

## **ANEXO 3**

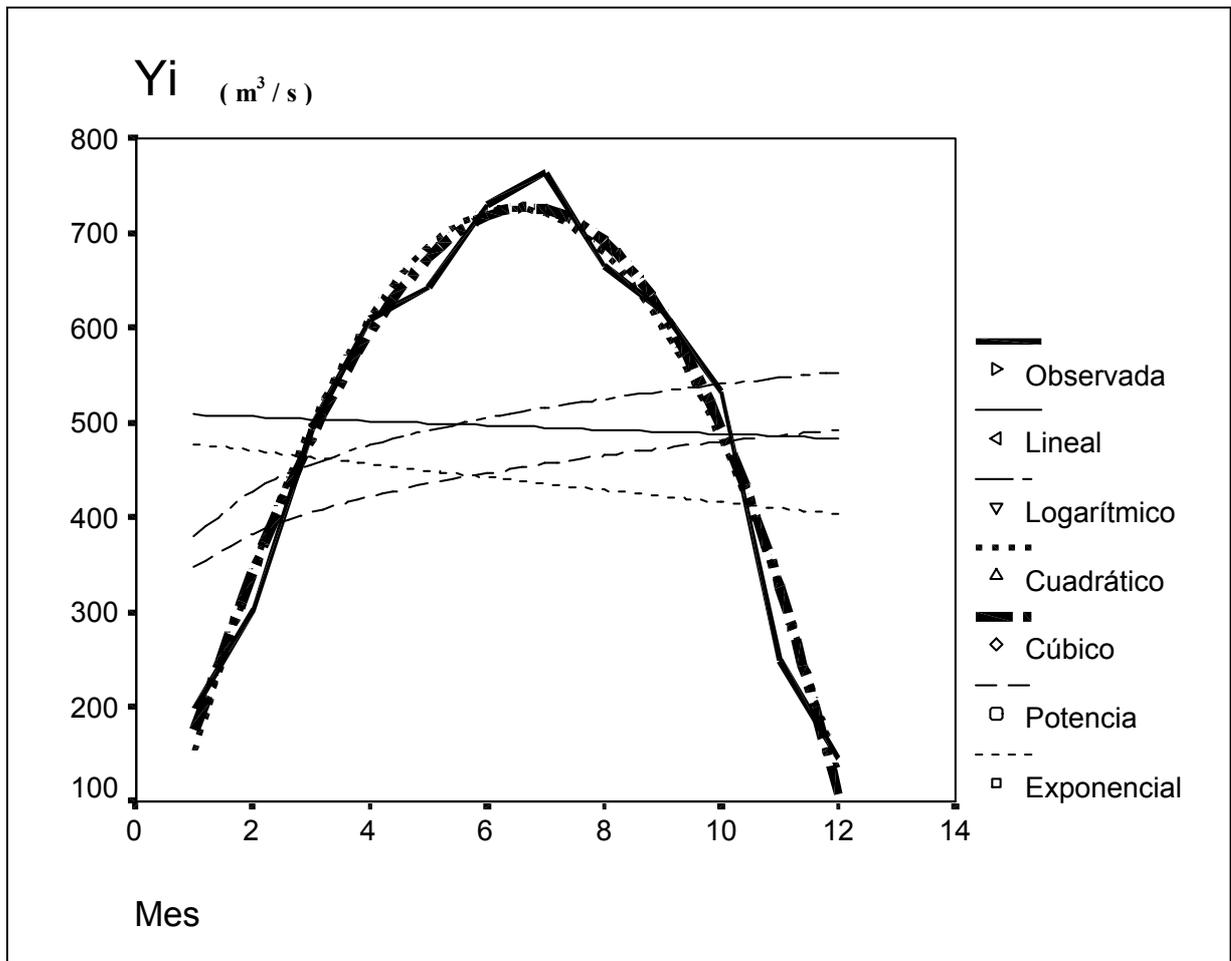
# **PROPUESTA DE GESTIÓN DE CAUDALES EN EL TRAMO INFERIOR DEL RÍO EBRO**

## 1. FUNCIÓN DEL CAUDAL MEDIO

MODEL:  $Y_i$

Independiente : Mes

Dependent	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2	b3
$Y_i$	LIN	.001	10	.01	.908	510.621	-2.2622		
$Y_i$	LOG	.060	10	.64	.444	379.137	70.1124		
<b><math>Y_i</math></b>	<b>QUA</b>	<b>.968</b>	<b>9</b>	<b>133.97</b>	<b>.000</b>	<b>-75.977</b>	<b>249.137</b>	<b>-19.338</b>	
<b><math>Y_i</math></b>	<b>CUB</b>	<b>.972</b>	<b>8</b>	<b>90.93</b>	<b>.000</b>	<b>-18.263</b>	<b>204.530</b>	<b>-11.093</b>	<b>-</b>
<b>.4228</b>									
$Y_i$	POW	.036	10	.37	.557	347.264	.1406		
$Y_i$	EXP	.010	10	.10	.759	485.288	-.0155		



MODEL: **Yi**

Dependent variable.. <b>Yi</b>		Method.. <b>CUADRÁTICO</b>			
Multiple R	.98362				
R Square	.96750				
Adjusted R Square	.96028				
Standard Error	43.19238				
<b>Analysis of Variance:</b>					
	DF	Sum of Squares	Mean Square		
Regression	2	499862.68	249931.34		
Residuals	9	16790.23	1865.58		
F =	133.96967	Signif F =	.0000		
----- <b>Variables in the Equation</b> -----					
Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
Mes	249.137113	15.788358	4.144833	15.780	.0000
Mes**2	-19.338412	1.182281	-4.296409	-16.357	.0000
(Constant)	-75.977273	44.640567		-1.702	.1230

Dependent variable.. <b>Yi</b>		Method.. <b>CÚBICO</b>			
Multiple R	.98565				
R Square	.97151				
Adjusted R Square	.96083				
Standard Error	42.89447				
<b>Analysis of Variance:</b>					
	DF	Sum of Squares	Mean Square		
Regression	3	501933.43	167311.14		
Residuals	8	14719.48	1839.94		
F =	90.93317	Signif F =	.0000		
----- <b>Variables in the Equation</b> -----					
Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
Mes	204.529822	44.876079	3.402712	4.558	.0019
Mes**2	-11.093462	7.860057	-2.464631	-1.411	.1958
Mes**3	-.422818	.398557	-1.124039	-1.061	.3197
(Constant)	-18.262626	70.178910		-.260	.8013

Se han obtenido las dos expresiones polinómicas siguientes:

a)  $Q = -19'338 \times t^2 + 249'137 \times t - 75'977$  (cuadrática)

b)  $Q = -0'4228 \times t^3 - 11'093 \times t^2 + 204'53 \times t - 18'263$  (cúbica)

que poseen parámetros parecidos de fiabilidad estadística (R y F), como puede comprobarse en el cuadro correspondiente del análisis de la varianza.

El caudal medio anual vendrá dado, en ambos casos, por:

a)

$$\int_0^{12} (-19'338 \times t^2 + 249'137 \times t - 75'977) dt =$$

$$= [-6'446 \times t^3 + 124'569 \times t^2 - 75'977 \times t]_0^{12} = 5.887'524$$

$$\bar{y} = \frac{5.887'524}{12 - 0} = 490'6 \text{ m}^3 / \text{seg.}$$

b)

$$\int_0^{12} (-0'4228 \times t^3 - 11'093 \times t^2 + 204'53 \times t - 18'263) dt =$$

$$= [-0'1057 \times t^4 - 3'698 \times t^3 + 102'265 \times t^2 - 18'263 \times t]_0^{12} = 5.925'06$$

$$\bar{y} = \frac{5.925'06}{12 - 0} = 493'8 \text{ m}^3 / \text{seg.}$$

Como puede observarse, se aproxima algo más la función cúbica que la cuadrática al valor teórico medio estimado  $\bar{y} = 496 \text{ m}^3/\text{seg.}$

Del estudio de los extremos relativos o locales de estas funciones se deduce que:

**a) Función cuadrática:** Condición necesaria o de primer grado:

$Q'(t) = -38'676 \times t + 249'137 = 0$ ; de dónde:  $t = 6'44$ , que correspondería al día:  $6'44 \times 30'4375 = 196$  a partir del 1 de septiembre, o sea, al 15 de marzo, en que tendría lugar un máximo local, puesto que:

$$Q''(t) = -38'676 < 0$$

A este punto le correspondería un caudal de:

$Q = -19'338 \times 6'44^2 + 249'137 \times 6'44 - 75'977 = 726'5 \text{ m}^3/\text{seg.}$  (en la estimación aproximada del anexo 1, se alcanza un caudal máximo de  $726'37 \text{ m}^3/\text{seg.}$  el día 28 de febrero).

**b) Función cúbica:** Del mismo modo, se tendrá:

$$Q'(t) = -1'2684 \times t^2 - 22'186 \times t + 204'53 = 0$$

Se trata, pues, de resolver la ecuación:

$$1'2684 \times t^2 + 22'186 \times t - 204'53 = 0;$$

$$t = \frac{-22'186 \pm \sqrt{22'186^2 + 1.037'7034}}{2'5368} = 6'673 ,$$

que correspondería al día:  $6'673 \times 30'4375 = 203$  a partir del 1 de septiembre, o sea, al 22 de marzo, en que tendría lugar un máximo local, puesto que:

$$Q''(t) = -2'5368 \times t - 22'186 < 0 \text{ (condición suficiente o de 2º grado)}$$

A este punto le correspondería un caudal de:

$$Q = -0'4228 \times 6'673^3 - 11'093 \times 6'673^2 + 204'53 \times 6'673 - 18'263 = 727'0 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

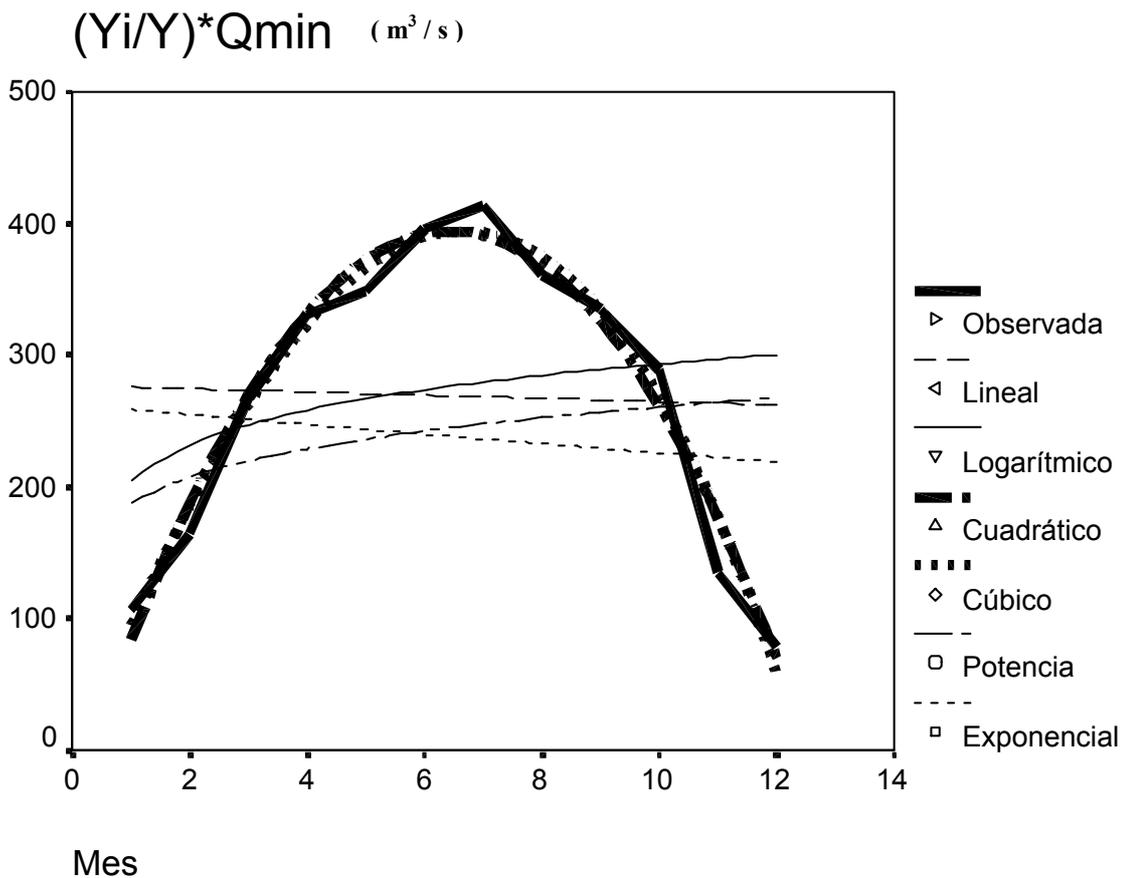
**c)** En cualquier caso, la representación mensual tabular y gráfica aproximada de estos caudales correspondientes a la función cuadrática, puede verse en el anterior anexo 1, tanto para la escala antigua como para la nueva. Dichas representaciones indican la distribución anual teórica de los respectivos caudales analizados.

## 2. FUNCIÓN DEL CAUDAL MÍNIMO

MODEL:  $(Y_i/\bar{Y}) * Q_{min}$

Independiente: Mes

Dependent	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2
<b>b3</b>								
$(Y_i/Y) * Q_{min}$	LIN	.001	10	.01	.908	276.909	-1.2168	
$(Y_i/Y) * Q_{min}$	LOG	.060	10	.64	.443	205.531	38.1058	
$(Y_i/Y) * Q_{min}$	<b>QUA</b>	<b>.968</b>	<b>9</b>	<b>135.64</b>	<b>.000</b>	<b>-41.273</b>	<b>135.147</b>	<b>-10.490</b>
$(Y_i/Y) * Q_{min}$	<b>CUB</b>	<b>.972</b>	<b>8</b>	<b>91.64</b>	<b>.000</b>	<b>-10.657</b>	<b>111.484</b>	<b>-6.1158</b>
		<b>.2243</b>						
$(Y_i/Y) * Q_{min}$	POW	.036	10	.38	.553	188.006	.1418	
$(Y_i/Y) * Q_{min}$	EXP	.010	10	.10	.763	262.870	-.0152	



MODEL:  $(Y_i/Y) * Q_{min}$ Dependent variable..  $(Y_i/Y) * Q_{min}$  Method.. CUADRÁTICO

Multiple R .98381  
 R Square .96789  
 Adjusted R Square .96075  
 Standard Error 23.28360

**Analysis of Variance:**

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	147064.87	73532.434
Residuals	9	4879.13	542.126

F = 135.63720      Signif F = .0000

## ----- Variables in the Equation -----

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
Mes	135.146853	8.510987	4.146028	15.879	.0000
Mes**2	-10.489510	.637329	-4.297320	-16.459	.0000
Constante	-41.272727	24.064268		-1.715	.1205

Dependent variable..  $(Y_i/Y) * Q_{min}$  Method.. CÚBICO

Multiple R .98576  
 R Square .97172  
 Adjusted R Square .96112  
 Standard Error 23.17438

**Analysis of Variance:**

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	147647.58	49215.861
Residuals	8	4296.42	537.052

F = 91.64076      Signif F = .0000

## ----- Variables in the Equation -----

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
Mes	111.483812	24.244979	3.420094	4.598	.0018
Mes**2	-6.115773	4.246514	-2.505497	-1.440	.1878
Mes**3	-.224294	.215327	-1.099522	-1.042	.3280
(Constant)	-10.656566	37.915216		-.281	.7858

Se han obtenido las dos expresiones polinómicas siguientes:

a)  $Q = -10'49 \times t^2 + 135'147 \times t - 41'273$  (cuadrática)

b)  $Q = -0'2243 \times t^3 - 6'1158 \times t^2 + 111'484 \times t - 10'657$  (cúbica)

que poseen parámetros parecidos de fiabilidad estadística (R y F), como puede comprobarse en el cuadro correspondiente del análisis de la varianza.

El caudal mínimo anual vendrá dado, en ambos casos, por:

a)

$$\int_0^{12} (-10'49 \times t^2 + 135'147 \times t - 41'273) dt =$$

$$= \left[ -3'5 \times t^3 + 67'57 \times t^2 - 41'273 \times t \right]_0^{12} = 3.187'31$$

$$\bar{y} = \frac{3.187'31}{12 - 0} = 265'6 \text{ m}^3 / \text{seg.}$$

b)

$$\int_0^{12} (-0'2243 \times t^3 - 6'1158 \times t^2 + 111'484 \times t - 10'657) dt =$$

$$= \left[ -0'056 \times t^4 - 2'039 \times t^3 + 55'742 \times t^2 - 10'657 \times t \right]_0^{12} = 3.214'36$$

$$\bar{y} = \frac{3.214'36}{12 - 0} = 267'9 \text{ m}^3 / \text{seg.}$$

También en este caso, como puede observarse, se aproxima algo más la función cúbica que la cuadrática al valor teórico medio estimado:  $\bar{y} = 269 \text{ m}^3/\text{seg.}$

Del estudio de los extremos relativos o locales de estas funciones se deduce que:

**a) Función cuadrática:** Condición necesaria o de primer grado:

$Q'(t) = -20'98 \times t + 135'147 = 0$ ; de dónde:  $t = 6'44$ , que, como en el caso de la función de caudal medio, correspondería al día 15 de marzo, en que tendría lugar un máximo local, puesto que:

$$Q''(t) = -20'98 < 0 \text{ (condición suficiente o de 2º grado)}$$

A este punto le correspondería un caudal de:

---

$Q = -10'49 \times 6'44^2 + 135'147 \times 6'44 - 41'273 = 394'0 \text{ m}^3/\text{seg.}$  (en la estimación aproximada del anexo 1, se alcanza un máximo de  $393'98 \text{ m}^3/\text{seg.}$  el día 28 de febrero).

**b) Función cúbica:** Del mismo modo, se tendrá:

$$Q'(t) = -0'6729 \times t^2 - 12'2316 \times t + 111'484 = 0$$

Se trata, pues, de resolver la ecuación:

$$0'6729 \times t^2 + 12'2316 \times t - 111'484 = 0;$$

$$t = \frac{-12'2316 \pm \sqrt{12'2316^2 + 300'07}}{1'3458} = 6'668 ,$$

que también correspondería al día 22 de marzo, en que tendría lugar un máximo local, puesto que:

$$Q''(t) = -1'3458 \times t - 12'2316 < 0 \text{ (condición suficiente o de 2º grado)}$$

A este punto le correspondería un caudal de:

$$Q = -0'2243 \times 6'668^3 - 6'1158 \times 6'668^2 + 111'484 \times 6'668 - 10'657 = 394'3 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

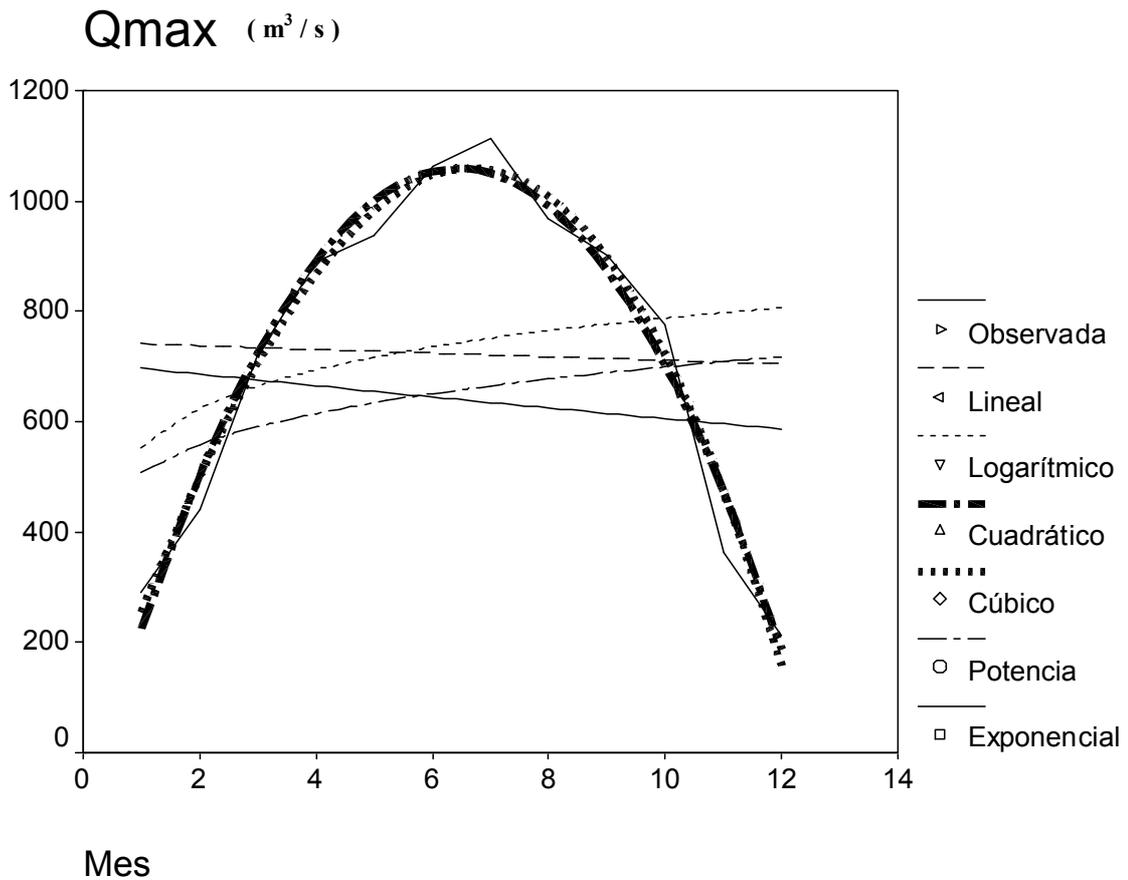
**c)** En cualquier caso, la representación mensual tabular y gráfica aproximada de estos caudales correspondientes a la función cuadrática, puede verse en el anterior anexo 1, tanto para la escala antigua como para la nueva. Dichas representaciones indican la distribución anual teórica de los respectivos caudales analizados.

### 3. FUNCIÓN DEL CAUDAL MÁXIMO

MODEL:  $Q_{max}$

Independent: Mes

Dependent	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2
QMAX	LIN	,001	10	,01	,907	744,333	-3,3077	
QMAX	LOG	,060	10	,63	,444	552,744	102,119	
<b>QMAX</b>	<b>QUA</b>	<b>,967</b>	<b>9</b>	<b>133,35</b>	<b>,000</b>	<b>-110,68</b>	<b>363,127</b>	<b>-28,187</b>
<b>QMAX</b>	<b>CUB</b>	<b>,971</b>	<b>8</b>	<b>90,67</b>	<b>,000</b>	<b>-25,869</b>	<b>297,576</b>	<b>-16,071</b>
<b>,6213</b>								
QMAX	POW	,035	10	,37	,558	506,522	,1402	
QMAX	EXP	,010	10	,10	,758	707,707	-,0155	



MODEL:  $Q_{max}$ Dependent variable :  $Q_{max}$  Method.. CUADRÁTICO

Multiple R .98354  
 R Square .96736  
 Adjusted R Square .96010  
 Standard Error 63.10277

**Analysis of Variance:**

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	1061990.0	530995.02
Residuals	9	35837.6	3981.96

F = 133.35019      Signif F = .0000

----- **Variables in the Equation** -----

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
MES	363.127373	23.066317	4.144383	15.743	.0000
MES**2	-28.187313	1.727277	-4.296065	-16.319	.0000
(Constant)	-110.681818	65.218529		-1.697	.1239

Dependent variable..  $Q_{max}$  Method.. CÚBICO

Multiple R .98561  
 R Square .97143  
 Adjusted R Square .96072  
 Standard Error 62.61573

**Analysis of Variance:**

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	1066461.8	355487.28
Residuals	8	31365.8	3920.73

F = 90.66865      Signif F = .0000

----- **Variables in the Equation** -----

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
Mes	297.575832	65.508412	3.396242	4.543	.0019
Mes**2	-16.071151	11.473815	-2.449425	-1.401	.1989
Mes**3	-.621342	.581799	-1.133159	-1.068	.3167
(Constant)	-25.868687	102.444534		-.253	.8070

En la columna (5) de la tabla adjunta de gestión de caudales en el tramo inferior del río Ebro, se deducen los caudales máximos normales en régimen natural, calculados a partir de las determinaciones ya efectuadas de los caudales medios y mínimos. A partir de esos valores variables de los caudales máximos, se puede considerar que existen “avenidas” controladas o no en el tramo final del río Ebro, con valores máximos de 1.114 m<sup>3</sup>/seg. para el mes de marzo y mínimos de 211 m<sup>3</sup>/seg. para el mes de agosto. Este concepto -también variable- de “avenida” resulta comparable al constante o estático supuesto por l’*Agència Catalana de l’Aigua* (Generalitat de Catalunya) o bien por la propia Confederación Hidrográfica del Ebro (Ministerio del Medio Ambiente) a los efectos del control de la calidad del agua, esto es, que no se observan valores negativos en los parámetros de control de dicha calidad por debajo de un valor umbral del caudal circulante por el río de 1.000 m<sup>3</sup>/seg. Así pues, a la vista de nuestras determinaciones, así como de los peligros o riesgos latentes que entrañan los vertidos descubiertos en el embalse de Flix, entendemos que el umbral analítico a adoptar en lo sucesivo debería adaptarse precisamente al propuesto en nuestro estudio.

Siguiendo la misma metodología, habrá que calcular las funciones de ajuste cuadrática y cúbica, habiéndose obtenido, respectivamente, las dos expresiones polinómicas siguientes:

$$a) Q = -28'187 \times t^2 + 363'127 \times t - 110'68 \text{ (cuadrática)}$$

$$b) Q = -0'6213 \times t^3 - 16'071 \times t^2 + 297'576 \times t - 25'869 \text{ (cúbica)}$$

que poseen parámetros parecidos de fiabilidad estadística (R y F), como puede comprobarse en el cuadro correspondiente del análisis de la varianza.

El caudal máximo anual vendrá dado, en ambos casos, por:

a)

$$\begin{aligned} & \int_0^{12} (-28'197 \times t^2 + 363'127 \times t - 110'68) dt = \\ & = [-9'399 \times t^3 + 181'56 \times t^2 - 110'68 \times t]_0^{12} = 8.575'01 \\ & \bar{y} = \frac{8.575'01}{12 - 0} = 714'6 \text{ m}^3 / \text{seg.} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \int_0^{12} (-0'6213 \times t^3 - 16'071 \times t^2 + 297'576 \times t - 25'869) dt = \\ & = [-0'155 \times t^4 - 5'357 \times t^3 + 148'788 \times t^2 - 25'869 \times t]_0^{12} = 8.644'07 \\ & \bar{y} = \frac{8.644'07}{12 - 0} = 720'3 \text{ m}^3 / \text{seg.} \end{aligned}$$

También en este caso, como puede observarse, se aproxima algo más la función cúbica que la cuadrática al valor teórico medio estimado:  $\bar{y} = 723 \text{ m}^3/\text{seg}$ . Del estudio de los extremos relativos o locales de estas funciones se deduce que:

**a) Función cuadrática:** Condición necesaria o de primer grado:

$Q'(t) = -56'374 \times t + 363'127 = 0$ ; de dónde:  $t = 6'44$ , que, como en el caso de la función de caudal medio, correspondería al día 15 de marzo, en que tendría lugar un máximo local, puesto que:

$$Q''(t) = -56'374 < 0.$$

A este punto le correspondería un caudal de:

$Q = -28'187 \times 6'44^2 + 363'127 \times 6'44 - 110'68 = 1.058'8 \text{ m}^3/\text{seg}$ . (en la estimación aproximada del anexo 1, se alcanza un caudal máximo de  $1.058'76 \text{ m}^3/\text{seg}$ . el día 28 de febrero).

**b) Función cúbica:** Del mismo modo, se tendrá:

$$Q'(t) = -1'8639 \times t^2 - 32'142 \times t + 297'576 = 0$$

Se trata, pues, de resolver la ecuación:

$$1'8639 \times t^2 + 32'142 \times t - 297'576 = 0;$$

$$t = \frac{-32'142 \pm \sqrt{32'142^2 + 2.218'61}}{3'7278} = 6'675 ,$$

que también correspondería al día 22 de marzo, en que tendría lugar un máximo local, puesto que:

$$Q''(t) = -1'3458 \times t - 12'2316 < 0 \text{ (condición suficiente o de 2º grado)}$$

A este punto le correspondería un caudal de:

$Q = -0'6213 \times 6'675^3 - 16'071 \times 6'675^2 + 297'576 \times 6'675 - 25'869 = 1.059'6 \text{ m}^3/\text{seg}$ .

**OBSERVACIONES:** En todos los casos estudiados, las funciones polinómicas estudiadas tienen el coeficiente dominante (el del término de mayor grado) negativo y son cóncavas con respecto a las  $Q^+$  en todo el intervalo de existencia. Al igual que para las funciones anteriores de caudal, véase el anexo n°: 1.

#### 4. ESTUDIO ESTADÍSTICO DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS CAUDALES EN EL PERIODO 1966-85

##### 4.1. Tablas auxiliares del cálculo

Se parte de la tabla de datos siguiente:

**Caudales:** 12 meses      **Coefficiente:** 1,000  
**Años:** 1966 a 1985      **Estación:** Tortosa, N°: 027

Item	$x_i$ (m <sup>3</sup> /seg.)	$n_i$	Ni↑ Ascendente	% frecuencia simple $f_i$	% frecuencia acumulada ascendente Fi ↑	Ni↓ Descendente	% frecuencia acumulada descendente Fi ↓	Observaciones
1	72,10	145	145	1,99	1,99	7.154	98,01	
2	85,06	146	291	2,00	3,99	7.008	96,01	
3	91,75	146	437	2,00	5,99	6.862	94,01	(Hay un 5% de probabilidad de obtener un caudal < 88,4 m <sup>3</sup> /seg , o bien un 95% de que sea ≥ 88,4m <sup>3</sup> /seg.)
4	99,81	146	583	2,00	7,99	6.716	92,01	
5	108,54	146	729	2,00	9,99	6.570	90,01	
6	115,61	146	875	2,00	11,99	6.424	88,01	
7	124,35	146	1.021	2,00	13,99	6.278	86,01	
8	134,51	146	1.167	2,00	15,99	6.132	84,01	
9	142,68	146	1.313	2,00	17,99	5.986	82,01	
10	153,38	146	1.459	2,00	19,99	5.840	80,01	
11	163,14	146	1.605	2,00	21,99	5.694	78,01	
12	173,69	146	1.751	2,00	23,99	5.548	76,01	
13	183,50	146	1.897	2,00	25,99	5.402	74,01	
14	193,67	146	2.043	2,00	27,99	5.256	72,01	
15	204,19	146	2.189	2,00	29,99	5.110	70,01	
16	211,37	146	2.335	2,00	31,99	4.964	68,01	
17	219,27	146	2.481	2,00	33,99	4.818	66,01	
18	228,96	146	2.627	2,00	35,99	4.672	64,01	
19	241,91	146	2.773	2,00	37,99	4.526	62,01	
20	254,78	146	2.919	2,00	39,99	4.380	60,01	
21	267,25	146	3.065	2,00	41,99	4.234	58,01	
22	278,98	146	3.211	2,00	43,99	4.088	56,01	
23	288,68	146	3.357	2,00	45,99	3.942	54,01	
24	301,64	146	3.503	2,00	47,99	3.796	52,01	
25	314,44	146	3.649	2,00	49,99	3.650	50,01	
26	326,02	146	3.795	2,00	51,99	3.504	48,01	(Hay un 50% de probabilidad de obtener un caudal < 315 m <sup>3</sup> /seg.)
27	339,94	146	3.941	2,00	53,99	3.358	46,01	
28	355,16	146	4.087	2,00	55,99	3.212	44,01	

Item	$x_i$ (m <sup>3</sup> /seg.)	$n_i$	Ni↑ Ascend.	% frecuencia simple $f_i$	% frec. acumul. Ascend. Fi ↑	Ni↓ Descend.	% frec. acumul. Descend. Fi ↓	Observaciones
29	371,71	146	4.233	2,00	57,99	3.066	42,01	
30	390,08	146	4.379	2,00	59,99	2.920	40,01	
31	408,03	146	4.525	2,00	61,99	2.774	38,01	
32	429,12	146	4.671	2,00	63,99	2.628	36,01	
33	448,34	146	4.817	2,00	65,99	2.482	34,01	(Asimetría o sesgo)
								(Hay un 65% de probabilidad de obtener un caudal $< \bar{X} = 436,36$ m <sup>3</sup> /seg. , o bien un 35 % de que sea $\geq \bar{X} = 436,36$ m <sup>3</sup> /seg.)
34	471,62	146	4.963	2,00	67,99	2.336	32,01	
35	494,83	146	5.109	2,00	69,99	2.190	30,01	
36	521,53	146	5.255	2,00	71,99	2.044	28,01	
37	548,85	146	5.401	2,00	73,99	1.898	26,01	
38	576,16	146	5.547	2,00	75,99	1.752	24,01	
39	604,42	146	5.693	2,00	77,99	1.606	22,01	
40	632,34	146	5.839	2,00	79,99	1.460	20,01	
41	665,34	146	5.985	2,00	81,99	1.314	18,01	
42	700,72	146	6.131	2,00	83,99	1.168	16,01	
43	742,71	146	6.277	2,00	85,99	1.022	14,01	
44	797,89	146	6.423	2,00	87,99	876	12,01	
45	857,05	146	6569	2,00	89,99	730	10,01	
								(Hay un 91% de probabilidad de obtener un caudal $< 887$ m <sup>3</sup> /seg. )
46	916,72	146	6.715	2,00	91,99	584	8,01	
47	999,61	146	6.861	2,00	93,99	438	6,01	
								(Hay un 95% de probabilidad de obtener un caudal $< 1.073$ m <sup>3</sup> /seg. )
48	1.145,56	146	7.007	2,00	95,99	292	4,01	
49	1.398,33	146	7.153	2,00	97,99	146	2,01	
50	2.022,46	146	7.299	2,00	99,99	0	0,01	
$\Sigma =$	<b>21.817'80</b>	<b>N = 7.299</b>		<b>99,99</b>				
		<b>Media aritmética</b>		$\bar{X} = 436,36$	<b>m<sup>3</sup>/seg.</b>			
20 años x 365 días/año =7.300 estimaciones								

Tabla A3-1. Clasificación de los caudales diarios del río Ebro, en el periodo 1966-85, en Tortosa.

Por otra parte, la distribución mensual de los caudales en el periodo analizado también puede verse en la tabla siguiente:

PROPUESTA DE GESTIÓN DE CAUDALES EN EL TRAMO INFERIOR DEL RÍO EBRO

Año	m <sup>3</sup> /seg.
Septiembre	217,79
Octubre	273,23
Noviembre	445,20
Diciembre	483,48
Enero	582,72
Febrero	698,52
Marzo	624,31
Abril	562,06
Mayo	520,46
Junio	492,53
Julio	224,28
Agosto	143,05
<b>Q. Medio</b>	<b>436,36</b>

Tabla A3-2. Caudales medios mensuales del periodo 1966-85.

El ajuste minimocuadrático a una parábola de sexto grado, con  $R^2 = 0,9529$ , puede verse gráficamente en el texto de nuestro Informe.

Con todos los datos relacionados, es posible configurar las tablas auxiliares de cálculo siguientes:

**Caudales:** 12 meses  
**Años:** 1966 a 1985  
**Coficiente:** 1,000

Item	$x_i$	$n_i$	% frecuencia simple $f_i$	$N_i \uparrow$	$N_i \downarrow$	$x_i * n_i$	$x_i^2 * n_i$	$n_i/x_i$	$\log x_i$	$n_i * \log x_i$
1	72,10	145	1,99	145,00	7.154,00	10.454,50	753.769,45	2,01	1,8579	269,40
2	85,06	146	2,00	291,00	7.008,00	12.418,76	1.056.339,73	1,72	1,9297	281,74
3	91,75	146	2,00	437,00	6.862,00	13.395,50	1.229.037,13	1,59	1,9626	286,54
4	99,81	146	2,00	583,00	6.716,00	14.572,26	1.454.457,27	1,46	1,9992	291,88
5	108,54	146	2,00	729,00	6.570,00	15.846,84	1.720.016,01	1,35	2,0356	297,20
6	115,61	146	2,00	875,00	6.424,00	16.879,06	1.951.388,13	1,26	2,0630	301,20
7	124,35	146	2,00	1.021,00	6.278,00	18.155,10	2.257.586,69	1,17	2,0946	305,82
8	134,51	146	2,00	1.167,00	6.132,00	19.638,46	2.641.569,25	1,09	2,1288	310,80
9	142,68	146	2,00	1.313,00	5.986,00	20.831,28	2.972.207,03	1,02	2,1544	314,54
10	153,38	146	2,00	1.459,00	5.840,00	22.393,48	3.434.711,96	0,95	2,1858	319,12
11	163,14	146	2,00	1.605,00	5.694,00	23.818,44	3.885.740,30	0,89	2,2126	323,03
12	173,69	146	2,00	1.751,00	5.548,00	25.358,74	4.404.559,55	0,84	2,2398	327,01
13	183,50	146	2,00	1.897,00	5.402,00	26.791,00	4.916.148,50	0,80	2,2636	330,49
14	193,67	146	2,00	2.043,00	5.256,00	28.275,82	5.476.178,06	0,75	2,2871	333,91
15	204,19	146	2,00	2.189,00	5.110,00	29.811,74	6.087.259,19	0,72	2,3100	337,27
16	211,37	146	2,00	2.335,00	4.964,00	30.860,02	6.522.882,43	0,69	2,3250	339,46

Item	$x_i$	$n_i$	% frecuencia simple $f_i$	$N_i \uparrow$	$N_i \downarrow$	$x_i * n_i$	$x_i^2 * n_i$	$n_i/x_i$	$\log x_i$	$n_i * \log x_i$
17	219,27	146	2,00	2.481,00	4.818,00	32.013,42	7.019.582,60	0,67	2,3410	341,78
18	228,96	146	2,00	2.627,00	4.672,00	33.428,16	7.653.711,51	0,64	2,3598	344,52
19	241,91	146	2,00	2.773,00	4.526,00	35.318,86	8.543.985,42	0,60	2,3837	348,01
20	254,78	146	2,00	2.919,00	4.380,00	37.197,88	9.477.275,87	0,57	2,4062	351,30
21	267,25	146	2,00	3.065,00	4.234,00	39.018,50	10.427.694,13	0,55	2,4269	354,33
22	278,98	146	2,00	3.211,00	4.088,00	40.731,08	11.363.156,70	0,52	2,4456	357,05
23	288,68	146	2,00	3.357,00	3.942,00	42.147,28	12.167.076,79	0,51	2,4604	359,22
24	301,64	146	2,00	3.503,00	3.796,00	44.039,44	13.284.056,68	0,48	2,4795	362,01
25	314,44	146	2,00	3.649,00	3.650,00	45.908,24	14.435.386,99	0,46	2,4975	364,64
26	326,02	146	2,00	3.795,00	3.504,00	47.598,92	15.518.199,90	0,45	2,5132	366,93
27	339,94	146	2,00	3.941,00	3.358,00	49.631,24	16.871.643,73	0,43	2,5314	369,58
28	355,16	146	2,00	4.087,00	3.212,00	51.853,36	18.416.239,34	0,41	2,5504	372,36
29	371,71	146	2,00	4.233,00	3.066,00	54.269,66	20.172.575,32	0,39	2,5702	375,25
30	390,08	146	2,00	4.379,00	2.920,00	56.951,68	22.215.711,33	0,37	2,5912	378,31
31	408,03	146	2,00	4.525,00	2.774,00	59.572,38	24.307.318,21	0,36	2,6107	381,16
32	429,12	146	2,00	4.671,00	2.628,00	62.651,52	26.885.020,26	0,34	2,6326	384,36
33	448,34	146	2,00	4.817,00	2.482,00	65.457,64	29.347.278,32	0,33	2,6516	387,13
34	471,62	146	2,00	4.963,00	2.336,00	68.856,52	32.474.111,96	0,31	2,6736	390,34
35	494,83	146	2,00	5.109,00	2.190,00	72.245,18	35.749.082,42	0,30	2,6945	393,39
36	521,53	146	2,00	5.255,00	2.044,00	76.143,38	39.711.056,97	0,28	2,7173	396,72
37	548,85	146	2,00	5.401,00	1.898,00	80.132,10	43.980.503,09	0,27	2,7395	399,96
38	576,16	146	2,00	5.547,00	1.752,00	84.119,36	48.466.210,46	0,25	2,7605	403,04
39	604,42	146	2,00	5.693,00	1.606,00	88.245,32	53.337.236,31	0,24	2,7813	406,08
40	632,34	146	2,00	5.839,00	1.460,00	92.321,64	58.378.665,84	0,23	2,8010	408,94
41	665,34	146	2,00	5.985,00	1.314,00	97.139,64	64.630.888,08	0,22	2,8230	412,16
42	700,72	146	2,00	6.131,00	1.168,00	102.305,12	71.687.243,69	0,21	2,8455	415,45
43	742,71	146	2,00	6.277,00	1.022,00	108.435,66	80.536.249,04	0,20	2,8708	419,14
44	797,89	146	2,00	6.423,00	876,00	116.491,94	92.947.754,01	0,18	2,9019	423,68
45	857,05	146	2,00	6.569,00	730,00	125.129,30	107.242.066,57	0,17	2,9330	428,22
46	916,72	146	2,00	6.715,00	584,00	133.841,12	122.694.831,53	0,16	2,9622	432,49
47	999,61	146	2,00	6.861,00	438,00	145.943,06	145.886.142,21	0,15	2,9998	437,98
48	1.145,56	146	2,00	7.007,00	292,00	167.251,76	191.596.926,19	0,13	3,0590	446,62
49	1.398,33	146	2,00	7.153,00	146,00	204.156,18	285.477.711,18	0,10	3,1456	459,26
50	2.022,46	146	2,00	7.299,00	0,00	295.279,16	597.190.289,93	0,07	3,3059	482,66
<b>Suma</b>	<b>21.817,80</b>	<b>7.299</b>	<b>99,99</b>			<b>3.185.326,70</b>	<b>2.390.856.733,22</b>	<b>29,86</b>		<b>18.323,48</b>
	<b>Media aritmética:</b>		$\bar{X} = 436,36$	$m^3/seg.$						

Tabla A3-3. Tabla auxiliar de cálculo-I.

Teóricamente, correspondería realizar, a lo largo de dos décadas:  $N = 20$  años  $\times 365,25$  días/año = 7.305 estimaciones. La tabla anterior resulta útil para la determinación de diferentes promedios (medias aritmética, cuadrática, geométrica y armónica), mientras la siguiente lo será para el cálculo de otras características relevantes de esta distribución de frecuencias (desviaciones, momentos factoriales, asimetrías, curtosis y coeficientes de uniformidad hidráulica).

PROPUESTA DE GESTIÓN DE CAUDALES EN EL TRAMO INFERIOR DEL RÍO EBRO

Caudales: 12 meses  
 Años: 1966 a 1985  
 Coeficiente: 1,000

Item	$x_i$	$n_i$	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - 436,36)^3 * n_i$	$(x_i - 436,36)^4 * n_i$	$ x_i - \bar{X}  * n_i$
1	72,10	145	-364,26	-7.007.904.013,96	2.552.671.084.510,08	52.817,12
2	85,06	146	-351,30	-6.329.544.682,94	2.223.543.728.939,15	51.289,22
3	91,75	146	-344,61	-5.974.772.316,48	2.058.942.388.893,65	50.312,48
4	99,81	146	-336,55	-5.565.268.925,51	1.872.968.995.804,05	49.135,72
5	108,54	146	-327,82	-5.143.317.045,25	1.686.061.620.505,96	47.861,14
6	115,61	146	-320,75	-4.817.665.057,10	1.545.246.796.403,33	46.828,92
7	124,35	146	-312,01	-4.434.469.712,95	1.383.581.157.259,19	45.552,88
8	134,51	146	-301,85	-4.015.218.012,32	1.211.977.496.145,65	44.069,52
9	142,68	146	-293,68	-3.697.926.071,37	1.085.992.136.936,15	42.876,70
10	153,38	146	-282,98	-3.308.275.477,83	936.162.561.613,71	41.314,50
11	163,14	146	-273,22	-2.977.633.501,95	813.537.114.868,19	39.889,54
12	173,69	146	-262,67	-2.645.845.235,79	694.973.584.705,05	38.349,24
13	183,50	146	-252,86	-2.360.329.563,76	596.823.492.172,87	36.916,98
14	193,67	146	-242,69	-2.086.829.784,38	506.444.373.051,71	35.432,16
15	204,19	146	-232,17	-1.827.042.764,19	424.177.210.391,02	33.896,24
16	211,37	146	-224,99	-1.662.720.836,82	374.088.910.191,75	32.847,96
17	219,27	146	-217,09	-1.493.648.149,51	324.250.102.183,46	31.694,56
18	228,96	146	-207,40	-1.302.428.778,30	270.118.518.903,88	30.279,82
19	241,91	146	-194,45	-1.073.371.096,57	208.712.716.243,84	28.389,12
20	254,78	146	-181,58	-874.033.723,61	158.703.547.397,62	26.510,10
21	267,25	146	-169,11	-706.040.975,99	119.395.765.286,29	24.689,48
22	278,98	146	-157,38	-569.073.502,13	89.558.511.472,00	22.976,90
23	288,68	146	-147,68	-470.199.991,55	69.437.253.952,20	21.560,70
24	301,64	146	-134,72	-356.952.471,64	48.087.209.170,12	19.668,54
25	314,44	146	-121,92	-264.566.572,83	32.254.898.293,13	17.799,74
26	326,02	146	-110,34	-196.112.177,67	21.638.233.235,12	16.109,06
27	339,94	146	-96,42	-130.857.972,10	12.616.802.237,74	14.076,74
28	355,16	146	-81,20	-78.154.998,75	6.345.873.278,52	11.854,62
29	371,71	146	-64,65	-39.443.716,57	2.549.878.501,36	9.438,32
30	390,08	146	-46,28	-14.468.392,87	669.539.348,53	6.756,30
31	408,03	146	-28,33	-3.318.246,22	93.992.642,40	4.135,60
32	429,12	146	-7,24	-55.315,71	400.264,51	1.056,46
33	448,34	146	11,98	251.280,19	3.011.341,83	1.749,66
34	471,62	146	35,26	6.402.470,33	225.776.713,58	5.148,54
35	494,83	146	58,47	29.190.481,99	1.706.884.243,62	8.537,20
36	521,53	146	85,17	90.214.009,64	7.683.888.057,47	12.435,40
37	548,85	146	112,49	207.845.647,40	23.381.388.258,49	16.424,12
38	576,16	146	139,80	398.943.733,77	55.773.929.755,95	20.411,38
39	604,42	146	168,06	693.069.748,61	116.480.074.229,78	24.537,34

Item	$x_i$	$n_i$	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - 436,36)^3 \cdot n_i$	$(x_i - 436,36)^4 \cdot n_i$	$ x_i - \bar{X}  \cdot n_i$
40	632,34	146	195,98	1.099.043.058,65	215.394.854.806,17	28.613,66
41	665,34	146	228,98	1.752.944.913,15	401.396.337.992,45	33.431,66
42	700,72	146	264,36	2.697.489.724,49	713.119.173.525,30	38.597,14
43	742,71	146	306,35	4.197.817.187,40	1.286.018.086.629,26	44.727,68
44	797,89	146	361,53	6.899.224.775,86	2.494.304.330.115,88	52.783,96
45	857,05	146	420,69	10.870.557.311,36	4.573.178.237.545,22	61.421,32
46	916,72	146	480,36	16.183.192.995,80	7.773.823.320.234,67	70.133,14
47	999,61	146	563,25	26.089.497.208,84	14.695.013.660.867,40	82.235,08
48	1.145,56	146	709,20	52.079.449.511,47	36.934.953.911.330,70	103.543,78
49	1.398,33	146	961,97	129.969.922.016,56	125.027.685.761.960,00	140.448,20
50	2.022,46	146	1.586,10	582.569.625.008,29	924.016.012.504.141,00	231.571,18
<b>Suma</b>	<b>21.817,80</b>	<b>7.299</b>	<b>0,00</b>	<b>764.407.191.999,17</b>	<b>1.139.667.781.026.550,00</b>	<b>1.953.136,77</b>
	<b>Media aritmética:</b>		$\bar{X} = 436,36$	$m^3/\text{seg.}$		
20 años x 365 días/año = 7.300 estimaciones						

Tabla A3-4. Tabla auxiliar de cálculo-II.

## 4.2. Otras medidas del valor central

### \* Mediana:

En el caso de la distribución de frecuencias unitarias contemplada, veamos que su valor es:

$$Me = \frac{314'44 + 326'02}{2} = 320'23 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

Por otra parte, los cuartiles de esta distribución pueden verse en el siguiente cuadro:

$Q_0 = 72'10 \text{ m}^3/\text{seg.}$ (Valor menor de la serie)
$Q_1 = 183'50 \text{ m}^3/\text{seg.}$ (Primer cuartil)
$Q_2 = Me = 320'23 \text{ m}^3/\text{seg.}$ (Segundo cuartil)
$Q_3 = 576'16 \text{ m}^3/\text{seg.}$ (Tercer cuartil)
$Q_4 = 2.022'46 \text{ m}^3/\text{seg.}$ (Valor mayor de la serie)

### \* Media cuadrática:

$$C = \sqrt{\sum_{i=1}^{50} x_i^2 \cdot n_i / n} = \sqrt{2.390.856.733'22 / 7.299} = 572'32 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

**\* Media geométrica:**

$$G = \sqrt[7.299]{\prod_{i=1}^{50} x_i^{n_i}} = \text{antilog.} \frac{\sum_{i=1}^{50} n_i \cdot \log x_i}{n} =$$

$$= \text{antilog } 18.323'48 / 7.299 = 323'90 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

**\* Media armónica:**

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{50} \frac{n_i}{x_i}} = \frac{7.299}{29'86} = 244'44 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

Desde luego, las cuatro medias aquí estudiadas quedan ordenadas, con arreglo a su magnitud, del modo siguiente:

armónica < geométrica < aritmética < cuadrática

$$(H = 244'44) < (G = 323'90) < (\bar{X} = 436'36) < (C = 572'32)$$

De hecho, la relación matemática existente entre las medias aritmética, geométrica, cuadrática y armónica, para una misma distribución de frecuencias con todos sus datos positivos, debe cumplir la monotonía ascendente:

$$H \leq G \leq \bar{X} \leq C$$

En efecto. Consideremos el caso más sencillo de una distribución con dos valores de la variable con frecuencias unitarias y que con dichos valores pueden calcularse los cuatro promedios antedichos:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2}{\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}} = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}$$

$$G = \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2}{2}; C = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

Vamos a demostrar en primer lugar que  $H \leq G$ , o sea:

$$\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \leq \sqrt{x_1 x_2}$$

Elevando al cuadrado los miembros de la anterior desigualdad y operando:

$$4x_1^2x_2^2 \leq x_1x_2(x_1 + x_2)^2 \quad ; \quad 4x_1x_2 \leq (x_1 + x_2)^2$$

$$4x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \quad ; \quad 0 \leq x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2$$

Con lo que queda demostrado que  $H \leq G$ . Por otro lado  $G \leq \bar{X}$  ya que:

$$\sqrt{x_1x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad 4x_1x_2 \leq (x_1 + x_2)^2$$

Con lo que se tendrá que:

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2$$

Por tanto, queda demostrado que  $H \leq G \leq \bar{X}$ . Por último, teniendo en cuenta la relación que liga la media cuadrática con la aritmética y la varianza, esto es:  $C^2 = \bar{X}^2 + \sigma^2$ , se deduce que:  $\bar{X} \leq C$ , como se quería demostrar.

Esta demostración también puede generalizarse para cualquier número de valores de la variable hidráulica en estudio. En cualquier caso, la demostración de la última desigualdad también puede realizarse analíticamente a partir de la definición de ambas medias, esto es:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad C = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

$$\bar{X}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}{4} \quad ; \quad C^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{4}$$

$$\bar{X}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} + \frac{x_1x_2}{2} \quad ; \quad C^2 - \bar{X}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} - \frac{x_1x_2}{2} \quad ;$$

Obsérvese que esta diferencia de fracciones debe ser necesariamente positiva o nula. En efecto, se trata de comparar las expresiones:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{4} \quad \text{y} \quad \frac{2x_1x_2}{4} \quad , \quad \text{o más concretamente sus numeradores, o sea:}$$

$x_1^2 + x_2^2$  y  $2x_1x_2$ . Como se tiene que el cuadrado de una diferencia ofrece:

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2 \quad ,$$

con lo que también:  $C^2 \geq \bar{X}^2$ , y además:  $\bar{X} \leq C$ , c.s.q.d.

### 4.3. Medidas de dispersión o concentración

Por lo que se refiere a la desviación típica o "standard" del universo, como medida de la dispersión absoluta de la distribución de nuestra variable hidráulica  $Q_i$  (caudal del río Ebro en su tramo final), veamos que su valor vendrá dado por:

$$\sigma = \sqrt{C^2 - \bar{X}^2} = \sqrt{572'32^2 - 436'36^2} = 370'32 \text{ m}^3/\text{seg.},$$

y un coeficiente de variación de Pearson (medida de dispersión relativa) de:

$$CV = \sigma / \bar{X} = 370'32 / 436'36 \approx 0'849 = 84'9\%, \text{ ciertamente elevado.}$$

Por otra parte, se tendrá que:  $\sum x_i^2 = 16.375.766'66$ , con:  
 $s = 374'04 \text{ m}^3/\text{seg.}$  (desviación típica de la muestra)

Recorrido intercuartílico:

$$Q_3 - Q_1 = 576'16 - 183'50 = 392'66 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

Coefficiente de variación cuartílica (coeficiente de dispersión relativa cuartílica):

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{576'16 - 183'50}{576'16 + 183'50} = \frac{392'66}{759'66} = 0'517,$$

es decir, que en ambos casos, la medida de dispersión relativa empleada representa un porcentaje importante del correspondiente promedio. **Desde luego, ello indicaría que el grado de dispersión de los caudales de esta serie de 20 años resulta francamente elevado. En efecto, los coeficientes de uniformidad definidos en nuestro estudio, tomarán, en este caso, los siguientes valores:**

$$\begin{cases} CU_1 = 100 \cdot (1 - CV) = 100 \cdot (1 - 0'849) = 15'1\% \\ CU_3 = 100 \cdot (1 - 1'27 \cdot CV) = 100 \cdot (1 - 1'27 \cdot 0'849) = \pm 7'8\% \\ CU_4 = 100 \cdot (1 - 0'80 \cdot CV) = 100 \cdot (1 - 0'80 \cdot 0'849) = 32'1\% \end{cases}$$

debiendo considerarse también que:

$$CU_2 = (Q_1 / \bar{X}) \cdot 100 = (183'50 / 436'36) \cdot 100 = 42'1\%$$

, si bien otra determinación del mismo coeficiente de uniformidad hidráulica<sup>1</sup> conduciría al valor:

---

<sup>1</sup> Para mayores especificaciones y detalles acerca del concepto "coeficiente de uniformidad hidráulica", puede verse nuestro libro "Cinco temas de Hidrología e Hidráulica", capítulo III.1, citado en la bibliografía.

$$CU_2 = 100 (1 - 0'68 \cdot CV) = 100 (1 - 0'68 \times 0'849) = 42'3\% ,$$

cuya pequeña discrepancia (+0'2%) con el resultado anterior débese al propio ajuste de normalidad, o bien al propio proceso de cálculo decimal.

Veamos, por último, que el "coeficiente de uniformidad hidráulica medio", ofrecerá un valor de:

$$\overline{CU} = 100 (1 - 0'92 \cdot CV) = 100 (1 - 0'92 \times 0'849) = 21'9\% ,$$

mientras que también:

$$CU_5 = 100 \cdot \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}} = 100 \cdot \sqrt{\frac{183'50}{576'16}} = 56'4\%$$

La representación gráfica de los valores de los diferentes coeficientes de uniformidad hallados, en definitiva, es la siguiente:

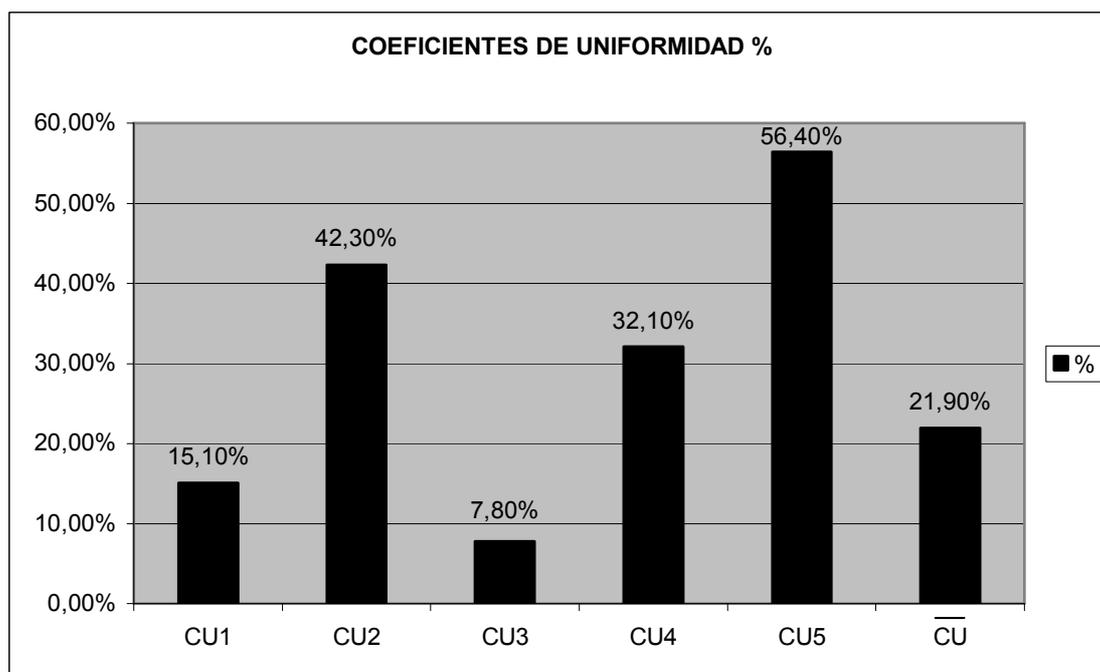


Fig. A3-1. Valores de los diferentes coeficientes de uniformidad hidráulica.

#### 4.4. Otras características de la distribución de frecuencias

Por lo que se refiere a las restantes características de la distribución de la variable hidráulica "caudal" a lo largo del periodo en estudio, veamos que una de la asimetría o sesgo la constituye el denominado "2º coeficiente de asimetría de Pearson":

$$P_2 = \frac{3 \cdot (\bar{X} - M_e)}{\sigma} = \frac{3 \cdot (436'36 - 320'23)}{370'32} = 0'941 > 0 ,$$

de lo que se deduce que esta distribución de frecuencias es asimétrica hacia la derecha, con un “coeficiente de sesgo cuartílico” de valor:

$$\frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{576'16 - 2 \cdot 320'23 + 183'50}{576'16 - 183'50} = 0'304$$

Además se cumple que:

$$\bar{X} = 436'36 \text{ m}^3/\text{seg.} > M_e = 320'23 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

De los resultados de las tablas de cálculo que se acompañan, se deduce que el momento central (respecto a la media aritmética) de tercer orden es:

$$m_3 = \frac{764.407.191.999'17}{7.299} = 104.727.660 ,$$

por lo que se tendrá un "coeficiente directo de asimetría" o "coeficiente de sesgo" de Fisher de:

$$g_1 = m_3 / \sigma^3 = 104.727.660 / 370'32^3 = 2'06 ,$$

que confirma la asimetría hacia la derecha (positiva) anteriormente expresada (en curvas simétricas como la normal, se cumple que:  $g_1 = g_1^2 = 0$ ).

Por otra parte,

$$m_4 = \frac{1.139.667.781.026.550}{7.299} = 156.140.263.190$$

que es el momento central o respecto al origen, de 4.º orden y, por tanto, se tendrá un “coeficiente de curtosis” de Fisher de:

$$g_2 = \frac{m_4}{\sigma_4} - 3 = \frac{156.140.263.190}{370'32^4} - 3 = 8'3 - 3 = 5'3 > 0 ,$$

tratándose, pues, de una distribución **leptocúrtica** (la curva normal tiene, como es sabido, un valor  $g_2 = 0$ ).

Veamos, así mismo, que la anterior tabla auxiliar de cálculo núm. A3-4, en su última columna, nos permitirá el cálculo de otra medida de dispersión absoluta a la que ya nos hemos referido con anterioridad: la desviación media

respecto a la media aritmética (que sería mínima con respecto a la mediana), a saber:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{50} |x_i - \bar{X}| \cdot n_i}{N} = \frac{1.953.136'77}{7.299} = 267'59 \text{ m}^3 / \text{seg.}$$

Este valor debe ser también aproximadamente igual a:

$$\frac{4 \cdot \sigma}{5} = \frac{4 \cdot 370'32}{5} = 296'26 \text{ m}^3 / \text{seg.}$$

Este valor de la DM, en la presente distribución agrupada de frecuencias, conducirá a una determinación más ajustada y directa del valor del coeficiente de uniformidad hidráulica  $CU_4$ , a saber:

$$CU_4 = 100 \left( 1 - \frac{DM}{\bar{X}} \right) = 100 \left( 1 - \frac{296'26}{436'36} \right) = 32'1\% ,$$

que coincide exactamente con el anteriormente calculado mediante procedimientos indirectos.

Veamos, por último, que la “función de densidad” normal (aunque ya hemos visto que esta distribución de probabilidad se aleja bastante de una distribución típicamente normal) tomará la configuración analítica:

$$y = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{370'32 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-436'36)^2}{2 \cdot 370'32^2}} = \frac{1}{928'25} \cdot e^{-\frac{(x-436'36)^2}{274.273'8}}$$

Sería conveniente, pues, la búsqueda de una distribución teórica de probabilidad más adecuada al caso que nos ocupa.

