) inspirada en (3), pero no deducida estrictamente de (3). Falta aún una cosa para acotar el conjunto de precios ***P***, objeto de la aplicación: dividir cada precio por la suma de todos ellos:

(6) $$P_{Fi} = \frac{P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

o en términos matriciales:

(6 bis) $$P_F = \frac{1}{PI} \times P$$

por lo que (5) quedaría:

(7) $$P_S <= \left(\frac{1+r}{1+R}\right)^k P_F A^k$$

Con (7) tenemos una posible aplicación que cumple el teorema de Kakutani si: $\boldsymbol{r}<=\boldsymbol{R}$, si $\boldsymbol{A}^{k+1}<\boldsymbol{A}^{k}$ para $\boldsymbol{k}=\mathbf{1}$ a $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{P}_{\mathrm{Fi}}>=\mathbf{0}$ para $\boldsymbol{i}=\mathbf{1}$ a $\boldsymbol{n}$. De (7) se puede decir que es una correspondencia continua (semicontinua por arriba) que proyecta puntos de un conjunto cerrado, acotado y convexo (los precios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{F}}$) en un subconjunto del anterior (los precios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}$), también convexo, tal que tiene un punto fijo[225], es decir, que ocurre que:

(8) $$P_F <= \left(\frac{1+r}{1+R}\right)^k P_F A^k$$

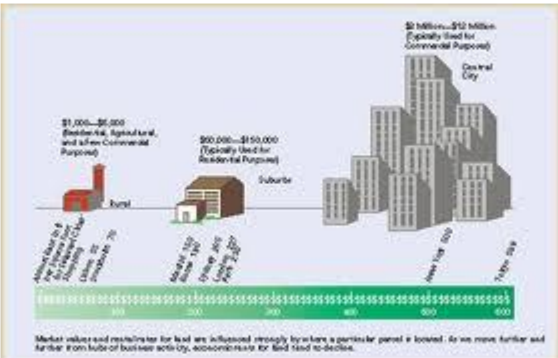
Dicho de otra manera, que existe un vector $\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}$ en la imagen del conjunto correspondiente mediante la transformación (7) que hace que $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{R}$, es decir, que $\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}= \boldsymbol{P}_{\mathrm{F}}$. Hay que demostrar rigurosamente que (7) es una aplicación continua, cerrada, acotada y convexa. Sólo unos apuntes al respecto. La aplicación es continua[226] si trabajamos con número

225 Para la definición de teorema del punto fijo véase la pág. 136 del libro anterior mencionado de Arrow y Hahn.

226 La condición necesaria -pero no suficiente- para que una función sea continua es que su dominio de definición y su imagen pertenezcan al conjunto de los números reales. Este hecho no se suele resaltar en los manuales de matemáticas, que suelen recaer la responsabilidad de la continuidad de las funciones en la forma de éstas.

reales para los precios y la función es continua; es acotada por (6), es decir, porque hemos tomado como numerario la suma de los precios originales, con lo cual la suma de los precios transformados en (6) vale **1**; es cerrada porque el signo de (7) es *menor o igual*, con lo cual todos los puntos de acumulación de $\boldsymbol{P}_F$ pertenecen al dominio de definición; por último es convexa porque una combinación lineal del lado derecho de la aplicación (7) pertenece a su vez al dominio de definición si la combinación lineal se hace con dos coeficientes tales como $\boldsymbol{m}$ y $\mathbf{1}$-$\boldsymbol{m}$, para $\boldsymbol{m}$ tal que $\mathbf{0} <= \boldsymbol{m} <= \mathbf{1}$.

Hay que pensar que no hubiéramos llegado a *Kakutani* si no hubiéramos partido de Perron-Froebenius para obtener un $\boldsymbol{R}$ independiente de los precios, lo cual implica que $\boldsymbol{A}$ ha de ser cuadrada, no negativa (al menos) e irreducible, con el añadido posterior que ha de ser productiva, es decir, que se cumpla que $\boldsymbol{A}^{k+1} < \boldsymbol{A}^{k}$ para obtener un conjunto de precios (autovector de $\boldsymbol{A}$) no negativo (versión débil del teorema).



renta diferencial

Anexo 20: una paradoja Samuelson-Sraffa

Uno de los artículos más famosos de Samuelson lleva el título en español de "*Parábola y realismo en la teoría del capital: la función de producción sustituta*"[227]. Samuelson, en vista de las críticas del Cambrigde inglés, con Robinson a la cabeza y Sraffa entre bambalinas, decidió reconstruir esta función de producción sin usar "*ningún concepto de capital agregado a la manera de Clark, sino sobre un análisis completo de numerosísimos bienes de capital físico*". Lo intentará mediante una llamada función de producción sustituta o subrogada construida a modo de metáfora o parábola, teniendo a mano el conjunto de técnicas o funciones de producción en un libro, una especie de *vademecum* de tecnologías de las que el empresario podría echar mano en cualquier momento. Si se supone, como hace Samuelson, proporciones fijas entre los factores, ambas condiciones determinan un conjunto de fronteras de producción a base de lineales rectas decrecientes en el espacio cartesiano de *salarios-ganancias*. Ello puede determinar un conjunto de puntos de corte, aunque no exista una relación biunívoca entre número de rectas y de cortes. Samuelson supone que una envolvente construida con estos puntos frontera se acercaría a una curva *isoproducto* de combinación de factores decreciente si estos puntos de corte son muy elevados, es decir, si el libro de las técnicas es abundante. Ha de suponerse un comportamiento empresarial que suponga que cuando está empleando una técnica, es decir, que la proporción en que emplea los factores es constante, se desliza por la recta correspondiente de frontera salarios-ganancia. Cuando llega a un punto de corte, al empresario le resulta indiferente en ese punto -pero sólo en ese punto- mantener la composición de factores y, por ello, seguir deslizándose por la misma recta, o bien puede ahora cambiar de técnica y lanzarse a una nueva experiencia con una combinación de factores distinta, pero que, a partir de entonces pueda, con el mismo nivel de salarios que pagaba antes, aumentar sus ganancias. Aparentemente puede hacerlo porque si notara que al cambiar de técnica no aumentara su nivel de ganancias con los mismos costes laborales anteriores, podría -esto es discutible- volver a la técnica anterior. Este comportamiento, junto a las proporciones fijas de factores para cada técnica, asegura según Samuelson una función de combinación de factores cóncava y decreciente, y con la que se podría comparar la restricción de costes y precios de los factores, para así

[227] *Parable and realism en the Capital Theory: The surrogate Production Function.* Publicado en 1961.

tener una forma de asignar factores según precios que suponga implícitamente una optimización de recursos. Esta es la idea de Samuelson si no interpreto mal su trabajo de 1961. Nada más agradable que rebatir a una inteligencia como la del más genuino representante de *la teoría de la síntesis*. En realidad representa la última trinchera, el último coletazo de la función de producción clásica. El artículo ha sido rebatido por muchos autores, entre otros por Pasinetti, Garegnani, Nuti, etc. Como este libro no intenta recopilar lo que otros han hecho, no diré nada de sus argumentos, pero intentaré ser lo más creativo posible para rebatir a Samuelson a partir de Sraffa. La paradoja que lleva el título del epígrafe se debe involuntariamente al mismo Sraffa. El italiano parte en su obra de la función de definición del sistema:

(1) $$PY=(1+r)PX+wL$$

Si ahora hacemos cero los salarios tenemos como siempre:

(2) $$PY=(1+g_M)PX$$

De (1) y (2) obtenemos:

(3) $$P=\frac{w}{g_M-r}\times LX^{-1}$$

Si ahora pos-multiplicamos (3) por y tomamos como numerario $\boldsymbol{PY}\mathbf{I}=\mathbf{1}$ y con $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{LX}^{-1}\boldsymbol{Y}\mathbf{I}$ queda

(4) $$w=\frac{g_M}{f}-\frac{1}{f}\times r$$

Y (4) es una *función lineal* que relaciona salarios con la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}$, con la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_M$ y con la función tecnológica $\boldsymbol{f}$, dependiendo estas últimas de ($\boldsymbol{L}$,$\boldsymbol{Y}$,$\boldsymbol{X}$) es decir, de los inputs de trabajo, de los productos finales y de los medios de producción. En definitiva, el sueño de Samuelson. Parecería pues que Sraffa ha facilitado el trabajo de Samuelson, lo cual sería no sólo una paradoja, sino un sarcasmo para las intenciones del genio italiano. Pero eso es porque hemos partido de la función (1) cuyo salarios se pagan *post-factum*. Si en lugar de eso se pagaran *pre-factum* la función (1), sin dejar de ser *esrafiana*, sería:

(5) $$PY = (1+r)\left[PX + wL\right]$$

y la ecuación equivalente a la (4) es ahora la (6):

(6) $$w = \frac{g_M - r}{(1+r)f}$$

que es una ecuación ¡convexa! porque su primera derivada es negativa, pero su segunda es positiva, es decir, es crecientemente decreciente. Si ahora confrontamos dos funciones de frontera de salarios como (6) que son a la vez dos funciones de producción queda:

(7) $$\frac{g_{M1} - r}{f_1} = \frac{g_{M2} - r}{f_2}$$

Y (7) representa los puntos de corte de dos funciones de producción convexas como (6). Estos pueden ser dos, uno o ninguno. Además, la envolvente de múltiples funciones de tipo (6) dará o podrá dar lugar a una función ¡convexa en lugar de cóncava!, es decir, lo contrario de lo que pretendía Samuelson con su función subrogada. Dos puntos de corte supone el retorno de las técnicas, porque si esta función representa el libro de la técnicas de Samuelson -y con toda justeza puede representarlo al tener productos, medios, inputs de trabajo, salarios y ganancias-, un empresario o gestor podría, por ejemplo, estar en una técnica para salarios altos; ir bajando estos hasta encontrar un punto de cruce, es decir, otra técnica del libro, cambiar de técnica, seguir bajando los salarios y volverse a encontrar con la técnica primera, todos ello con el fin de maximizar las ganancias. El recorrido puede ser el inverso. De (7) se despeja la tasa de ganancia ***r*** y queda:

(8) $$r = \frac{g_{2M} f_1 - g_{1M} f_2}{f_1 - f_2}$$

que nos los puntos de corte ante cualquier variación de ***L***, ***Y***, ***X*** a través de $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{f}_1$ y $\boldsymbol{f}_2$. Por supuesto si no se dan estas variaciones sólo hay un punto de corte, que es lo que indica (8). Para que la tasa de ganancia sea positiva en (8) ha de cumplirse:

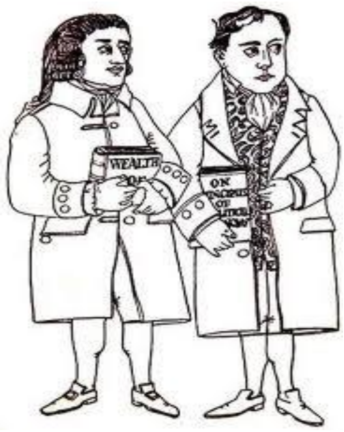
(9) $$\frac{g_{2M}}{g_{1M}} < \frac{f_2}{f_1} > 1$$

o bien que se cumpla:

(10) $$1 > \frac{f_2}{f_1} < \frac{g_{2M}}{g_{1M}}$$

Las inecuaciones (9) y (10) representan las condiciones para que haya al menos un punto de corte.

El sueño de Samuelson de la función subrogada se ha evaporado con solo pasar de los salarios *post-factum* a los salarios *pre-factum*. En verdad que la función subrogada de Samuelson era muy endeble.



Adam Smith y David Ricardo

De la mano de Sraffa: *aspectos destacados y marginalismo*

Sraffa abordó en su obra capital, *Producción de mercancías por medio de mercancías*, una economía en equilibrio donde las variaciones marginales no son significativas sino tan solo las relaciones intersectoriales, las posibilidades de producir un excedente y su reparto. Comenzó con la producción de subsistencia donde sólo se producía para reponer los medios de producción y los bienes de consumo de los trabajadores se integraban en los medios en "*pie de igualdad que el petróleo para las máquinas o los alimentos para el ganado*"[228]. A continuación pasó a la producción con excedente y con salarios y ganancias separadas de los medios de producción para estudiar el reparto del *producto neto*. Continuo con la reducción del capital a trabajo fechado, con la producción conjunta, con la separación entre bienes básicos y no básicos. Por el camino descubrió -creo que es más un descubrimiento que una invención- con la mercancía-patrón y la razón-patrón. Y acabó su obra con lo que se llama el problema de la elección de técnicas aunque el italiano tituló el capítulo donde trata el tema como el de "*los desplazamientos de los métodos de producción*" (cap. XII). Por el camino descubrió que tendría que modificar algún concepto, como por ejemplo la distinción primera y dicotómica entre bienes básicos y no básicos. Sin embargo, no dio en ningún momento un modelo síntesis de su obra o, al menos, de parte de ella. En este artículo se intentará dar un modelo sintético para valorar el alcance de sus hipótesis. Dejaremos fuera la reducción del capital fijo a trabajo fechado, pero tendremos en cuenta este capital. Veremos alguna sorpresa por el camino, pero la virtud de un modelo así es que podremos ver cada caso particular simplificando los supuestos, es decir, yendo de lo general a lo particular. En mi opinión la mayor limitación de la obra de Sraffa es el supuesto simplificador de la existencia de una sola tasa de ganancia y una sola tasa de salarios. Por supuesto que ello tiene su porqué. La principal razón -creo yo- de proceder así por parte de Sraffa era que su objetivo principal era un ataque -justificado y acertado- a la teoría del capital neoclásica y marginalista. Además, así de simplificados se presentaban los modelos marginalistas de la teoría del capital por parte de sus defensores. Tal es así que hasta Samuelson recurrió a una "*parábola*" para defender el modelo dominante del capital. Este modelo está hace tiempo hecho trizas por críticos contemporáneos de Sraffa como *Joan Robinson*,

---

[228] Pág. 25 de *Producción de mercancías por medio de mercancías.*

Kaldor, etc., además de Sraffa, claro está. Y posteriormente por *Pasinetti, Garegnani, Nuti*, etc. El costo que supuso para Sraffa fue centrar su obra en la construcción de un modelo genérico alternativo. Sraffa puso los ladrillos -lo cual es un mérito inmenso y genial- para construir modelos más cercanos a la realidad y más operativos. Los modelos de *Von Neumann* y de *Morishima* son claros ejemplos de ello, aunque no fueran estas las intenciones de estos autores. Lo que sigue es un modelo genérico inspirado en Sraffa y casi siguiendo su letra además de su música.

I-<u>Determinación de precios</u>

Pasaré a dar una ecuación que defina un sistema alentado -es mi intención- por el legado del economista italiano. Esta ecuación de definición del sistema sería (1):

$$\underset{1xr}{P_C}\,\underset{rxn}{Y_C}+\underset{1xs}{P_Y}\,\underset{sxn}{Y}+\underset{1xt}{P_X}\,\underset{txn}{X}=\Big[\underset{1xn}{L}\,\underset{nxn}{W}+\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X}+\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^{-1}-r}\times\underset{1xu}{P_U}\,\underset{uxn}{M}\Big]\times(\underset{nxn}{I_d}+\underset{nxn}{G})$$

En donde $\boldsymbol{P}_C$ es el vector $\mathbf{1}x\boldsymbol{r}$ de los precios de los bienes del consumo e $\boldsymbol{Y}_C$ la matriz $\boldsymbol{r}x\boldsymbol{n}$ de estos bienes; $\boldsymbol{P}_Y$ es el vector de precio de medios de producción nuevos que no existían anteriormente como medios e $\boldsymbol{Y}$ es la matriz $\boldsymbol{s}x\boldsymbol{n}$ de estos bienes; $\boldsymbol{P}_X$ es el vector $\mathbf{1}x\boldsymbol{t}$ de bienes de inversión que ya existían anteriormente pero a otros precios (aunque en algún caso puedan coincidir) y $\boldsymbol{X}$ son estos bienes, $\boldsymbol{L}$ es el vector $\mathbf{1}x\boldsymbol{n}$ de inputs de trabajo, $\boldsymbol{W}$ es la matriz diagonal $\boldsymbol{n}x\boldsymbol{n}$ de $\boldsymbol{n}$ tasas de salarios (donde cada elemento de la matriz $\boldsymbol{w}_{ij}=\mathbf{0}$ si $\boldsymbol{i}$<>$\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{P}$ es el vector de precios de medios de producción; $\{\boldsymbol{r}(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^n/\{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^n\text{-}1\}\}x\boldsymbol{P}_U=\boldsymbol{P}_M$ es la parte anual del vector de precios de medios de producción fijos, es decir, aquellos cuya vida es superior al período que indica la ecuación (1)[229] y $\boldsymbol{M}$ el conjunto de estos medios, y $\boldsymbol{G}$ la matriz diagonal de tasas de ganancia donde también $\boldsymbol{g}_{ij}=\mathbf{0}$ si $\boldsymbol{i}$<>$\boldsymbol{j}$. Por último, $\mathbf{I}_d$ es el vector diagonal de unos. Esta ecuación arranca de Sraffa, como queda dicho, pero tiene aspectos novedosos. Por el lado de los productos finales hablamos directamente de bienes de consumo $\boldsymbol{Y}_C$ aunque también lo podemos tildar de bien no básico porque no entra como medio de producción (no aparece en el lado derecho de la ecuación (1)). La

[229] Que podemos poner de forma convencional un año, pero que puede ser cualquier unidad temporal de medida que sirva para pasar de los medios de producción (lado derecho de (1)) a los productos finales (lado izquierdo).

novedad vendría con la matriz ***Y*** que representa el conjunto de productos finales que son medios de producción por sus características porque no satisfacen directamente las necesidades de los consumidores, pero son medios de producción de nuevo cuño, puesto que no aparecen en el lado derecho. No tendrían pues una separación dicotómica esrafiana de bienes no básicos y bienes básicos puesto que son lo primero porque no aparecen como medios en el lado derecho, pero son básicos porque son medios y no bienes de consumo final. Se ve que con esta ecuación la diferenciación *esrafiana* pierde sentido económico aunque Sraffa la mantuviera por su obsesión de trasladar a la producción conjunta *la mercancía-patrón*. En cambio la matriz ***X*** del lado izquierdo sería una matriz de medios ya producidos anteriormente y que se han repetido al menos en un proceso productivo (un año hemos puesto de tiempo convencional). Pero la novedad de estos medios está en los precios $\boldsymbol{P}_X$, que los hemos considerados distintos, puesto que no necesariamente van a tener que coincidir con los precios de un año antes aún cuando estemos en un economía de equilibrio en cuanto a la producción de bienes físicos. Ni que decir tiene que además estamos en la producción conjunta porque las tres matrices de productos finales no son diagonales, es decir, que pueden tener valor mayor que cero cada uno de sus elementos. En el lado derecho de la ecuación hay al menos dos cosas novedosas: 1) hemos generalizado la tasas de ganancia y de salarios a n tasas por mor del realismo; 2) tratamos los salarios *pret-factum*, incluidos los medios ***M*** *plurianuales*. Como este artículo no puede sustituir la lectura de la obra de Sraffa, es recomendable precisamente esta lectura para valorar justamente la generalización que se hace y, también, la que se deja por hacer (por ejemplo, la reducción a trabajo fechado). Sigamos. La segunda ecuación que vamos a emplear en lo que sigue es la derivada de (1) cuando se hacen cero los salarios. Con ello obtenemos una ecuación donde las tasas de ganancia son las máximas posibles puesto que entonces los propietarios de estas ganancias acaparan todo el excedente. Es una ecuación hipotética puesto que se supone que eso no va ocurrir nunca, pero es muy útil porque acota, define y nos entrega una nueva variable: las tasas máximas de ganancia por mercancías[230]:

[230] Podría decirse también que por sectores puesto que la matriz ***G*** es diagonal. Sin embargo no sería posible mantener esta conceptualización porque estamos suponiendo que nos movemos ya directamente en la producción conjunta. No obstante, una simplificación de este modelo genérico nos conduciría a la producción simple y entonces sería pertinente la identificación también de las tasas de ganancia

(2) $$P_C Y_C + P_Y Y + P_X X = \left[PX + P_M M\right] \times (I_d + G_m)$$

De acuerdo con (1) y (2) se obtiene una ecuación con los precios de los medios de producción:

(3) $$P = LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1} X^{-1} - P_M M X^{-1}$$

(4) $$P_Y Y + P_X X = PZ$$

La ecuación (4) es absolutamente novedosa porque jamás contempló algo así el gran economista italiano. Con (4) asimilamos los productos finales de medios de producción a una matriz de medios $\boldsymbol{Z}$ de dimensión $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ y con el mismo vector de precios $\boldsymbol{P}$ que los medios de producción. Ni que decir tiene que $\boldsymbol{Z}$ debe ser una matriz diagonal para que haya $\boldsymbol{n}$ incógnitas (filas de $\boldsymbol{Z}$) que ecuaciones ($\boldsymbol{n}$). La dificultad es resolver la ecuación para $\boldsymbol{Z}$, pero aquí sólo valoramos la posibilidad de existencia de una solución. Además, como luego veremos esta ecuación va a desaparecer en lo que sigue. Aún más sorprendente puede parecer la ecuación (5), pero es de lo más natural una vez que tenemos (4):

(5) $$PZ = (1 + R)PX$$

Si hacemos en (5) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}^{-1}$ lo que obtenemos es una ecuación como:

(6) $$\frac{1}{1+R} \times P = PA$$

que sería susceptible de aplicar el teorema de *Perron-Froebenius* si $\boldsymbol{A}$ fuera cuadrada (que lo es porque $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Z}$ lo son), no negativa y reducible. Sin embargo, estas dos últimas condiciones no las podemos asegurar porque tampoco podemos asegurar la no negatividad de la inversa de $\boldsymbol{Z}$ para llegar a $\boldsymbol{A}$. De no ser ello posible siempre nos queda la ecuación:

---

a cada sector porque en este modelo de producción cada sector sólo produce un producto.

(5 bis) $$PZ = PX\,(I_d + \underset{nxn}{R_n})$$

donde $\boldsymbol{R}_n$ sería una matriz diagonal de ***n*** tasas de ganancia derivadas *sólo* de los medios de producción de consumo anual (quedaría fuera ***M***) y de los productos finales que no son bienes de consumo (quedaría fuera $\boldsymbol{Y}_C$).

En cualquier caso, de (2), (3), (4) y (5) sale:

(7) $$P_C = \left[LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1}(G_m - R_n) + P_M M (I_d + R_n)\right] Y_C^T (Y_C Y_C^T)^{-1}$$

donde obtenemos los precios de producción de los bienes de consumo en un modelo de raíz *esrafiana* aunque con las derivaciones y generalizaciones comentadas. Suponemos que ***r***>***n*** para que las filas y columnas de $(\boldsymbol{Y}_C \boldsymbol{Y}_C^T)^{-1}$ no sean *colineales*. Si simplificamos los supuestos podremos ir obteniendo las ecuaciones que se derivan del libro de Sraffa. Por ejemplo, si omitimos los medios de producción plurianual ***M*** queda:

(8) $$P_C = LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1}(G_m - R_n) Y_C^T (Y_C\, Y_C^T)^{-1}$$

donde $\frac{dP_C}{dL} > 0\ ,\quad \frac{dP_C}{dW} > 0\ ,\quad \frac{dP_C}{dG} > 0\ ,\quad \frac{dP_C}{d(G_m - G)} < 0\ ,\quad \frac{dP_C}{d(G_m - R_n)} > 0$

Si eliminamos además los productos finales que no son bienes de consumo (bienes no básicos) como ***Y*** y ***X*** quedaría:

(9) $$P_C = LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1}(I_d + G_m) Y_C^T (Y_C\, Y_C^T)^{-1}$$

Y si en lugar de ***n*** tasas de ganancia en ***G*** y ***n*** tasas de salarios en ***W*** empleáramos una sola tasa de ganancia ***g*** y otra de salarios ***w*** como hace Sraffa saldría:

(9) $$P_C = \frac{w(1+g)(1+g_m)}{g_m - g} \times L\, Y_C^T (Y_C\, Y_C^T)^{-1}$$

Si además $\boldsymbol{Y}_C$ es cuadrada y del mismo rango que $\boldsymbol{X}$, es decir, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{n}$, lo que se obtiene es Sraffa con salarios *pre-factum*:

(10) $$P_C = \frac{w(1+g)(1+g_m)}{g_m - g} \times L\, Y_C^{-1}$$

Con salarios *post-factum*, es decir, *esrafianos*, da:

(11) $$P_C = \frac{w\,(1+g_m)}{g_m - g} \times L Y_C^{-1}$$

Y el modelo no se puede simplificar más porque nos quedaríamos en nada. Sin embargo, para algunas cosas son más valiosas el modelo simplificado que el generalizado. Por ejemplo, en (10) y (11) vemos que si la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$ se acercara a la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_m$, los precios de los bienes de consumo $\boldsymbol{P}_C$ tenderían a infinito. Esta ecuación es la semilla de una teoría de la inflación no monetaria que Sraffa puso en nuestras manos sin querer. De este conjunto de ecuaciones y sus derivaciones se puede estudiar la producción conjunta, la diferenciación entre bienes básicos y no básicos, la producción con bienes plurianuales, la frontera de salarios-ganancias, la elección de técnicas, etc., yendo siempre de lo complejo a lo simple.

II-La frontera salario-ganancia y función de producción

Un caso de estudio a partir de las ecuaciones de Sraffa es la frontera salario-ganancia y la función de producción. Los neoclásicos confiaron en la posibilidad de construir una frontera cóncava y continua en el espacio $\boldsymbol{w}$-$\boldsymbol{g}$ tal que su pendiente fuera igual a la relación de precios de ambos factores que surge de la restricción de recursos. La cosa no ha sido sostenible y ahora ese pensamiento no tiene una teoría de la distribución válida y coherente a pesar de que en los manuales universitarios se siga explicando. Vamos a ver que con las ecuaciones se puede obtener esta frontera de forma natural. Iremos como antes de lo general a lo particular. Obtuvimos antes la ecuación que relaciona los precios de los medios de producción anuales ($\boldsymbol{X}$) y plurianuales ($\boldsymbol{M}$) tal como:

(3) $$P = LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1} X^{-1} - P_M M X^{-1}$$

Pues bien, esta ecuación representa -o puede representar- un mundo económico de inspiración *esrafiana* multidimensional donde cada una de las columnas de ***X***, de ***M*** y de ***L*** representan un espacio ***n*** dimensional, por lo que el conjunto de ellas dan lugar a un espacio $\boldsymbol{n}^3$ dimensional. Este es *el espacio tecnológico y organizativo* en el que se mueve la economía representado por la ecuación (1) de definición del sistema. En un mundo así, las ***n*** tasas de ganancia ***G*** y las ***n*** tasas de salario ***W*** han de moverse libremente, pero acotados por ese espacio multidimensional que representa (3). Los ***n*** precios ***P*** son los mecanismo de ajuste que deben permitir hacer cumplir (3) contando con que estos precios han de se no negativos. Los precios $\boldsymbol{P}_M$ de los bienes plurianuales los consideramos meros datos en este contexto. Este es el espíritu *esrafiano* aplicado a este modelo: primero, los comportamientos empresariales, modificando ***L***, ***X*** y ***M***, deben llevar a que estos precios sean positivos sin que el modelo pueda asegurarlo por sus aspectos formales; segundo, no debe haber determinismo tecnológico en el cálculo de las tasas de ganancia y de salario, porque estas vienen determinadas por las relaciones sociales, los intereses particulares y colectivos o la lucha de clases, etc. (según criterios ideológicos o mejor sociológicos). Lo que hace Sraffa es acotar los límites entre los que se mueven salarios y ganancias (dentro del excedente). Dos opciones tecnológicas representadas por (3) serían equivalentes si el vector de precios ***P*** para ambas son el mismo, por lo que se cumplirá (12):

$$P = L_1 W(I_d + G)(G_{m1} - G)^{-1} X_1^{-1} - P_{M1} M_1 X_1^{-1} = L_2 W(I_d + G)(G_{m2} - G)^{-1} - P_{M2} M_2 X_2^{-1}$$

Esta conjunto de ***n*** ecuaciones dan o pueden dar lugar a ***n*** pares de soluciones $\boldsymbol{g}_i$ y $\boldsymbol{w}_i$ distintas y reales tales que satisfagan (12). Pero visto así no es fácil adivinar la forma que tendrá la función implícita (12) entre ***G*** y ***W***. Vamos a simplificarla en dos pasos. En primer lugar llevaremos el espacio de dimensiones $\boldsymbol{n}^3$ de (3) a otro $\boldsymbol{n}^2$ haciendo cero los precios $\boldsymbol{P}_M$, porque los bienes plurianuales no van a jugar ningún papel en lo que sigue. No hemos querido complicar más la cuestión, pero hubiéramos podido porque $\boldsymbol{P}_M\boldsymbol{M}$ representa el valor actualizado de los bienes plurianuales, y en eso interviene la tasa de interés ***r***. Si esta tasa la hacemos coincidir con la tasa de ganancia ***g*** del sistema (cosa que hace Sraffa), el modelo se complica extraordinariamente y ello exige un estudio pormenorizado de estos bienes que hemos llamado *plurianuales* y que Sraffa los llama de capital fijo[231], cosa habitual en su época. Hecho esto, la ecuación (12), que ya podemos llamarla ecuación *precios/salarios/ganancia*, se convierte en:

(13) $$P = LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1} X^{-1}$$

Si ahora pos-multiplicamos (13) por ***YI*** y tomamos como numerario ***PYI***=**1**, queda:

(14) $$1 = LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1} X^{-1} YI$$

En (14) ya es claro que entre las tasas de ganancia y las tasas de salario va a existir una relación inversa, por lo que ya podemos llamar a (14) como *la ecuación frontera-salario*, ya sin los precios porque al tomar ***PYI*** como numerario hemos reducido en ***n*-1** dimensiones la múltiple dimensión $\boldsymbol{n}^3$ de (13). Pero de (14) surge algo que ni Sraffa ni sus epígonos han visto:

(15) $$w_{pf} L = LW$$

En efecto $\boldsymbol{w}_{\mathrm{pf}}$ será una solución Perron-Froebenius si ***W*** es una matriz *cuadrada* (lo es por hipótesis, puesto que es diagonal), *no nega*tiva (los salarios son positivos por hipótesis) e *irreducible* (lo son todas las matrices diagonales con valores cero en los elementos que no están en la diagonal principal y con valores mayores que cero en la diagonal principal). ***L*** será por tanto el autovector de inputs de trabajo. Entre (14) y (15) sale:

(16) $$\boxed{w_{pf} = \frac{1}{L(I_d + G)(G_m - G)^{-1} X^{-1} YI}}$$

Parece claro en (16) la relación inversa entre $\boldsymbol{w}_{\mathrm{pf}}$ y las tasas de salario de ***G***, pero aún lo será más si lo simplificamos haciendo $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$=$\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$, es decir, tomando una tasa de ganancia máxima media $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ representativa del conjunto de las tasas de ganancia $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$; de forma análoga con ***g*** y ***G***, y queda:

[231] *Fixed capital.*

(17) $$\boxed{w = \frac{g_m - g}{(1+g)LX^{-1}YI}}$$

En (17) la primera derivada respecto a ***g*** es negativa (función decreciente), pero la segunda es positiva (función decrecientemente creciente), por lo que esta función salario-ganancia[232] -ya en un espacio bidimensional (***w-g***)- es ¡convexa! Con ello el sueño neoclásico de una función cóncava (en forma de ***U*** hacia el origen) se ha desvanecido ante el pleno sentido común de Sraffa. Y si ahora quisiéramos construir la *función subrogada* de Samuelson con su parábola[233] y todo, en lugar de minimizar costes con la función de restricción y la función de producción derivada de (17), lo que haríamos sería ¡maximizarlos!, puesto que (17) -que es también una función de producción porque intervienen ***L***, ***X*** e ***Y***- podría dar lugar a una función ¡convexa! como resultado de los posibles puntos de intersección de ***n*** funciones convexas tipo (17).

III-<u>Estimación de la tasa máxima de ganancia</u>

Hasta ahora hemos trabajado con una variable -además de otra- un tanto *sui generis* que es la tasa máxima de ganancia, bien en la versión de múltiples tasas de ganancia $\boldsymbol{G}_m$ o de una sola tasa de ganancia. Esta tasa es la razón-patrón ***R*** de Sraffa si nos quedamos sólo en la producción simple. Pero este modelo es en exceso simplificado, por lo que en general no recurriremos a esta razón-patrón. La ventaja de esta razón es que se puede calcular a partir de ***Y***, ***X*** y ***L*** sin que intervengan los precios con la ayuda inestimable de Perron-Froebenius. En cambio, la ganancia máxima ha de obtenerse teniendo en cuenta los precios. Otra cosa será su posible estimación. Existen al menos dos métodos. De ellos uno se puede decir que está implícito en el *apéndice B* sobre *las habas*, porque Sraffa hace el supuesto de que una ganancia que se eleva -por efecto, por ejemplo, de una bajada de los salarios- puede originar un aumento del precio final de un sector que autoabasteciera "*en un grado desusadamente grande*"[234]de esa misma mercancía. Traemos aquí la ecuación (11):

---

[232] la tasa de salarios $\boldsymbol{w}_{pf}$ determinada por (15) ya no es fija porque en (17) no podemos aplicar Perron-Froebenius (en este caso ¡afortunadamente!), por lo que la hemos llamado en esta última ecuación ***w*** para evitar cualquier pérdida de generalidad.

[233] *Parable and Realism in Capital Theory: The surrogate Production Function*, 1961.

[234] Pág. 125 de *PMPM.*

(11) $$P_C = \frac{w\,(1+g_m)}{g_m - g} \times L Y_C^{-1}$$

Vemos en 11 que si ***g*** tiende a ***g***m los precios tienden a más infinito, para pasar a menos infinito con un aumento infinitesimal de ***g***. Por ello una forma de estimar ***g***m sería mediante el método de prueba y error aplicado a (11). Pero en este caso la forma de la estimación depende del resto de las variables monetarias. Buscamos en cambio una medida o estimación de la tasa máxima de ganancia que sólo dependa de las variables no monetarias ***L***, ***X*** e ***Y***. Para ello traemos ahora a colación la ecuación (13):

(13) $$P = LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1} X^{-1}$$

que determina los precios ***P*** de los medios de producción ***X*** independientemente de los productos finales. Ahora nos vamos a una ecuación de definición del sistema en la que sólo hay productos finales ***Y***, bien sea de producción simple (***Y*** diagonal) o no lo sea. Esta ecuación sería:

(14) $$PY = \left[LW + PX\right](I + G)$$

Si despejamos los precios P de (14) queda:

(15) $$P = LW(I + G)\left[Y - X(I_d + G)\right]^{-1}$$

Si ahora contemplamos (13) y (15) vemos que tiene dos multiplicandos iguales que son ***LW*** y (**I**d+***G***). No se deduce de ello pero podemos conjeturar la siguiente relación de proporcionalidad ***ñ*** entre el resto de los multiplicandos:

(16) $$\left[Y - X(I_d + G)\right]^{-1} = \tilde{n}\,(G_m - G)^{-1} X^{-1}$$

Si en (16) tomamos inversas en ambos términos, trasponemos y simplificamos queda:

(17) $$G_m = \frac{\tilde{n}-1}{\tilde{n}} \times G + \frac{1}{\tilde{n}} \times (X^{-1}Y - I_d)$$

Si en (17) las tasas de ganancia ***G*** se hacen cero o bien el factor de proporcionalidad ***ñ*** vale **1**, las tasas de ganancia máximas ***G***m dan en ambos casos:

(18) $$\overline{G}_m = \frac{1}{\tilde{n}} \times (X^{-1}Y - I_d)$$

En (17) aún vemos la relación entre las tasas de ganancia máximas ***G***m y las tasas de ganancia ***G***; en (18) estas tasas máxima ya dependen sólo de valores físicos como ***X*** y ***L***. En (18) aún tenemos ***n*** tasas máximas, pero si *pre-multiplicamos* por el vector de unos **1**x***n*** y por el vector también de unos de dimensión ***n***x**1** daría lugar a un escalar, es decir, a una sola tasa de ganancia máxima del sistema.

(19) $$I_h \overline{\overline{G}}_m I_v = \frac{1}{\tilde{n}} \times (I_h X^{-1} Y I_v - n)$$

Pueden estimarse tasas máximas de ganancia por sectores (en la producción simple) o por mercancías (en la conjunta) *pos-multiplicando* sólo por el vector de unos **I**v:

(20) $$\overline{G}_m I_v = \frac{1}{\tilde{n}} \times (X^{-1} Y I_v - I_v)$$

Una estimación de este tipo sería muy útil en el reparto negociado del excedente entre trabajadores y empresarios en las negociaciones (colectivas, generales), porque arrancaría de las posibilidades objetivas de la economía para el reparto del excedente.

IV - Elección de técnicas

Parte Sraffa de una gráfico como el que sigue que relaciona el precio de una mercancía básica con su tasa de ganancia. No dice Sraffa como obtiene el gráfico, pero en todo caso creo que es un error.

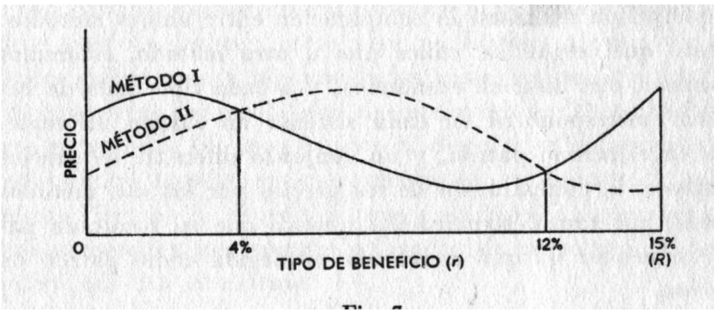


gráfico del libro de Sraffa *Producción de mercancías por medio de mercancías*
(pág. 115 de la edición de Oikos-Tau)

Como quiera que nos vamos a centrar en las mercancías básicas, es decir, aquellas que entran a la vez como medios de producción y como medios, vamos a partir de una ecuación que relaciona los precios de estas mercancías con sus tasas de ganancia, pero omitiendo el resto de las mercancías no básicas, como son la de los bienes de consumo $\boldsymbol{Y}_C$, la de productos finales que son nuevos medios de producción y también los bienes plurianuales ***M*** que no son en ningún caso productos finales. Por todo ello recurrimos a esta ecuación de definición del sistema *esrafiano* de bienes básicos pero generalizado:

(21) $$P_Y Y = \left[LW + PX \right] \times (I_d + G)$$

Los precios de los productos finales ***Y*** suponemos que son los mismos que los de los medios de producción ***X***, porque estamos en *reproducción sin acumulación* y los precios son representativos de un sistema en equilibrio y estático, por lo que $\boldsymbol{P}_y = \boldsymbol{P}$. Despejando los precios de (21) y con la consideración anterior queda:

(22) $$P = LW(1+G)\left[Y - X(I_d + G) \right]^{-1}$$

Y (22) es la relación generalizada para n tasas de salario (y salarios pre-factum) y ***n*** tasas de ganancia entre precios ***P*** y estas tasas ***G***. En esta ecuación es difícil ver porqué no puede ajustarse la ecuación al gráfico de Sraffa y que también recoge Pasinetti[235]. Se ve mejor si pasamos del modelo general de (22) a otro donde haya una sola tasa de ganancia ***g*** (una especie de media) y una sola tasa de salarios ***w*** (también una especie de media). De ello sale (23):

[235] Pág. 200 de *Lecciones de la teoría de la producción*, FCE, 1983 {*Lezioni di teoria delle produzione, 1975*}

(23) $$P = w(1+g)L\left[Y-(1+g)X\right]^{-1}$$

Y si en (23) sustituimos ***X*** por ***X***=***AY***, siendo ***A*** la matriz de requerimientos del sistema y tal que ***A***=***XY***$^{-1}$, operamos y obtenemos:

(24) $$\frac{P}{w} = (1+g)LY^{-1}\left[I_d-(1+g)A\right]^{-1}$$

Y si suponemos que ***A*** es *cuadrada* (por hipótesis), no *negativa* (por hipótesis en la producción compuesta, por ser ***Y*** diagonal en la producción simple) e *irreducible o reducible* (condición *ad hoc*); si además ocurre que ***A*** es *productiva*, es decir, que ***A***^{k}>***A***$^{k+1}$, entonces se cumple el teorema de Perron-Froebenius, en el que uno de los corolarios permite afirmar que lo que hay entre corchetes en (24) es monótono creciente. De ello se deriva que el gráfico que hemos recogido de Sraffa no representa *la relación precios en términos de salario y tasas de ganancia*.

Y ahora viene la cuestión del cambio de técnicas o el desplazamientos de métodos de producción que es como titula Sraffa a este hecho. Dado que dos funciones del tipo (24) son ambas monótonas crecientes y positivas en el cuadrante cartesiano para ***P***/***w*** y ***g*** positivos, ambas funciones se pueden cortar a los sumo dos veces, o bien una, o ninguna. El punto de corte en el eje ***P*****/w** se producirá cuando la tasa de ganancia valga cero y será:

(25) $$\frac{P}{w}(g=0) = LY^{-1}\left[I_d - A\right]^{-1}$$

Cuando dos funciones del tipo (24) se corten será cuando los precios en relación a los salarios coincidan, de tal forma quedará que:

(26) $$L_1Y_1^{-1}\left[I-(1+g)A_1\right]^{-1} = L_2Y_2^{-1}\left[I-(1+g)A_2\right]^{-1}$$

que es una función implícita en ***g*** de grado n. En principio puede haber ***n*** soluciones de ***g*** que satisfagan (26), pero dada la forma de la función original que hemos comentado (monótona creciente) sólo puede haber dos soluciones reales no repetidas que se corresponden con el número máximo de puntos de corte para una función así. De haber dos puntos de corte, el gestor de la empresa que tiene a mano las dos técnicas (o mero cambio de organización) puede pasar primero de la 1 a la 2 y cuando se vuelvan a cortar, retornar a la 1. La condición necesaria y suficiente para que haya dos puntos de corte es la de que la relación de los precios/salario de una de ellas (la 1, por ejemplo), comience para tasa de ganancia baja por debajo de la misma relación que la técnica 2, pero que en cambio su tasa de crecimiento resulte más alta durante un trecho que la 2; en cambio, a partir de un cierto valor de esta tasa de ganancia, ha de ocurrir que la tasa de crecimiento de la 1 resulte más alta que la 1. Cosa distinta es que se produzca alguna variación en la variables no monetarias ***L***, ***X*** e ***Y***. En ese caso lo que se producirá un desplazamiento de la función (24), que junto con los posibles cortes de otra función desplazada o no, puede dar ya más de dos puntos de corte. Si estos desplazamientos son muy variados para las funciones y el libro de las técnicas (a la manera de Samuelson) es amplio, entonces cualquier envolvente de esos puntos de corte es posible, pudiendo ser el resultado (la envolvente) creciente, decreciente, y con cambio de convexidad. Creo que Sraffa no distinguió en su libro entre deslizamiento y desplazamientos de las funciones que estaban implícitas en sus razonamientos. Sin embargo estos defectos son subsanables. Hasta los genios cometen errores.

V - Distribución esrafiana versus distribución marginalista

Traemos a colación la función esrafiana más simple que relaciona precios de los bienes básicos con salarios para poder así compararla con uno de los paradigmas de la distribución del marginalismo. Se trata en cualquier caso de un análisis limitado y con un alto grado de abstracción. Aún así o quizá por ello, se verá las diferencias. La ecuación (11) con los precios en términos del salario queda:

(27) $$\frac{P}{w} = \frac{(1+g_m)}{g_m - g} \times L Y^{-1}$$

Para el marginalismo, el precios de los factores dependen de su supuesto valor de su *sola* productividad tal como:

(28) $$w = P \times \frac{dY}{dL}$$

Ha de suponerse que la derivada de la ecuación (28) surge de una función de producción del tipo $\boldsymbol{Y}=f(\boldsymbol{L},\boldsymbol{X})$, donde, al igual que en Sraffa, $\boldsymbol{L}$ son los inputs de trabajo y $\boldsymbol{X}$ es el capital (medios de producción). El paradigma marginalista supone que la productividad marginal física que supone $d\boldsymbol{Y}/d\boldsymbol{L}$ es decreciente. Esta interpretación arranca de Ricardo; mejor dicho, arranca de una de las formas en que trata Ricardo la renta diferencial de la tierra: una intensiva y otra extensiva. Leyendo la obra de Ricardo a mí no me cabe duda que la correcta es aquella en la que la renta de la tierra se produce por las diferentes calidades de la tierra y no por el uso intensivo de tierras de la misma calidad. Pero el marginalismo construyó su modelo arrancando de esta última y generalizándolo para todos los factores (es decir, para el trabajo y el supuesto capital). Y con ello y los teoremas del punto fijo se llega -no fácilmente, desde luego- a la teoría del equilibrio general competitivo. Retornando a la comparación de la formación del salario en uno y otro modelo, despejamos aquel de (27) y queda:

$$(29) \qquad w = P \times \frac{g_m - g}{(1+g_m)\,LY^{-1}}$$

Veamos las diferencias de obtención de los salarios entre el modelo marginalista (28) y el modelo esrafiano (29): 1) En el modelo marginalista los salarios decaen con la productividad marginal porque se supone que existe esa relación en la función de producción $\boldsymbol{Y}=f(\boldsymbol{L},\boldsymbol{X})$; no ocurre lo mismo en la función de salarios (29), donde la relación entre $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{LY}^{-1}$ es proporcional, con un factor de proporcionalidad tal como $(\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}-\boldsymbol{g})/(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}})$ que no aparece en la función de salarios marginalista; 2) en la proporción antes comentada interviene la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$ y lo que hemos considerado y deducido como tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$. Ello supone una riqueza conceptual incomparable a favor del modelo *esrafiano*, porque nos viene a decir que además de la linealidad entre salario y productividad ($\boldsymbol{LY}^{-1}$), los salarios aumentan si: aumenta la tasa de ganancia máxima, si disminuye la tasa de ganancia aplicada (obtenida del conjunto del modelo) y si aumenta también la diferencia entre tasa máxima $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ y tasa aplicada $\boldsymbol{g}$. De nada de eso obtenemos con el criterio marginalista; 3) si la tasa de ganancia aplicada llegar a la tasa máxima de ganancia los salarios serían cero y las empresas y empresarios se quedarían con todo el excedente; 4) también, y por último, nos dice que si aumenta la tasa máxima de ganancia g_m *per se*, aumentarán los salarios pero de una forma crecientemente decreciente.

Otra comparación es lo que ocurre con el modelo de distribución en su conjunto. En el modelo marginal, la distribución de los factores del producto final se supone que se puede *modelizarse* con la función:

$$Y = L\frac{dY}{dL} + X\frac{dY}{dX} \tag{30}$$

La (30) supone que todo el producto ***Y*** se distribuye totalmente entre los factores en función de sus productividades y no queda ningún resto. Ello supone una limitación porque (30) lleva implícito una función homogénea *euleriana* de primera clase. No obstante, aquí la comparación con la visión *esrafiana* queda en un empate porque el modelo del italiano lleva implícito rendimientos constantes, aunque Sraffa dejara a la libre interpretación de cada lector de su obra este hecho. He omitido la *Tierra* como factor, pero podría añadirse sin aumentar o perder generalidad por ello. Con la ecuación (28) del valor de la productividad del trabajo y otro tanto equivalente de la productividad del capital (medios de producción) se obtiene la función de precios:

$$P = w\frac{L}{Y} + g\frac{X}{Y} \tag{31}$$

Si comparamos con la función de precios surgida de la ecuación de definición del sistema *esrafiano*:

$$P = w(1+g)LY^{-1}\left[I_d - (I_d + g)A\right]^{-1} \qquad \text{con } \boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1} \tag{32}$$

obtenemos las siguientes diferencias; 1) los precios marginalistas son proporcionales al salario, al igual que en el modelo esrafiano; 2) no ocurre así en el modelo esrafiano porque la relación con las ganancias ***g*** es mucho más complicada, aunque es creciente, dado que aparece en el paréntesis (**1**+***g***) y además en la inversa de la expresión entre corchetes de (32). Por Perron-Froebenius sabemos que todos los valores dentro del mismo crecen continuamente si ***A*** es cuadrada, no negativa, irreducible y productiva (esta condición es aparte del teorema). Pero la complicación es grande porque esa expresión es un polinomio en grado $\boldsymbol{n}$ de $\boldsymbol{g}$, pudiendo cambiar de convexidad por el factor que es la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}^{k}$, siendo $\boldsymbol{k}$ un período cualquiera; el papel que juegan los inputs de trabajo $\boldsymbol{L}$ y los medios de producción (capital) $\boldsymbol{X}$ es mucho más complejo en el modelo *esrafiano* que en el marginalista debido a los cambios bruscos e imprevistos de la matriz de requerimientos. Y ello será más notable si no estamos en la producción *simple esrafiana* ($\boldsymbol{Y}$ diagonal) sino en la producción *conjunta esrafiana* ($\boldsymbol{Y}$ ya no sería sólo diagonal, sino que podría tener valores positivos en todos sus elementos). El resultado es que pudiera haber, además de cambios bruscos, precios negativos como resultado de (32). Pero ello es natural en el modelo *esrafiano*, que responde mejor a la realidad: si como consecuencia de una determinada tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$ y de precios de la competencia impuestos por el sistema, un sector no pudiera vender su/s mercancía/s a unos precios que superaran sus costes, ese sector, o se le subvenciona o desaparece (véase ejemplos como el del carbón o de algunos productos agrícolas). Nada de esto es posible en el modelo marginalista; 3) en el modelo marginalista, con su matemática continua no admite cambios bruscos ni en la producción ni en la retribución de sus factores; en el modelo *esrafiano* estos pueden ser importantes; 4) el modelo marginalista surge del análisis parcial que puso de moda Marshall, mientras que el modelo *esrafiano* es intersectorial, tiene en cuenta el conjunto de la economía, todos sus sectores y todos los bienes y servicios producidos para determinar precios, salarios y ganancias. En cambio el modelo marginalista toma los precios como datos (sobre todo si el modelo responde a una empresa que trabajara en un mercado de competencia perfecta) y no se preocupa de la relaciones intersectoriales. Ello empobrece y dificultad la construcción de un modelo más generalista sin llegar a la trivialidad de que todo depende de todo; 5) el modelo marginalista responde a la concepción de la economía de Joan Robinson como *una caja de herramientas*, un instrumental que ha de aplicarse a las situaciones reales. Pero eso mismo es negar la posibilidad de construir una economía con marchamo de ciencia. En el fondo es el reconocimiento de un fracaso. En el modelo *esrafiano* las dificultades no son pequeñas, pero se acerca a la realidad casi cuanto se quiera porque su instrumental matemático es prácticamente el mismo que el de las tablas input-ouput. Además le dota de conceptualizaciones como el *excedente, la razón-patrón, la mercancía-patrón,* la diferenciación entre *bienes básicos y no básicos, la producción* *conjunta, el autoabastecimiento*, etc. El modelo marginalista intenta llegar a consideraciones generales mediante los dos teoremas del bienestar, enlazando el equilibrio competitivo con las condiciones de Pareto, pero la realidad tumba continuamente el modelo como son *los rendimientos crecientes, los efectos externos, la información asimétrica, los monopolios, oligopolios, los bienes públicos,* etc.

VI - Asignación de recursos en Sraffa y en el marginalismo

Dejando aparte los dos magníficos artículos que escribió Sraffa -y en especial el dedicado a los rendimientos constantes- nada parece deducir de su libro Producción de mercancías por medio de mercancías algún interés sobre las teorías del mercado. El italiano centraba su ataque a la teoría del capital y la parte constructiva se refería a la determinación del excedente y su reparto. No obstante, como *caja de Pandora*, abierta la crítica surge de sus consecuencias otras posibilidades insospechadas. La teoría de los mercados marginalista basa la formación de los precios y asignación de recursos -esta es su preocupación- en el paradigma *smithiano* de "*buscando el interés particular se consigue el general*". Aunque históricamente eso no está probado sino más bien lo contrario -véase la actual crisis-, los neoliberales no se han bajado de ese caballo por más que descabalgue una y otra vez. Buscar el interés particular se traduce en el comportamiento empresarial de maximizar el beneficio. Este puede ser representado mediante una función del tipo:

(33) $$Beneficio = Ingresos - Gastos = p(Y) \times Y - C(Y)$$

donde $\boldsymbol{p}$ es el precio dependiente de la cantidad (demanda) $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Y}$ la cantidad producida y $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ la función de costes. Esta ecuación tiene dos importantes limitaciones: 1) el precio y la cantidad son escalares; 2) no se especifica la forma concreta de la función de costes, ni la relación de estos directamente con los factores (medios de producción). Lo primero puede arreglarse tomando los precios como un vector $\mathbf{1}\text{x}\boldsymbol{n}$ y las cantidades como otro vector $\boldsymbol{n}\text{x}\mathbf{1}$. Se supone también que entre productos finales y factores (medios) existe una relación funcional de causa y efecto genérica tal como:

(34) $$Y = f(L, X)$$

Volviendo a Sraffa, partimos de la ecuación de definición de sus sistema simplificado, es decir, para una tasa de ganancia y una tasa de salarios:

(34) $$P_C Y_C + PY = \left[wL + PX\right](1+g)$$

donde $\boldsymbol{P}_{\mathrm{C}}$ es el vector **1**x***m*** de precios de bienes de consumo (no básicos) e $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{C}}$ la matriz ***m***x***n*** de estos bienes; ***P*** el vector **1**x***m*** de precios de productos finales (básicos) e ***Y*** estos mismos bienes; ***w*** la tasa de salarios; ***L*** los inputs de trabajo **1**x***n***; ***X*** la matriz ***n***x***n*** de medios de producción, y ***g*** la tasa de ganancia. Haciendo cero la tasa de salarios en (34) para tener la ecuación que relaciona precios con la tasa máxima de ganancia sale:

(35) $$P_C Y_C + PY = PX(1+g_m)$$

Entre (34) y (35) se obtiene la ecuación de precios de los bienes básicos:

(36) $$P = \frac{w(1+g)}{g_m - g} LX^{-1}$$

Y sustituyendo (36) en (35) sale:

(37) $$P_C = \frac{w(1+g)(I_v + g_m I_v - LX^{-1}Y)}{g_m - g}$$

En (36) tenemos los precios de los bienes de producción (básicos) y en (37) los bienes de consumo (no básicos). La función marginalista de los beneficios (33) se supone que se maximiza, de tal forma que queda:

(38) $$P = \frac{dC(Y = f(L,X))}{d(Y = f(L,X))} + \left|\frac{dp}{d(Y = f(L,X))}\right| \times f(L,X)$$

En (38) lo único que sabemos (por hipótesis) son sus dos primeras derivadas:

(39) $$\frac{dY}{dL}>0\ ,\quad \frac{dY}{dX}>0\ ,\quad \frac{d^2Y}{dL^2}<0\ ,\quad \frac{d^2Y}{dX^2}<0$$

de acuerdo con la ¿ley? de los rendimientos decrecientes marginalista. Las relaciones derivadas de (36) y (37) son como siguen:

(40) $$\frac{dP}{dw}>0,\ \ \frac{dP}{dg}>0,\ \ \frac{dP}{g_m-g}>0,\ \ \frac{dP}{d(LX^{-1})}>0,\ \ \frac{dP}{g_m}<0,\ \ \frac{dP}{d(1+g_m-LX^{-1}Y)}>0$$

Las diferencias de la variación de los precios como respuesta a la variación de las variables de las que dependen son notables: 1) Los precios marginalistas dependen sólo de las variables físicas ((34) y (38)) de los factores (medios en Sraffa) ***L*** y ***X***, pero *no* de ninguna variable monetaria; en cambio, en el modelo *esrafiano* dependen tanto de estas variables físicas ((36) y (37)) como de las variables monetarias tasa de salarios ***w*** y tasa de ganancia ***g***. También dependen de la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$, pero ello no añade ninguna variable nueva puesto que esta a su vez depende de las variables físicas mencionadas; 2) Las relaciones marginalistas son continuas ((38) y 39)); las relaciones *esrafianas* son discontinuas respecto a las variables físicas, aún cuando las representemos por comodidad con derivadas; 3) Las relaciones de los precios respecto al producto final depende de la forma funcional de la función de producción (34), pero lo que se supone por hipótesis es que la relación entre el producto final ***Y*** y sus medios ***L*** y ***X*** es crecientemente decreciente (39); las relaciones *esrafianas* de precios de los medios de producción respecto a sus medios (36) son lineales (proporcionales), pero la de los precios de los bienes finales de consumo es más complicada (37) aunque decreciente respecto al trabajo y creciente respecto a los medios; los precios *esrafianos* son precios de equilibrio además de intercambio en el modelo y se determinan conjuntamente por el conjunto del sistema económico con las variables monetarias tasa de salarios w y tasa de ganancia g, dadas las variables físicas ***L***, ***Y*** y ***X***; los precios marginalistas se determinan según la función de producción y de costes de las empresas en relación al mercado (demanda). Sólo cuando llegan al equilibrio general se ven en la necesidad de tener en cuenta todo el sistema económico. Sin embargo este desarrollo es posterior, aunque con el precedente insigne del modelo de Walras. De ello se deduce que el modelo marginalista admite el análisis parcial *marshaliano* (*ceteris paribus*) entre empresa y su mercado, mientras que Sraffa estudia las relaciones de interdependencia de los sectores y su relación con el excedente; 4) la crítica a la imposibilidad de la existencia de una función de producción independiente de los precios es irrefutable, por lo que los marginalistas no tienen en realidad función de producción. En efecto, ni siquiera el último esfuerzo de *Samuelson* con su función *subrogada* ha podido sostener esa hipótesis. No hay forma de agregar los medios de producción (capital en terminología clásica, neoclásica y marginalista) sin tener en cuenta los precios, que son a su vez lo que deben ser explicados por la función de producción; en el modelo *esrafiano* no hay en realidad función de producción, pero aún cuando esta pueda suponérsela, los precios se determinan por las variables monetarias del sistema y toma como datos las variables físicas ***L***,***Y***,***X***, independientemente de su relación funcional (de existir).

VII - Asignación de recursos en Sraffa versus marginalismo

A partir del punto anterior vamos a desarrollar algo de la semilla de Sraffa respecto al mercado, aunque el italiano no pudo sospechar que de su libro[236] capital pudiera surgir algo parecido a lo que me propongo. Para mejor visualizar lo que se pretende traigo a colación la ecuación:

(36) $$P = \frac{w(1+g)}{g_m - g} L X^{-1}$$

de la que despejamos lo que sigue:

(41) $$\frac{g_m - g}{1+g} = w P L X^{-1}$$

La semilla de Sraffa proviene de una interpretación del lado izquierdo de (41). De aquí se puede interpretar que, a diferencia de los modelos marginalistas y neoclásicos, el ajuste de los mercados y de las empresas no viene de los precios (monopolios, oligopolios) y en la asignación de los recursos (***L***, ***X***, ***T***) o sólo de estos en los casos de competencia ¿perfecta? (precio-aceptante), sino en la variación de las ganancias de las empresas. De acuerdo con esto, los precios no serían un baremo de la escasez de los productos y medios, sino que lo serían

[236] Ya hemos mencionado el artículo donde sí trata de este tema.

las tasas de ganancia. La ecuación (41) permite este tipo de ajuste, porque dados los precios como variable exógena para el empresario en cuestión, debe ajustar las tasas de ganancia y salarios para que se cumpla (41). También lo puede hacer con las variables físicas de medios $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{X}$ (y en su caso $\boldsymbol{T}$, la tierra). La limitación de este comportamiento es que en este modelo, el empresario no es completamente libre de realizar los ajustes como quiera porque debe saber que las tasas de ganancia, salarios y precios, tanto de productos finales (consumo) como de medios deben resolver el sistema de equilibrio de conjunto que representa tanto (41) como de donde procede, (34). En realidad el empresario es mucho más libre de mover las variables físicas comentadas que las variables monetarias. Además, los precios no indican escasez sino relaciones de intercambio y pueden servir de guía para el cálculo de los costes, pero no para asignar los recursos; estos se asignan mejor a partir de las variables monetarias $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{P}$ dadas por el conjunto del sistema y del mercado en particular donde opera el empresario, con márgenes de actuación menguados. En la teoría *esrafiana* no existen -o no son significativos- los costes marginales que el empresario pueda asignar medios y productos cuando estos costes igualen a los precios (o ingresos marginales en caso). El empresario *esrafiano* no tiene función de producción ni variaciones marginales, sino el libro tecnológico y organizativo (que emplea Samuelson en su artículo) y puede variar sus ganancias pasando de una hoja tecnológica a otra dados precios y salarios. En Sraffa el mundo se invierte. La cuestión está en la pregunta: ¿cuál de los dos modelos está más cerca del comportamiento real de los actores económicos? Yo no tengo dudas, entre otras cosas porque jamás he visto calcular a un empresario la asignación de recursos a partir de una función de producción, una relación continua entre costes y productos y el cálculo de ingresos marginales (o precios dados) y sus supuestos costes marginales. Eso es *Alicia en el país de las maravillas*. Y si los empresarios no se comportan así, ¿cómo se puede sostener una teoría económica de mercados que no tiene en cuenta o es irreal el comportamiento empresarial? Sraffa sí lo tiene. Llevado al límite su modelo (que no es necesario), el comportamientos empresarial sería de este tenor: el empresario busca la ganancia aceptando precios y salarios y variando las variables físicas $\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{L}$ es decir, medios e inputs de trabajo tal que pueda pasar de una frontera salarios-ganancias a otra tal que, para un mismo nivel de salarios, las ganancias sean más altas.

En (41) podemos concretar aún más la relación entre ganancias y precios, porque si la diferencia entre la tasa de ganancia máxima (el excedente) $\boldsymbol{g}_m$ y la tasa de ganancia monetaria $\boldsymbol{g}$ aumenta, pueden aumentar los precios si los salarios y las variables físicas no se mueven. Y esa diferencia depende tanto de una tasa como de la otra, es decir, del excedente, porque la tasa máxima una medida del excedente. Y aquí entra en juego un variable que no existe en el modelo marginalista. Es más, en el modelo de equilibrio general, los empresarios son ¡tan tontos! que intentando maximizar sus beneficios les lleva a dejar a cero estos mismos en su afán de competencia. En Sraffa la posibilidad de aumentar las ganancias, no sólo puede hacerse a costa de los salarios, sino que depende de la tasa de ganancia máxima, que a su vez depende de las variables físicas $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{X}$, es decir, del excedente. Del excedente y de la productividad, porque el excedente en relación con sus propios medios es una medida de la productividad. El concepto de productividad aparece en el marginalismo, pero como mecanismo de asignación de recursos, no como un aspecto global del sistema. En realidad, en los modelos de equilibrio general no juega ningún papel explícito. En Sraffa vemos que sí a través de la tasa de ganancia máxima[237]. Una forma de ver esta relación entre tasa de ganancia máxima y variables físicas es la ecuación (37) de bienes de consumo (no básicos).

(42) $$P_C = \frac{w(1+g)(I_v + g_m I_v - LX^{-1}Y)}{g_m - g}$$

En (42), para que los precios de estos bienes sean positivos ha de cumplirse que:

(43) $$(1+g_m)I_h > LX^{-1}Y$$

de donde sale que:

(44) $$g_m > LX^{-1}YI_v - n$$

[237] Y en el caso de la producción simple esrafiana o conjunta diagonalizada (no está en Sraffa), mediante la razón-patrón y la mercancía-patrón.

El lado derecho de la inecuación aparece el término $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}\mathbf{I}$ que es una medida del excedente, sobre todo si pasamos al término general $\mathbf{I}_h\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}\mathbf{I}_v$. La ventaja de este índice del excedente es que sólo depende de variables físicas y no monetarias, por lo que es compatible con cualquiera que sea las relaciones de intercambio (precios) del sistema. De forma análoga, de (36) salte también que:

(45) $$g_m > LX^{-1}I_v - n$$

Ambas inecuaciones acotan por abajo la medida del excedente.

Un caso particular, pero que podría generalizarse al relajar los supuestos, es el caso que expone Sraffa en el *apéndice B* de su obra. En él trata de los productos que se auto-abastecen[238]. Estos sectores sólo se venden así mismo, pero en cambio se compran a sí mismo y a otros sectores. La ecuación que define un sistema sí sería una como:

(46) $$PY_B + P_N Y_D = \left[LW_B + L_N W_D + P\,X_B + P_N X_D\right] \times (I_d + G_N)$$

donde las variables que llevan subíndice *D* es el sector que se autoabastece y los que llevan el *B* son los sectores ajenos de los que se abastecen. P es el vector de precios básicos y $\boldsymbol{P}_N$ el de no básicos. $\boldsymbol{G}_N$ es la tasa de ganancia de los no básicos que afecta a los dos sectores. La ecuación (46) expresa el conjunto del valor de los productos finales de los bienes básicos y no básicos que dependen de las masas de salarios conjuntos y de los medios de producción de ambos.

(47) $$P_N = \left[\left[LW_B + L_N W_D\right] \times (I_d + G_N) + P\left[X_B(I_d + G_N) - Y_B\right]\right] \times \left[Y_D - X_D(I_d + G_N)\right]^{-1}$$

La (47) surge de despejar los precios de los productos no básicos $\boldsymbol{P}_N$ en (46). Y si en (47) hacemos cero las tasas de salario $\boldsymbol{G}_N$ para calcular la matriz $\boldsymbol{G}_{mN}$ de tasas de salario máxima queda:

(48) $$P_N\left[Y_D - X_D(I_d + G_{mN})\right] = P\left[X_B(I_d + G_{mN}) - Y_B\right]$$

Y ahora si se quiere que los precios de los productos básicos $\boldsymbol{P}$ y no básicos $\boldsymbol{P}_N$

238 Pág. 125 de *PMPM.*

(49) $$X_D^{-1}Y_D - I_d <= G_{mN} <= \left[X_B^T X_B\right]^{-1} X_B^T\left[Y_B - X_B\right]$$

También se puede dar la inecuación con los signos cambiados, pero siempre con la matriz de tasas máximas de ganancia de los productos no básicos $\boldsymbol{G}_{mN}$ en medio. La ecuación anterior es muy importante porque nos da una acotación de estas tasa máximas de ganancia, cuya dificultad de cálculo en la práctica son máximas. La matriz inversa del lado derecho $\boldsymbol{X}_B$ es calculable si su rango es mayor o igual que el rango de $\boldsymbol{X}_D$. Cabe conjeturar que el lado izquierdo de la inecuación es la matriz de tasas máximas del sector *D* (sector no básico que se auto-reproduce) y el lado derecho es la matriz de tasas máximas del sector *B* (sector que vende a *D* pero que no compra de él). La doble acotación que expresa (49) indica los límites en los que se mueve la tasa máxima de ganancia (en este caso de los productos no básicos) cuando dos sectores de la economía mantienen la relación de dependencia antes indicado. Con ello queda acotado la tasa de ganancia $\boldsymbol{G}_N$ de estos bienes no básicos porque ellos han de ser menores que sus tasa máximas. También (49) es una aproximación a los estrechos márgenes de ganancias en los que se movería un país que importara mucho (sector *D*) del resto de los países (sector *B*), pero que no exportara nada. Ello sería posible si la balanza comercial fuera compensado por la entrada de capitales *in folio* y por remesa de emigrantes, por ejemplo: vemos que la semilla de Sraffa ha crecido en el jardín del comercio internacional. La acotación (49) mejora si pasamos a una sola tasa de ganancia máxima tal como:

(50) $$I_h X_D^{-1} Y_D I_v <= I_h G_{mN} I_v <= I_h\left[X_B^T X_B\right]^{-1} X_B^T\left[Y_B - X_B\right] I_v$$

Si el sector *D* no estuviera representado por una matriz de medios $\boldsymbol{X}_D$ cuadrada y el rango de *D* fuera mayor o igual que el rango de $\boldsymbol{G}_{mN}$, la expresión (50) pasaría a ser:

(51) $$I_h\left[X_D^T X_D\right]^{-1} X_D^T (Y_D - X_D) I_v <= I_h G_{mN} I_v <= I_h\left[X_B^T X_B\right]^{-1} X_B^T\left[Y_B - X_B\right] I_v$$

A modo de epílogo

Unas últimas palabras. Hemos hecho un largo recorrido de la mano de Sraffa, intentando entender sus análisis, descifrándole, aunque a veces parezca un autista por la poca conexión que muestra con la historia del análisis económico y con los economistas coetáneos y predecesores. Es su estilo, parco, preciso, creativo, crítico. Pero no hay que dejarse engañar por ello, porque tenía un conocimiento, según sabemos, enciclopédico de eso y de muchas cosas que dejó impresionado a gente como *Keynes*, *Robinson*, *Wittgenstein*, etc. Aunque no sean a veces satisfactorias o completas las soluciones del italiano, se muestra insuperable en el planteo de los problemas. Se puede afirmar que hay un antes y un después en la teoría económica en los problemas por él abordados, y no sólo en esta obra, sino también en los dos artículos mencionados en su breve biografía. Veamos una simple enumeración de sus aportaciones: sobre el peso real de los rendimientos constantes, su influencia en el análisis de las formas intermedias entre la competencia perfecta y los monopolios, sobre la medida del valor de la distribución de la renta independiente de los precios, sobre la importancia de la distinción entre bienes básicos y no básicos, sobre el capital como mero trabajo fechado dentro de la teoría de la distribución, sobre la producción conjunta, sobre el retorno de las técnicas en la teoría del capital, sobre el estudio de la tierra como capital fijo, etc. Y todo ello en una labor, por un lado de pionero casi siempre y en solitario en casi todo, por otro, al menos en los comienzos. Y todo ello aportando nuevos conceptos o fijando con precisión otros ya existentes, como por ejemplo los de *la mercancía-patrón, la razón-patrón, la reducción del capital a trabajo fechado, la diferenciación conceptual entre bienes básicos y no básicos, la producción simple y conjunta*. Ello ha permitido avanzar a otros donde ha fructificado su semilla, como en Pasinetti con su *análisis verticalmente integrado, el crecimiento con progreso técnico* del mismo autor, *el análisis del progreso técnico de raíz esrafiano* en Schefold, la teoría esrafiana del *comercio internacional* en Steedman, el estudio de la *Tierra como un recurso escaso* en Montani. También se ha ampliado el modelo al caso de beneficios no uniformes, los efectos sobre los impuestos, etc[239].

[239] Ver el libro de *Ahijado* antes mencionado.

Sraffa -al igual que *Keynes* o *Kalecki*- nos ha abierto un mundo alternativo o distinto al marginalismo y al neoclasicismo. Sraffa sigue la tradición de *Smith, Ricardo, Malthus, Mill, Marx*. etc., es decir, los clásicos, que al menos comienzan en los fisiócratas y, yendo aún más lejos, con los escolásticos españoles. Podemos incluir incluso a Marshall, a pesar de las limitaciones del análisis parcial[240]. Con el marginalismo -al menos el que aún se enseña en los cursos de licenciatura- la realidad se ha ido por el desagüe; el marginalismo no da soluciones al problema de las crisis y de los ciclos, por ejemplo; las expectativas no son racionales, menos aún los mercados; la valoración en el margen para asignar recursos y consumos es una entelequia. La economía, o es una sociología o no es nada, meras fórmulas y gráficos. Volviendo a Sraffa, sus modelos tienen la ventaja de que no hay que suponer funciones producción, ni agregación en términos de valor de medios de producción (el capital neoclásico); que los procesos son discontinuos, sin que sean significativos las variaciones en el margen; que los precios se determinan conjuntamente con salarios y ganancias y no a partir de productividades marginales que ningún empresario sabe o entiende -o podría calcular aunque las supiera- cuando paga el salario o se queda con los beneficios; que el sistema es abierto y ninguna explicación sobre supuestas funciones hipotéticas de producción van a determinar salarios y ganancias, sino que estos se determinan sociológicamente (conflictos, relación de fuerzas, lucha de clases, según los gustos analíticos); que las mejoras del bienestar vienen determinados por el aumento de la relación entre productos netos y medios empleados. Son sólo algunas de las características -en comparación con el marginalismo- que se desprenden de los modelos explicativos de raíz sraffiana.

Para que no se diga que esto es una modesta y simple hagiografía sobre un laico, querría señalar un pero en el modelo *esrafiano* (de los muchos que se pueden poner). Para mí hay algo en el modelo de Sraffa que me resulta incongruente y que no he visto reseñado. En el modelo se toma un bien o servicio -mercancías para Sraffa- como producto final del conjunto del sistema económico y se compara aquél con la

[240] La paradoja de la agregación que se pone de manifiesto en el modelo keynesiano cuando se puede dar un equilibrio con paro indeseado. Esta paradoja no puede ser advertida con agregaciones de valores, precios o productos, obtenidos a partir del análisis parcial, por lo que es una conquista intelectual de primera magnitud (sin personalizar en el inglés porque está en Kalecki, etc.), comparable, por ejemplo, a la teoría de los costes comparativos de D. Ricardo o a la misma razón-patrón de Sraffa.

suma del conjunto de ese bien o servicio utilizado como medio de producción. Así, y siguiendo con el ejemplo anterior, en el modelo *esrafiano* se tomaría el acero total producido por el conjunto del sistema definido por las ecuaciones y se le compararía con el total del acero tomado como medio en el conjunto del sistema; sin embargo, la tasa de ganancia es decisión de cada empresa y no del conjunto del sistema. Existe por lo tanto un hiato entre la toma de datos de productos y medios del modelo, y las ganancias, que han se ser adscritas al comportamiento de cada empresa o empresario individual, aunque luego se sumen las ganancias empresa a empresa para hallar la tasa de ganancia media del sistema. Hay, por tanto, una mezcla de tecnocratismo (productos y medios como datos) y sociología (comportamiento ganancial de los empresarios) que me chirría. Quizá sea este es el coste que haya que pagar -no veo cómo se puede eludir- para no hacer depender el modelo de *funciones empresariales de producción* insostenibles conceptualmente por dos motivos básicos: por la imposibilidad ya demostrada suficientemente de tener una medida del capital independiente de los precios y por los problemas de agregación para pasar de la micro a la macro a partir de estas funciones.

Ya acabo. Lo que viene es un ejercicio de ucronía personal, por lo que el lector puede saltárselo. Siempre me ha gustado jugar e imaginar cómo hubiera sido la vida en otra época si se pudiera elegir tal cosa. Siempre he imaginado y conformado con tener una charla con algún genio del pasado. Quizá sea un mitómano. Así, oír a Homero recitar sus hexámetros; al gran Leonardo mostrando sus portentosos inventos; al gran manco leyendo los primeros capítulos sobre la eterna pareja manchega; al genial bardo recitando el Macbeth; a Gauss guiándome por su demostración del teorema fundamental del álgebra; a Mozart tocando su Réquiem, o a Einstein explicando como concibió algunos de sus artículos de 1905. Siempre como oyente o espectador, sin estorbar ni molestar. Nunca he conocido a un genio, y si lo viera, estoy seguro que no lo reconocería. Pero con el tiempo y con la lectura del libro de Sraffa, de la lectura de sus dos artículos, de la lectura de su biografía, de lo que dicen de él *Keynes*, *Robinson*, *Pasinetti*, *Garegnani*, *Roncaglia*, *Fiorito*, *Steedman*, *Schefold*, *Kurz*, etc. -aunque la mayoría de ellos no le hayan conocido personalmente- me despertó el deseo de ir al pasado, a los años 30 en Cambridge, y poder tener una charla con él, como lo hicieron *Keynes*, *Robinson*, *Ramsey*, *Wittgenstein, Kaldor, Gramsci*[241], etc., o escuchar -porque no podría más que eso- al más afable, modesto, riguroso, inteligente y genial de los economistas[242]. Es verdad que ahora, en plena crisis, la más importante desde la Gran Depresión, los problemas son otros y volveremos a ellos para denunciar las soluciones neoliberales y a quienes las proponen a pesar de haber fracasado con ellas, además de ser estas ideas coadyuvantes de sus causas. Sin embargo, y a pesar de estas circunstancias adversas para la izquierda, siempre hay un tiempo y un lugar para cada cosa, y en este caso para dar a conocer a una de las personas del siglo XX más inteligentes, más insobornables intelectualmente y más consecuentemente de izquierdas que han existido. Su importancia como intelectual es comparable a *Bertrand Russell, Wittgenstein, Keynes, Kalecki, Ortega, Gramsci, Heidegger, Lukacs, Cantor, Einstein*, etc. Y como economista no me cabe duda: con Sraffa se abre la posibilidad de la economía como un conocimiento riguroso, con la ideología como virtud y no como defecto, más como aliciente que como freno, más como pedestal que como losa. Sraffa será, con el tiempo, a la economía, al análisis económico, lo que Galileo -su compatriota- lo fue a las ciencias físicas: falta el Newton que haga fructificar su semilla.

Madrid, octubre de 2010,

$$p_j y_j = w\, l_j + (1+r)\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

$$p_j y_j = (1+R)\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} = 1$$

$$\sum_{1}^{n} l_j = 1$$

obtención de la razón-patrón

[241] Con Gramsci en Italia y,alguna vez en la cárcel, por obra y gracia del dictador Mussolini.

[242] Sólo David Ricardo le es comparable.

Bibliografía

Afriat, S.: “Sraffa´s Prices”, Universitá degli Studi di Siena, quaderni 474. www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Ahijado, M.: “Distribución, precios de producción y crecimiento”, 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Bour, Enrique A.: “Marx y la teoría económica moderna”, 2007 http://www.aaep.org.ar/anales/works/works2007/bour.pdf

Caballero, A. y Lluch, E.: “Sraffa en España”, Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2), 1986.

Dobb, M.: “Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith, edit. Siglo XXI editores.

Desai, M.: “Marxian Economic Theory”, 1974 [“Lecciones de teoría económica marxista”, 1977, edit. Siglo XXI].

Dobb, M.: “The Sraffa system and the critique of neoclassical theory of distribution”, 1970.

Estrin, S. y Laidler, D: “Introduction microeconomics”.

Fiorito, Alejandro: “La implosión de la economía neoclásica”. Está en la red: www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Foncerrada, Luis Antonio: “Sraffa y Böhm-Bawerk”. Está en la red: http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/FoncerradaPLA/tesis.pdf

Garegnani, P.: “El capital en la teoría de la distribución”, 1982, ed. Oikos-Tau (“Il capitale nelle teorie delladistribuzone”, 1982)

Gehrke, Ch.y Kurz, D.: “Sraffa on von Bortkiewicz”. Está en la red: http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Harcourt, G.C.: “Teoría del Capital” (*Some Cambridge controversies in the theory of capital, 1975*), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Heahtfield, D. F.: “Productions funtions”.

Korsch, Karl; “Karl Marx”, 1975, traducción de Manuel Sacristán, edit. Ariel.

Kurz, Pasinetti, Salvador y otros: “Piero Sraffa: The Man and the Scholar”, Routledge, 2008.

Kurz D. Heinz; “Critical Essays on Piero Sraffa´s Legacy in Economics”, 2000, Cambrigde University Press.

Lange, O., Taylor, F. M.: “On tthe Economic Theory of Socialism, 1938 [Sobre la teoría económica del socialismo, 1971, edit. Ariel]

Marx, Carlos: “El método en la Economía Política”, 1974, Ediciones Grijalbo, S.A.

Marx, Carlos: “El Capital”, en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meade, J.: “A neo Classical Theory of Economic Growth”, 1961.

Meek, R.: “Mr. Sraffa´s Rehabilitationof Classical Economics”, 1961.

Mendoza, Gabriel: “La transformación de valores en precios de producción”, 1997 http://www.izt.uam.mx/economiatyp/numeros/numeros/10/articulos_PDF/10_2_La_transformacion.pdf

Mora Plaza, A.: “Aspectos de la economía de Sraffa”, revista: Nómadas, n. 23, U. Complutense de Madrid, enlace: http://www.ucm.es/info/nomadas/23/antoniomora.pdf

Mora Plaza, A.: “Notas sobre la producción simple y conjunta a consecuencia de Sraffa: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/181/18112179020.pdf;

Mora Plaza, A.: “Sobre la transformación de valores a precios”:
http://www.eumed.net/ce/2009b/amp2.htm
http://revistas.ucm.es/cps/15786730/articulos/NOMA1010140379A.PDF

Mora Plaza, A.: “Notas sobre el teorema fundamental marxiano”
http://www.eumed.net/ce/2009b/amp.htm
http://econpapers.repec.org/article/ervcontri/y_3a2009_3ai_3a2009-10_3a22.htm

Morhisima, M.: “La teoría económica de Marx” (*Marx´s Economics, 1973*), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Moseley, F.: “El método lógico y el problema de la transformación”.
http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm

Murga, Gustavo: “Piero Sraffa”.
http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Nuti, D.: “Capitalism, Socialism and Sleady Growth”, 1970.

Okishio, N.: “A mathematical note on marxian theorems”, 1963.

Pasinetti. L.: “Critical of the neoclassical theory of growth and distribution”. Está en la red:
http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Pasinetti, L.: “Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations”, 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.: “Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth”, 1961/2.

Pasinetti, L.: “Switches of technique and the rate of return in Capital Theory”, 1969.

Pasinetti, L.: “Crecimiento económico y distribución de la renta” (“*Growth and Income Distribution*”, 1974), 1978, Alianza Editorial.

Pasinetti, L.: “Lecciones de teoría de la producción” (“Lezioni di teoria della produzioni”, 1975), 1983, FCE.

Peris i Ferrando, J.E: “Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta”, 1987, en internet: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf

Potier, J.P.: “Piero Sraffa”, 1994, edicions Alfons Magnànim.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Robinson, J.: “Ensayos críticos”, 1984, Ediciones Orbis.

Roncanglia, Alexandro: “Piero Sraffa”, Edit, Palgrave, 2009.

Samuelson, Paul: “Understanding the Marxian notion of Exploitation”, 1971.

Sánchez Choliz, Julio: “La razón-patrón de Sraffa y el cambio técnico”, 1989, Investigaciones Económicas, 2ª época, Vol. XIII. ftp://ftp.funep.es/InvEcon/paperArchive/Ene1989/v13i1a7.pdf

Sargent, T.J.: “Teoría macroeconómica” (*Macroeconomic Theory, 1979*), 1988, Antoni Bosch editor.

Schefold, Bertram: *Mr. Sraffa on Joint Production*, 1971

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Steedman, I.: “Marx, Sraffa y el problema de la transformación” (*Marx after Sraffa, 1977*), 1985, F.C.E.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Solow, R.: “The interest rate and transition between techniques”, 1967.

Sraffa, Piero: “Produción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975, Oikos-Tau.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.: “Economía política y modelos multisectoriales”,1979, edit. Tecnos.

Varios,: “Matemáticas avanzadas aplicadas a la Economía”, UNED, 2001.


Claudio Napoleoni
El pensamiento económico en el siglo XX