Capítulo I

LÓGICA MATEMÁTICA

Aristóteles

Aristóteles nasceu em Estagira em 384a.C. e faleceu em Calcis (Eubea), em 322a.C. Estudou com Platão durante vinte anos e lecionou na Academia que Platão fundou.

Depois de viajar por vários países, voltou a Atenas, onde abriu uma escola de Filosofia, que competiu com seriedade e exito com a Academia de seu mestre.

Esteve bastante ligado com Alexandre o Grande (356-323a.C.), de quem havia sido conselheiro, razão pela qual, à morte de este, teve que abandonar Atenas, onde não pode mais ingressar.

Aristóteles representa o ponto máximo da ciência e filosofia clássica, as quais contribuiu como pensador excepcional e como pesquisador audacioso e sistemático. É daí que praticamente todas suas obras estão relacionadas com a ciência da natureza, além da lógica, da metafísica, da ética, da política, da retórica e da poética, algo assim como uma enciclopédia do saber de sua época.

1.1 EVOLUÇÃO DA LÓGICA

1.1.1 Introdução.

Podemos pensar a lógica como o estudo do raciocínio correto. O raciocínio é o processo de obter conclusões a partir de suposições ou fatos. O raciocínio correto é o raciocínio onde as conclusões seguem-se necessária e inevitavelmente das suposições ou fatos.

A lógica procura estudar as coisas da mente, e não as coisas reais. Por exemplo, quando dizemos: arco-íris bonito, sol distante, praia suave são classificações que damos às coisas. Aplicamos lógica na filosofia, matemática, computação, física entre outros.

Na filosofia para determinar se um certo raciocínio é válido ou não, pois uma frase pode ter diferentes interpretações, não obstante a lógica permite saber o significado correto. Nas matemáticas para demonstrar teoremas e inferir resultados corretos que podam ser aplicados nas pesquisas. Na computação para determinar se um determinado "*programa*" é correto ou não, na física para obter conclusões de experimentos. Em geral a lógica aplicamos nas tarefas do dia-dia, qualquer trabalho que realizarmos tem um procedimento lógico.

A lógica é somente mais uma teoria do pensamento; Aristóteles é considerado o criador da lógica, porem o nome "*lógica*" veio bem depois. No início ela não tinha um nome. Para Aristóteles, a lógica seria um modo a ser usado para as pessoas poderem raciocinar com segurança (evitando errar).

Observe um exemplo da *lógica dedutiva* de Aristóteles:

- Todo planeta é quadrado.
- A Terra é um planeta.
- Logo, a Terra é quadrada.

É *lógica dedutiva* pelo fato que ao começar com algumas informações, pode-se chegar a uma conclusão (deduzir!); esta investigação é chamada de *Silogismo*.

Esta lógica não se preocupa com o fato de a Terra ser quadrada, mesmo que se saiba que ela é redonda. Pouco importa, ela aceita a informação que lhe foi dada. Mas exige que o raciocínio esteja correto. Preocupa-se com a forma: A = B, então, B = A. Ela não presta atenção ao conteúdo: A ou B podem ser planetas, burros, plantas, etc. Por isso, esta lógica é *formal* (de forma) e dedutiva (de *dedução*).

A nossa lógica formal dedutiva funciona assim: a partir de uma seqüência de orações verdadeiras chegamos a uma conclusão verdadeira; a lógica sempre utiliza uma linguagem exata (símbolos, sinais). Isso simplifica e facilita seu estudo.

Aristóteles também elaborou a argumentação *lógica indutiva*.

- A baleia, o homem e o cãozinho são mamíferos.
- A baleia, o homem e o cãozinho mamam.
- Logo, os mamíferos mamam.

Ou seja, de enunciados singulares chegamos a um universal.

Mais tarde, Bacon e Stuart Mill aprofundaram esses ensinamentos e dividiram a lógica em três áreas:

1. **Formal**: Aquela que acabamos de explicar.
2. **Transcendental**: Esta lógica estuda as condições que dão base ao nosso conhecimento. Kant explicou que o intelecto tende a colocar todo em ordem, cada tijolinho no lugar. Aliás, cada pessoa já possui uma lógica natural ao interpretar e classificar o que ela vivencia.
3. **Matemática**: Os filósofos desenvolveram a *lógica matemática* há pouco tempo (Frege, Pea no, Russell e outros). Ela origina fórmulas de outras fórmulas, é puro raciocinio. São regras e mais regras inventadas, como jogos de cartas.

Hegel, no entanto, achava que a lógica referia-se ao pensamento e à realidade; disse que:

"todo o que é racional é real, e todo o que é real é racional".

A lógica é uma ciência, uma arte, um jogo; todo se passa como em um tabuleiro de xadrez.

Mas vejamos também um outro tipo de lógica, a que considera a verdade (o conteúdo). Ela considera o desconhecido, a dúvida, a opinião, a certeza.

É chamada de *lógica material*. Ela não aceita o fato se alguém diz que a Terra é quadrada. Temos alguns conceitos nesta lógica:

- "**Ignorância"** é a falta do conhecimento.
- "**Dúvida"** é a indecisão entre uma afirmação e uma negação.
- "**Opinião"** é uma opção que envolve a dúvida.
- "**Certeza"** é um firme apego à verdade.

A verdade pode gerar muita discussão e barulho. Afinal, como podemos saber o que é mesmo a verdade? Os "*céticos*", por exemplo, acham que não podemos afirmar nada; pois todo é incerto.

Já quem segue o dogmatismo considera que a razão humana pode conhecer a verdade. E há muitas outras posições sobre a verdade: positivistas, idealistas e outras.

O importante é saber que a verdade varia conforme os muitos sistemas filosóficos. Isso pode ser poético. Existem verdades e a lógica utiliza a que deseja utilizar. A *lógica material* defende a verdade na qual acredita de perigos como o "*sofisma".*

"Sofisma" é um raciocínio errado com a aparência de verdadeiro, tem a intenção de conduzir ao erro; observe o raciocínio:

- Maria Alice é bonita.
- Maria Clara é bonita.
- Logo, todas as Marias são bonitas.

Você já imaginou o que seria se não existisse lógica nas coisas? Já imaginou se nada fizesse sentido? Hoje, a lógica é fundamental em nossa sociedade. Dizemos que ela está na informática, no ensino, na matemática, na medicina, etc.

Logo, o resumo de todo isto, é que podemos considerar como sendo válida a seguinte definição.

Definição 1.1 Lógica.

Define-se lógica como "a ciência da argumentação, prova, reflexão ou inferência". Ela lhe permitirá analisar um argumento ou raciocínio e deliberar sobre sua veracidade. A lógica não é um pressuposto para a argumentação, é claro; mas conhecendo-a, mesmo que superficialmente, torna-se mais fácil evidenciar argumentos inválidos.

1.1.2 Evolução da lógica.

1.1.2.1 Período Aristotélico (± 390 a.C. a ± 1.840 d.C.)

A história da lógica tem início com o filósofo grego Aristóteles de Estagira (384 - 322a.C.) (hoje Estavo) na Macedônia. Aristóteles criou a ciência da lógica cuja essência era a teoria do *silogismo* (certa forma de argumento válido). Seus escritos foram reunidos na obra denominada "*Organon*" ("*Instrumento da Ciência*"). Na Grécia, distinguiram-se duas grandes escolas de lógica, a:

- **Peripatética** que derivava da escola fundada por Aristóteles, e a;
- **Estóica** fundada por Zenão (326-264a.C.).

A escola **Estóica** foi desenvolvida por Crisipo (280-250a.C.) a partir da escola **Megária** fundada por Euclides, (seguidor de Sócrates). Segundo Kneale ("*O Desenvolvimento da lógica"*), houve durante muitos anos certa rivalidade entre os Peripatéticos e os Megários, isto talvez tenha prejudicado o desenvolvimento da lógica, embora na verdade as teorias destas escolas fossem complementares.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) merece ser citado, apesar de seus trabalhos terem tido pouca influência nos 200 anos seguidos e só foram apreciados e conhecidos no século XIX.

1.1.2.2 Período Booleano (± 1840 a ± 1910)

Inicia-se com George Boole (1815-1864) e Augustus de Morgam (1806-1871). Publicaram os fundamentos da chamada "*Álgebra da lógica"* respectivamente com "*Mathematical Analysis of Logic"*' e "*Formal Logic*". Gotlob Frege (1848-1925) um grande passo no desenvolvimento da lógica com a obra "*Begriffsschrift*" de 1879. As idéias de Frege só foram reconhecidas pelos lógicos mais ou menos a partir de 1905. É devido a Frege o desenvolvimento da lógica que se seguiu. Giuseppe Peano (1858-1932) e sua escola com Burali Forti, Vacca, Pieri, Pádoa, Vailati, etc. Quase toda a simbologia da matemática se deve a essa escola italiana.

1.1.2.3 Período Atual (1910- . . .)

Com Bertrand Russell (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947) se inicia o período atual da lógica, com a obra "*Principia Mathematica*". David Hilbert (1862-1943) e sua escola alemã com Von Neuman, Bernays, Ackerman e outros. Kurt Gödel (1906-1978) e Alfred Tarski (1902-1983) com suas importantes contribuições. Surgem as lógicas não-clássicas: N.C.A. da Costa (Universidade de São Paulo) com as lógicas paraconsistentes, L. A. Zadeh (Universidade de Berkeley-USA) com a lógica ``fuzzy'' e as contribuições dessas lógicas para a Informática, no campo da "*Inteligência Artificial"* com os "*Sistemas Especialistas*".

Hoje as especialidades se multiplicam e as pesquisas em lógica englobam muitas áreas do conhecimento.

1.2 UMA CLASSIFICAÇÃO DA LÓGICA

1.2.1 Lógica Indutiva.

Útil no estudo da teoria da probabilidade, não será abordada.

1.2.2 Lógica Dedutiva.

Que pode ser dividida em:

- **Lógica Clássica**: Considerada como o núcleo da lógica dedutiva. É o que chamamos hoje de "*Cálculo de predicados de primeira ordem"*' com ou sem igualdade e de alguns de seus subsistemas. Três princípios (entre outros) regem a lógica clássica: Da *identidade*. Da *contradição*; e. Do *terceiro excluído* os quais serão abordados mais adiante.
- **Lógicas Complementares da Clássica**: Complementam de algum modo a lógica clássica estendendo o seu domínio. Estas são: *lógica modal, lógica deôntica, lógica epistêmica* entre outras.

- **Lógicas Não-clássicas**: Assim caracterizadas por desconsiderar algum ou alguns dos princípios da lógica clássica. Sendo estas: *lógica paracompleta* e *lógica intuicionista* (desconsideram o princípio do terceiro excluído); *lógica paraconsistente* (desconsidera o princípio da contradição); *lógica não-alética* (desconsidera o terceiro excluído e o da contradição); *lógica não-reflexiva* (desconsidera o princípio da identidade); *lógica probabilística, lógica polivalente*, *lógica fuzzy* entre outras.

1.2.3 O que a lógica não é.

Vale fazer alguns comentários sobre o que a lógica não é.

Primeiro: A lógica não é uma lei absoluta que governa o universo. Muitas pessoas, no passado, concluíram que se algo era logicamente impossível (dada a ciência da época), então seria sempre literalmente impossível. Acreditava-se também que a geometria euclidiana era uma lei universal; afinal, era logicamente consistente. Mas sabemos que tais regras geométricas não são universais.

Segundo: A lógica não é um conjunto de regras que governa o comportamento humano. Pessoas podem possuir objetivos logicamente conflitantes. Por exemplo:

- Pedro quer falar com o Coordenador do Curso de Matemática.
- O Coordenador é Carlos.
- Logo, Pedro quer falar com Carlos.

Infelizmente, pode ser que Pedro também deseje, por outros motivos, evitar contato com Carlos, tornando seu objetivo conflitante. Isso significa que a resposta lógica nem sempre é praticável.

1.2.4 O que é a lógica matemática?

Tem-se tentado caracterizar a matemática ao longo dos tempos, quer quanto a seu conteúdo, ou a sua forma e métodos; acontece que a matemática constantemente está evoluindo com novas teorias, assim é mais proveitoso caracterizar estes conhecimentos matemáticos quanto à natureza de seus conteúdos.

No inicio do século XIX tentou-se caracterizar as matemáticas como uma *ciência da quantidade*, embora esta concepção ainda perdure na mente da maioria das pessoas esta errada. Com o desenvolvimento de novas teorias como, por exemplo: Teorias algébricas ou de ordens; estruturas topológicas, a moderna teoria da medida, a teoria dos conjuntos, etc. Todas estas novas teorias foram se impondo de modo natural, de modo que a fines do século XIX muitas disciplinas matemáticas são denominadas pela idéia de *estrutura* de tal modo que desde que N. Bourbaki[1] começou a publicar seu tratado *Éléments de Mathématique* em 1939, a matemática é concebida como a *ciência das estruturas*.

---

[1] Nicolas Bourbaki (1936- . .): Seu nome está escrito em grego, sua nacionalidade é francesa e sua história muito curiosa [9]. É um dos matemáticos mais influentes do século XX, existem muitas lendas sobre ele

Os lógicos profissionais preferem desenvolver e aplicar a *lógica matemática* a defini-la, mas, quando instados, encaram sua atividade como relativa essencialmente a um ou a outro dos aspectos seguintes:

Aspecto explicativo: A lógica matemática é um sofisticado instrumento da análise e ulterior formalização de fragmentos dos discursos coloquiais das ciências, em particular na matemática (competindo parcialmente com a lingüística geral).

Aspecto calculativo: A lógica matemática considerada como instrumento do cálculo formal destinado a substituir a argumentação indutiva e formal que consiste na:

a) Demonstração de uma proposição **q** a partir de certas hipóteses **p**?

b) Não demonstração de **q** a partir de **p**?

c) Indecibilidade do problema da demonstrabilidade de **q** a partir de **p**?

Os ramos da lógica matemática, organizam-se pelo seus aspectos em cinco ramos com suas especificações próprias interligados entre sim a saber: **i)** Teoria da demonstração; **ii)** Teoria dos conjuntos; **iii)** Teoria dos modelos; i**v)** Teoria da computabilidade; **v)** Lógica matemática intuicinista/construtivista.

1.3 ENUNCIADOS. PROPOSIÇÕES

Todos nós usamos a lógica no dia-dia, às vezes sem nos darmos conta disso.

Exemplo 1.1

Seu pai lhe diz:

> *"Se você tirar dez em Física e Matemática, lhe darei um presente. Você sabe que não basta tirar 10 apenas em Física ou apenas em Matemática. Para ganhar o presente, é necessário tirar dez nas duas disciplinas".*

Se por outro lado ele dissesse:

> *"Se você tirar dez em Física ou Matemática, lhe darei um presente; aí bastaria tirar dez em uma das matérias".*

Esse foi um exemplo simples da utilização da lógica. Muitos outros poderiam ser listados.

O que os matemáticos fizeram foi dar um aspecto matemático à lógica, além de aprimorá-la. Mas a idéia fundamental é antiga.

As, pessoas, em geral, pretendem raciocinar agir "*logicamente*", no dia-dia, nos estudos, falando de política, futebol, de seus projetos ou do futuro da humanidade.

No entanto, a *lógica* que fundamenta os raciocínios e as ações raramente é explicada ou submetida a críticas. Ela é incorporada de forma inconsciente a partir, sobretudo, do aprendizado da língua natural e parece tão bem partilhado por todos que poucos se julguem carentes de lógica ou considerem necessário estudá-la.

Por outro lado, é muito freqüente ouvirmos dizer que estudar matemática desenvolve o raciocínio lógico. Apesar de esta relação não ser totalmente certa, a percepção da estreita relação entre a matemática e lógica, entre a lógica e linguagem, entre a linguagem e o pensamento contribui bastante para esclarecer muitas razões pelas quais estudamos certos assuntos sobre todo matemática.

Na linguagem natural utilizamos *frases* de vários tipos:

Declarativas:

- Fredy é escritor.
- Todos os gatos são pardos.
- Existem estrelas maiores que o Sol.

Imperativas:

- Segure firme!
- Não faça isso.
- Procure a entrada.

Interrogativas:

- Quando será a prova de Fundamentos?
- Quantos peruanos trabalham na Coordenação de Matemática?

Exclamativas:

- Que loira bem gelada!
- Parabéns a você!

Não serão objeto de estudo as sentenças imperativas, interrogativas ou exclamativas.

1.3.1 Noção de raciocínio.

A noção de raciocínio está presente em todos os estudos da lógica

Freqüentemente quando falamos de lógica, pensamos em *razão*. Segundo a definição de nossa linguagem, a *razão* é a faculdade que tem o ser humano de avaliar, julgar e ponderar idéias universais.

Entendemos como *raciocinar* ao fato de utilizar da razão para conhecer, para julgar da relação das coisas. Assim, raciocínio é o ato ou efeito de raciocinar.

O raciocínio argúi as premissas que inferem resultados exatos e coincidentes com elas, e pretende, no melhor dos casos, ser o resultado de um processo orgânico de “*isso*” que chamamos cérebro humano.

1.3.2 Noção de verdade.

O método que usamos para saber se uma situação é verdadeira é o que chamamos de *linguagem veritativo*, é a parte da linguagem clássico que utiliza os termos de verdade, falsidade, etc.

Existe duvidas entre os mesmos especialistas, quais as regras que se deve utilizar em nossa própria linguagem. Por isso não deveremos desvalorizar ou negar o critério que tem as pessoas em comum do conceito de verdade. Ao perguntar a uma pessoa *o que é verdade*? Com certeza será uma pergunta bastante difícil de responder, isto devido ao fato que o conceito de *verdade* é uma tarefa de análise filosófica e não de levantamento de dados.

Para a verdade, não existe um critério geral que a obtenha como aplicável a todos os casos, porém que são sempre parciais e confiáveis.

Estamos interessados somente na pergunta do verdadeiro aplicado a o que dizemos, e não a objetos, pessoas, etc. Deste modo a verdade sim podemos defini-la e teorizar-la. Não depende de conhecimentos necessários (embora sim vice-versa)

Definição 1.2 Enunciado.

Um enunciado é qualquer frase ou oração.

Exemplo 1.2

a) A Lua é um satélite da Terra.

b) $3 + 2 = 1+4$

c) $x + 3 = 5$

d) Sócrates é o mestre de Platão.

e) 8 é um número primo.

f) O rio Paraná.

Aqui estamos utilizando o conceito de identidade, expresso pelo símbolo de igualdade (=); isto é claro no exemplo **b).** Nos enunciados **a), d)** e **e)** o "**é**" não é predicativo como quando dizemos "*Sócrates é mortal"*, mas sim um "*é idêntica a* . . .", podendo escrever na forma:

a) A Lua = um satélite da Terra.

d) Sócrates = mestre de Platão.

e) 8 = um número primo.

1.3.2.1 Classificação da pergunta: O que é verdade?

1º. Quais são os enunciados que são verdadeiros ou falsos?

Aqui, os enunciados são os portadores da verdade.

2º. Que têm que acontecer para que um enunciado seja verdadeiro?

Aqui se pede uma definição de um enunciado verdadeiro.

3º. Como temos certeza que o enunciado é verdadeiro?

Aqui se pergunta pelo conhecimento. Pergunta-se como averiguar se um enunciado é verdadeiro e onde o critério de verdade é um processo.

Em nossas investigações sobre a linguagem natural, interessa-nos aquela que alcança uma compreensão mais clara de suas estruturas lógicas e traduzi-las posteriormente para uma linguagem matemática.

Consideremos inicialmente as frases *declarativas*, já que elas podem ser classificadas como *verdadeiras* (**v**) ou *falsas* (**f**); estas sentencias na matemática são chamadas de *proposição.*

Definição 1.3 Proposição.

Proposição é todo enunciado que exprime um pensamento de sentido completo, isto é, aquele pensamento que admite um, e somente um, dos valores: verdadeiro (**v**) *ou falso* (**f**).

Conclui-se que, as proposições devem satisfazer os dois princípios fundamentais:

1. Uma alternativa só pode ser verdadeira ou falsa.
2. Uma alternativa não pode ser verdadeira e falsa.

As proposições denotam-se com as letras minúsculas p, q, r, s, t, . . . , também chamadas de *variáveis proposicionais*.

Exemplo 1.3

a) p : O número 2 é menor que 3.	(**v**)
b) q : $\sqrt{3} < \pi$	(**v**)
c) r : 7 - 1 = 2 + 4 - 5	**(f)**
d) s : A Terra é uma estrela.	**(f)**
e) t : Existem prefeitos que são honestos.	(**v**)

Portanto, as proposições são sentenças declarativas afirmativas (expressão de uma linguagem) da qual tenha sentido afirmar que seja verdadeira ou que seja falsa.

▪ A lua é quadrada.	**(f)**
▪ A neve é branca.	(**v**)
▪ Matemática é uma ciência.	(**v**)

Definição 1.4 Axioma.

Define-se axioma, como uma proposição que se admite como verdadeira porque dela se podem deduzir as proposições de uma teoria ou de um sistema lógico ou matemático.

A lógica matemática adota como regras fundamentais do pensamento os dois seguintes axiomas.

Axioma 1.1 Do terceiro excluído.

Toda proposição, ou é verdadeira ou é falsa; isto é, verifica-se sempre um destes dois casos e nunca um terceiro.

Axioma 1.2 Da não contradição.

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Assim, a lógica matemática é *bivalente*.

1.3.3 Enunciados abertos.

Se, na proposição $p : 5 > 4$ substituímos o número 5 pela letra x, temos que a expressão $x > 4$, o qual é chamado de *enunciado aberto*, pois, dependendo do valor numérico que assume a variável x podemos atribuir valores de verdade (**v**) ou falsidade (**f**).

Exemplo 1.4

São enunciados abertos.

a) x é primo de José.

b) $x < y + z$

c) $x - 7 = 8$

Observe que os enunciados abertos são de muita importância na matemática, pois quase a totalidade de enunciados matemáticos (problemas) utilizam uma ou mais variáveis.

1.3.4 Composição de proposições.

1.3.4.1 Proposição composta.

Ao utilizarmos a linguagem, combinamos idéias simples, ligamos proposições através de *conectivos* que permitem obter outras proposições.

A *composição de proposições* consiste em, dadas uma ou duas proposições, obter uma nova proposição mediante o uso de palavras, denominadas *conectivos lógicos*.

São conectivos lógicos as palavras "*e*", "*não*", "*ou*", "*se, . . . então*", ". . . *se, e somente se, . . .*"

Uma proposição simples, também é chamada de "*proposição atômica*" e as proposições compostas de "*proposição molecular*".

O valor de verdade de uma proposição composta é determinado pelo valor de verdade de cada uma das proposições simples e de modo como elas estão ligadas (pelo conectivo-lógico) para formar a proposição composta.

Os parênteses ( ) que servem para denotar o "*alcance*" dos conectivos; são chamados de *símbolos auxiliares*.

1.3.5 Conectivos lógicos.

1.3.5.1 Negação. ~

Já dissemos que uma proposição p pode ser verdadeira ou falsa, não havendo outra possibilidade.

Alfred Tarski[2] foi um dos maiores lógicos de todos os tempos, criador da teoria dos modelos (moderna teoria semântica).

A negação de uma proposição p escreve-se ~ p e se lê: "*não p*" ou "*é falso que p*", ou "*não é verdade que p*" e; é outra proposição que nega se cumpra a proposição p.

A negação de uma proposição, não afirma que aconteça o contrario, a Tabela 1.1 mostra o valor *verdade* para a proposição p.

p	~ p
v	f
f	v

Tabela 1.1: Negação da proposição p

Exemplo 1.5

Suponha a proposição p: 12 é um número ímpar; logo a proposição ~ p: Não é verdade que 12 seja número ímpar.

Observe que ~ p somente nega p, e não afirma o oposto de aquilo que afirma.

Exemplo 1.6

Suponha a proposição p: Lima é a capital do Perú (**v**).

~ p : Lima não é a capital do Perú (**f**).

~ p : Não é verdade que Lima é a capital do Perú (**f**).

Exemplo 1.7

Seja a proposição p: Maria é bonita, logo ~ p : Não é verdade que Maria seja bonita.

A proposição ~ p não afirma que Maria seja feia, pois do fato ser bonita ao fato ser feia existem outras possibilidades:

Bonita $\overbrace{\text{outras possibilidades}}$ feia

Discutir o seguinte exemplo:

Exemplo 1.8 Paradoxo[3] da frase.

[2] Alfred Tarski (1902-1983), autor de um dos primeiros livros de introdução à lógica moderna.

[3] Uma declaração essencialmente contraditória baseada em um pensamento válido de suposições lógicas.

Seja a proposição: p: "*Esta frase é falsa*".

Se p é (**f**), então ~ p: *Não é verdade que esta frase é falsa*. É uma frase verdadeira.

Se p é (**v**), então ~ p: *Não é verdade que esta frase é falsa*, também é uma frase verdadeira.

Observação 1.1

a) Negar uma proposição p não é apenas afirmar algo diferente do que p afirma, ou algo com valor lógico diferente.

Por exemplo, a proposição.

q: Lima é a capital de Perú (**v**), não é a negação de p: Brasília é a capital de Perú (**f**).

b) Sendo verdadeira uma proposição p, a sua negação é falsa e vice-versa; como conseqüência, a negação da proposição ~ p afirma o mesmo que p, isto é, a negação da negação de p é logicamente equivalente a p. Escrevemos ~ ~ p ≡ p (≡ lê-se; "*logicamente equivalente*").

p	~ p	~ ~ p
v	f	v
f	v	f

1.3.5.2 Conjunção ∧.

Chama-se *conjunção das proposições* p *e* q à proposição representada por p ∧ q, cujo valor lógico é verdadeiro (**v**) somente quando as duas proposições p e q sejam ambas verdadeiras, e; é falsa (**f**) nos demais casos.

A notação p ∧ q se lê p *e* q, e o valor lógico é definido pela seguinte *tabela-verdade*.

p	q	p ∧ q
v	v	(**v**)
v	f	(**f**)
f	v	(**f**)
f	f	(**f**)

Tabela 1.2: Conjunção de p e q

A Tabela 1.2 prevê todas as possibilidades para o valor lógico de uma proposição composta a partir dos valores lógicos das componentes e dos conectivos lógicos, é chamada *tabela-verdade* da proposição composta. O conectivo lógico ∧ traduz a idéia de "*simultaneamente*".

É conveniente diferenciar entre o "*e*" que usamos na determinação da conjunção p e q o "*e"* na utilização da linguagem do dia-dia. O mesmo texto permitira diferenciar um do outro. Assim por exemplo quando se diz: "*Seja a* *proposição* p *e* q" entende-se claramente que o "*e*" está determinando sua função lógica; no outro caso quando se diz: "*Sejam as proposições* p *e* q" fazemos uso do "*e*" no sentido da linguagem do dia-a-dia.

Exemplo 1.9

a) **"***Curitiba encontra-se em São Paulo"* e "*São Paulo tem uma população predominantemente latina*". Esta proposição é falsa (**f**), pois as duas proposições simples são falsas. Trata-se de uma proposição composta falsa (**f**), uma vez que a primeira proposição é falsa (independente do valor lógico da segunda proposição)

b) "*Platão era grego*" e "*Pilatos romano*". Esta proposição é verdadeira (**v**), pois as duas proposições simples são verdadeiras.

Exemplo 1.10

Consideremos $p : 2 + 8 > 5$ e $q : 8 > 6$, então, temos as quatro possibilidades:

$2 + 8 > 5 \wedge 8 > 6$ . . . esta proposição composta é (**v**)

$2 + 8 > 5 \wedge 8 \leq 6$ . . . esta proposição composta é (**f**)

$2 + 8 \leq 5 \wedge 8 > 6$ . . . esta proposição composta é (**f**)

$2 + 8 \leq 5 \wedge 8 \leq 6$ . . . esta proposição composta é (**f**)

1.3.5.3 Disjunção inclusiva $\vee$.

Chama-se *disjunção das proposições* p *e* q à proposição composta $p \vee q$, cujo valor lógico é falso (**f**), quando ambas as proposições p e q sejam falsas; e, nos demais casos é verdadeira (**v**)..

A notação $p \vee q$ se lê p ou q e o valor lógico é definido pela seguinte *tabela-verdade*:

p	q	$p \vee q$
v	v	(**v**)
v	f	(**v**)
f	v	(**v**)
f	f	(**f**)

Tabela 1.3: Disjunção inclusiva de p e q

Mostra-se na Tabela (1.3) todas as possibilidades de ocorrer na proposição composta $p \vee q$.

Exemplo 1.11

Se $p : 4 + 7 = 11$ e $q : 15 - 3 = 12$ então temos as quatro possibilidades:

$4 + 7 = 11 \ \vee \ 15 - 3 = 12$ . . . esta proposição composta é (**v**)

$4 + 7 = 11 \ \vee \ 15 - 3 \neq 12$ . . . esta proposição composta é (**v**)

$4 + 7 \neq 11 \ \vee \ 15 - 3 = 12$ . . . esta proposição composta é (**v**)

$4 + 7 \neq 11 \ \vee \ 15 - 3 \neq 12$ . . . esta proposição composta é (**f**)

Discuta o seguinte exemplo:

Exemplo 1.12 Paradoxo da existência de Deus.

Mostre que *Deus* existe.

Demonstração

Sejam as proposições: p: "*Deus existe*"; e q: "*esta frase é falsa*"; logo $p \vee q$: "*Deus existe ou esta frase é falsa*".

Suponhamos ao menos uma das proposições seja verdadeira, logo a frase $p \vee q$ é verdadeira.

Para o caso que simultaneamente p e q sejam falsas, então a frase $p \vee q$ é falsa. Como q é falso então pela Tabela (1.3) segue que $p \vee q$ é verdadeira.

Portanto *Deus existe*.

Observação 1.2

Na linguagem do dia-a-dia, a palavra ou tem dois sentidos:

1º. p : Mário é motorista ou professor.

2º. q : Carlos é gaúcho ou paulista.

Da proposição p podemos obter as proposições: "*Mário é motorista*", assim como "*Mário é professor*", podendo ser ambas verdadeiras então temos que "*Mário é motorista e professor*".

Mas na proposição q, temos as proposições "*Carlos é gaúcho*", e a outra "*Carlos é paulista*" sendo verdadeira somente uma de elas que exclua o valor verdade da outra; não é possível ocorrer "*Carlos é gaúcho e paulista*".

Na proposição p, a disjunção é *inclusiva*; e, na proposição q a disjunção é *exclusiva*.

O símbolo $\veebar$ indica o conectivo lógico exclusivo e sua *tabela-verdade* indica-se na Tabela (1.4).

p	q	$p \veebar q$
v	v	(f)
v	f	(**v**)
f	v	(**v**)
f	f	(**f**)

Tabela 1.4: Disjunção exclusiva de p e q

1.3.5.4 Condicional ⇒.

Chama-se *proposição condicional das proposições* p *e* q (nessa ordem) à proposição composta p ⇒ q, cujo valor lógico é falso (**f**), quando p seja verdadeiro e q falso, nos demais casos a proposição é verdadeira (**v**).

p	q	p ⇒ q
v	v	(**v**)
v	f	(f)
f	v	(**v**)
f	f	(**v**)

Tabela 1.5: *Condicional de* p *e* q

A notação p ⇒ q se lê: *se* p, *então* q. Seu valor lógico é definido pela *tabela-verdad* Tabela (1.5).

Na proposição p ⇒ q, a proposição p é chamada de *antecedente* (hipóteses) e a proposição q de *conseqüente* (tese).

Exemplo 1.13

Sejam as proposições p: 3 + 2 = 5 e q: 3 < 5, então temos as quatro possibilidades:

Se 3 + 2 = 5 ⇒ 3 < 5 . . . esta proposição composta é (**v**).

Se 3 + 2 = 5 ⇒ 3 ≥ 5 . . . esta proposição composta é (**f**)

Se 3 + 2 ≠ 5 ⇒ 3 < 5 . . . esta proposição composta é (**v**).

Se 3 + 2 ≠ 5 ⇒ 3 ≥ 5 . . . esta proposição composta é (**v**).

As proposições condicionais são importantes na matemática, e tem varias maneiras diferentes de enuncia-las, assim por exemplo, p ⇒ podemos entender como uma das seguintes formas:

p implica q.

p é condição suficiente para q

Para que p é necessário que q.

q é condição necessária para p

Se p, também q.

q cada vez que p

q se p.

q sempre que p.

Toda implicação está associada a outras três proposições, elas são: a *recíproca*, a *inversa* e a *contra-recíproca*.

Suponha temos a proposição composta: p $\Rightarrow$ q. Podemos obter outras proposições compostas relacionadas com p e q, sendo estas de muita utilidade na *teoria da demonstração*.

Recíproca: q $\Rightarrow$ p.

Inversa: ~ p $\Rightarrow$ ~ q.

Contra-recíproca: ~ q $\Rightarrow$ ~ p.

Exemplo 1.14

Escreva a recíproca, a inversa e contra-recíproca de cada uma das seguintes proposições:

i) Se 7 - 7 = 0, então 7 = 7.

ii) Se **a** termina em zero, então **a** é múltiplo de 2.

iii) Se x = y, então x + y é par.

Solução **(i)**

Temos p : 7 - 7 = 0 e q : 7 = 7, a proposição é da forma p $\Rightarrow$ q.

Recíproca: Se 7 = 7 , então 7 - 7 = 0. é da forma: q $\Rightarrow$ p

Inversa : Se 7 - 7 $\neq$ 0, então 7 $\neq$ 7. é da forma: ~ p $\Rightarrow$ ~ q

Contra-recíproca : Se 7 $\neq$ 7, então 7 - 7 $\neq$ 0 é da forma: ~ q $\Rightarrow$ ~ p.

Solução **(ii)**

Temos p : **a** termina em zero e q : **a** é múltiplo de 2, a proposição é da forma p $\Rightarrow$ q.

Recíproca: Se **a** é múltiplo de 2, então **a** termina em zero.

Inversa: Se **a** não termina em zero, então **a** não é múltiplo de 2.

Contra-recíproca: Se **a** não é múltiplo de 2, então **a** não termina em zero.

Solução **(iii)**

Temos p : x = y e q : x+y é par.

Recíproca: Se x+y é par, então x = y.

Inversa: Se x $\neq$ y, então x+y não é par.

Contra-recíproca: Se x+y não é par, então x $\neq$ y.

1.3.5.5 Bicondicional $\Leftrightarrow$.

Chama-se proposição bicondicional das proposições p e q à proposição composta p $\Leftrightarrow$ q, cujo valor lógico é verdade (**v**) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas; e, é falsa (**f**) nos demais casos.

A notação p $\Leftrightarrow$ q se lê: p *se, e somente se*[4], q; o valor lógico é definido pela seguinte *tabela- verdade* (Tabela 1.6):

p	q	p $\Leftrightarrow$ q
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

Tabela 1.6: Bicondicional de p e q

Uma proposição bicondicional obtém-se por definição como a conjunção de uma condicional e sua recíproca; isto é p $\Leftrightarrow$ q é equivalente a (p $\Rightarrow$q $\wedge$ q $\Rightarrow$ p).

1.3.6 Argumento: Indutivo. Dedutivo.

Nosso principal objetivo será a investigação da validade de "argumentos". Argumentar é apresentar uma proposição como sendo uma conseqüência de uma o mais proposições.

Definição 1.5. Argumento.

Chamamos de argumento a um conjunto de proposições operadas por conectivos lógicos, as quais uma proposição é a conclusão e as demais são premissas[5].

Isto é, um argumento é constituído pelas proposições p_1, p_2, . . . , p_n chamadas *premissas*, nas quais nos baseamos segundo os conectivos lógicos para garantir uma proposição q chamada *conclusão*.

Os argumentos estão tradicionalmente divididos em *dedutivos* e *indutivos*.

Definição 1.6 Argumento dedutivo.

Diz-se que um argumento é dedutivo quando, sendo suas premissas verdadeiras, a conclusão é também verdadeira.

Premissa: "Todo homem é mortal".
Premissa: "João é homem".
Conclusão: "João é mortal".

[4] A frase "*se, e somente se"* é devida a A. Tarski.
[5] Cada uma das proposições de um silogismo que serve de base à conclusão.

Esses argumentos serão objeto de estudo para a compreensão de teorias matemáticas.

Definição 1.7. Argumento indutivo.

Diz-se que um argumento é indutivo quando, a verdade das premissas não basta para assegurar a verdade da conclusão.

Premissa:	"É comum após a chuva ficar nublado".
Premissa:	"Está chovendo".
Conclusão:	"Ficará nublado".

As premissas e a conclusão de um argumento, formuladas em uma linguagem estruturada, permitem que o argumento possa ter uma análise lógica apropriada para a verificação de sua validade.

1.3.7 Tabela-verdade de uma proposição composta.

Dadas varias proposições p, q, r, . . . podemos combina-las pelos, conectivos lógicos $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ e construir proposições compostas, tais como:

$P(p, q) : \sim p \wedge (p \Rightarrow q)$

$Q(p, r) : (p \Rightarrow \sim r) \vee r$

$R(p, r, s) : (p \Rightarrow \sim s \wedge r) \vee \sim(s \wedge (p \Leftrightarrow \sim s))$

Observação 1.3

1º Se você tiver **n** proposições simples, o número de linhas que resultam de todas as combinações de verdade (**v**) e falsidade (**f**) é 2^n.

Assim, caso numa *tabela verdade* estivermos trabalhando com três proposições simples, então teríamos nessa *tabela-verdade* $2^3 = 8$ linhas.

2º Uma proposição composta, também é chamada *função-verdade*.

3º Se você tiver **n** proposições simples, então existem 2^{2^n} *proposições compostas* diferentes.

Por exemplo, dadas as proposições p e q, então podemos obter 2^{2^2}= 2^4 = 16 proposições compostas diferentes a saber:

$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \vee \sim q$	$p \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow p$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim p \vee \sim q$
$p \vee p$	$p \Leftrightarrow q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge q$	$p \Leftrightarrow \sim q$	$p \wedge \sim p$	$\sim p \wedge \sim p$	$\sim p \Leftrightarrow \sim p$

1.3.8 Construção de uma tabela-verdade.

Suponha temos a construir a *tabela-verdade* para a proposição $P(p, q) : \sim (p \vee \sim q)$, logo teremos a considerar o seguinte roteiro da Tabela (1.7):

a) Forma-se em primeiro lugar, o par de colunas correspondentes às duas proposições simples p e q (coluna 1ª.);

b) logo em seguida forma-se a coluna para ~ q (coluna 2ª.);

c) depois forma-se a coluna para $p \vee \sim q$ (coluna 3ª.);

d) finalmente a coluna relativa aos valores lógicos da proposição composta P(p, q) : $\sim (p \vee \sim q)$ (coluna 4ª.).

p q	~ q	p ∨ ~ q	~ (p ∨ ~ q)
v v	f	v	(**f**)
v f	v	v	(**f**)
f v	f	f	(**v**)
f f	v	v	(**f**)
1ª	2ª	3ª	4ª.

Tabela 1.7:

Também podemos considerar o seguinte roteiro Tabela (1.8):

a) Formam-se as primeiras colunas correspondentes às duas proposições simples p e q (coluna 1^a);

b) em seguida à direita, traça-se uma coluna para cada uma dessas proposições e para cada um dos conectivos que figuram na proposição composta dada (colunas 2^a, 3^a e 4^a);

c) logo, em certa ordem, completam-se essas colunas, escrevendo em cada uma delas os valores lógicos correspondentes, no modo abaixo indicado (coluna 5^a).

p q	~ (p	∨	~ q)
v v	f v	(**v**)	f v
v f	f v	(**v**)	v f
f v	v f	(**f**)	f v
f f	f f	(**v**)	v f
1ª	5ª 2ª	4ª	3ª 2ª

Tabela 1.8:

Os valores lógicos da proposição composta dada encontram-se na coluna completada escrita por último (5ª).

Exemplo 1.15

Construir *tabela-verdade* da proposição: $P(p,\ q) : \sim (p \wedge q) \vee \sim (q \Leftrightarrow p)$

Solução

Utilizando o roteiro sugerido temos:

p	q	~	(p	∧	q)	∨	~	(q	⇔	p)
v	v	f	v	v	v	**f**	f	v	v	v
v	f	v	v	f	f	**v**	v	f	f	v
f	v	v	f	f	v	**v**	v	v	f	f
f	f	v	f	f	f	**v**	f	f	v	f
1ª		4ª	2ª	3ª	2ª	**5ª**	4ª	2ª	3ª.	2ª.

Exemplo 1.16

Construir tabela-verdade da proposição: $P(p,\ q):(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p \vee \ \sim q)$.

Solução

Utilizando o roteiro sugerido temos:

p	q	(p ∧ ~ q)	⇒	(~ p ∨ ~ q)
v	v	f	(**v**)	f
v	f	v	(**v**)	v
f	v	f	(**v**)	v
f	f	f	(**v**)	v
		1ª	2ª	1ª

Problema 1.3.1

Num determinado prédio existem 4 andares. Ocupados por: um advogado, um construtor, um contador e um dentista. Há no prédio: um condicionador de ar, uma geladeira, um rádio e um televisor. Trabalha também o seguinte pessoal: um sócio, um encarregado de relações públicas (atendente), uma secretária e um “office-boy”. Chamam-se Alberto, Benedito, Camargo e David, mas aqui não estão relacionados na ordem de profissões acima citada. Sabendo-se que:

1. O que ocupa a 1º. andar tem um “office-boy”;
2. no 3º. andar existe um rádio;
3. o advogado e o construtor trabalham próximos;
4. o construtor nunca passa pelo andar do dentista, mas Alberto tem que passar pelo andar de Benedito, quando vai falar com a secretária;
5. David tem sua sala um andar depois do contador;

6. a sala onde tem a secretária, fica acima da sala de Benedito e embaixo do que tem a geladeira;
7. o advogado possui um condicionador de ar;
8. na sala onde existe o televisor, seu proprietário tem um encarregado de relações públicas, que namora a secretária;
9. o construtor trabalha no andar embaixo do contador;

Quem é quem?

Solução

Recomenda-se para a solução de problemas deste tipo uma tabela de dupla entrada como mostraremos a seguir.

Após da análise com os dados do enunciado chegamos à seguinte conclusão:

Andares	Empregados	Eletrônicos	Profissão	Nome
1º.	Office-boy	Cond. de ar	Advogado	Alberto
2º.	Encarregado	Tv	Construtor	Benedito
3º.	Secretária	Rádio	Contador	Camargo
4º.	Sócio	Geladeira	Dentista	David

Assim temos de acordo com a tabela completada acima:

- Advogado de nome Alberto, tem um ``office boy'', um condicionado de ar e ocupa a primeira sala;
- O construtor tem um encarregado das relações públicas, dispõe de Tv, ocupa a segunda sala e seu nome é Benedito;
- O contador tem uma secretária, um rádio, ocupa a terceira sala e seu nome é Camargo;
- O dentista tem um sócio, uma geladeira ocupa a quarta sala e chama-se David.

Problema 1.3.2

Miguel, Pedro e Humberto têm duas ocupações cada um, motorista, contrabandista, pintor, jardineiro, barbeiro e músico.

Dados:

1. O motorista ofendeu o músico rindo do seu cabelo comprido;
2. o músico e o jardineiro só gostavam passear com Miguel;
3. o pintor comprou do contrabandista um relógio da Suíça;
4. o motorista paquerava a irmã do pintor;

5. Pedro devia cinco mil reais ao jardineiro;
6. Humberto venceu Pedro e ao pintor jogando xadrez;

Que ocupação tem Miguel?

Solução

É melhor resolver considerando uma tabela com todos os dados de dupla entrada e descartando possibilidades de não ocorrer **X**, como mostramos a seguir.

	Motor.	Músico	Contra.	Barbe.	Jardine.	Pintor
Miguel	X	X	X	Ok.	X	X
Pedro	X	Ok.	X	X	X	X
Humberto	Ok.	X	X	X	X	X

Observando o quadro concluímos que Miguel é o barbeiro.

Problema 1.3.3

Após lançar três dados sobre a mesa, Rodrigo somou os números das suas faces superiores e encontrou o número 10. Em seguida, ele multiplicou os mesmos 3 números e encontrou como resultado 30. Qual o produto dos números das faces inferiores desses dados?

Observação: Num dado, a soma dos números de 2 faces opostas é sempre igual a 7.

Solução

Como o produto dos 3 números das faces superiores é igual a 30, estes 3 números só podem ser 1, 6 e 5 ou 2, 3 e 5, já que $30 = 2 \times 3 \times 5$ e que os números nas faces de um dado não são maiores que 6. Das 2 possibilidades que enunciamos apenas a que é composta pelos números 2, 3 e 5 tem a soma dos 3 números iguais a 10. Encontrado que os números das faces superiores são 2, 3 e 5, de imediato se chega aos números das faces inferiores: 5, 4 e 2, respectivamente. Assim, o produto procurado é $5 \times 4 \times 2 = 40$.

Problema 1.3.4

Mário mente as segundas, terças e quartas-feiras, e fala a verdade nos demais dias da semana. Paula mente apenas as quintas, sextas e aos sábados. Num certo dia, foram feitas as afirmações: por Mário, "*ontem foi meu dia de mentir*"; por Paula, "*ontem foi também meu dia de mentir*". Qual o dia da semana em que foram feitas estas afirmações?

Solução

Note que se Mário e Paula fazem a mesma afirmação, ou ambos falam a verdade, ou ambos mentem, ou um deles fala a verdade enquanto o outro mente. Mas não há dia da semana em que ambos mentem, o que nos leva a descartar esta hipótese.

Para ambos falarem a verdade, o único dia possível de isso acontecer é no domingo, já que nos outros dias da semana, um dos dois, ou Mário ou Paula, mente.

Resta então que um falou a verdade enquanto o outro mentiu. Mas se um deles falou a verdade quando disse que ontem foi dia de mentir, então esse dia só pode ser quinta-feira ou domingo.

Como já vimos que domingo é um dia impossível de ambas as afirmações ocorrerem, o dia da semana em que foram feitas estas afirmações foi quinta-feira.

Problema 1.3.5

A cada dois anos no período de 1858 a 1864 nasceu um compositor famoso. Claude Debussy nasceu na França, Gustav Mahler nasceu na Áustria, Giacomo Puccini nasceu na Itália e Richard Strauss na Alemanha. Debussy não era o mais velho, Puccini era 2 anos mais velho que Mahler, Strauss era mais novo que Debussy. Descubra o ano no qual nasceu cada compositor.

Solução

Antes de tudo, vamos identificar as 3 afirmações que o enunciado nos trouxe:

i) Debussy não era o mais velho.

ii) Puccini era 2 anos mais velho que Mahler.

iii) Strauss era mais novo que Debussy.

Por (**ii**). concluímos que Puccini nasceu e logo em seguida (2 anos depois) veio Mahler. Como Strauss era mais novo que Debussy (**iii**) mas Debussy não era o mais velho (**i**), Debussy não pode ter nascido antes de Puccini, pois neste caso seria o mais velho de todos. Dado isto, a única alternativa que há é a seguinte: primeiro nasceu Puccini, em seguida Mahler, depois Debussy e por fim Strauss.

Problema 1.3.6 Malba Than.

Três pessoas num bar fizeram uma despesa que importou em R$9,00 para cada uma, totalizando R$27,00. Todavia, cada uma deu ao garçom R$10,00. Por falta de troco, este devolveu R$5,00. Destes, tiraram-se R$3.00, que lhe deram como gorjeta. Então, como sobraram R$2,00?

Solução

Os R$2,00 correspondem ao abatimento feito pelo garçom.

Problema 1.3.7

Três estudantes, Alberto, Bernardo e Carlos tem por namoradas a Ana, Beatriz e Claudia, não necessariamente nessa ordem. Em uma festa à que assistiram estas seis pessoas compraram rifas de preços diferentes cada uma. Cada pessoa comprou tantos boletos como reais gastou essa mesma pessoa por rifa.

Alberto comprou 23 rifas mais que Beatriz e Bernardo comprou 11 mais que Ana. Cada homem gastou 63 reais mais que sua namorada. Qual era o nome da namorada de cada um?

Solução

Suponha um homem compra m boletos a m reais cada um; logo ele gastou m^2 reais.

De modo análogo, suponha cada mulher compra n boletos a n reais cada um; logo ela gastou n^2 reais.

Da relação $m^2 - n^2 = 63$ segue que $(m+n)(m-n) = 63$ e como $63 = 1 \times 63 = 3 \times 21 = 7 \times 9$, pode acontecer:

$m+n = 63$	$m+n = 21$	$m+n = 9$
$m-n = 1$	$m-n = 3$	$m-n = 7$

De onde obtemos três pares de valores para m e n: 32 e 31, 12 e 9 por último 8 e 1.

Como Alberto comprou 23 boletos mais que Beatriz, e Bernardo 11 mais que Ana, então:

Alberto	= 32	Ana	=1
Bernardo	= 12	Beatriz	= 9
Carlos	= 8	Claudia	= 31

Portanto os casais são: Alberto casado com Claudia, Bernardo casado com Beatriz e Carlos casado com Ana.

Pequeno dicionário de heurística.

Analogia: É uma espécie de semelhança. Objetos semelhantes coincidem uns com os outros em algum aspecto; objetos análogos coincidem em certas relações de suas respectivas partes.

Considere a incógnita: Este é um velho conselho. Corresponde ao ditado latino *respice finem*, isto é, olhe para o fim.

Condicionante: È uma das principais partes de um problema a demonstrar.

Corolário: É um teorema que se demonstra facilmente pelo exame de outro teorema que se acaba de demonstrar. A palavra é de origem grega e sua tradução mais literal seria “galardão” ou “recompensa”.

Decomposição: Decompõe-se o todo em suas partes e recombinam-se as partes num todo mais ou menos diferente.

Exercícios 1-1

1. Das frases seguintes, assinale quais são proposições, atribuindo-lhes o valor lógico correspondente:

   1. Perú e Brasil.

   2. Brasil foi campeão mundial de futebol em 1982.

   3. As diagonais de todo paralelogramo são de comprimentos iguais.

   4. O triplo de 6.

   5. Que horas são?

   6. Todo quadrado é um retângulo.

   7. $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

   8. $-2 < -5$

   9. As diagonais de alguns paralelogramos são de comprimentos iguais.

   10. $\text{sen } x = \text{sen}\frac{\pi}{2} + x\ )$

   11. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

   12. Quadrados e triângulos.

   13. 0,5 e 5 são raízes da equação $x^3 - 25x = 0$

   14. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots\ (2n-1) = n^2$

   15. Todo triângulo é um polígono.

2. Sejam as proposições: p : *A vaca foi para o brejo*; q: *O boi seguiu a vaca.*

   Forme frases na linguagem natural, que correspondam às proposições seguintes:

   1. $\sim p$ **2.** $\sim q$ **3.** $p \wedge q$ **4.** $p \vee q$

   5. $\sim p \wedge q$ **6.** $p \vee \sim q$ **7.** $\sim (p \wedge q)$ **8.** $\sim (p \vee q)$

   9. $\sim p \vee \sim q$ **10.** $\sim p: \wedge \sim q$ **11.** $\sim (\sim q)$ **12.** $p \Rightarrow q$

3. Considere as proposições: p : *Esta frio*; q: *Esta chovendo.* Traduzir para a linguagem natural as seguintes proposições:

   1. $\sim p$ **2.** $p \wedge q$ **3.** $p \vee q$ **4.** $p \Leftrightarrow q$

   5. $p \Rightarrow \sim q$ **6**. $p \vee \sim q$ **7**. $\sim p \wedge \sim q$ **8.** $p \Leftrightarrow \sim q$

   9. $(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$ **10**. $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ **11.** $\sim (\sim q)$ **12**. $\sim (\sim p) \Rightarrow q$

4. Considere as proposições: p : *Pedro é alto*; q: *Pedro é jogador de basquete.*. Escreva em forma simbólica cada uma das seguintes proposições:

1. Pedro não é alto.

2. Pedro não é jogador de basquete.

3. Não é verdade que Pedro não seja alto.

4. Não é verdade que Pedro é jogador de basquete.

5. Pedro é alto e jogador de basquete.

6. Pedro é alto ou jogador de basquete.

7. Pedro é alto e não é jogador de basquete.

8. Pedro não é alto e é jogador de basquete.

9. Pedro não é alto ou não é jogador de basquete.

10. Não é verdade que, Pedro é alto e jogador de basquete.

11. Não é verdade que, Pedro é alto ou jogador de basquete.

12. Não é verdade que, Pedro não é alto ou não é jogador de basquete.

13. Pedro não é alto, nem jogador de basquete.

5. Sejam: p: *Londres é a capital da Inglaterra*. q: *A torre Eiffel situa-se em Londres*. r: *O meridiano de Greenwich passa por Londres*.

Traduza para a linguagem natural cada uma das proposições abaixo e determine o respectivo valor lógico:

1. $\sim p$	**2.** $q \wedge r$	**3.** $\sim p \vee r$	**4**. $\sim q$
5. $p \vee q$	**6.** $\sim q \wedge \sim p$	**7.** $\sim r$	**8.:** $p \vee r$
9. $\sim q \vee \sim p$	**10**. $p \wedge q$	**11**. $\sim q \wedge p$	**12.** $\sim (p \wedge q)$

6. Determine todos os valores lógicos para a proposição $\sim p \wedge q$ a partir dos valores lógicos de p e q.

7. Construa a *tabela-verdade* para cada uma das seguintes proposições:

1. $\sim (p \wedge q)$ **2.** $\sim p \vee \sim q$.

8. Mostre que a proposição $p \wedge q \wedge \sim q$ é uma contradição.

9. O verso da uma folha é a página oposta à que se observa. Que página corresponde ao verso do verso da página que se observa?

10. O avesso de uma blusa, é o lado contrário ao que se vê. O que é o avesso do avesso do avesso da blusa? O que é o avesso do avesso da blusa?

11. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições matemáticas:

1. Se $x > 0$ então $y = 3$

2. Se $x+y = 6$ então $z < 0$.

3. Se $x = 6$ ou $x = 5$, então $x^2 - 11x + 30 = 0$.

4. Se $x^2 - 11x + 30 = 0$ então $x = 6$ ou $x = 5$

5. Se $z > 5$ então $x \neq 1$ e $x \neq 2$.

6. Se $y = 4$ e $x < y$ então $x < 5$.

12. Determine a recíproca, inversa e contra-recíproca de cada uma das seguintes proposições condicionais.

1. Se $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{w}$ então $\vec{w}$ é paralelo a $\vec{v}$.

2. Duas retas se interceptam se não são paralelas.

3.Se o Oscar se licenciar ele vai procurar emprego ou inscrever-se num curso de mestrado.

4. Se a Virgínia se licenciar e se inscrever num curso de mestrado então a sua licenciatura não é de Matemática.

5. Se a Virgínia se licenciar com boa média em Matemática ela vai ter uma bolsa para se inscrever num curso de mestrado.

6. Aprovar em Álgebra é uma condição necessária para o Belo se licenciar.

7. Uma condição suficiente para um triângulo satisfazer o Teorema de Pitágoras é ser um triângulo retângulo.

8. Uma condição necessária para dois triângulos serem semelhantes é que tenham lados iguais.

9. Um triângulo é eqüilátero só se os seus três ângulos são iguais ou os seus três lados são iguais.

10. Três pontos estão sobre a mesma circunferência só se não forem colineares.

13. Quem tem olhos azuis?

Em um grupo de três pessoas duas delas tem olhos escuros e a outra olhos azuis, as pessoas que tem olhos escuros mentem, e a pessoa de olhos azuis sempre diz a verdade. Em uma conversa cada uma diz:

Marta: Eu tenho olhos azuis.

Clara: Marta mentiu quando disse ter olhos azuis.

Rita: Clara é quem tem olhos azuis.

14. Assinale uma conclusão correta.

Uma pessoa pode ser boa ou ruim. A mesma pessoa pode ser estudante o trabalhadora. Mas esta pessoa é estudante e ruim. Logo esta pessoa não pode ser: **a)** Estudante e trabalhadora; **b)** Boa e trabalhadora; **c)** Trabalhadora e ruim.

15. Três senhoras, Dona Branca, Dona Rosa e Dona Violeta, passeavam pelo parque, quando Dona Rosa disse:

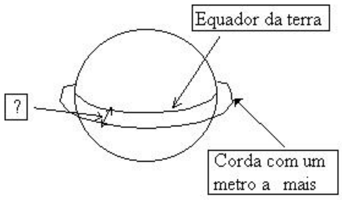
"*Não é curioso que estejamos usando vestidos das cores branca, rosa e violeta, embora nenhuma de nós esteja usando vestido de cor igual a seu próprio nome"*.

"*Uma simples coincidência, respondeu a senhora com o vestido violeta*".

Qual a cor do vestido de cada senhora?

16. Considere a Terra como uma esfera perfeita e imagine a menor corda de comprimento entorno do Equador. Corta-se essa corda em um ponto, adicione-se a ela um metro linear de corda e coloque-a novamente entorno do Equador.

Existirá uma separação entre o Equador e a corda aumentada, entorno de toda a Terra (ver Figura 1.1). O Equador da Terra mede aproximadamente 40 000 km.



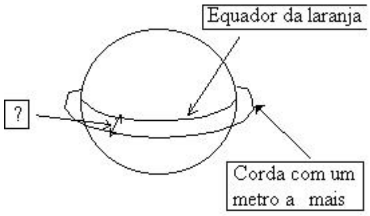


Figura 1.1

Figura 1.2

1 1 Intuitivamente, de quanto é essa separação aproximadamente? (Só se pede uma resposta aproximada, segundo a intuição) .

a) Menos de 1mm. **b)** Entre 1mm. e 2cm. **c)** Pouco mais de 15cm.

17. Considere uma laranja e imagine a menor corda de comprimento entorno do equador da laranja. Corta-se essa corda em ponto, adicione-se a ela um metro linear de corda e coloque-a novamente entorno do equador. Existirá uma separação entre o equador da laranja e a corda aumentada, entorno de toda a laranja (ver Figura 1.2)

Intuitivamente, de quanto é essa separação aproximadamente? (Só se pede uma resposta aproximada, segundo a intuição)

a) Mais de 60cm. **b)** Entre 60 cm e 19cm. **c)** Menos de 16cm.

18. São apresentadas três caixas a você. Somente uma delas contém ouro, o outras duas estão vazias. Cada caixa tem uma pista sobre seu conteúdo só uma mensagem está contando a verdade as outras duas estão mentindo.

O ouro não está aqui	O ouro não está aqui	O ouro está na segunda caixa

Qual caixa tem o ouro?

1.4 TAUTOLOGIA

Os conectivos lógicos, do mesmo modo que servem para construir proposições compostas a partir de proposições simples, também são utilizados para obter *esquemas lógicos* muito mas complexos a partir de proposições compostas.

Em geral $\sim$ é o conectivo de menor hierarquia, logo seguem $\vee$ e $\wedge$, esses conectivos tem a mesma hierarquia; logo $\Rightarrow$ é o de maior hierarquia. Porem, cada conectivo pode ser de maior hierarquia, quando o indica o parênteses de coleção.

Lembre que os parênteses **( )** servem para denotar o "*alcance"* dos conectivos.

Exemplo 1.17

Se a lua é quadrada e a neve é branca então a lua não é quadrada. Na linguagem simbólica escrevemos: $p \wedge q \Rightarrow \ \sim p$.

A lua não é quadrada se, e somente se, a neve é branca. Na linguagem simbólica escrevemos: $\sim p \Leftrightarrow q$

Dada uma proposição composta, os *valores-verdade* de esta proposição são os que correspondem aos valores do conectivo de maior hierarquia presente na proposição.

Exemplo 1.18

A fórmula $p \vee q \vee \sim r \Rightarrow p \Rightarrow \sim q$ *deve ser entendida como*: $((p \vee q) \vee (\sim r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (\sim q))$

Definição 1.8 Tautologia.

Chama-se tautologia toda proposição composta quando, depois de procurar a última coluna de sua tabela-verdade achamos somente a letra (**v**).

De outro modo, *tautologia* é toda proposição composta $P(p, q, r, \ . . .)$ cujo valor lógico sempre é verdade (**v**), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples $p, q, r, . . .$

Exemplo 1.19

Determine a tabela-verdade para proposição: $P(p, q) : ((p \vee q) \wedge \ \sim q) \Rightarrow p$.

Solução

p q	$((p \vee q)$	$\wedge$	$\sim q)$	$\Rightarrow$	p
v v	v	f	f	v	v
v f	v	v	v	v	v
f v	v	f	f	v	f
f f	f	f	v	v	f
	1º	3º	2º	5º	4º

Para obter a *tabela-verdade* seguimos o seguinte roteiro:

1º. Aplicamos o valor-verdade da disjunção para as proposições p e q.

2º. Aplicamos a negação à proposição q.

3º. Aplicamos a valor-verdade às colunas 1º e 2º.

4º. Escrevemos novamente valor-verdade para a proposição p.

5º. Aplicamos o valor-verdade da implicação às colunas 3º e 4º.

Observe-se nesta proposição composta que o conectivo da implicação é o de maior hierarquia e na 5ª coluna todas as linhas tem o valor-verdade (**v**), logo a proposição é uma *tautologia*.

Exemplo 1.20

A proposição $p \vee \sim p$ *é tautologia.*

p	~ p	p ∨ ~ p
v	f	(**v**)
f	v	(**v**)

Definição 1.9 Contradição.

Chama-se contradição toda proposição composta quando, depois de procurar a última coluna de sua tabela-verdade achamos somente a letra (**f**).

De outro modo, contradição é toda proposição composta P(p, q, r, . . .) cujo valor lógico sempre é falso (**f**), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples p, q, r, ...

Portanto, P(p, q, r, . . .) é uma tautologia se, e somente se, ~ P(p, q, r, . . .) é uma contradição.

Definição 1.10 Contingência.

Chama-se contingência toda proposição composta quando, depois de procurar a última coluna de sua tabela-verdade achamos uma mistura de linhas com a letra (**v**) ou (**f**).

De outro modo, uma contingência é toda proposição composta que não é tautologia nem contradição. As contingências também são chamadas de *proposições contingentes* ou *proposições indeterminadas*.

Exemplo 1.21

A proposição $p \wedge \sim p$ é uma contradição.

p	~ p	p ∧ ~ p
v	f	(**f**)
f	v	(**f**)

Exemplo 1.22

Determine a tabela-verdade para a proposição: P(p) : $\sim ((p \vee p) \Leftrightarrow p)$

Solução

p	$\sim$	((p $\vee$ p)	$\Leftrightarrow$	p)
v	(**f**)	v v v	v	v
f	(**f**)	f f f	f	f
	6º	1º 3º 2º	5º	4º

Portanto, a proposição: P(p) : $\sim ((p \vee p) \Leftrightarrow p)$ é uma *contradição*.

Exemplo 1.23

Determine a tabela-verdade para a proposição: P(p, q,r): $\sim ((p \wedge q) \wedge \sim r)$

Solução

Observe que o conectivo de maior hierarquia é $\sim$.

P q r	$\sim$	((p $\wedge$ q)	$\wedge$	$\sim$ r)
v v v	v	v	(**f**)	f
v v f	f	v	(**v**)	v
v f v	v	f	(**f**)	f
v f f	v	f	(**f**)	v
f v v	v	f	(**f**)	f
f v f	v	f	(**f**)	v
f f v	v	f	(**f**)	f
f f f	v	f	(**f**)	v

Portanto, a proposição: P(p, q, r): $\sim ((p \wedge q) \wedge r)$ é uma *contingência*.

1.4.1 Tautologias elementares.

1. Leis da equivalência.

   (a) $p \Leftrightarrow p$ . . . reflexiva.

   (b) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$ . . . simetria.

   (c) $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ . . . transitividade.

2. Lei do terceiro excluído.

   $p \vee \sim p$

3. Lei do silogismo hipotético.

   $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

4. Lei do silogismo disjuntivo.

$((p \vee q) \wedge \sim p) \Rightarrow q$

5. Lei do absurdo.

(a) $(\sim q \Rightarrow (p \wedge \sim p)) \Rightarrow q$ (b) $(\sim q \Rightarrow (p \wedge \sim p)) \Rightarrow q$

(c) $((\sim q \Rightarrow p) \wedge (\sim q \Rightarrow \sim p)) \Rightarrow q$

6. Lei de não contradição.

$\sim (p \wedge \sim p)$

7. Lei comutativa.

(a) Para a conjunção: $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

(b) Para a disjunção: $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

(c) Para a bicondicional: $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

8. Lei associativa.

(a) Para a conjunção: $(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r)$

(b) Para a disjunção: $(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r)$

9. Lei distributiva.

(a) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

(b) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

10. Leis de Morgan.

(a) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ (b) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

11. Dupla negação.

$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$

12. Adição.

$p \Rightarrow (p \vee q)$

13. Simplificação.

(a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ (b) $(p \vee q) \Rightarrow p$

14. Modus Ponens.

$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

15. Modus Tollens.

$((\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge p) \Rightarrow q$

16. Idempotente.

(a) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (b) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

17. Transposição (ou de contraposição).

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

18. Implicação material.

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

19. Equivalência material.

(a) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$

(b) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q))$

20. Dilema construtivo.

$((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r)) \Rightarrow (q \vee s)$

21. Dilema destrutivo.

$((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (\sim q \vee \sim s)) \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)$

22. Exportação.

(a) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$

(b) $((p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \Rightarrow (p_n \Rightarrow r))$

1.4.2 Implicação lógica.

Definição 1.11

Dizemos que uma proposição P(p, q, r, . . .) implica, logicamente outra proposição Q(p, q, r, . . .) se, sempre que P(p, q, r, . . .) seja verdadeira (**v**), então Q(p, q, r, . . .) também é verdadeira (**v**) .

Exemplo 1.24

Sejam P(p, q): $\sim p \vee q$ e Q(p, q): $p \Rightarrow q$, *temos que*:

p q	$\sim p \vee q$	$p \Rightarrow q$
v v	v	v
v f		
f v	v	v
f f	v	v

p q	$P(p, q) \Rightarrow Q(p. q)$
v v	**v**
v f	
f v	**v**
f f	**v**

Logo a proposição P(p, q) implica logicamente a Q(p, q).

Exemplo 1.25

Mostre que a proposição P(p, q): $p \Rightarrow (p \wedge q)$ implica logicamente à proposição Q(p, q): $p \Rightarrow q$.

Solução

p q	$p \Rightarrow (p \wedge q)$	$p \Rightarrow q$
v v	v	v
v f		
f v	v	v
f f	v	v

p q	$P(p, q) \Rightarrow Q(p. q)$
v v	**v**
v f	
f v	**v**
f f	**v**

Exemplo 1.26

Determine se a proposição R(p, q): p $\Rightarrow$ q implica logicamente a proposição S(p, q): p $\vee$ ~ q.

Solução

p	q	p $\Rightarrow$ q	p $\vee$ ~ q
v	v	v	v
v	f		
f	v	v	f
f	f	v	v

p	q	P(p, q) $\Rightarrow$ Q(p. q)
v	v	**v**
v	f	
f	v	**f**
f	f	**v**

Observe a terceira linha da *tabela-verdade*, a verdade de R(p,q) não implica a verdade de S(p,q).

Portanto a proposição R(p, q), não implica logicamente a proposição S(p, q).

Propriedade 1.1

A proposição $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ implica logicamente a proposição $Q(p_1, p_2, \dots, p_n)$, se e somente se a condicional $P(p_1, p_2, \dots, p_n) \Rightarrow Q(p_1, p_2, \dots, p_n)$ é tautologia.

Demonstração

Condição necessária. ($\Rightarrow$)

Se $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ implica logicamente a proposição $Q(p_1, p_2, \dots, p_n)$, então não ocorre que os valores na mesma linha da tabela verdade sejam simultaneamente (**v**) e (**f**) nessa ordem; logo a valor verdade na coluna da tabela da proposição $P(p_1, p_2, \dots, p_n) \Rightarrow Q(p_1, p_2, \dots, p_n)$ somente é (**v**), assim esta condicional é tautologia.

Condição suficiente. ($\Leftarrow$)

Se a condicional $P(p_1, p_2, \dots, p_n) \Rightarrow Q(p_1, p_2, \dots, p_n)$ é tautologia, isto é na última coluna de sua *tabela-verdade* temos somente a letra (**v**), então não ocorre que os valores simultâneos correspondentes à mesma linha sejam (**v**) e (**f**) nessa ordem. Portanto a proposição $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ implica logicamente $Q(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Exemplo 1.27

Mostre que a proposição p implica logicamente a proposição q em cada um dos seguintes casos:

a) p: $\pi > 2$; q: $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) p: $\text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ q: $\sqrt{8} > \sqrt[3]{2}$

c) p:12 é múltiplo de 4; q :6 é divisível por 2.

Solução (a), (b), (c)

A proposição p é verdadeira; q verdadeira; logo p $\Rightarrow$ q é verdadeira; assim p implica logicamente a proposição q.

1.4.3 Equivalência lógica.

Definição 1.12

Dizemos que uma proposição P(p, q, r, . . .) *é logicamente equivalente a outra* proposição Q(p, q, r, . . .), *se a tabela-verdade destas duas proposições são idênticas.*

Indica-se que a proposição P(p, q, r, . . .) é equivalente à proposição Q(p, q, r, . . .) com a notação P(p, q, r, . . .) $\Leftrightarrow$ Q(p, q, r, . . .)

Observe que, no caso das proposições P(p, q, r, . . .) e Q(p, q, r, . . .) ambas serem tautologias ou contradições, então são equivalentes.

Exemplo 1.28

As proposições P(p,q): p $\Rightarrow$ p $\wedge$ q e Q(p,q): p $\Rightarrow$ q são equivalentes.

Com efeito, observe a *tabela-verdade*.

p	q	p $\Rightarrow$ p $\wedge$ q	p $\Rightarrow$ q
v	v	v	v
v	f	f	f
f	v	v	f
f	f	v	v

Exemplo 1.29

As proposições R(p,q): p $\Leftrightarrow$ q e S(p,q): (p $\Rightarrow$ q) $\wedge$ (q $\Rightarrow$ p) são equivalentes.

Observe a *tabela-verdade*.

p	q	p $\Leftrightarrow$ q	(p $\Rightarrow$ q) $\wedge$ (q $\Rightarrow$ p)
v	v	v	v
v	f	f	f
f	v	f	f
f	f	v	v

Logo as proposições R(p,q) e S(p,q) são logicamente equivalentes.

Exemplo 1.30

Consideremos a proposição p $\Rightarrow$ q assim como sua *recíproca* q $\Rightarrow$ p, sua *inversa* ~ p $\Rightarrow$ ~ q e sua *contra-recíproca* ~ q $\Rightarrow$ ~.

Da seguinte *tabela-verdade*:

p q	$p \Rightarrow$ p	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
v v	v	v	v	v
v f	f	f	v	v
f v	v	v	f	f
f f	v	v	v	v

Podemos observar que as proposições $p \Rightarrow$ e $\sim q \Rightarrow \sim p$ são logicamente equivalentes, assim como as proposições $q \Rightarrow p$ e $\sim p \Rightarrow \sim q$.

Exemplo 1.31

Suponha estamos a demonstrar que:

"*Se* x^2 *é número ímpar, então x é número ímpar*".

Podemos considerar a proposição p: x^2 *é número ímpar*, e q: x *é número ímpar* então temos que verificar a validade da proposição $p \Rightarrow q$. De o fato serem as proposições $p \Rightarrow q$ e $\sim q \Rightarrow \sim p$ logicamente equivalentes será suficiente mostrar que:

"*Se x não é número ímpar, então x^2 não é número ímpar*".

Definição 1.13

a) Chama-se negação conjunta das proposições p e q à proposição $\sim p \wedge \sim q$, e denotamos $p \downarrow q$.

b) Chama-se negação disjunta das proposições p e q à proposição $\sim p \vee \sim q$, e denotamos $p \uparrow q$.

Da Definição(1.13) resulta que: **a)** $p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$, e **b)** $p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

Exemplo 1.32

Determine a *tabela-verdade* da proposição: $(p \downarrow q) \uparrow (p \uparrow q)$.

Solução

p q	$p \downarrow q$	$\uparrow$	$(p \uparrow q)$
v v	f	**(v)**	f
v f	f	**(v)**	v
f v	f	**(v)**	v
f f	v	**(f)**	v

Exercícios 1-2

1. Analisar os seguintes enunciados e:

   1. Determine quais são proposições.

   2. Determine quais são enunciados abertos.

   3. Determine quais não são nem proposições nem enunciados abertos.

   4. Determine o valor *verdade* das proposições.

   (a) $7 + 12 = 19$

   (b) Você é estudante de matemática?

   (c) $15 < 4$

   (d) $x + 4 = 10$

   (e) Cantor revolucionou o pensamento matemático.

   (f) $x - 2 < 8$

   (g) Cantor, Burali Forti e B. Russell estudaram o problema dos paradoxos na matemática.

   (h) $x + y \leq 2$

   (i) x é engenheiro.

   (j) Pedro é engenheiro ou Pedro é matemático,

   (k) $x + 2 = 5$ se, e somente se, $x = 4$

   (l) Escute com atenção.

   (m) Todo retângulo é um quadrado.

2. Sejam as seguintes proposições: p: $3+5 = 5$ e q: $8-3 = 5$. Traduzir para a linguagem do dia-a-dia as seguintes proposições:

   1. $\sim p$ **2.** $p \wedge q$ **3.** $p \vee q$

   4. $q \Leftrightarrow q$ **5.** $p \Rightarrow \sim q$ **6.** $p \vee \sim q$

   7. $\sim p \wedge \sim q$ **8.** $p \Leftrightarrow \sim q$ **9.** $p \wedge \sim q \Rightarrow p$

3. Considere as seguintes proposições: p: Jorge é médico, q: Jorge é dentista, r: Pedro é engenheiro.

   1. Escrever cada uma das seguintes proposições em forma simbólica:

   (a) Jorge é médico e Pedro é engenheiro.

   (b) Se Jorge é médico ou Pedro é engenheiro, então Jorge não é dentista.

   (c) Jorge não é médico, porem Pedro não é engenheiro.

   (d) Se Pedro é engenheiro e Jorge não é dentista, então Jorge não é médico.

   2. Escrever em forma de oração o significado das seguintes proposições:

   1. $p \wedge \sim q$ **2.** $(\sim p \vee q) \Rightarrow r$ **3.** $p \Leftrightarrow \sim q$

   4. $r \Rightarrow (p \vee q)$ **5.** $(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$ **6.** $\sim p \Rightarrow p \vee q$

4. Para cada uma das seguintes proposições, elimine os parênteses segundo as convenções:

1. $(p \vee q) \Rightarrow ((\sim p) \wedge r)$ **2.** $p \Leftrightarrow (((\sim q) \vee (r \wedge s)) \Rightarrow (p \Rightarrow q))$

3. $(\sim p) \Leftrightarrow (q \vee ((\sim r) \Rightarrow s))$ **4.** $((p \wedge (\sim q) \wedge r) \vee s) \Rightarrow ((\sim p) \vee r)$

5. Verificar quais as fórmulas é: tautologia, contradição ou contingência.

1. $\sim p \Rightarrow p \wedge q$ **2.** $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

3. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ **4.** $p \wedge (\sim p \vee q)$

5. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ **6.** $\sim(p \Rightarrow p \vee q)$

6. Sejam as proposições p: Pedro é rico e q: Fredy é feliz. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições:

1. $p \Rightarrow q$ **2.** $p \vee \sim q$ **3.** $p \Leftrightarrow \sim q$

4. $\sim q \Leftrightarrow p$ **5.** $\sim \sim q$ **6.** $\sim(\sim p \vee \sim q)$

7. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ **8.** $(p \vee q) \Rightarrow p$ **9.** $(p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

7. Verificar as seguintes tautologias:

1. $p \vee p \Leftrightarrow p$ **2.** $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ **3.** $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

4. $(p \wedge q) \Rightarrow q$ **5.** $p \wedge p \Leftrightarrow p$ **6.** $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

7. $(p \wedge q) \Rightarrow p$ **8.** $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ **9.** $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

10. $p \Rightarrow p \vee r$ **11.** $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ **12** $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

13. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ **14.** $(\sim q \Rightarrow p \wedge \sim p) \Rightarrow q$

15. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

8. Verificar se o conjunto de proposições da cada item é tautologia:

1. Pedro é bom e Pedro é ruim acarreta que Paris é a capital de Chile. Brasília é a capital do Brasil ou Brasília não é a capital de Brasil.

2. Se Alberto é materialista, Alberto é ateu. Se Alberto é ateu, então Alberto é materialista.

3. Se João não encontrou Pedro ontem, então, ou Pedro é o assassino ou João morreu. Se Pedro não é o assassino, então João não encontrou Pedro ontem e o assassinato foi à meia noite. Se o assassinato foi à meia noite, então, Pedro é o assassino ou João morreu. Pedro é o assassino.

9. Mostre que, se p e $p \Rightarrow q$ são tautologias, então q é tautologia. Sugestão: Supor que q não seja tautologia.

10. Mostre que:

1. q implica logicamente $p \Rightarrow q$.

2. q implica logicamente $p \wedge q \Leftrightarrow p$.

3. $p \Leftrightarrow \sim q$ não implica logicamente $p \Rightarrow q$.

4. p não implica logicamente $p \wedge q$.

5. $p \vee q$ não implica logicamente p.

11. Mostrar que: $((x = y \;\vee\; x < 4) \wedge x \geq 4) \Rightarrow x = y$

12. Mostrar que: $((x \neq 0 \Rightarrow x = y) \wedge x \neq y) \Rightarrow x = 0$

13. Mostre que as proposições p e q são equivalentes em cada um dos seguintes casos:

   1. p: $2+6=8$ q: $(2+6)^2=64$

   2. p: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ q: $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

   3. p: $3^0 = 1$ q: $\pi < 4$

   4. p: x é ímpar q: x+2 é ímpar[6].

   5. p: $a \perp b$ q: $b \perp a$

   6. p: $a \parallel b$ q: $b \parallel a$

   7. p: O triângulo ABC é retângulo em A q: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

14. Exprimir a bicondicional $p \Leftrightarrow q$ em função dos conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$ e $\sim$.

15. Mostre mediante *tabela-verdade* as seguintes equivalências lógicas:

   1. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ **2.** $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

   3. $(q \Leftrightarrow (p \vee q)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ **4.** $((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))$

   5. $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$ **6.** $(p \Leftrightarrow (p \wedge q)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

16. Mostre que as proposições: $x = 5 \;\vee\; x \geq 3$ e $\sim (x < 3 \wedge x = 5)$ não são equivalentes.

17. Prove que os três conectivos $\sim$, $\vee$ e $\wedge$ podemos escrever em função do conectivo $\downarrow$ do seguinte modo:

   1. $\sim p \Leftrightarrow (p \downarrow p)$ **2.** $p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

   3. $p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

18. Prove que os três conectivos $\sim$, $\vee$ e $\wedge$ podemos escrever em função do conectivo $\uparrow$ do seguinte modo:

   1. $\sim p \Leftrightarrow (p \uparrow p)$ **2.** $p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

   3. $p \wedge q \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$

19. Determine a negação lógica das seguintes proposições:

   1. Estudo lógica, ou esta prova é fácil.
   2. Não estudo lógica, e esta prova não é fácil.
   3. Se você se comportar bem então, levo você ao circo.
   4. Se você não se comportar bem então, não levo você ao circo.
   5. Se você se comportar bem então, não levo você ao circo.
   6. Se comporte bem e não levo você ao circo.

---

[6] Lembre que a definição de número par ou ímpar somente é para inteiros **Z**

7. $3 < x$

8. "*ser branco*"

20. Resolva o seguinte enigma:

Um viajante pede a mão da filha do sultão. Para tê-la o sultão diz ao viajante:

> *"Destas cinco escravas, você tem que deduzir a cor dos olhos da segunda e da terceira. As cinco terão os olhos vendados de forma que você não seja capaz de vê-las. Três têm olhos verdes, duas têm olhos azuis".*
>
> *"As de olhos verdes sempre mentem, as de olhos azuis sempre dizem a verdade. Você pode fazer somente três perguntas para elas".*
>
> *"Ah! esqueci, se você comete um engano, você morrerá por sua insolência".*

Viajante : De que cor são seus olhos?

Escrava 1: bla, bla, bla . . . (responde em um idioma incompreensível para ele)

Viajante : Que falou tua companheira?

Escrava 2: Ela falou que tem olhos verdes.

Viajante : Que falhou a primeira e de que cor são os olhos da segunda?

Escrava 3: A primeira diz ter olho azul, e a segunda tem olho verde.

Conclusão : O viajante caso com a princesa.

21. Tenho três pares de sapatos: S_1, S_2 e S_3; um par preto, um par é marrom e o outro é branco, não necessariamente nesta ordem. Somente uma das afirmações é verdadeira: **i)** S_1 é preto; **ii)** S_2 não é preto; **iii)** S_3 não é branco.

Quais as cores dos sapatos S_1, S_2 e S_3 nessa ordem?

1.5 ÁLGEBRA DE PROPOSIÇÕES

Trata-se nesta seção de um conjunto de operações lógicas que podemos realizar, com a utilização dos conectivos da conjunção, disjunção, negação, implicação e bicondicional.

1.5.1 Propriedades da conjunção.

Consideremos p, q, r, s e t proposições simples, então o conectivo lógico da conjunção satisfaz as seguintes propriedades:

a) $p \wedge p \Leftrightarrow p$ . . .idempotente.

b) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ . . . comutativa.

c) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ . . . associativa.

d) $p \wedge t \Leftrightarrow p$ sempre que t verdadeira (**v**) . . . propriedade de p

e) $p \wedge s \Leftrightarrow s$ sempre que s falsa (**f** }) . . . propriedade de s

Demonstração (**a**)

Na seguinte *tabela-verdade* observe que as linhas das proposições $p \wedge p$ e p são idênticas, e a bicondicional $p \wedge p \Leftrightarrow p$ é uma tautologia.

p	$p \wedge p$	$\Leftrightarrow$	p
v	v	(**v**)	v
f	f	(**v**)	f

Assim, tanto, $p \wedge p$ quanto p são proposições logicamente equivalentes.

Demonstração **(b)**

Com efeito, observando as colunas da *tabela-verdade* para as proposições $p \wedge q$ e $q \wedge p$ mediante o conectivo $\Leftrightarrow$ obtemos uma tautologia.

p q	$p \wedge q$	$\Leftrightarrow$	$q \wedge p$
v v	v	(**v**)	v
v f	f	(**v**)	f
f v	f	(**v**)	f
f f	f	(**v**)	f

Logo, tanto, $p \wedge q$ quanto $q \wedge p$ são proposições logicamente equivalentes.

Demonstração **(c)**

Temos que a *tabela-verdade* para a proposição $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ é uma tautologia.

p q r	$(p \wedge q) \wedge r$	$\Leftrightarrow$	$p \wedge (q \wedge r)$
v v v	v	(**v**)	v
v v f	f	(**v**)	f
v f v	f	(**v**)	f
v f f	f	(**v**)	f
f v v	f	(**v**)	f
f v f	f	(**v**)	f
f f v	f	(**v**)	f
f f f	f	(**v**)	f

Fica mostrado que, tanto $(p \wedge q) \wedge r$ quanto $p \wedge (q \wedge r)$ são proposições logicamente equivalentes.

Demonstração **(d)** (Propriedade da identidade).

Somente no caso das proposições t verdadeira (**v**) e s falsa (**f**) temos que as proposições $p \wedge t \Rightarrow p$ e $p \wedge s \Rightarrow p$ são tautológicas.

Com efeito, temos as *tabela-verdade* seguintes:

p t	$p \wedge t$	$\Leftrightarrow$	p
v v	v	v	v
f v	f	v	f

p s	$p \wedge s$	$\Leftrightarrow$	s
v v	f	v	f
f v	f	v	f

Estas propriedades exprimem de t e s são respectivamente o elemento neutro e o elemento absorvente da conjunção.

Exemplo 1.33 Propriedade idempotente.

i) $x \neq 3 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \neq 3$

ii) $a \leq 8 \wedge a \leq 8 \Leftrightarrow a \leq 8$

Exemplo 1.34 Propriedade comutativa.

i) $x \neq 7 \wedge x = 5 \Leftrightarrow x = 5 \wedge x \neq 7$

ii) $a \geq 6 \wedge a \leq 15 \Leftrightarrow a \leq 15 \wedge a \geq 6$

iii) $y \leq 6 \wedge y \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq y \wedge y \leq 6$

Exemplo 1.35 Propriedade associativa.

i) $(x \neq 7 \wedge x = 5) \wedge x \leq 12 \Leftrightarrow x \neq 7 \wedge (x = 5 \wedge x \leq 12)$

ii) $(a \geq 6 \wedge a \leq 15) \wedge a \neq 7 \Leftrightarrow a \geq 6 \wedge (a \leq 15 \wedge a \neq 7)$

Exemplo 1.36 Propriedade da identidade.

i) $a \neq 3 \;\wedge\; |a| \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a \neq 3$

ii) $x \neq 3 \;\wedge\; |x| < -2 \;\Leftrightarrow\; |x| < -2$

1.5.2 Propriedades da disjunção.

Sejam p, q, r, s e t proposições simples, então o conectivo lógico da conjunção satisfaz as seguintes propriedades:

a) $p \vee p \Leftrightarrow p$ . . .idempotente.

b) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ . . . comutativa.

c) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ . . . associativa.

d) $p \vee t \Leftrightarrow t$ sempre que t verdadeira (**v**) . . . propriedade de t

$p \vee s \Leftrightarrow p$ sempre que s falsa (**f**) . . . propriedade de p

Demonstração **(a)**

Na seguinte *tabela-verdade* as proposições $p \vee p$ e p são idênticas, e a bicondicional $p \vee p \Leftrightarrow p$ é uma tautologia.

p	$p \vee p$	$\Leftrightarrow$	p
v	v	(**v**)	v
f	v	(**v**)	v

Demonstração **(b)**

Com efeito, observando as colunas da *tabela-verdade* para as proposições $p \vee q$ e $q \vee p$ mediante o conectivo $\Leftrightarrow$ obtemos uma tautologia.

p q	$p \vee q$	$\Leftrightarrow$	$q \vee p$
v v	v	(**v**)	v
v f	v	(**v**)	v
f v	v	(**v**)	v
f f	f	(**v**)	f

Demonstração **(d)**

Somente no caso das proposições t verdadeira (**v**) e s falsa (**f**) temos que as proposições $p \vee t \Leftrightarrow t$ e $p \vee s \Leftrightarrow p$ são tautológicas.

Com efeito, temos as *tabela-verdade* seguintes:

p t	$p \vee t$	$\Leftrightarrow$	t
v v	v	(**v**)	v
f v	v	(**v**)	v

p s	$p \vee s$	$\Leftrightarrow$	p
v f	v	(**v**)	v
f f	f	(**v**)	v

Estas propriedades exprimem de t e s são respectivamente o *elemento absorvente* e o *elemento neutro* da conjunção.

Demonstração **(c)**

Temos que a *tabela-verdade* para a proposição $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ é uma tautologia.

p q r	$(p \vee q) \vee r$	$\Leftrightarrow$	$p \vee (q \vee r)$
v v v	v	(**v**)	v
v v f	v	(**v**)	v
v f v	v	(**v**)	v
v f f	v	(**v**)	v
f v v	v	(**v**)	v
f v f	v	(**v**)	v
f f v	v	(**v**)	v
f f f	f	(**v**)	f

Exemplo 1.37 Propriedade idempotente.

i) $x \neq 3 \vee x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq 3$

ii) $a \leq 8 \vee a \leq 8 \Leftrightarrow a \leq 8$

Exemplo 1.38 Propriedade comutativa.

i) $x \neq 7 \vee x = 5 \Leftrightarrow x = 5 \vee x \neq 7$

ii) $a \geq 6 \vee a \leq 15 \Leftrightarrow a \leq 15 \vee a \geq 6$

iii) $y \leq 6 \vee y \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq y \vee y \leq 6$

Exemplo 1.39 Propriedade associativa.

i) $(x \neq 7 \vee x = 5) \vee x \leq 12 \Leftrightarrow x = 5 \vee (x \neq 7 \vee x \leq 12$

ii) $(a \geq 6 \vee a \leq 15) \vee (a \neq 7) \Leftrightarrow a \leq 15 \vee (a \geq 6 \vee a \neq 7)$

Exemplo 1.40 Propriedade de identidade.

i) $a \neq 3 \vee |a| < -1 \Leftrightarrow a \neq 3$

ii) $x \neq 3 \vee |x| \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq 2$

1.5.3 Propriedades da disjunção e conjunção.

Sejam p, q e r proposições simples, temos as seguintes propriedades:

1. Absorção.

   (a) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

(b) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

2. Propriedade distributiva.

(a) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(b) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

3. Negação.

(a) $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$

4. Leis de Morgan.

(a) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

(b) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

- Demonstração da propriedade de absorção.

Demonstração (a)

Temos a seguinte *tabela-verdade* para as proposições $p \wedge (p \vee q)$ e p

p q	$p \wedge (p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	p
v v	v	(**v**)	v
v f	v	(**v**)	v
f v	f	(**v**)	f
f f	f	(**v**)	f

Observe que a bicondicional $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ é tautologia, logo as proposições $p \wedge (p \vee q)$ e p são logicamente equivalentes.

Demonstração (b)

De modo análogo, temos a seguinte *tabela-verdade* para as proposições $p \vee (p \wedge q)$ e p

p q	$p \vee (p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	p
v v	v	(**v**)	v
v f	v	(**v**)	v
f v	f	(**v**)	f
f f	f	(**v**)	f

A bicondicional $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ é tautologia, logo as proposições $p \vee (q \wedge r)$ e p são logicamente equivalentes.

- Demonstração das Leis de Morgan:

Demonstração **(a)** e **(b)**

Observe a *tabela-verdade* para a bicondicional:

p q	$\sim(p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	$\sim p \vee \sim q$
v v	f	(**v**)	f
v f	v	(**v**)	v
f v	v	(**v**)	v
f f	v	(**v**)	v

p q	$\sim(p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	$\sim p \wedge \sim q$
v v	f	(**v**)	f
v f	v	(**v**)	f
f v	v	(**v**)	f
f f	v	(**v**)	v

Nas duas tabelas temos tautologia; logo as proposições indicadas são logicamente equivalentes.

As demais demonstrações é exercício para o leitor.

Propriedade 1.2 Negação da condicional.

Tem-se que a negação da proposição $p \Rightarrow q$ é logicamente equivalente à proposição $p \wedge \sim q$.

Demonstração.

Com efeito, a mostrar que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$. Observe a *tabela-verdade*:

p q	$p \Rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$\sim p \vee q$
v v	v	(**v**)	v
v f	f	(**v**)	f
f v	v	(**v**)	v
f f	v	(**v**)	v

Por outro lado, a negação da proposição $p \Rightarrow q$ é a proposição $\sim(p \Rightarrow q)$, isto é $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim\sim p \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$.

Portanto, $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$.

Propriedade 1.3

A negação da proposição $p \Leftrightarrow q$ é logicamente equivalente à proposição $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$.

Demonstração.

Com efeito temos que $p \Leftrightarrow q$ é logicamente equivalente à proposição $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, isto da seguinte *tabela-verdade*.

p q	$(p \Leftrightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
v v	v	(**v**)	v
v f	f	(**v**)	f
f v	f	(**v**)	f
f f	v	(**v**)	v

Logo aplicando as regras de Morgan, temos que $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p) \Leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p))$.

Portanto, $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p))$.

Observação 1.4

A condicional, $p \Rightarrow q$ não satisfaz as propriedades idempotente, comutativa e associativa.

Observação 1.5

A bicondicional $p \Leftrightarrow q$ não satisfaz a propriedade idempotente, pois é obvio que as proposições $p \Leftrightarrow p$ e p não são logicamente equivalentes.

A bicondicional satisfaz as propriedades, associativa e comutativa.

1.5.4 Método dedutivo.

Todas as condicionais e bicondicionais lógicas, foram mostradas mediante a utilização de *tabela-verdade*. No que segue estas condicionais e bicondicionais mostraremos pelo método mais eficiente chamado "*método dedutivo*".

Neste "*método dedutivo*" são de muita importância as equivalências relativas à *álgebra de proposições*; por exemplo, para a seguinte proposição $(p \wedge q) \Rightarrow p$, temos:

$((p \wedge q) \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim (p \wedge q) \vee p) \Leftrightarrow$ . . . tautologia.

$\Leftrightarrow (\sim (p \wedge q) \vee p) \Leftrightarrow ((\sim p \vee \sim q) \vee p) \Leftrightarrow$ . . . lei de Morgan.

$\Leftrightarrow ((\sim p \vee \sim q) \vee p) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee \sim q) \Leftrightarrow$ . . . comutativa.

$\Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee \sim q) \Leftrightarrow (T \vee \sim q) \Leftrightarrow$ . . . tautologia.

$\Leftrightarrow (T \vee \sim q) \Leftrightarrow T$ . . . tautologia.

Portanto, $(p \wedge q) \Rightarrow p$ é logicamente verdadeira; é tautologia.

Observação 1.6

Denotamos com T as proposições logicamente verdadeiras (tautologias), e com C proposições logicamente falsas (contradição)

Exemplo 1.41

Mostre a implicação: $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow$ (modus ponens) é logicamente verdadeira.

Demonstração.

$(((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q) \Leftrightarrow$ . . . hipótese.

$\Leftrightarrow (((\sim p \vee q) \wedge p) \Rightarrow q)$ . . . tautologia.

$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p) \Rightarrow q)$ . . . distributiva.

$\Leftrightarrow (C \vee (q \wedge p) \Rightarrow q)$ . . . contradição.

$\Leftrightarrow ((q \wedge p) \Rightarrow q)$ .. . cancelamento.

$\Leftrightarrow T$ . . . tautologia.

Portanto, $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow p$ é logicamente verdadeira; é tautologia.

1.5.5 Redução do número de conectivos.

Foram estudados cinco conectivos lógicos, entretanto podemos reduzir esse número para dois, entendendo-se com isto que três deles podem ser definidos em função de dois, confirmando-se para estas novas definições a mesma *tabela-verdade* da proposição original.

Propriedade 1.4

Entre os cinco conectivos lógicos fundamentais: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ três exprimem-se em termos apenas dos seguintes pares:

a) $\sim$ e $\vee$; **b)** $\sim$ e $\wedge$; **c)** $\sim$ e $\Rightarrow$.

Demonstração a)

1º. $p \wedge q \Leftrightarrow (\sim\sim p \wedge \sim\sim q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$

2º. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

3º. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge \sim p)) \Leftrightarrow \sim((p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p))$

Demonstração **b)**

1º. $p \vee q \Leftrightarrow (\sim\sim p \vee \sim\sim q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$

2º. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$

3º. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow (\sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(\sim(p \wedge q)))$

Demonstração **c)**

1º. $p \wedge q \Leftrightarrow (\sim(\sim p \vee \sim q)) \Leftrightarrow \sim(p \Rightarrow \sim q)$

2º. $p \vee q \Leftrightarrow (\sim\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)$

3º $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow \sim((p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim(q \Rightarrow p))$

Observação 1.7

1º. Os conectivos $\wedge$, $\vee$ e $\Rightarrow$ não se exprimem em termos de $\sim$ e $\Leftrightarrow$

2º. O conectivo $\vee$ exprime-se em função unicamente de $\Rightarrow$ pela equivalência $p \vee q \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$

3º. Todos os conectivos exprimem-se em termos de um único $\uparrow$ ou $\downarrow$.

Definição 1.14 Forma normal.

Diz-se que uma proposição esta na forma normal (FN) se, e somente se, quando muito, contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$.

Exemplo 1.42

As seguintes proposições estão na forma normal (FN):

$\sim p \wedge \sim q$, $\sim p \vee \sim q$, $(p \wedge q) \vee (\sim q \vee r)$

Definição 1.16 Forma normal conjuntiva.

Diz-se que uma proposição esta na forma normal conjuntiva (FNC) se, e somente se, são verificadas as seguintes condições:

a) Contém quando muito os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$;

b) $\sim$ opera sobre as proposições simples; e não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$;

c) não aparecem sinais de negação sucessivos como $\sim \sim$;

d) $\vee$ não tem alcance sobre $\wedge$, não há expressões do tipo $p_1 \vee (p_2 \wedge p_3)$.

Exemplo 1.43

As seguintes proposições estão na forma normal (FNC): $\sim p \vee \sim q$, $\sim p \wedge q \wedge r$, $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$

Exemplo 1.44

- São (FNC) $(\sim p \vee q) \wedge (r \vee s \vee p)$, $\sim p \wedge q$, $p \wedge \sim q$, p, $\sim q$
- Não são (FNC) $\sim p \wedge q$, $\sim \sim r$, $p \vee (q \wedge r)$, $\sim (p \vee q)$

Observação 1.8

Para todo proposição composta, é possível determinar uma (FNC) a ela logicamente equivalente. Para isso, usamos as seguintes regras:

a) Eliminando $p \Rightarrow q$ por $\sim p \vee q$ e $p \Leftrightarrow q$ mediante a substituição $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$.

b) Eliminando as negações repetidas e parênteses precedidos de $\sim$ pelas regras da "*negação dupla*" e de "*Morgan*" .

c) Substituem-se:

1. $p \vee (q \wedge r)$ por $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
2. $(p \wedge q) \vee r)$ por $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Exemplo 1.45

Seja $\sim ((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (r \wedge q)$; temos:

1. $\sim ((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (r \wedge q)$ . . . hipótese.
2. $(\sim (p \vee q) \vee \sim q) \vee (r \wedge q)$ . . . lei de Morgan
3. $(\sim p \wedge \sim q) \vee q) \vee (r \wedge q)$ . . . lei de Morgan, tautologia.
4. $((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)) \vee (r \wedge q)$ . . . tautologia.
5. $(((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)) \vee r) \wedge ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)) \vee q)$ . . . tautologia.

6. $(\sim p \vee q \vee r) \wedge (\sim q \vee q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee q) \wedge (\sim q \vee q \vee q)$

Exemplo 1.46

Determine a (FNC) da proposição $\sim (((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r))$

Solução

$\sim (((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((\sim (p \vee q) \vee \sim\sim q) \wedge (\sim q \vee \sim r)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)) \Leftrightarrow ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r))$

Propriedade 1.5

Uma forma normal conjuntiva (FNC) é tautológica se, e somente se, cada elemento da conjunção é uma tautologia, isto é cada elemento equivale fórmula disjunta formada por p e a negação $\sim p$.

Demonstração.

Efetivamente, se cada elemento equivale à formula de tautologia, então cada elemento é tautológico e dai cada um equivale a $p \vee \sim p$.

Reciprocamente, se cada elemento equivalente é tautológico $p \vee \sim p$, então, a conjunção, que é a (FNC) é tautologia.

Definição 1.16 Forma disjuntiva.

Diz-se que uma proposição esta na forma normal disjuntiva (FND) se, e somente se, são verificadas as seguintes condições:

a) Contém quando muito os conectivos$\sim$, $\wedge$ e $\vee$;

b) $\sim$ opera sobre as proposições simples; e não tem alcance sobre $\vee$ e $\wedge$;

c) não aparecem sinais de negação sucessivos como $\sim\sim$;

d) $\wedge$ não tem alcance sobre $\vee$, não há expressões do tipo $p_1 \wedge (p_2 \vee p_3)$

Exemplo 1.47

As seguintes proposições estão na forma normal disjuntiva (FND): $\sim p \vee q$, $p \vee (\sim q \wedge r)$, $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r)$

Exemplo 1.48

- São (FND) $p \vee (q \wedge r) \vee (\sim s \wedge p)$, p, $\sim p \vee p$, $\sim q$, $\sim p \vee q$
- Não são (FND) $\sim\sim p$, $\sim (p \vee q)$, $p \wedge (q \vee r)$.

Para todo proposição composta, é possível determinar uma (FND) a ela logicamente equivalente. Para isso, usamos as seguintes regras:

a) Substituem-se $p \Rightarrow q$ por $\sim p \vee q$ e $p \Leftrightarrow q$ por $(\sim \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

b) Utilizando a lei de Morgan, elimina-se o conectivo da negação $\sim$ que precede ao parênteses.

c) Eliminam-se as negativas múltiplas.

d) Substituem-se:

$p \wedge (q \vee r)$ por $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$(p \vee q) \wedge r)$ por $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Exemplo 1.49

Determinar a (FND) da proposição: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Solução

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow (((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \wedge p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p) \vee (p \wedge q))$$

Exemplo 1.50

Determinar a (FND) da proposição: $\sim ((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (r \wedge q)$.

Solução

1.	$\sim ((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (r \wedge q)$	. . . hipótese.
2.	$\sim (p \vee q) \vee \sim \sim q \vee (r \wedge q)$	. . . lei de Morgan.
3.	$(\sim p \wedge \sim q) \vee q \vee (r \wedge q)$	. . . lei de Morgan.

Propriedade 1.6

Uma fórmula normal disjuntiva é contradição se, e somente se, cada elemento é equivalente à fórmula conjunta p com sua negação $\sim p$.

Demonstração

De fato, se cada elemento equivale a $p \wedge \sim p$ então, a disjunção da (FND) é contradição.

Reciprocamente, se a (FND) é contradição, então cada elemento da disjunção é contradição e daí, cada elemento é equivalente a $p \wedge \sim p$.

Observação 1.9

1. Toda proposição pode ser levada para uma (FN) equivalente pela eliminação dos conectivos $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$.
2. Existem duas espécies de (FN) para uma proposição: a forma normal conjuntiva (FNC) e a forma normal disjuntiva (FND).
3. Uma mesma proposição pode ter mais de uma (FNC) ou (FND).

1.5.6 Princípio de dualidade.

Seja P uma proposição que só contem os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$. A proposição que resulta de P trocando cada conectivo $\wedge$ por $\vee$, cada $\vee$ por $\wedge$ é chamado de *dual de* P e denotado por P'.

Propriedade 1.7

Se P e Q são duas proposições equivalentes que somente contem os conectivos ~, $\wedge$ e $\vee$, então as suas duais respectivas P_1 e Q_1 também são logicamente equivalentes.

Exemplo 1.51

- Da equivalência $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$, deduz-se pelo principio de dualidade, a equivalência $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.
- A partir de $(p \wedge \sim p) \vee q \Leftrightarrow q$ deduz-se, pelo princípio de dualidade que: $(p \vee \sim p) \wedge q \Leftrightarrow q$

Pequeno dicionário de heurística

Definições: De termos são descrições de seus significados por meio de outros termos que se supõe sejam bem conhecidos.

Os termos técnicos em matemática são de duas categorias: Uns são aceitos como termos primitivos e não se definem (ponto, reta, plano, elemento, conjunto, etc). Outros consideram-se como termos derivados e são definidos normalmente (bissetriz, círculo, parábola, etc).

Diagnóstico: É um termo técnico em educação, com o significado de *caracterização mais rigorosa do aproveitamento do aluno*.

Equacionamento; É como tradução de um idioma para outro. Esta comparação usada por Newton na sua "*Arithmetica Universalis*", pode contribuir para estabelecer a natureza de certas dificuldades muitas vezes encontradas na solução de um problema.

Heurística: Ou heurética era o nome de um certo ramo de estudo, não bem delimitado, pertencente à lógica, à filosofia, muitas vezes delineado mas raramente apresentado com detalhes

Idéia brilhante: É uma expressão coloquial que significa um súbito avanço no sentido da solução.

Exercícios 1-3

1. Sabendo que as proposições p e q são verdadeiras e a proposição r falsa, determinar o valor lógico (**v**) ou (**f**) das seguintes proposições:

   1. $(\sim p \downarrow q) \wedge (q \uparrow \sim r)$ **2.** $((p \uparrow q) \vee (q \downarrow r)) \uparrow (r \downarrow p)$

   3. $(\sim p \uparrow \sim q) \Leftrightarrow ((q \downarrow r) \downarrow p)$

2. Traduza cada uma das frases para a linguagem do cálculo proposicional; atribua letras às proposições atômicas e use conectivos e parênteses.

   1. O Pedro e a Maria vão à escola.
   2. Se o Pedro sai com a Maria então o Jorge não.
   3. O Pedro sai com a Maria ou o Jorge sai com a Maria, mas não ambos.
   4. O Pedro passa a Lógica só se estudar.
   5. O Pedro não passa a Lógica a não ser que faça o trabalho de casa e estude.
   6. O Pedro inscreveu-se em Lógica, mas a Maria não.
   7. O Pedro não passa a Lógica se não fizer o trabalho de casa nem estudar.
   8. Não é verdade que Pedro passe a Lógica desde que faça o trabalho de casa e estude.
   9. Uma condição suficiente para Pedro passar a Lógica é que ele estude e faça o trabalho de casa.
   10. Nem o Pedro nem a Maria gostam do Jorge.
   11. Se o Pedro não estudar e fizer o trabalho de casa então ele não passa a Lógica.
   12. Se o Pedro e a Maria trabalharem a um ritmo constante então não há perda nem ganho de eficiência quando trabalham juntos.
   13. Se perder o minha “Besta” chego 10 minutos atrasado, assumindo que o próximo vem à tabela.
   14. Hoje vamos ao parque desde que o carro não se estrague e não chova.
   15. Se Lógica é difícil o Pedro e a Maria só passam se estudarem.

3. Mostre as propriedades comutativa e associativa da bicondicional.
4. Determine as regras de Morgan para três proposições.
5. Determine a negação de cada uma das seguintes proposições:

   1. É falso que não está nublado ou que está frio.
   2. Não é verdade que o pai de Pedro é chileno ou que a mãe é boliviana.
   3. Não é verdade de Maria estuda Matemática, mas não Agronomia.
   4. Não é verdade que os preços estão aumentando e que as vendas estão diminuendo.

6. Mostre as seguintes propriedades:

1 $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ **2.** $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

3. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

7. Sejam as proposições: p : chove, e q : faz frio. Consideremos

   P(p, q) : Se chove, então chove ou faz frio.

   Q(p, q) : Se chove e não chove, então, não é verdade que se faz frio então chove.

   Mostre que $P(p,q) \Leftrightarrow Q(p,q)$

8. Sejam as proposições: p : Pedro estuda, e q : Carlos dança. Consideremos

   P(p, q) : Não é verdade que, Pedro estuda e Carlos dança.

   Q(p, q) : Se Pedro estuda, Carlos não dança.

   Mostre que $P(p,q) \Leftrightarrow Q(p,q)$

9. Sejam as proposições: p : o quadrado é retângulo e q : o quadrado é paralelogramo. Consideremos

   P(p, q) : Se o quadrado não é retângulo, então, ele não é paralelogramo e se ele é retângulo, então, é paralelogramo.

   Q(p, q) : Não é verdade que: O quadrado é retângulo e não é paralelogramo ou o quadrado não é retângulo e é paralelogramo.

   Mostre que $P(p,q) \Leftrightarrow Q(p,q)$

10. Definir $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ e $\wedge$ a partir de $\sim$ e $\vee$.

11. Definir $\wedge$, $\vee$ e $\Leftrightarrow$ a partir de $\sim$ e $\Rightarrow$.

12. Definir $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ em função do símbolo de Sheffer $\downarrow$; idem para o símbolo $\uparrow$.

13. Simplificar as proposições:

    1. $\sim(\sim p \Rightarrow \sim q)$ **2.** $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$ **3.** $\sim (p \vee \sim p)$

    4. $\sim (\sim p \vee \sim q)$ **5.** $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$ **6.** $(p \vee q) \wedge \sim p$

    7. $\sim (\sim p \wedge q)$ **8.**$p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$

14. Determinar a (FNC) equivalente para as seguintes proposições:

    1. $p \Leftrightarrow (q \vee \sim r)$ **2.** $p \Rightarrow q$ **3.** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

    4. $\sim\sim p \Rightarrow \sim q$ **5.** $\sim p \Rightarrow \sim q$ **6.** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow p)$

    7. $p \vee q$ **8.** $\sim (p \wedge q)$ **9.** $\sim (\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim r \vee q$

    10. $p \wedge q$ **11.** $\sim (p \vee q)$ **12.** $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \Rightarrow s$

15. Determinar a (FND) equivalente para as seguintes proposições:

    1. $\sim p \Rightarrow q$ **2.** $p \Rightarrow q$ **3.** $\sim(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim s \wedge q$

    4. $\sim p \Rightarrow \sim q$ **5.** $p \wedge q$ **6.** $\sim((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r)$

    7. $\sim (p \vee q)$ **8.** $\sim (p \wedge q)$ **9.** $(p \wedge q) \vee (r \wedge q) \Rightarrow \sim s$

    10. $\sim (p \wedge q) \vee r$ **11.** $p \vee \sim q$ **12.** $\sim\sim\sim (p \wedge q) \Rightarrow \sim (\sim p \vee q)$

16. Demonstrar as equivalências:

1. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ **2.** $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

17. Demonstre a equivalência: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \uparrow p) \uparrow (p \uparrow p)) \uparrow (q \uparrow q)$

18. Usar o *método dedutivo* para demonstrar o seguinte:

1. $p \wedge \sim p \Rightarrow q$ **2.** $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q$

3. $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow p \wedge q \Rightarrow r$ **4.** $p \Rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \Rightarrow q$

5. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow p \Rightarrow q \wedge r$ **6.** $\sim p \Rightarrow p \Leftrightarrow p$

19. Demonstrar: $(p \uparrow q) \Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$

20. Determine uma forma normal conjuntiva (FNC) equivalente para cada uma das seguintes proposições:

1. $p \Rightarrow q$ **2.** $\sim p \Leftrightarrow p$ **3.** $p \Leftrightarrow \sim p$

4. $p \uparrow q$ **5.** $p \uparrow p$ **6.** $p \uparrow \sim p$

7. $\sim p \wedge q) \veebar q$ **8.** $(p \wedge \sim p) \downarrow (q \wedge \sim q)$ **9.** $p \veebar \sim p$

10. $p \downarrow q$ **11.** $(p \vee \sim p) \downarrow (q \vee \sim q)$ **12**. $\sim p \downarrow (q \veebar p)$

13. $(p \uparrow q) \Leftrightarrow p$ **14.** $(\sim (\sim p \uparrow \sim q)) \downarrow (r \Rightarrow \sim p)$

21. Determinar uma forma normal disjuntiva (FND) equivalente para cada uma das seguintes proposições:

1. $\sim (\sim p \vee \sim q)$ **2.** $\sim (p \Rightarrow q)$ **3.** $(p \Rightarrow q) \wedge \sim p$

4. $\sim (p \vee q)$ **5.** $(p \Rightarrow q) \vee \sim p$ **6.** $\sim (p \wedge q)$

7. $p \veebar \sim p$ **8.** $p \Leftrightarrow \sim p$ **9.** $p \uparrow q$

10. $p \downarrow q$ **11.** $p \uparrow p$ **12.** $\sim p \uparrow p$

22. Determine os duais das seguintes proposições.

1. $\sim p \Rightarrow q \wedge r$ **2**. $\sim (p \Rightarrow q) \vee \sim p$ **3.** $\sim p \wedge \sim (q \wedge r) \Rightarrow s$

4. $\sim p \wedge (q \Rightarrow r)$ **5**. $\sim (p \Leftrightarrow q)$ **6.** $q \Rightarrow (p \vee r)$

23. Qual é a negação lógica de "*Todo cão late*?"

24. Mostre que, se P(p, q) é uma (FNC) tautológica se, e somente se, ~ P(p, q) é contradição.

    Sugestão: Use a condição para que (FNC) seja tautológica.

25. Mostre que, $P(p, q) \Rightarrow Q(p, q)$ é tautológica, nas condições do problema anterior, então $\sim Q(p, q) \Rightarrow \sim P(p, q)$ é tautológica.

    Sugestão: Lembrar que $(P(p, q) \Rightarrow Q(p, q)) \Rightarrow \sim P(p,q) \vee Q(p, q)$

26. Mostre que se P*(p, q) obtém-se de P(p,q), pela troca dos conectivos $\wedge$ e $\vee$ e negação dos átomos, então $P^*(p,q) \Leftrightarrow \sim P(p, q)$

27. Num povoado de uma cidadezinha da Amazônia, foi celebrado um juízo no qual são três os acusados, um de eles o culpado sempre mente e os outros dois sempre dizem a verdade.

    Um deles **não** fala o português e o juiz decide considerar como intérprete a os outros dois acusados.

O juiz interrogando ao primeiro que não fala português pergunta: *é você culpado*? e os interpretes dizem:

O segundo: O acusado falou que **não** é culpado.

O terceiro: O acusado falou que **sim** é culpado.

Pergunta-se quem é o culpado?

a) O primeiro. **b**) O segundo. **c)** O terceiro.

28. Resolver o seguinte enigma:

Na audiência:

O inspetor Nyko tinha costume de ir à audiência para observar os juízos. Deste modo o inspetor testava sua capacidade de raciocínio. Um dos casos com os que ele se encontrou foi o seguinte:

Temos quatro acusados A, B, C e D. Aconteceram os seguintes fatos:

- Se A é culpado, então B era seu cúmplice.
- Se B é culpado, então o bem C era o cúmplice ou bem A é inocente.
- Se D é inocente, então A é culpado e C é inocente.
- Se D é culpado, também o é A.

Pergunta-se: Quem são os inocentes e quem os culpáveis?

29. Os ovos de galinha são mais baratos do que os de perua.Não tenho dinheiro suficiente para comprar duas dúzias deovos de galinha; logo:

a) Tenho dinheiro suficiente para comprar uma dúzia de ovos de galinha.

b) Não tenho dinheiro para comprar duas dúzias de ovos de perua.

Miscelânea 1-1

1. Substituindo ``m'' por ``p'' na palavra "mapa". O resultado é:

   a) papa **b)** mama **c)** pama

2. Se trocarmos "p" por "m" na palavra "mapa". O resultado é:

   a) papa **b**) mama **c**) pama

3. Traduza cada uma das frases para a linguagem do cálculo proposicional; atribua letras às proposições atômicas e utilize conectivos e parênteses.

   1. Se duas retas são coplanares uma condição necessária e suficiente para serem paralelas é que não se interceptem nem coincidam.
   2. Se Q é um quadrilátero então Q é um paralelogramo se os seus lados opostos são paralelos e iguais.
   3. Se a aplicação f é contínua no intervalo (a, b) então f tem um máximo em [a,b] ou f não é contínua em a e b.
   4. Uma condição suficiente para a aplicação f ter um máximo em [a, b] é que f seja contínua em (a,b) e que f seja contínua em ambos a e b.
   5. Se f' está definida num intervalo (a,b), uma condição necessária e suficiente para f ser crescente em (a, b) é que f' seja positiva em (a, b).
   6. Uma condição necessária e suficiente para f' ser positiva em (a,b) é que f' esteja definida em (a, b) e f seja crescente em (a,b).
   7. Se A é uma aproximação de I obtida pelo método do trapézio então se f'' >0 para ?
   8. Se 3 e 4 forem substituir x e y, respectivamente, na desigualdade 2x+y < x+3y obtemos a desigualdade 10 < 15.
   9. Se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ são três vetores de $\mathbf{R}^3$ aplicados na origem, então o conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é linearmente independente se os três vetores estão no mesmo plano.

4. Traduza cada das orações dos seguintes exercícios, em uma declaração no cálculo proposicional.

   1. Toda menina boa merece fruta.
   2. Meninos bons sempre merecem fruta.
   3. Algumas vacas não são pássaros e alguns são.
   4. Algumas vacas são pássaros mas nenhuma vaca é pessoa.
   5. Alguns números são maiores que dois; outros não são.
   6. Todo número menor que 6 também são menores que 600.

5. Determine a negação lógica das seguintes proposições:

   1. Ser branco
   2. $3 \leq x$

3. Todo cão late

4. Se você se comportar bem então, levo você ao circo.

5. Se eu estudo lógica, esta prova é fácil.

6. Eu estudo lógica, e esta prova não é fácil.

7. Estudo lógica, ou esta prova é fácil.

8. Não estudo lógica, e esta prova não é fácil.

9. Se esta prova está difícil então, reprovo em Fundamentos.

10. $3+5 \neq 6 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \neq 6-3$.

11. Se esta prova está fácil, aprovo em Fundamentos.

6. Sejam A, B conjuntos e seja w um objeto tal que $w \notin A \cap B$, então:

   a) $w \notin A$ e $w \notin B$ **b)** $w \notin A$ e ($w \notin B$ ou $w \notin B$) **c)** $w \notin A$ ou $w \notin B$.

7. Um número está formado pelos dígitos: 1, 3, 4, 6, 7 e 8 não necessariamente nessa ordem. O número 7 está depois do 1; o 3 e 4 não são vizinhos do 1 nem do 7. O número 4 e o 1 não são vizinhos do 6; o 6 está depois do 8. Pergunta-se: qual é o número procurado?

8. Foi cometido um delito, os suspeitos são Andrés Arnaez, Bonifácio Benites, Carlos Corso e Dario Diaz. Na defesa Arnaez diz que no momento do fato esteve com Carlos e Benites. Bonifácio diz que no momento do fato esteve com Corso e Andrés. Carlos diz que esteve com Dario. Por último, Diaz diz que esteve com Andrés.

   Se duas afirmações coincidem, então são verdadeiras. Pergunta-se quais são os culpáveis? Sabe-se que no máximo duas pessoas cometeram o delito.

9. Cinco aviões Xavantes são identificados por letras de cores diferentes. Cada um dos aviões apresenta uma variação. Todos os pilotos fumam marcas de cigarros diferentes ou cachimbo ou charuto, e praticam esportes distintos.

   - o aparelho do coronel Milton tem letras vermelhas e fica próximo do que tem letras amarelas;
   - o rádio transmissor do tenente Walter está em pane;
   - o piloto do avião com letras verdes fica à direita do avião com letras marrom;
   - o major Rui pratica natação;
   - o piloto do avião com letras verdes e adora pesca;
   - o piloto que fuma charuto está com o altímetro desregulado +20 pés;
   - o piloto do avião com letras amarelas fuma “Continental”
   - o do avião com letras vermelhas joga “golf”;
   - o aparelho do capitão Pedro é o da extrema esquerda;
   - o piloto que fuma “Minister”, voa ao lado do avião que está com a pressão do sistema hidráulico caindo;

- o piloto que fuma “Continental” voa ao lado do piloto que está com a bússola desviada 5 graus a mais;
- o piloto que fuma ``Hollywood" pratica equitação;
- o brigadeiro Washington fuma cachimbo;
- o capitão Pedro voa ao lado do avião com letras azuis;
- o que se dedica a equitação, ao voar, é vizinho do que pratica “golf”.

Pergunta-se:

1. Qual o piloto que pratica tênis?

2. Qual o avião cujo motor está com a temperatura subindo?

10. Quem é o atleta?

Em um bar encontram-se quatro amigos, cujos nomes são: Mário, Marcelo, Rafael e Eduardo. Estes por sua vez são atleta, futebolista, operário e engenheiro, não necessariamente nessa ordem. O atleta é primo de Mário, é o mais jovem de todos e sempre vai ao cinema com Marcelo. Rafael que é mais velho de todos é vizinho do futebolista, que por sua vez é milionário. Mário que é demasiado pobre e tem cinco anos menos que o engenheiro.

11. Quem é a esposa de João?

Os nomes das esposas de Pedro, Pablo, João e Romão são Carmem, Rosa, Ana, Maria, não necessariamente nessa ordem.

Pablo e sua esposa se dirigem a praia e encontram Romão e Pedro

com suas respectivas esposas. Logo falam

Carmem: Olá, faz muito tempo que nos esperam?.

Ana: Não, chegamos faz pouco tempo. Viram a Rosa no caminho?

Pedro: (interrompendo Ana) Olha querida, ela está vindo.

12. Em uma escola privada seis mestres dão aulas do primeiro ao sexto ano.

Seus nomes por ordem alfabética são: Abel, Carlos Diego, Laura, Mário e Silvia.

O professor do sexto ano é o pai do quinto;

O do primeiro ano é sogro do quarto;

Laura em anos anteriores foi professora do terceiro ano, mas não é agora;

Abel é o noivo de Laura, Carlos tem 26 anos;

Mário é muito amigo do professor do sexto ano.

Qual o ano que cada um deles dá aulas?

13. José, Miguel, João, Rosa, Maria e Diana, amigos e estudantes universitários, se encontram em uma festa.

Em um momento em que os seis estão dançando resolvem fazer uma roda composta por quatro deles e os outros no centro da mesma. Se trata de averiguar com quem cada um estuda, se sabe que:

- Maria está dançando com a pessoa que estuda matemática;
- Rosa encontra-se entre José e a pessoa que estuda engenharia;
- A pessoa que estuda química se encontra na frente da que estuda medicina;
- Miguel se encontra a direita de Diana e na esquerda da que estuda medicina;
- Rosa é parente da pessoa que estuda economia;

Então: O que estuda cada um deles, se José não estuda física?

14. Kriztian mente às segundas, terças e quartas-feiras, e fala a verdade nos demais dias da semana. Karyn mente apenas às quintas, sextas e aos sábados. Num certo dia, foram feitas as afirmações:

    Kriztian: “ontem foi meu dia de mentir”;

    Karyn: "ontem foi também meu dia de mentir".

    Qual o dia da semana em que foram feitas estas afirmações?

15. Se Vera disse a verdade, Roberto e Júlio mentiram. Se Júlio mentiu, Regina falou a verdade. Se Regina falou a verdade, Brasília é banhada pelo mar. Ora Brasília não é banhada pelo mar, logo:

    a) Vera e Roberto disseram a verdade.

    b) Vera e Regina mentiram.

16. Quatro amigas vão ao teatro e uma delas resolve entrar sem pagar. Aparece o vigilante e quer saber qual delas entrou sem pagar.

    “*Eu não fui*”, diz Gabriela.

    “*Foi a Graziela*”, diz a Manuela.

    “*Foi a Daniela*”, diz a Graziela.

    “*A Manuela não tem razão*”, diz a Daniela.

    Só uma delas mentiu. Quem não pagou a entrada?

Capítulo II

TEORIA DA DEMONSTRAÇÃO

B. Russell

Bertrand Artur William Russell descendente de uma família aristocrática, nasceu perto de Trelleck (País de Gales) em 18 de maio de 1872 e faleceu em 2 de fevereiro de 1970 em Penrhyndeudraeth (País de Gales.

Foi um dos mais influentes matemáticos, filósofos e lógicos que viveram no século XX. Um importante político liberal, ativista e um popularizador da filosofia. Milhões de pessoas respeitaram Russell como uma espécie de profeta da vida racional e da criatividade. A sua postura em vários temas foi controversa.

Ganhou de uma bolsa de estudos para estudar no Trinity College Cambridge, foi aluno de Whitehead (1861-1947) e distinguiu-se notavelmente em matemática e filosofia. Russell estudou filosofia na Universidade de Cambridge, tendo iniciado os estudos em 1890.

Tornou-se membro do Trinity College em 1908. Pacifista, e recusando alistar-se na Primeira Guerra Mundial, perdeu a cátedra do Trinity College e esteve preso durante seis meses. Neste período escreveu a Introdução à filosofia matemática. Em 1920, Russell viajou até à Rússia, tendo posteriormente sido professor de filosofia em Pequim por um ano.

Em 1950, Russell recebeu o prêmio Nobel da Literatura "em reconhecimento dos seus variados e significativos escritos, nos quais ele se bateu por ideais humanitários e pela liberdade do pensamento".

Além de lecionar amplamente em universidades americanas, escreveu mais de quarenta livros, entre matemática, lógica, filosofia, sociologia e educação.

Foi contemplado com muitos prêmios, como as medalhas Sylvester e De Morgan Royal Society (1934), a Ordem de Mérito (1940) e o Prêmio Nobel de Literatura (1950). Duas atitudes corajosas e francas muitas vezes envolveram-no em controvérsias. Durante a primeira Guerra Mundial foi desligado da Universidade de Cambridge e preso durante quatro meses por seus pontos de vista pacifistas e por se opor à conscrição.

Na década de 1960 liderou movimentos pacifistas pela proscrição das armas nucleares e também acabou preso, embora por pouco tempo. Homem de espírito e predicados extraordinários faleceu em 1970 mentalmente lúcido e atento, a os noventa e oito anos de idade.

Nasceu em 1872, no auge do poderio econômico e político do Reino Unido e morreu em 1970, vítima de uma gripe, quando o império se tinha desmoronado e o seu poder drenado em duas guerras vitoriosas, mas debilitantes. Até à sua morte, a sua voz deteve sempre autoridade moral, uma vez que ele foi um crítico influente das armas nucleares e da guerra americana no Vietnam.

2.1 ARGUMENTO

Intuitivamente, um argumento é:

> "*uma seqüência concatenada de proposições com o fim de estabelecer uma proposição definida chamada conclusão*".

Nosso principal objetivo será a investigação da validade de "*argumentos*". Argumentar é apresentar uma proposição como sendo uma conseqüência de uma o mais proposições.

Definição 2.1 Argumento.

Chamamos de argumento a um conjunto de proposições operadas por conectivos lógicos, as quais uma proposição é a ***conclusão*** *e as demais são* ***premissas***[7].

Isto é, um argumento é constituído pelas proposições p_1, p_2, . . . , p_n chamadas premissas, nas quais nos baseamos segundo os conectivos lógicos para garantir uma proposição **q** chamada conclusão.

Os argumentos estão tradicionalmente divididos em *dedutivos* e *indutivos*. Nosso objetivo é o estudo dos chamados "*argumentos dedutivos*"', esses são na matemática aceitos por ser os mais precisos e persuasivos, provando categoricamente suas conclusões; porém esses tipos de argumentos podem ser válidos ou não-válidos.

Entenderemos como argumento válido quando, da seqüência concatenada de proposições temos a certeza da verdade (**v**) da conclusão, caso contrario quando a conclusão seja falsa (**f**) entenderemos como argumento não-válido.

2.1.1 Argumento: Dedutivo. Indutivo.

Os argumentos estão tradicionalmente divididos em *dedutivos* e *indutivos*.

Definição 2.2 Argumento dedutivo.

Diz-se que um argumento é dedutivo quando, sendo suas premissas verdadeiras, a conclusão é também verdadeira.

Premissa:	"Todo homem é mortal".
Premissa:	"João é homem".
Conclusão:	"João é mortal".

Esses argumentos serão objeto de estudo para a compreensão de teorias matemáticas.

Definição 2.3 Argumento indutivo.

Diz-se que um argumento é indutivo quando, a verdade das premissas não basta para assegurar a verdade da conclusão.

Premissa:	"É comum após a chuva ficar nublado".
Premissa:	"Está chovendo".

[7] Cada uma das proposições de um silogismo que serve de base à conclusão

Conclusão: "Ficará nublado".

As premissas e a conclusão de um argumento, formuladas em uma linguagem estruturada, permitem que o argumento possa ter uma análise lógica apropriada para a verificação de sua validade.

Argumentos dedutivos possuem três estágios: premissas, inferência e conclusão. Antes abordar estes três estágios em detalhe, precisamos examinar os alicerces[8] de um argumento dedutivo, lembrando a seguinte definição.

Definição 2.4 Proposição.

É uma afirmação que pode ser verdadeira (**v**) *ou falsa* (**f**)**.** *Ela é o significado da afirmação, não um arranjo preciso das palavras para transmitir esse significado.*

Por exemplo, quando dizemos:

"Existe um número primo, par e maior que dois".

estamos nos referindo a uma proposição falsa (**f**). Porém a mesma proposição pode ser expressa de modo diferente, por exemplo:

"*Um número primo, par e maior que dois existe*".

ainda assim, continua sendo uma proposição falsa (**f**), observe que infelizmente é muito fácil mudar acidentalmente o significado das palavras apenas reorganizando-as. A dicção da proposição deve ser considerada como algo significante.

É possível utilizar a lingüística formal para analisar e reformular uma afirmação sem alterar seu significado.

2.1.2 Premissas.

Os argumentos dedutivos sempre requerem um certo número de "*assunções-base". São as chamadas "premissas"*; e é a partir destas premissas que os argumentos são construídos. Isto é, as premissas são as razões para aceitar-se um argumento. Entretanto, algo que é uma premissa no contexto de um argumento em particular, pode ser a conclusão de outro.

As premissas de todo argumento sempre devem ser explicitadas, esse é o princípio do "*audiatur et altera pars*[9] ". A omissão das premissas comumente é encarado como algo "*suspeito"*, e provavelmente reduzirá as chances de aceitação do argumento.

A apresentação das premissas de um argumento geralmente é precedida pelas palavras: "*Suponha que, . . ."*; "*É obvio que, . . .*"; ' . . . *se, e somente se*, . . ." e "*Demonstre que, . . .*". É imprescindível que o leitor concorde com suas premissas antes de proceder com a argumentação.

Utilizar em matemática a palavra *"obvio*" tem que gerar desconfiança, o que é "*obvio*" para um leitor, pode ser demasiado complicado para outro. Não hesite em questionar afirmações supostamente "*óbvias*".

[8] Base, fundamento, sustentáculo.
[9] Expressão latina que significa "*a parte contrária deve ser ouvida"*.

2.1.3 Inferência.

Toda vez que existir concordância sobre as premissas, o argumento procede passo a passo através do processo chamado "*inferência*".

Na inferência, parte-se de uma ou mais proposições aceitas (premissas) para chegar a outras novas. Se a inferência for válida (no sentido de ser tautológica), a nova proposição também deve ser aceita. Posteriormente essa proposição poderá ser empregada em novas inferências.

Assim, inicialmente apenas podemos inferir algo a partir das premissas do argumento; ao longo da argumentação, entretanto, o número de afirmações que podem ser utilizadas aumenta.

Há vários tipos de inferências válidas, assim como também outras não-válidas. O processo de inferência é comumente identificado pelas frases "*conseqüentemente. .* " ou "*isto implica que, . . .*"

2.1.4 Conclusão.

Finalmente chegaremos a uma proposição que consiste na "*conclusão*", isto é, chegaremos a uma proposição que estamos tentando demonstrar. Esta conclusão é o resultado final do processo de inferência, e só pode ser classificada como conclusão no contexto de um argumento em particular, podendo ser a premissa de outro.

A conclusão tem respaldo nas premissas e é inferido a partir delas.

Definição 2.5 Argumento.

Um argumento é uma seqüência finita e ordenada de proposições simples ou compostas $p_1, \; p_2, \; p_3, \; \ldots, p_n$ *chamadas premissas das quais deduzimos uma proposição* **q** *chamada conclusão.*

Indicaremos um argumento de premissas $p_1, \; p_2, \; p_3, \; \ldots, p_n$ e conclusão **q** por:

$$p_1, \; p_2, \; \ldots, \; p_n \vdash \mathbf{q}$$

e se lê de uma das seguintes maneiras**:**

- **q** é conseqüência de $p_1, \; p_2, \; p_3, \; \ldots, p_n$.
- **q** deduz-se de $p_1, \; p_2, \; p_3, \; \ldots, p_n$.
- **q** infere-se de $p_1, \; p_2, \; p_3, \; \ldots, p_n$.
- $p_1, \; p_2, \; p_3, \; \ldots, p_n$ implicam **q** .

Da verdade ou falsidade de um argumento, existem argumentos verdadeiros "*consistentes*" no sentido de manifestar um raciocínio lógico, e argumentos verdadeiros "*inconsistentes"* no sentido de manifestar um raciocínio duvidoso. Os argumentos falsos não manifestam nenhum raciocínio lógico (são ilógicos).

2.1.5 A Implicação em detalhes.

Evidentemente, pode-se construir um argumento verdadeiros a partir de premissas verdadeiras (**v**), neste caso a conclusão **q** necessariamente é verdadeira (**v**). Também é possível construir argumentos verdadeiros a partir de premissas falsas (**f**), neste caso a conclusão **q** pode ser verdadeira (**v**) ou falsa (**f**).

Exemplo 2.1 Argumento verdadeiro inconsistente.

Premissa p_1: Peixes vivem no oceano. . . . (**v**)

Premissa p_2: Lontras são peixes. . . . (f)

Conclusão q: Logo, lontras vivem no oceano. . . . (**f**)

Lembre, em todo argumento válido uma coisa que não pode ser feita: partir de premissas verdadeiras, inferir de modo correto, e chegar a uma conclusão falsa.

Podemos resumir esses resultados em uma tabela de "*regras de implicação*".

Regras de implicação

Linha	Premissa	Conclusão	Inferência	Argumento
	p	**q**	$p \Rightarrow q$	
1ª.	Falsa	Falsa	Verdadeira	verdadeiro
2ª.	Falsa	Verdadeira	Verdadeira	verdadeiro inconsistente
3ª.	Verdadeira	Falsa	Falsa	falso (ilógico)
4ª.	Verdadeira	Verdadeira	Verdadeira	verdadeiro consistente

Desse modo, o fato de um argumento ser verdadeiro não significa necessariamente que sua conclusão seja verdadeira (**v**), pois pode ter partido de premissas falsas.

Argumentos consistentes obrigatoriamente chegam a conclusões verdadeiras.

Exemplo 2.2

A seguir está exemplificado um argumento verdadeiro (**v**), *mas que pode ou não ser* "consistente".

1. **Premissa p_1**: Todo evento tem uma causa.
2. **Premissa p_2**: O Universo teve um começo.
3. **Premissa p_3**: Começar envolve um evento.
4. **Inferência:** Isso implica que o começo do universo envolveu um evento.
5. **Inferência:** Logo, o começo do universo teve uma causa.
6. **Conclusão q**: O universo teve uma causa.

A proposição da linha 4 foi inferido das linhas 2 e 3. A linha 1, então, é usada em conjunto com proposição 4, para inferir uma nova proposição (linha 5). O resultado dessa inferência é reafirmada (numa forma levemente simplificada) como a conclusão 6.

Definição 2.6 Silogismo.

É todo argumento com somente duas premissas e uma conclusão.

Os seguintes quatro exemplos são de silogismo; porem o exemplo (2.3) é de argumento consistente, os exemplos (2.4) e (2.6) são argumentos inconsistentes, e o exemplo (2.5) é argumento falso (**f**).

Exemplo 2.3 Conclusão verdadeira.

Todo ser humano é mortal. Pedro é humano.

Portanto, Pedro é mortal.

Exemplo 2.4 Conclusão falsa.

Toda ave voa. O avestruz é ave.

Portanto, o avestruz voa.

Exemplo 2.5 Conclusão verdadeira.

Todo pingüim é um animal. Meu cachorro não é pingüim.

Portanto, meu cachorro não é um animal.

Exemplo 2.6 Conclusão falsa.

Toda peixe nada. O golfinho não é peixe.

Portanto, o golfinho não nada.

2.1.6 Validade de um argumento.

Dizer que um argumento é bem fundamentado é equivalente a dizer que a conclusão **q** é conseqüência lógica das premissas. Logo, para cada interpretação da linguagem respeito à qual todas as premissas são verdadeiras, a conclusão será necessariamente verdadeira.

Um argumento verdadeiro (**v**) é *consistente* ou *inconsistente*, independente de sua interpretação.

Isto é bastante importante em matemática, já que as demonstrações em matemáticas são argumentos válidos consistentes. Resulta pois obvia a importância de saber se um argumento válido é consistente ou inconsistente.

Definição 2.7

Um argumento $p_1, \ p_2, \ p_3, \ \ldots \ , p_n \vdash q$ válido é consistente se, a conclusão **q** é verdadeira (v) sempre que, as premissas $p_1, \ p_2, \ p_3, \ \ldots \ , p_n$ sejam verdadeiras (**v**).

Os Exemplos (2.7) e (2.8) são de argumento consistente, e os Exemplos (2.9) e (2.10) são de argumento inconsistente.

Exemplo 2.7 Conclusão verdadeira.

Todo múltiplo de 6 é múltiplo de 3. O número 12 é múltiplo de 6.

Portanto, 12 é múltiplo de 3.

Exemplo 2.8 Conclusão verdadeira.

Todo número com exatamente dois divisores é primo.

O número 4 não tem exatamente dois divisores.

Portanto, 4 não é primo.

Exemplo 2.9 Conclusão falsa.

Todo múltiplo de 4 é par. O número 5 é múltiplo de 4.

Portanto, 5 é par.

Exemplo 2.10 Conclusão falsa.

Todo múltiplo de 4 *é par. O número* 6 *não é múltiplo de* 4.

Portanto, 6 *não é par*.

Fica obvio que no Exemplo (2.9) o fato de ser argumento válido, necessariamente alguma das premissas deve ser falsa (**f**) com a interpretação intencional o que caracteriza este exemplo como argumento válido não-correto.

Definição 2.8 Sofisma.

Dizemos sofisma a todo argumento válido inconsistente.

É um exemplo de sofisma o Exemplo (2.9).

A seguinte conversa aconteceu em algum lugar de nosso planeta, e se apresenta a modo de exemplo de argumento válido inconsistente.

Exemplo 2.11

Senhor Bertrand: Mostre que se 3 = 2, *então você é Deus.*

Demonstração.

Se 3 = 2, então 2 = 1 logo 3=1.

Pai, filho, espírito santo são três pessoas distintas porém somente um *Deus* verdadeiro.

Bertrand é filho.

Portanto, Bertrand é *Deus*.

Embora temos que este argumento seja um sofisma[10] observe que a premissa 3 = 2 é falsa, logo o argumento é correto independente da conclusão ser verdadeira o falsa.

Observação 2.1

i) Num argumento válido, a verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão.

[10] Argumento aparentemente válido, mas, na realidade, não conclusivo, e que supõe má-fé por parte de quem o apresenta; falácia, silogismo erístico.

ii) A Lógica não se preocupa com a validade dos argumentos, nem com a verdade o falsidade das premissas e conclusões.

iii) Afirmar que um argumento é consistente, significa afirmar que as premissas estão de tal modo relacionadas com a conclusão que não é possível ter a conclusão falsa se as premissas são verdadeiras.

Propriedade 2.1

Um argumento $p_1, \; p_2, \; p_3, \ldots, p_n \vdash q$ é consistente se, a condicional

$$p_1, \; p_2, \; p_3, \; \ldots, p_n \Rightarrow q \tag{2.1}$$

é tautologia.

Demonstração.

Se o argumento é consistente, então as premissas $p_1, \; p_2, \; p_3, \ldots, p_n$ são verdadeiras logo a proposição $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n$ é verdadeira.

Sendo o argumento consistente, temos que a conclusão q é verdadeira.

Portanto a condicional (2.1) é tautologia.

Observação 2.2

Se o argumento:

$P_1(p, q, r, \ldots), P_2(p, q, r, \ldots), P_3(p, q, r, \ldots), \ldots, P_n(p, q, r, \ldots) \Rightarrow Q(p, \; q, r, \ldots)$

é válido, então o argumento da mesma forma:

$P_1(p, q, r, \ldots), P_2(p, q, r, \ldots), P_3(p, q, r, \ldots), \ldots, P_n(p, q, r, \ldots) \vdash Q(p, \; q, r, \ldots)$

é válido quaisquer que sejam as proposições a, b, c, . . .

Exemplo 2.12

O argumento $p, \; q \Rightarrow r, \; \sim r \vdash \sim q$ é consistente, pois a fórmula $(p \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q$ é uma tautologia.

Como a premissa $\sim r$ tem que ser verdadeira (**v**), então r tem que ser (**f**).

A premissa $q \Rightarrow r$ tem que ser verdadeira, como r é (**f**), temos que q é falsa (**f**), logo a conclusão ~q é verdadeira (**v**). É obvio que p tem que ser verdadeira (**v**).

O fato que todas as premissas sejam verdadeiras que a conclusão também é verdadeira verificamos na 4ª linha de sua *tabela-verdade*.

	p q r	$(p \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \sim r)$	$\Rightarrow$	$\sim q$
4ª linha	v f f	v	v	v

Exemplo 2.13

Do argumento $p \vdash p \vee q$ e da expressão (2.1) segue que os seguintes argumentos são consistentes:

a) $(\sim p \wedge q) \vdash (\sim p \wedge q) \vee (\sim s \Rightarrow r)$

b) $(p \Rightarrow r \vee s) \vdash (p \Rightarrow r \vee s) \vee (\sim r \wedge s)$

Observe em (**a)** que, se a premissa $(\sim p \wedge q)$ é verdadeira, a conclusão $(\sim p \wedge q) \vee (\sim s \Rightarrow r)$ também é verdadeira, independente ao valor lógico de $(\sim s \Rightarrow r)$. Logo o argumento é válido e consistente.

Por um raciocínio análogo concluímos que o argumento em **b)** é válido e consistente.

Portanto, a verdade (**v)** de um argumento depende apenas de sua forma e não de seu conteúdo ou da verdade e falsidade das proposições que a integram.

2.1.7 Condicional associada a um argumento.

Devido à Propriedade (2.1), dado um argumento qualquer: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \vdash q$ a este argumento corresponde à condicional: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$ cujo antecedente é a conjunção das premissas e cujo conseqüente é a conclusão denominada "*condicional associada*" ao argumento dado.

Reciprocamente, a toda condicional corresponde um argumento cujas premissas são as diferentes proposições cuja conjunção formam o antecedente e cuja conclusão é o conseqüente.

Exemplo 2.14

- A "*condicional associada*" ao argumento:

$$p \wedge \sim q,\quad p \Rightarrow \sim r,\quad q \vee \sim s \vdash \sim (r \vee s)$$

é a proposição: $(p \wedge \sim q \wedge (p \Rightarrow \sim r) \wedge (q \vee \sim s)) \Rightarrow \sim (r \vee s)$

- O "argumento correspondente" à condicional:

$$((p \Rightarrow q \vee r) \wedge (\sim s \wedge (q \vee r \Rightarrow s) \Rightarrow (s \Rightarrow p \wedge \sim q)$$

é a proposição: $p \Rightarrow q \vee r,\quad \sim s,\quad q \vee r \Rightarrow s \vdash s \Rightarrow p \wedge \sim q)$

2.1.8 Reconhecendo Argumentos.

O reconhecimento de argumentos é mais difícil que o das premissas ou conclusão.

Algumas vezes os argumentos não seguem os padrões descritos acima, por exemplo alguém pode dizer quais são suas conclusões, e depois justificá-las. Isso é válido, porém pode ser um pouco confuso.

Para piorar a situação, algumas afirmações parecem argumentos, porém na verdade não o são. Por exemplo, quando alguém diz:

> *"Se a Bíblia é verdadeira, Jesus ou foi um louco, um mentiroso, ou o Filho de Deus".*

Isso não é um argumento, é uma afirmação condicional. Não explicita as premissas necessárias para embasar as conclusões, sem mencionar que possui outras falhas.

Um argumento não equivale a uma explicação. Suponha que, tentando provar que Albert Einstein acreditava em Deus, disséssemos:

"Einstein afirmou que - Deus não joga dados - porque creia em Deus"..

Isso pode parecer um argumento relevante, mas não é; trata-se de uma explicação da afirmação de Einstein. Para perceber isso, lembre-se que uma afirmação da forma "X, *pois* Y" pode ser reescrita na forma "Y *logo* X". O que resultaria em:

"Einstein creia em Deus, por isso afirmou que Deus não joga dados".

Agora fica claro que a afirmação, que parecia um argumento, está *afirmando* a conclusão que deveria estar *provando*.

Ademais, Einstein não creia num Deus pessoal preocupado com assuntos humanos.

2.1.9 Argumentos consistentes fundamentais.

1. Adição.

   a) $p \vdash p \vee q$ **b)** $p \vdash q \vee p$

2. Simplificação.

   a) $(p \wedge q) \vdash p$ **b)** $(p \wedge q) \vdash q$

3. Conjunção.

   a) $p, \; q \vdash p \wedge q$ **b)}** $p, \; q \vdash q \wedge p$

4. Modus Ponens.

   $(p \Rightarrow q), \; p \vdash q$

5. Modus Tollens.

   $(\sim q \Rightarrow p), \; \sim p \vdash q$

6. Equivalência.

   $p \Leftrightarrow q, \; p \vdash q$

7. Silogismo hipotético.

   $(p \Rightarrow q), \; (q \Rightarrow r) \vdash (p \Rightarrow r)$

8. Silogismo disjuntivo.

   a) $(p \vee q), \; \sim p \vdash q$ **b)** $(p \vee q), \; \sim q \vdash p$

9. Dilema construtivo.

   $(p \Rightarrow q), \; (r \Rightarrow s), \; (p \vee r) \vdash q \vee s$

10. Dilema destrutivo.

$(p \Rightarrow q)$, $(r \Rightarrow s)$, $\sim q \vee \sim s \vdash \sim p \vee \sim r$

11. Absorção.

$p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow (p \wedge q)$

A validade destes argumentos, é conseqüência imediata das tautologias elementares do Capítulo I página

A maneira direta de demonstrar que um argumento é válido e consistente, consiste em supor verdadeiras todas as premissas (com respeito a alguma interpretação), sem considerar a interpretação intencional, nem nenhuma interpretação em particular.

2.2 INFERÊNCIA LÓGICA

Os argumentos estudados na seção anterior servem para fazer "*inferências*"; isto é, para executar uma dedução ou demonstração.

Logo, se de uma o mais proposições (premissas) deduzimos a afirmação de certa proposição (conclusão) então teremos construído uma *inferência*.

Uma *inferência* é válida se, e somente se, a conjunção das premissas implica a conclusão. Logo as inferências lógicas obedecem a princípios tautológicos.

Os princípios lógicos (tautológicos) utilizados para a obtenção de inferências lógicas geralmente são implicativos e são denominados *regras de inferência lógica.*

Os argumentos fundamentais da Seção 2.1 deste capítulo são usados para fazer *inferências*, isto é, executar os passos de uma *dedução* ou *demonstração*.

2.2.1 Regras de inferência.

Os argumentos baseados em tautologias representam métodos de raciocínio universal válido. Sua validade depende somente do modo em que as proposições intervierem e não dos valores de verdade que elas acusam. Estes argumentos são chamados de regras de inferência. As regras de inferência permitem relacionar dois ou mais tautologias ou hipóteses em uma demonstração.

Determine se o argumento do exemplo a continuação é válido.

Exemplo 2.15

Se você investe no mercado de valores, então você ficará rico.

Se você fica rico, então você será feliz.

Portanto, se você investe no mercado de valores, então você será feliz.

Solução

Seja:

p : você investe no mercado de valores,

q : você ficará rico,

r : você será feliz.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow r} \\ \therefore\ p \Rightarrow r \end{array}$$

De modo que este enunciado podemos representar com notação lógica do seguinte modo:

Aplicando silogismo hipotético, concluímos que este argumento é válido.

2.2.2 Principais regras de inferência lógica.

2.2.3.1. Principio da adição.

Dada uma proposição p, dela podemos deduzir sua disjunção com qualquer outra proposição.

Seu esquema lógico é da forma:

$$\frac{p}{\therefore\ p \vee r}$$

Exemplo 2.16

Premissa 1: Jorge é médico.

Portanto, Jorge é médico ou Pedro é engenheiro.

Exemplo 2.17

a) $\dfrac{p}{\therefore\ p \vee \sim q}$

b) $\dfrac{\sim p}{\therefore\ \sim p \vee q}$

c) $\dfrac{p \wedge q}{\therefore\ (p \wedge q) \vee r}$

d) $\dfrac{a \leq 4}{\therefore\ a \leq 4 \vee a = 8}$

2.2.2.2. Principio da simplificação.

Dada a conjunção $p \wedge q$ de duas proposições p e q, podemos deduzir cada uma das proposições p ou q.

O esquema lógico para é:

$$\frac{p \wedge q}{\therefore\ p}$$

Exemplo 2.18

Premissa 1: Jorge é médico e Pedro é engenheiro.

Portanto, Jorge é médico.

Exemplo 2.19

a) $\dfrac{(p \vee q) \wedge r}{\therefore\ (p \vee q)}$

b) $\dfrac{p \wedge (\sim q \vee q)}{\therefore\ \sim q \vee q}$

c) $\dfrac{x < 9 \wedge x \neq 2}{\therefore\ x \neq 2}$

d) $\dfrac{a \leq 4 \wedge a = 8}{\therefore\ a \leq 4}$

2.2.2.3. Principio do desligamento (Modus Ponens).

Conhecida também como *regra de separação*, permite deduzir a conclusão q a partir das premissas p $\Rightarrow$ q e p.
Seu esquema é:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore q \end{array}$$

Exemplo 2.20

Premissa 1: Se faz calor, então a água da piscina esta quente.

Premissa 2: Faz calor.

Portanto, a água da piscina esta quente.

Esta inferência obedece à tautologia Modus Ponens $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

Exemplo 2.21

a)
$$\begin{array}{l} \underline{\sim p \Rightarrow \sim q \qquad\qquad} \\ \therefore \sim q \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \Rightarrow r \\ \underline{p \wedge q \qquad\qquad} \\ \therefore r \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \underline{x^2 = 0 \qquad\qquad} \\ \therefore x = 0 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} (a \leq 4 \vee a = 8) \Rightarrow a = 3 \\ \underline{a \leq 4 \vee a = 8 \qquad\qquad} \\ \therefore a = 3 \end{array}$$

2.2.2.4. Principio da conjunção.

Seu esquema lógico é

a)
$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q \qquad\qquad} \\ \therefore (p \wedge q) \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q \qquad\qquad} \\ \therefore (q \wedge p) \end{array}$$

2.2.2.5. Principio da contra-proposição (Modus Tollens).

Seu esquema é:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{\sim q \qquad} \\ \therefore \sim p \end{array}$$

Exemplo 2.22

Premissa 1: Se este volume é um caderno, então é de papel.

Premissa 2: Este volume não é de papel.

Portanto, este volume, não é um caderno.

Esta inferência obedece à tautologia Modus Tollens $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$

2.2.2.6. Principio da inferência equivalente.

Seu esquema lógico é:

$$\begin{array}{l} p \Leftrightarrow q \\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

Exemplo 2.23

Premissa 1: 4 - 4 = 0 se, e somente se, 4 = 4.

Premissa 2: 4 - 4 = 0.

Portanto, 4 = 4.

2.2.2.7. Principio do silogismo hipotético.

Consiste em, dada duas condicionais $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$, tais que o conseqüente da primeira coincide com o antecedente da segunda, deduzir uma terceira condicional $p \Rightarrow r$ (transitividade).

Seu esquema é:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore\ p \Rightarrow r \end{array}$$

Exemplo 2.24

a)
$$\begin{array}{l} \sim p \Rightarrow \sim q \\ \sim q \Rightarrow \sim r \\ \hline \therefore \sim p \Rightarrow \sim r \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \sim p \Rightarrow q \vee r \\ q \vee r \Rightarrow \sim s \\ \hline \therefore\ \sim p \Rightarrow \sim s \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x=0 \Rightarrow x + 2 = 2 \\ \hline \therefore\ x\text{^}2 = 0 \Rightarrow x+2=2 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} (p \Rightarrow q) \Rightarrow r \\ r \Rightarrow (q \wedge s) \\ \hline \therefore\ p \Rightarrow (q \wedge s) \end{array}$$

Exemplo 2.25

Mostre que o seguinte argumento é válido:

Sejam a, b, c $\in$ **R**, onde $a \neq 0$, então a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$, é dada pela expressão $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Solução

1. p : $ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$ hipótese.

2. $q \ : \ x^2 + (\frac{b}{a})\, x + \frac{c}{a} = 0$ . . . divisão em **R**

3. $r \ : x^2 + 2\frac{b}{2a}\, x + \frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2$ . . completando quadrados

4. $s \ : \ (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ . . . propriedade em **R**

5. $t \ : \ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ . . . raiz quadrada em **R**

Portanto, o argumento $(p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t) \Rightarrow t$ é válido; é uma inferência.

2.2.2.8. Silogismo disjuntivo.

Permite deduzir da disjunção $p \vee q$ de duas proposições e da negação $\sim p$ (ou $\sim q$) de uma delas a outra proposição q (ou p). Seu esquema lógico é:

a)
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim p \qquad} \\ \therefore\ q \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim q \qquad} \\ \therefore\ p \end{array}$$

Exemplo 2.26

a)
$$\begin{array}{l} x\text{^}2 = 0 \ \vee \ x\text{^}2 = 1 \\ \underline{x\text{^}2 \neq 1 \qquad\qquad\qquad} \\ \therefore\ x^2 = 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \sim (p \Rightarrow q) \vee r \\ \underline{\sim \sim (p \Rightarrow q) \qquad} \\ \therefore\ r \end{array}$$

2.2.2.9. Dilema construtivo.

Nesta regra, são premissas duas condicionais e a disjunção dos seus antecedentes; a conclusão é a disjunção dos conseqüentes destas condicionais. Seu esquema é:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow s \\ \underline{p \vee r \qquad} \\ \therefore\ q \vee s \end{array}$$

Exemplo 2.27

a)
$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \Rightarrow \sim r \\ s \Rightarrow t \\ \underline{(p \wedge q) \vee s \qquad\qquad} \\ \therefore\ \sim r \vee t \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} a + b = 5 \Rightarrow a = -3 \\ a + b \neq 5 \Rightarrow a > -3 \\ \underline{a + b = 5 \ \vee \ a + b \neq 5} \\ \therefore\ a = -3 \ \vee \ a > -3 \end{array}$$

2.2.2.10. Dilema destrutivo.

Nesta regra, são premissas duas condicionais e a disjunção da negação dos seus conseqüentes; a conclusão é a disjunção da negação dos antecedentes destas condicionais. Seu esquema é:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow s \\ \sim q \vee \sim s \\ \hline \therefore \sim p \vee \sim r \end{array}$$

Exemplo 2.28

a)
$$\begin{array}{l} \sim q \Rightarrow r \\ p \Rightarrow \sim s \\ \sim r \vee \sim\sim s \\ \hline \therefore \sim\sim q \vee \sim p \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} a + b = 5 \Rightarrow a = -3 \\ b - a = 11 \Rightarrow a = 8 \\ a \neq -3 \vee a \neq 8 \\ \hline \therefore a + b \neq 5 \vee b - a \neq -3 \end{array}$$

2.2.2.11. Absorção.

Esta regra permite, dada uma condicional $p \Rightarrow q$ como premissa, dela deduzir como conclusão uma outra condicional com o mesmo antecedente p e cujo conseqüente é a proposição $p \wedge q$.

Seu esquema é:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore p \Rightarrow p \wedge q \end{array}$$

Exemplo 2.29

a)
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore p \Rightarrow p \wedge q \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow \sim q \\ p \\ \hline \therefore p \Rightarrow (p \wedge \sim q) \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2=0 \\ \hline \therefore x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \wedge x = 0 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} a \geq 4 \Rightarrow a = 5 \\ a \geq 4 \\ \hline \therefore a \geq 4 \Rightarrow a \geq 4 \wedge a = 5 \end{array}$$

2.2.2.12. Principio da substituição de variáveis.

Exemplo 2.30

Premissa 1: Todos os humanos se alimentam
Premissa 2: Carlos é humano.
∴ Carlos se alimenta.

A *premissa 2* é o resultado de substituir um elemento do domínio da *premissa 1* por um valor específico.

2.2.3 Verificação com o uso de *tabela-verdade*

Para verificar se uma regra de inferência:

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ . \\ . \\ . \\ P_n \\ \hline \therefore \quad Q \end{array}$$

é válida com o uso das tabelas verdade, é suficiente verificar se a fórmula $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge. . . \wedge P_n) \Rightarrow Q$ é tautologia. Lembre que P_i e Q tem que ser verdadeiras.

Exemplo 2.31

Verificar se a seguinte regra de inferência é válida:

$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q) \\ \sim(p \wedge q) \\ \hline \therefore \quad (p \Rightarrow q) \end{array}$$

Solução

Tem-se que $\sim(p \wedge q)$ é verdadeiro (**v**) sempre que simultaneamente p e q sejam falsas (**f**). Assim a proposição $p \Rightarrow q)$ resulta ser verdadeira (**v**) conseqüentemente $(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)$ é verdadeira.

Mediante o uso da *tabela-verdade* temos que o fato que todas as premissas sejam verdadeiras que a conclusão também é verdadeira verificamos na 4ª linha de sua *tabela-verdade*.

	p q	$((p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)) \wedge \sim(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
4ª linha →	f f	v (**v**) v

Observe que a regra de inferência é válida, é tautologia.

Exemplo 2.32

Verificar se a seguinte regra de inferência é válida:

$$\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow r \\ \sim r \\ \hline \therefore \ \sim q \end{array}$$

Solução

Mediante o uso da *tabela-verdade* temos que o fato que todas as premissas sejam verdadeiras que a conclusão também é verdadeira verificamos na 4ª linha de sua *tabela-verdade.*

	p q r	(p $\wedge$ (q $\Rightarrow$ r) $\wedge$ ~ r $\Rightarrow$ ~ q
4ª linha $\rightarrow$	v f f	v (**v**) v

é uma tautologia, logo a regra de inferência é válida.

Exemplo 2.33

Determine a validade do seguinte argumento:

$$\begin{array}{l} p \Leftrightarrow q \\ q \vee r \\ \sim r \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

Solução

Mostra-se que $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \vee r) \wedge \sim r) \Rightarrow p$ é tautologia.

Portanto, o argumento $(p \Leftrightarrow q)$, $(q \vee r)$, $\sim r \vdash p$ é válido.

2.2.4 Verificação sem o uso de tabela-verdade.

Para a verificação de um argumento, sem o uso da *tabela-verdade* um dos métodos é o axiomático.

2.2.4.1 Método axiomático.

O método axiomático ou de *fundamentação da ciência matemática,* consiste em fixar *conceitos primitivos* (ou não definidos) e proposições sobre estes conceitos chamados *axiomas* (ou postulados) cuja verdade aceitasse convencionalmente sem demonstração, para logo efetuar outros conceitos matemáticos.

Aqueles outros conceitos matemáticos englobam a formulação de *conceitos definidos* e a *inferência* ou *dedução* da proposições matemáticas chamadas de *teoremas* cuja verdade ou falsidade tem que ser demonstrada.

Tanto a *dedução de teoremas*, quanto a demonstração dos mesmos, devem-se explicar utilizando princípios lógicos, isto permite o avanço seguro do moderno pensamento matemático.

Os princípios lógicos são extremadamente em abundância e adotam como estudamos as mas variadas formas. Não obstante os mas importantes, devido a seu sua maior utilização são os implicativos, isto porque facilitam as definições matemáticas e permitem conectar implicativamente os axiomas com os teoremas. Quase a totalidade dos teoremas são da forma $p \Rightarrow q$.

Logo para demonstrar que se cumpre tal implicação devemos utilizar os conceitos de *tabela-verdade* para a mesma. Existem duas maneiras fundamentais da teoria da demonstração:

1º. Demonstração direta.

2º. Demonstração indireta: **(a)** Por contraposição. **(b)** Por casos. **(c)** Por redução ao absurdo. **(d)** Por árvore de refutação.

Exercícios 2-1

1. Para cada um dos seguintes argumentos, determine quais são:

   - Válidos e corretos (consistentes).
   - Válidos e não-corretos (inconsistentes).
   - Não válidos (não tem sentido).

   1. X é um número menor que todos os números menores que Y.

   X não é menor que X.

   Portanto, X não é menor que Y.

   2. João é irmão de todos os irmãos de Roberto.

   João não é irmão de si mesmo.

   Portanto, João não é irmão de Roberto.

   3. Se hoje é 3ª então amanhã será 4ª.

   Amanhã será 4ª.

   Portanto, hoje é 3ª.

   4. Todos tem medo de Dracula.

   Dracula somente tem medo de Richard.

   Portanto, Richard é Dracula.

   5. Romeo ama Julieta.

   Julieta é uma palavra de sete letras.

   Portanto, Romeo ama uma palavra de sete letras.

   6. O número 2 divide o numerador de 6/8.

   6/8 = 3/4.

   Portanto, 2 divide ao numerador de 3/2.

   7. Todos os borogroves são kismis, se alguém tirila.

   Nito tirila e Pac é um borogrove.

   Portanto, Pac é um kismi.

   8. Qualquer barbeiro de Itapejara, faz a barba a todos os homens de Itapejara que não se fazem a barba, e somente a eles.

   Portanto, não há barbeiros em Itapejara.

   9. João chegará, se o dia esta bom.

   Hoje o dia não esta bom.

   Portanto, João não chegará.

2. Construir a condicional associada a cada um dos seguintes argumentos:

   1. $\sim p, \ \sim q \Rightarrow p \ \vdash q.$

2. $p \Rightarrow q \ \vdash \ \sim(p \wedge \sim q)$

3. $p, \ p \Rightarrow q, \ \sim q \vee (r \wedge s) \ \vdash \ r \wedge s$

4. $a = b \Rightarrow a = 8, \ a = 5 \Rightarrow a > c \ \vdash a = b \Rightarrow a > c$

3. Construir o argumento correspondente a cada uma das seguintes condicionais:

1. $p \wedge (q \vee \sim p) \Rightarrow q$ **2.** $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q) \Rightarrow s$

3. $\sim(a < 5 \wedge a \neq b) \Rightarrow a \geq 5 \vee b = a$

4. Indicar a regra de inferência que justifique a validade dos seguintes argumentos:

1. $p \Rightarrow q \ \vdash \ (p \Rightarrow q) \vee \sim r$

2. $a \neq 8, \ a \neq 3 \ \vdash \ a \neq 8 \wedge a \neq 3$

3. $a+b = c \Rightarrow b+a=c, \ a+b = c \ \vdash \ b+a=c$

4. $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r), \ \sim(\sim p \wedge r) \ \vdash p \wedge q$

5. $p \Rightarrow q, \ r \Rightarrow \sim s \ \vdash \ (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow \sim s)$

6. $\sim p \wedge (q \Rightarrow r) \vdash \sim p$

7. $p \Rightarrow q, \ q \Rightarrow \sim r \ \vdash p \Rightarrow \sim r$

8. $p \Rightarrow q \vee r \ \vdash p \Rightarrow p \wedge (q \vee r)$

9. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), \ p \ \vdash q \Rightarrow r$

10. $x, \ y \in \mathbf{R} \Rightarrow x+y \in \mathbf{R}, \ x + y \notin \mathbf{R} \ \vdash x, \ y \notin \mathbf{R}$

11. $(q \vee r) \Rightarrow \sim p, \ \sim\sim p \ \vdash \sim(q \vee r)$

12. $4 < 7 \ \vdash 4 < 7 \vee 4 < 3$

13. $a \leq 1 \vee a = 0, \ a \neq 0 \ \vdash a \leq 1$

14. $b = 1 \Rightarrow b > 4, \ b > 4 \Rightarrow a+b > 6 \ \vdash \ b = 1 \Rightarrow a+b > 6$

15. $\pi < 3 \wedge \pi > 4 \ \vdash \ \pi > 4$

5. Verificar se são válidos os seguintes argumentos:

1. $p \Leftrightarrow q \ \vdash \sim p \Rightarrow \sim q$ **2.** $p \Leftrightarrow q \ \vdash \ p$

3. $p \Rightarrow q, \ p \vee r, \ \sim q \ \vdash r$ **4.** $p \wedge q, \ \sim p \ \vdash \sim q$

5. $\sim(p \wedge q), \ (p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q) \vee r \ \vdash \ (p \Rightarrow q) \vee r$

6. Indicar quais, dos seguintes esquemas lógicos são regras de inferência:

1. $\begin{array}{l} p \Leftrightarrow q \\ p \\ \hline \therefore \ q \end{array}$ **2.** $\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore \end{array}$ **3.** $\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \Rightarrow q \\ \hline \therefore \ p \wedge q \end{array}$ **4.** $\begin{array}{l} q \\ p \Rightarrow q \\ \hline \therefore \ q \end{array}$

7. Utilizar Modus Ponens para deduzir a conclusão de cada uma dos seguintes pares de premissas:

1. $a = b \wedge b = c$ **2.** $x, \ y \in \mathbf{R} \Rightarrow xy \in \mathbf{R}$

Con formato: Portugués (Brasil)
Con formato: Portugués (Brasil)
Con formato: Portugués (Brasil)
Con formato: Portugués (Brasil)
Con formato: Portugués (Brasil)
Con formato: Portugués (Brasil)
Con formato: Portugués (Brasil)
Con formato: Portugués (Brasil)
Con formato: Portugués (Brasil)
Con formato: Portugués (Brasil)
Con formato: Portugués (Brasil)

$(a = b \;\wedge\; b = c) \Rightarrow \; a = c$ $\qquad$ $x, \;\; y \in \mathbf{R}$

3. $(a < b \;\wedge\; b < c) \Rightarrow \; a < c$ $\qquad$ **4.** $4 > 2 \;\Rightarrow\; 5 > 2$

$a < b \;\wedge\; b < c$ $\qquad$ $4 > 2$

5. $a = 1 = 2$ $\qquad$ **6.** $a + 4 = b \;\Rightarrow\; a = b$

$a = 1 = 2 \;\Rightarrow\; b + 1 = 2$ $\qquad$ $a + 4 = b$

8. Demonstrar a validade das seguintes regras de inferência:

1. $p \Rightarrow q$, $\sim q$; $\therefore \sim p$

2. $p \Leftrightarrow q$, p ; $\therefore q$

3. $p \Leftrightarrow q$, $q \vee r$; $\therefore \sim r$

4. $p \Rightarrow q$, $r \Leftrightarrow \sim p$; $\therefore q$

9. Utilizar Modus Tollens para deduzir a conclusão de cada uma dos seguintes pares de premissas:

1. $a = 6 \;\wedge\; a+b = b$ $\qquad$ **2.** $a = c \;\Rightarrow\; a = 0$

$a+b \neq b$ $\qquad$ $a \neq 0$

3. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \sim (r \;\wedge\; s)$ $\qquad$ **4.** $4 > 2 \;\Rightarrow\; 4 > 1$

$\sim \;\; \sim (r \wedge s)$ $\qquad$ $4 \leq 1 \;\; 4 > 2$

10. Verificar se são válidos os seguintes argumentos:

1. Se eu fosse matemático, seria inteligente; não sou matemático, logo não sou inteligente.

2. Não é verdade que eu gosto de churrasco e de batatas; eu gosto de churrasco e batatas ou não estudo ou se gosto de churrasco não gosto de batata. Segue-se que eu estudo ou se gosto de churrasco, então, gosto de batata.

3. Se eu gosto de açúcar, então, entendo matemática. Eu gosto de açúcar ou vou a dançar. Não entendo matemática. Logo, vou a dançar.

4. Se estudo aprendo lógica. Se não estudo, divirto-me. Logo, se não aprendo lógica, divirto-me.

5. O aluno é aprovado se, e somente se, é estudioso. Se o aluno tem tempo e não é estudioso, então, não é reprovado. Se o aluno é estudioso e não tem tempo, então, ele é aprovado ou não. Segue-se que se o aluno tem tempo, então, ele é estudioso.

6. Se Pedro é competente, então, se o serviço é bem feito ele será aceito. O serviço não é aceito. Segue-se que se o serviço é bem feito, então, Pedro não é competente.

11. Traduzir ao simbolismo lógico e verificar a validade do seguinte argumento: *Se o ingresso nacional é farto, as arrecadações por imposto são fartas. As arrecadações por imposto são baixas este ano. Portanto, o ingresso nacional deve ser baixo.*

12. Demonstrar se o seguinte argumento é ou não uma regra de inferência válida: *Se este é um bom livro vale a pena ler, A matemática é fácil, ou este livro não vale a pena ler. Porém a matemática não é fácil. Portanto, este é um bom livro.*

13. Verificar a validade dos seguintes argumentos, supondo as premissas verdadeiras.

    1. Quem é sensato estuda Lógica. Nenhum insensato pode servir no júri. Os seus filhos não estudam Lógica. Segue-se que seus filhos não podem servir no júri.

    2. Se Pedro é experiente, não é incompetente. Pedro erra sempre . Pessoa competente não erra sempre. Logo, Pedro não é experiente.

    3. Ninguém lê o *Diário do Povo*, se não é bem instruído. Nenhum ouriço[11] sabe ler. Os que não sabem ler são bem instruídos. Segue-se que ouriço não lee o *Diário do Povo*.

14. Escreva uma conclusão não trivial, a partir das premissas verdadeiras, a fim de obter um argumento válido.

    1. Burros são ilógicos. Ninguém é desprezado, se pode dirigir um jacaré. Animais ilógicos são desprezados.

    2. Patos não dançam valsa. Oficiais valsam. As, minhas aves são patos.

    3. Os nomes desta lista são convenientes para aprovar a exame. Nomes começados com vocal são repetentes. Se um nome começa com consoante, não é conveniente para aprovar o exame.

15. Verdade e falsidade são atributos das proposições, não dos argumentos. Enquanto proposições são verdadeiras ou falsas, argumentos são válidos (corretos) ou não . Exiba alguns exemplos de argumentos que sejam válidos mas que tenham conclusões falsas e de argumentos que não sejam válidos e que tenham conclusões verdadeiras.

16. A lógica ocupa-se da correção dos argumentos, e não com a verdade ou falsidade das premissas e da conclusão. Aceitando uma tal "definição", explique o que ela significa.

17. Explique (talvez dando exemplos) o motivo pelo qual qualquer uma das três combinações abaixo é possível em argumentos válidos:

    1. Premissas verdadeiras e conclusão verdadeira;

    2. Algumas ou todas as premissas falsas e conclusão verdadeira;

    3. Algumas ou todas as premissas falsas e conclusão falsa.

18. Os argumentos são válidos (consistentes ou inconsistentes) em função da sua forma, e não de seu conteúdo. Explique o que isto significa.

[11] Animação intensa; agitação, agito, excitação.

2.3 DEMONSTRAÇÃO

Nesta etapa da teoria da demonstração, é importante saber:

"O que é necessário demonstrar em matemáticas?"

Isto para estabelecer a diferença entre ``mostrar'' e ``demonstrar''. Existem provas de afirmações que realmente são ``mostras'' no sentido de somente mostrar, para que se veja com o olhos que a afirmação é verdadeira. Tal pode ser ocaso de ``mostrar'' visualmente o teorema de Pitágoras; porém não existe razões que justifiquem a necessidade de demonstrar, no sentido de afastar-se da evidencia visual, no caso que está não seja possível ou clara.

Deste modo devemos ter consciência de "o que é" e "*o que não é*"' **demonstrar**, assim como quando uma demonstração esta concluída, também é bastante importante deixar claro a diferença entre o processo de descoberta de uma demonstração (heurística) e a formalização e organização lógica dedutiva de ela, o qual constituem a demonstração propriamente dita.

Praticamente todos os teoremas matemáticos estão compostos por implicações do tipo. $(p_1 \wedge p_2 \wedge. . . \wedge p_n) \Rightarrow$ **q**, onde os p_i são chamados de premissas ou hipóteses e, **q** é chamada de conclusão.

"Demonstrar o teorema'' é demonstrar que a implicação é uma tautologia. Note que não estamos tratando de demonstrar que **q** (a conclusão) é verdadeira, somente que **q** é verdadeira caso todas as p_i sejam verdadeiras.

Em geral toda demonstração deve começar com as hipóteses, seguidas das tautologias e regras de inferência necessárias, até chegar à conclusão.

Exemplo 2.34

Temos a demonstrar o seguinte: "*Dois ângulos estão em planos diferentes, mas cada lado de um deles é paralelo ao lado correspondente do outro e está também na mesma direção. Demonstrar que os dois ângulos são iguais*".

Isto é um teorema fundamental da geometria espacial; a hipótese é:

> "*Dois ângulos estão em planos diferentes. Cada lado de um é paralelo ao lado correspondente do outro e tem também a mesma direção".*

E sua conclusão é:

> "*Os dois ângulos são iguais*".

Os principais métodos da teoria da demonstração são:

- Demonstrações diretas.
- Demonstrações indiretas.

2.3.1 Demonstrações diretas.

Toda demonstração direta deve começar com as premissas, seguidas das tautologias e regras de inferência necessárias, até chegar à conclusão; cada passo deve estar acompanhado de sua respectiva justificativa.

Devido à *tabela-verdade* da implicação, se a proposição **p** é falsa (**f**), a proposição **p** $\Rightarrow$ **q** é verdadeira (**v**), logo não temos nada a demonstrar. Nos estamos interessados no caso que o antecedente **p** seja verdadeiro (**v**). Nesta seção **p** e **q** representam proposições simples ou compostas.

A partir da verdade de **p**, deduzir a verdade de **q**, é fazer uma demonstração direta da condicional **p** $\Rightarrow$ **q**; isto consiste em uma lista de proposições p_1, p_2, p_3, . . . , p_n tais que p_n coincide com **q** e para cada i = 1, 2, 3, 4, . . . , n e p_i é evidentemente verdadeira, ou coincide com as premissas, ou é conseqüência imediata de uma ou varias das proposições que lhe precedem na lista.

Exemplo 2.35

Se, trabalhar ou poupar então, comprarei uma casa. Se comprar uma casa, então meu carro guardarei em casa.

Por tanto, se não posso guardar meu carro em casa, então não poupo.

Demonstração.

Sejam p : trabalho, q : poupo, r : comprarei uma casa, s : poderei guardar o carro em casa.

O enunciado anterior podemos escrever na forma:

$$\{[(p \vee q) \Rightarrow r] \wedge (r \Rightarrow s)\} \Rightarrow (\sim s \Rightarrow \sim q)$$

Aqui a conclusão é **q** : $\sim s \Rightarrow \sim q$.

1. $(p \vee q) \Rightarrow r$ . . . premissa.
2. $r \Rightarrow s$ . . . premissa.
3. $q \Rightarrow (q \vee p)$ . . . tautologia
4. $q \Rightarrow (p \vee q)$. (3), comutatividade.
5. $q \Rightarrow r$ . . . (1),(4), silogismo hipotético.
6. $q \Rightarrow s$ . . . (2),(5), silogismo hipotético.
7. $\sim s \Rightarrow \sim q$ . . . (6), contra-recíproca.

Portanto, o enunciado é válido mesmo que a conclusão seja verdadeira ou falsa.

Exemplo 2.36

Demonstrar que, se $x^2 + 2x \geq 3$ e $x = 2a - 1$, então $a^2 \geq 1$

Demonstrtação.

Considere p: $x^2 + 2x \geq 3$, r: $x = 2a - 1$ e q: $a^2 \geq 1$. O que temos a demonstrar é que $(p \wedge r) \Rightarrow q$ é proposição verdadeira (**v**).

Com efeito:

1.	p: $x^2 + 2x \geq 3$	. . . premissa.
2.	r: $x = 2a - 1$	. . . premissa.
3.	$p \wedge r$: $(2a - 1)^2 + 2(2a - 1) \geq 3$	. . . substituição.
4.	$p \wedge r$: $4a^2 \geq 4$	. . . tautologia.
5.	q: $a^2 \geq 1$.	
6.	Portanto, acabamos de mostrar que $(p \wedge r) \Rightarrow q$.	

Assim, a demonstração direta consiste em demonstrar ou deduzir a conclusão **q** a partir das premissas p_1, p_2, p_3, . . . , p_n, aplicando as equivalências tautológicas e as regras de inferência.

Exemplo 2.37

Demonstrar a validade do argumento $p,\ q \Rightarrow r,\ \sim r \vdash \sim q$.

Demonstrtação.

1.	p	. . . premissa
2.	$q \Rightarrow r$	. . . premissa
3.	$\sim r$	. . . premissa
4.	$\sim q$	. . . (2) e (3), Modus Tollens

Exemplo 2.38

Demonstrar a validade do argumento $\sim p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow \sim r,\ r \vee s \vdash \sim s \Rightarrow p$

Demonstrtação.

Observe que a conclusão **q** é **q** : $\sim s \Rightarrow p$

1.	$\sim p \Rightarrow q$	. . . premissa
2.	$q \Rightarrow \sim r$	. . . premissa
3.	$r \vee s$	. . . premissa
4.	$\sim p \Rightarrow \sim r$	. . . (1), (2), silogismo hipotético
5.	$\sim r \Rightarrow s$	. . . (3), def. de implicação
6.	$\sim p \Rightarrow s$	. . . (4), (5), silogismo hipotético
7.	$\sim s \Rightarrow \sim \sim p$.	. . (6), contra-recíproca
8.	$\sim s \Rightarrow p$	. . . conclusão, (7), negação

Portanto, o argumento é válido.

Exemplo 2.39

Demonstre que se a, $b \in \mathbf{R}^+$ tais que a.b = 1, então $a + b \geq 2$.

Demonstrtação.

1. $a.b = 1$ . . . hipótese.
2. $0 < a \leq 1$ e $1 \leq b$, . . .hipótese auxiliar.
3. $0 \leq (1 - a)$ e $0 \leq (b - 1)$ . . . propriedade em **R**.
4. $0 \leq (1 - a)(b - 1)$ . . . propriedade em **R**.
5. $0 \leq b - ab - 1 + a$ . . . propriedade em **R**.
6. $0 \leq b - 1 - 1 + a$ . . . (1), substituição.
7. $2 \leq a + b$ . . . propriedade em **R**.

Portanto, $a + b \geq 2$.

2.3.1.1 Demonstração direta por contra-exemplo.

As demonstrações deste tipo utilizam a equivalência lógica:

> "*Não é verdade que para todo elemento x, cumpra a propriedade* p(x) *é logicamente equivalente a; existe algum elemento* x *que não cumpre a propriedade* p(x)".

isto é, para demonstrar que, não é verdade que se cumpra p(x) para todo x, é necessário e suficiente mostrar que existe pelo menos um x tal que não se cumpra p(x).

Exemplo 2.40

Demonstrar que: *Para todo natural* n, *tem*-se n+1 = 5.

Demonstrtação.

Intuímos que o argumento é falso.

Temos que achar um número natural n tal que não cumpra n+1 = 5.

Por exemplo considerar $n = 6 \in \mathbf{N}$; logo $6 + 1 \neq 5$.

Logo, existe um número natural n tal que $n + 1 \neq 5$.

Portanto, não é verdade que, para todo natural n, tenhamos n+1 =5.

2.3.2 Demonstrações indiretas.

A demonstração indireta estabelece a verdade de uma afirmativa por revelar a falsidade da suposição oposta. Deste modo, ela apresenta certa semelhança com a astúcia do político que procura firmar os méritos de um candidato pela demolição da reputação do seu oponente.

Entre os métodos de demonstrações indiretas, estudaremos os seguintes:

- Por contraposição.

- Por casos.
- Por redução ao absurdo.
- Por árvore de refutação.

2.3.2.1. Demonstração indireta: Por contraposição.

É uma afirmação da forma "se **p** $\Rightarrow$ **q**" e consiste em supor $\sim$ **q** para mostrar que se cumpre "$\sim$ **p**" ; isto é, trata-se de provar que " $\sim$ **q** $\Rightarrow$ $\sim$ **p**" que é logicamente equivalente à afirmação original.

Assim, a proposição (**p** $\Rightarrow$ **q**) $\Leftrightarrow$ ($\sim$ **q** $\Rightarrow$ $\sim$ **p**) é verdadeiro. Isto é um exemplo da utilidade das verdades lógicas.

Exemplo 2.41

Demonstre que se a, b $\in$ $\mathbf{R}^+$, tais que a.b = 1, então a + b $\geq$ 2.

Demonstrtação.

1.	Suponhamos $a + b < 2$	. . . hipótese auxiliar.
2.	$a + b < 2$	. . . def. de <.
3.	$0 < (a + b)^2 < 2^2$	. . . a, b $\in$ $\mathbf{R}^+$.
4.	$2ab + a^2+b^2 < 4$	. . . propriedade em **R**.
5.	$4ab < 2ab + a^2+b^2 < 4$	. . . prop. em **R**, $2ab \leq a^2+b^2$.
6.	$4ab < 4$	(4)- (5), . . . tautologia.
7.	$ab < 1$	. . . propriedade em **R**.
8.	$a + b < 2 \Rightarrow a.b \neq 1$	. . . (1) - (7)

Portanto, $a.b = 1 \Rightarrow a + b \geq 2$.

Observe que temos a tautologia $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$, onde p: $a.b = 1$ e q: $a+b \geq q\ 2$.

Exemplo 2.42

Demonstre que existem infinitos números primos.

Demonstração.

Por definição de número primo, sabemos que são os números naturais maiores do que um (1) e que podemos decompor como o produto de dois fatores: ele mesmo e a unidade. Este são:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots$$

Sabe-se que em, geral todo número natural podemos escrever como o produto de fatores primos, por exemplo $630=(7)(5)(3^2)(2)$.

Suponhamos não existam infinitos números primos; isto é suponhamos exista um último número primo P. Neste caso poderíamos escrever todo o conjunto de números primos na forma:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots , P \qquad \textbf{(2.2)}$$

Com o produto de todos esses números primos, poderíamos escrever um número Q na forma:

$$Q = (2)(3)(5)(7)(11)(13)(17)(19)(23)(29)(31)(37)\ldots (P) + 1$$

este Q é maior do que P. Supostamente Q não pode ser primo, caso contrario um dos qualquer números primos do conjunto (2.2) é um fator de Q, o qual é impossível.

Portanto, supor que existe um último número primo está errado.

2.3.2.2. Demonstração indireta: Por casos.

Para mostrar que uma conclusão **q** é verdadeira, quando temos uma série premissas (os casos) p_1, p_2, p_3, . . . , p_n, $n \geq 2$ tais que esgotam todas as possibilidades, ou seja que necessariamente se cumpre uma de elas, isto é o enunciado $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots \vee p_n$ é verdadeira e além disso prova-se que: se p_1 implica **q**, se p_2 implica **q**, . . . , se p_n implica **q**.

Pode então se concluir em forma correta que a proposição **q**, é verdadeira, já que provou-se o enunciado:

$$[(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots \vee p_n) \wedge [(p_1 \Rightarrow \mathbf{q}) \wedge (p_2 \Rightarrow \mathbf{q}) \wedge (p_3 \Rightarrow \mathbf{q}) \ldots \wedge (p_n \quad \mathbf{q})]$$

e resulta o argumento:

$$[(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots \vee p_n) \wedge [(p_1 \Rightarrow \mathbf{q}) \wedge (p_2 \Rightarrow \mathbf{q}) \wedge (p_3 \Rightarrow \mathbf{q}) \ldots \wedge (p_n \Rightarrow \mathbf{q})]] \Rightarrow \mathbf{q}$$

é válido.

- Logo, para demonstrar a validade de argumentos cuja conclusão é uma fórmula condicional do tipo $p \Rightarrow q$, considera-se o antecedente p , como uma premissa adicional e o conseqüente q será a conclusão a ser demonstrada.

De fato, sendo válido o seguinte argumento:

1. $p_1, p_2, p_3, \ldots , p_n, p \vdash q$
2. $((p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge p) \Rightarrow q$ . . . (1)
3. $((p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge p) \Rightarrow q$ . . . (2), tautologia
4. $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ . . . (3), tautologia (exportação).
5. $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \vdash (p \Rightarrow q)$ é válido . . . (4).

Portanto, a conclusão q é válida.

Exemplo 2.43

Demonstrar a validade do argumento: $\sim\sim p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow \sim r,\ r \vee s \vdash \sim s \Rightarrow p$.

Demonstração.

Observe que a conclusão **q** : $\sim s \Rightarrow p$.

1. $p \Rightarrow q$ . . . premissa
2. $q \Rightarrow \sim r$ . . . premissa
3. $\sim p \Rightarrow \sim r$ . . .(1), (2)
4. $r \vee s$ . . . premissa
1. $r \Rightarrow s$ . . . (4), tautologia.
5. $\sim p \Rightarrow s$ . . (3), (5) silogismo hipotético.
6. $\sim s \Rightarrow p$ de (6), tautologia.
7. $(r \vee s) \Rightarrow (\sim s \Rightarrow p)$ . . . (4)-(7)

Portanto, a conclusão **q** : $\sim s \Rightarrow p$ é válida.

2.3.2.3. Demonstração indireta: Por redução ao absurdo.

A demonstração por absurdo mostra a falsidade de uma suposição derivando dela um absurdo flagrante. É um procedimento matemático, mas se assemelha à ironia, que é o procedimento predileto do satirista. A ironia adota, com todas as aparências, uma determinada opinião, que é exagerada e repetida até conduzir a um manifesto absurdo.

Para provar uma conclusão **q** é verdadeira, temos a supor ~ **q** e procedemos de acordo com alguma dos seguintes três casos:

Caso i) Com a suposição extra ~ **q**, mostra-se uma afirmação ~ p contraditória com outra afirmação p mostrada anteriormente.

Isto deve-se ao caso que a afirmação $[(\sim \mathbf{q} \Rightarrow \sim p) \wedge p] \Rightarrow \mathbf{q}$ é tautologia (Modus Tollens).

Caso ii) Com a suposição extra ~ **q**, mostra-se uma afirmação p, logo se prova ~ p.

Isto deve-se ao caso que a afirmação

$[(\sim \mathbf{q} \Rightarrow p) \wedge (\sim \mathbf{q} \Rightarrow \sim p)] \Rightarrow \mathbf{q}$ o bem $[\sim \mathbf{q} \Rightarrow (p \wedge \sim p)] \Rightarrow \mathbf{q}]$

é tautologia (Lei do absurdo).

Este modo a demonstrar também é chamado por contradição.

Caso iii) Com a suposição extra ~ **q**, mostra-seo valor verdade de **q**.

Isto deve-se ao fato que a afirmação $(\sim \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{q}) \Rightarrow \mathbf{q}$ é tautologia.

Então em cada caso podemos concluir corretamente **q**.

Se bem a definição original de redução ao absurdo[12] é:

> *"prova da falsidade de um enunciado, ao obter de ele uma conseqüência lógica absurda".*

[12] Reductio ad absurdum.

o que simbolizamos como [$\mathbf{q} \Rightarrow (p \vee \sim p)] \Rightarrow \sim \mathbf{q}$, o usamos em forma positiva para provar a verdade do enunciado q, usando a verdade lógica conhecida como principio do terceiro excluído ($\mathbf{q} \vee \sim \mathbf{q}$), para inferir corretamente **q** a partir de $\sim \sim \mathbf{q}$.

Exemplo 2.44 *Caso* **i)**

Demonstrar, que $5 \neq 1$

Demonstração.

Demonstrarei pelo absurdo.

Seja q : $5 \neq 1$; a verificar que q é verdadeira.

1.	Sabe-se que p : $5 - 1 \neq 0$	. . . hipótese auxiliar.
2.	Suponhamos $\sim q$: $5 = 1$	. . . hipótese auxiliar.
3.	Logo, $\sim p$: $5 - 1 = 0$	. . .(2).
4.	$\sim q \Rightarrow \sim p$	. . . (2)-(3)
5.	$(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge p$	. . . (1) e (4)
6.	q	. . . Modus Tollens

Portanto, $5 \neq 1$ é verdadeiro.

Exemplo 2.45 *Caso* **ii)**

Demonstrar, que $5 \neq 1$

Demonstração.

Demonstrarei pelo absurdo.

Seja q : $5 \neq 1$; a verificar que q é verdadeira.

1.	Seja p : $5 - 1 \neq 0$	. . . hipótese auxiliar.
2.	Suponhamos $\sim q$: $5 = 1$	. . . hipótese auxiliar.
3.	Logo, $\sim p$: $5 - 1 = 0$	. . .(2).
4.	p : $5\text{-}1 \neq 0$	. . . (2).
5.	$\sim p \wedge p$	. . . (3) e (4).
6.	q	. . . lei do absurdo a: $\sim q \Rightarrow (\sim p \wedge p)$.

Portanto, $5 \neq 1$.

Exemplo 2.46

Temos a mostrar pelo absurdo caso **ii)** que o argumento $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \vdash q$, é verdadeiro.

Demonstração.

Para isto, considera-se a negação da conclusão $\sim q$ como premissa adicional e conclui-se uma fórmula *F* (fórmula falsa do tipo $r \wedge \sim r$).

De fato, sendo q verdadeira tem-ser o seguinte argumento:

1. p_1 , p_2 , p_3 , . . . , ; ~ q ├ *F*
2. p_1 , p_2 , p_3 , . . . , ├ (~ q ⇒ *F*) . . . (1), tautologia (exportação).
3. p_1 , p_2 , p_3 , . . . , ├ (~ ~ q ∨ *F*) . . . (2), implicação material.
4. p_1 , p_2 , p_3 , . . . , ├ (q ∨ F) (3), tautologia (dupla negação).
5. p_1 , p_2 , p_3 , . . . , ├ q . . . propriedade de *F*.

Portanto, p_1 , p_2 , p_3 , . . . , p_n ; q é válido.

Exemplo 2.47 *Caso* **ii)**

Demonstrar, por absurdo, a validade do argumento ~ p ⇒ q , q ⇒ ~ r, r ∨ s concluir **q** : ~ s ⇒ p

Demonstração.

Neste exemplo, podemos considerar **q** : ~ s ⇒ p , logo:

1. p ⇒ q . . . premissa
2. q ⇒ ~ r . . . premissa
3. r ∨ s . . . premissa
4. ~ (~ s ⇒ p) . . . premissa adicional
5. ~ p ⇒ ~ r . . . (1), (2), silogismo hipotético
6. r ⇒ s . . . (3), def. de implicação
7. p ⇒ s . . . (5), (6), silogismo hipotético
8. ~ s ⇒ p . . . (7), contraposição
9. ~ (~ s ⇒ p) ∧ (~ s ⇒ p) l . . . de (4), (8), conjunção
10. *F* isto de (9)

Portanto, a partir das premissas ~ p ⇒ q , q ⇒ ~ r, r ∨ s concluir **q** : ~ s ⇒ p é válido.

A demonstração do seguinte teorema pelo método da contradição é como se indica.

Exemplo 2.48

Demonstrar que: {[p ⇒ (p ∧ r)] ∧ [(t ∨ s) ⇒ q] ∧ (p ∨ s)} ⇒ q

Demonstração.

1. p ⇒ (p ∧ r) . . . premissa.
2. (t ∨ s) ⇒ q . . . premissa.
3. (p ∨ s) . . . premissa.
4. ~ q . . . premissa auxiliar.
5. ~ (t ∨ s) . . .(2), (4), modus tollens.

6. $\sim t \wedge \sim s$ . . .(5) lei de Morgan.

7. $\sim t$ . . .(6) simplificação.

8. $\sim s \wedge \sim t$ . . .(6) lei comutativa.

9. $\sim s$ . . .(8) simplificação.

10. $s \vee p$ . . .(3) lei comutativa.

11. p . .(9), (10) silogismo disjuntivo.

12. $t \wedge r$ . . .(1), (11), modus ponens.

13. t . . .(12) simplificação.

14. $t \wedge \sim t$ . . .(7), (13), conjunção.

15. Contradição.

Portanto, $\{[p \Rightarrow (p \wedge r)] \wedge [(t \vee s) \Rightarrow q] \wedge (p \vee s)\} \Rightarrow q$

Itemize.

- Para a demonstração pelo absurdo do Caso **iii)** apresentamos dois tipos, aquele que estabelece que:

  1º. Uma proposição cuja falsidade implica sua verdade é verdadeira; isto é: $(\sim q \Rightarrow q) \Rightarrow q$

  2º. Uma proposição verdadeira que implica sua própria falsidade é falsa; isto é: $(q \Rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim q$

Exemplo 2.49

Demonstrar que todo número natural, não é menor que si mesmo.

Demonstração.

Temos as proposições p : a número natural, e q :$a \geq a$.

A verificar que: $p \Rightarrow q$

1. Seja p :a número natural . . . hipótese (premissa)
2. $a = a$ . . . propriedade reflexiva
3. $\sim q$: $a < a$ . . . hipótese auxiliar
4. $a \neq a$ . . . . isto de (3)
5. Contradição entre (2) e (4), logo a hipótese auxiliar $\sim q$ não é certa (é falsa).
6. Então, q é verdadeira.
7. Aplicando $(\sim q \Rightarrow q) \Rightarrow q$ a (3) e (6) temos q.
8. Como q é verdadeira, temos que $p \Rightarrow q$ é verdadeira.

Portanto, todo número natural, não é menor que si mesmo.

Exemplo 2.50

Escrever números inteiros usando cada um dos dez algarismos uma só vez, de tal modo que a soma desses números seja exatamente 100.

Demonstração.

Suponhamos por exemplo o conjunto de números 19, 28, 37, 46, 50, cada algarismo corresponde só uma vez, sua soma é 180 e não 100.

Poderíamos continuar tentando até obter: 19 +28+30 + 7 +6+5+4 = 99.

Naturalmente a primeira parte do problema é satisfeita, porém não chegamos a obter 100 (segunda parte), porem se escrevemos 19 +28+31 + 7 +6+5+4 = 100. Observe que a primeira parte do problema não é satisfeita, o número 1 repete-se duas vezes.

Observe que se somamos 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45, alguns desses algarismos denotam unidades e outros dezenas.

Suponhamos que o algarismo **a** seja o das dezenas, então teríamos: 10**a**+(45-**a**) = 100 (lembre que a é número natural). Da ultima igualdade segue-se que 9 **a** = 55, de onde é impossível a existência de $\mathbf{a} \in \mathbf{N}$.

Supor que as duas partes do problema são simultaneamente satisfeitas, é um flagrante absurdo; assim é impossível satisfazer ao mesmo tempo as duas partes do problema.

Logo, chegamos a demonstrar que as duas partes do problema são incompatíveis.

Nosso raciocínio neste último exemplo foi uma típica demonstração por absurdo [11]. Na demonstração pelo absurdo, podemos aplicar qualquer das formas da *lei do absurdo*.

2.3.2.4. Demonstração indireta: Árvore de refutação.

Árvore de refutação é um método para verificar a validade de um argumento, análogo à demonstração por absurdo. Para testarmos a validade de um argumento construímos uma lista de fórmulas consistindo de suas premissas p_1, p_2, p_3, . . . , p_n e a negação de sua conclusão $\sim q$ que formam a *raiz da árvore*.

A árvore continua abaixo com a construção de seus *ramos* por aplicações de regras, que serão especificadas abaixo, e gerando novas linhas na árvore. A árvore termina quando as fórmulas de seus ramos são: variáveis proposicionais, negações de variáveis proposicionais, ou quando encontrarmos em todos os ramos uma fórmula (**f**).

Se encontrarmos em todos os ramos da árvore uma fórmula (**f**), então a nossa tentativa de refutação falhou ou seja, o argumento é válido. Se em algum ramo da árvore não foi possível encontrar uma fórmula (**f**), então refutamos o argumento, isto é, o argumento não é válido.

Regras para a construção de uma árvore de refutação.

As regras para a construção de uma árvore de refutação estão relacionadas com as tabelas verdade já conhecidas. Ao aplicar uma regra em uma fórmula da árvore, temos a observar que.

- A fórmula será marcada ($\angle$) para evitar aplicações repetidas de uma regra em uma mesma fórmula.
- A aplicação de uma regra deve gerar: uma ou duas linhas, um ramo ou dois ramos conforme a regra, e será aplicada em todos os ramos abertos (não fechados com (**X**)) aos quais a fórmula pertence.
- A aplicação de uma regra deve gerar: uma ou duas linhas, um ramo ou dois ramos conforme a regra, e será aplicada em todos os ramos abertos (não fechados com (**X**) aos quais a fórmula pertence.

Temos as seguintes regras :

1ª. Regra da dupla negação (~~)

Uma fórmula do tipo $\sim \sim p$ gera uma linha e escrevemos $\angle$ na linha. Procedemos assim em todos os ramos abertos aos quais a fórmula $\sim \sim p$ pertence pois, $\sim \sim p$ é verdadeira se, e somente se, p é verdadeira.

2ª. Regra da conjunção ($\wedge$)

Uma fórmula do tipo $p \wedge q$ gera duas linhas e escrevemos, em cada linha, as fórmulas p e q. Procedemos assim em todos os ramos abertos aos quais a fórmula $p \wedge q$ pertence pois, $p \wedge q$ assume valor (**v**) se, e somente, as fórmulas p e q são verdadeiras.

1. $p \wedge q$ $\angle$
2. p
3. q

3ª. Regra da disjunção ($\vee$)

Uma fórmula do tipo $p \vee q$ gera uma linha e dois ramos e escrevemos, na linha e, em cada ramo, as fórmulas p e q respectivamente. Procedemos assim em todos os ramos abertos aos quais a fórmula $p \vee q$ pertence pois, $p \vee q$ assume valor (**v**) se, e somente, a fórmula p é verdadeira ou a fórmula q é verdadeira.

1. $p \vee q$ $\angle$

   / \

2. p q

4ª. Regra da implicação ($\Rightarrow$)

Uma fórmula do tipo $p \Rightarrow q$ gera uma linha e dois ramos e escrevemos, na linha $\angle$ e, em cada ramo, as fórmulas $\sim p$ e q respectivamente. Procedemos assim em todos os ramos abertos aos quais a fórmula $p \Rightarrow q$ pertence pois, $p \Rightarrow q$ assume valor (**v**) se, e somente, a fórmula $\sim p$ é verdadeira ou a fórmula q é verdadeira.

1. $p \Rightarrow q \quad \angle$

$/ \backslash$

2. $\sim p \quad q$

5ª. Regra da bicondicional ($\Leftrightarrow$)

Uma fórmula do tipo $p \Leftrightarrow q$ gera duas linhas e dois ramos e escrevemos nas linhas as fórmulas p e q em um ramo e as fórmulas $\sim p$ e $\sim q$ no outro ramo. Procedemos assim em todos os ramos abertos aos quais a fórmula $p \Leftrightarrow q$ pertence pois, $p \Leftrightarrow q$ assume valor (**v**) se, e somente, a fórmula $(p \wedge q)$ é verdadeira ou a fórmula $(\sim p \wedge \sim q)$ é verdadeira.

1. $p \Leftrightarrow q \quad \angle$

$/ \backslash$

2. $p \quad \sim p$
3. $q \quad \sim q$

6ª. Regra da negação da conjunção ($\sim \wedge$)

Uma fórmula do tipo $\sim (p \wedge q)$ gera uma linha e dois ramos e escrevemos, na linha e, em cada ramo, as fórmulas $\sim p$ e $\sim q$ respectivamente. Procedemos assim em todos os ramos abertos aos quais a fórmula $\sim (p \wedge q)$ pertence pois, $\sim (p \wedge q)$ assume valor (**v**) se, e somente, a fórmula $\sim p$ é verdadeira ou a fórmula $\sim q$ é verdadeira.

1. $\sim (p \wedge q) \quad \angle$

$/ \backslash$

2. $\sim p \quad \sim q$

7ª. Regra da negação da disjunção ($\sim\vee$)

Uma fórmula do tipo $\sim (p \vee q)$ gera duas linhas e escrevemos, em cada linha, as fórmulas $\sim p$ e $\sim q$. Procedemos assim em todos os ramos abertos aos quais a fórmula $\sim (p \vee q)$ pertence pois, $\sim (p \vee q)$ assume valor (**v**) se, e somente, as fórmulas $\sim p$ e $\sim q$ são verdadeiras.

1. $\sim (p \vee q) \quad \angle$
2. $\sim p$
3. $\sim q$

8ª. Regra da negação da implicação ($\sim \Rightarrow$)

Uma fórmula do tipo $\sim (p \Rightarrow q)$ gera duas linhas e escrevemos, em cada linha, as fórmulas p e $\sim q$. Procedemos assim em todos os ramos abertos aos quais a fórmula $\sim (p \Rightarrow q)$ pertence pois, $\sim (p \Rightarrow q)$ assume valor (**v**) se, e somente, as fórmulas p e $\sim q$ são verdadeiras.

1. $\sim (p \Rightarrow q)$ $\angle$

2. p

3. $\sim q$

9ª. Regra da negação da bicondicional ($\sim \Leftrightarrow$)

Uma fórmula do tipo ($\sim (p \Leftrightarrow q)$) gera duas linhas e dois ramos e escrevemos nas linhas as fórmulas $\sim p$ e q em um ramo e as fórmulas p e $\sim q$ no outro ramo. Procedemos assim em todos os ramos abertos aos quais a fórmula $\sim (p \Leftrightarrow q)$ pertence pois, $\sim (p \Leftrightarrow q)$ assume valor (**v**) se, e somente, a fórmula ($\sim p \wedge q$) é verdadeira ou a fórmula ($p \wedge \sim q$) é verdadeira.

1. $\sim (p \Leftrightarrow q)$ $\angle$

/ \

2. $\sim p$ p

3. $\sim q$ q

10ª. Ramo fechado.

Um ramo será fechado se em ele existem uma fórmula p e sua negação $\sim p$ e escrevemos (**X**) no final do ramo.

1. $\sim p$

2. p

3. (**X**)

Observação 2.3

1. As regras dadas para construir árvores de refutação se aplicam em cada linha ao conectivo principal da fórmula e não a sub-fórmulas. Por exemplo:

   1. $p \wedge \sim \sim q$ $\angle$

   2. $p \wedge q$ $\sim \sim$ (incorreto !)

2. Não importa a ordem em que as regras são aplicadas; no entanto, é mais eficiente aplicar as regras, primeiramente, em fórmulas que não resultam em ramificações.

3. Cada linha gerada deve ser justificada indicando a respectiva linha de origem na qual foi aplicada a regra e também a regra usada.

4. Fórmula na qual foi aplicada alguma regra deve ser marcada ($\angle$) para evitar aplicações repetidas da mesma.

Exemplo 2.51

Construir uma árvore de refutação para mostrar que: $p \wedge q \vdash \sim \sim p$

Solução

Escrevemos a premissa seguidamente a negação da conclusão:

1. $p \wedge q$
2. $\sim\sim\sim p$

Sabemos que $p \wedge q$ é verdadeira se, e somente se, p e q são ambas verdadeiras; daí, podemos substituir $p \wedge q$ por p e q gerando as linhas (3) e (4.), respectivamente, e *marcando* ($\angle$) a fórmula $p \wedge q$. (Uma fórmula marcada não poderá mais ser utilizada na construção da árvore!)

1. $p \wedge q$ $\angle$
2. $\sim\sim\sim p$
3. p
4. q

Como $\sim\sim\sim p$ é verdadeira se, e somente se, $\sim p$ é verdadeira, marcamos $\sim\sim\sim p$ e substituímos por $\sim p$ gerando a linha (5).

1. $p \wedge q$ $\angle$
2. $\sim\sim\sim p$ $\angle$
3. p
4. q
5. $\sim p$

A árvore terminou pois das premissas e da negação da conclusão obtivemos variáveis proposicionais ou negações de variáveis proposicionais.

Por outro lado encontramos nas linhas (3) e (5) uma fórmula (**f**), ou seja, nossa tentativa de refutação falhou e portanto o argumento é válido. Isso será expresso escrevendo um (**X**) no final da lista, gerando a linha (6) e fechando o único ramo da árvore.

1. $p \wedge q$ $\angle$
2. $\sim\sim\sim p$ $\angle$
3. p
4. q
5. $\sim p$
6. (**X**)

A árvore de refutação está completa. A nossa busca para uma refutação do argumento dado falhou e, portanto, o argumento $p \wedge q \vdash \sim\sim p$ é válido.

Exemplo 2.52

Construir uma árvore de refutação para mostrar que : $p \vee q, \sim p \vdash q$

Solução

Iniciamos a árvore escrevendo a lista de fórmulas as premissas e a negação da conclusão:

1. $p \vee q$
2. $\sim p$
3. $\sim q$

Sabemos que $p \vee q$ é verdadeira se, e somente se, p é verdadeira ou q é verdadeira. Para representar esse fato, marcamos $p \vee q$ e ramificamos a árvore, gerando a linha 4. com dois ramos:

1. $p \vee q$ $\angle$
2. $\sim p$
3. $\sim q$
   / \
4. p q

A árvore terminou pois das premissas e da negação da conclusão obtivemos variáveis proposicionais ou negações de variáveis proposicionais.

Por outro lado encontramos uma fórmula (**f**) em um ramo, nas linhas (2) e (4) e no outro ramo, nas linhas (3) e (4), ou seja, nossa tentativa de refutação falhou e portanto o argumento é válido. Isso será expresso escrevendo um (**X**) no final de cada ramo da lista gerando a linha (5) e fechando os dois ramos da árvore.

1. $p \vee q$ $\angle$
2. $\sim p$
3. $\sim q$
   / \
4. p q
5. (**X**) (**X**)

A árvore de refutação está completa. Como a tentativa de refutação falhou nos dois ramos, o argumento dado é válido.

Exemplo 2.53

Construir uma árvore de refutação para verificar a validade do seguinte argumento: $p \vee q,\ p \vdash \sim q$.

1. $p \vee q$
2. p
3. $\sim\sim q$ $\angle$

Temos que $\sim\sim q$ é equivalente a q; daí, marcamos $\sim\sim q$ e escrevemos q gerando a linha (4).

1. $p \vee q$
2. p
3. $\sim\sim q$ $\angle$

4. q

Como no exemplo anterior, marcamos $p \vee q$ e ramificamos a árvore gerando a linha (5) com dois ramos:

1. $p \vee q \quad \angle$
2. p
3. $\sim\sim q \quad \angle$
4. q

/ \

5. $p \quad q$

A árvore terminou e nos dois ramos não há contradições, ou seja, uma fórmula (**f**). Neste caso os ramos não serão fechados e o argumento não é válido.

Exemplo 2.54

Verificar a validade do argumento: $p \Rightarrow r \vee s,\ r \wedge s \Rightarrow q\ ,\ \ p \Rightarrow q$

Solução

1. $p \Rightarrow r \vee s \qquad \angle$	hipótese.
2. $r \wedge s \Rightarrow q \qquad \angle$	hipótese.
3. $\sim (p \Rightarrow q) \qquad \angle$	negação da tese.
4. p	(3), negação de $\Rightarrow$
5. $\sim q$	(3), negação de $\Rightarrow$
/ \	
6. $\sim p \quad r \vee s \qquad \angle$	de (4) - (6) e (1), $\Rightarrow$
7. (**X**) / \	
8. $r \qquad s$	(6) $\vee$
/ \ / \	
9. $\sim(r \wedge s) \quad q \quad \angle \quad \sim(r \wedge s) \quad q \quad \angle$	(2), $\Rightarrow$
/ \ / \ \	
10. $\sim r \quad \sim s$ (**X**) $\sim r \quad \sim s$ (**X**)	$\sim\ \wedge$
11. (**X**) ? (9), (5) (**X**) ? (9),(5)	(10), (8)

Temos neste caso dois ramos que não fecharam e, portanto, o argumento não é válido.

Exemplo 2.55

Construir uma árvore de refutação para verificar se a fórmula $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \sim q)$ é uma tautologia:

Solução

1. $\sim ((p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \sim q)) \quad \angle$ — negação da tese.

2. $\sim (p \Rightarrow q)$ $\angle$ (1.), negação de $\vee$

3. $\sim (p \wedge \sim q)$ $\angle$ (1.), negação de $\vee$

4. p (2), negação de $\Rightarrow$

5. $\sim q$ (2), negação de $\Rightarrow$

/ \

6. $\sim p$ $\sim \sim q$ (3), negação $\wedge$

7. (**X**) (**X**) (6), (5)

Todos os ramos estão fechados; assim a fórmula é válida, ou seja, é uma tautologia.

2.4 FUNÇÕES PROPOSICIONAIS

2.4.1 Função proposicional.

Definição 2.9 Função proposicional.

Dizemos função proposicional a todo enunciado aberto, e denotamos por p(x).

2.4.1.1 Campo da variável.

O conjunto de valores da variável, está formado por todos os valores conveniados para a variável x. O representaremos por D e dizemos que x pertence a D, o qual denotamos $x \in D$.

Isto é, pela definição de enunciado aberto; função proposicional sobre D é toda expressão p(x) tal que p(a) é verdadeira ou falsa para todo $a \in D$

Exemplo 2.56

a) p(x) : $x + 4 > 7$, onde $x \in \mathbf{N}$.

É uma função proposicional, cujo domínio são os números naturais, observe que:

p(5) : $5 + 4 > 7$ é verdadeiro (**v**)

p(2) : $2 + 4 > 7$ é falso (**f**)

b) $2x + 9 = 12$, é uma função proposicional. O domínio poderá ser os números naturais, os inteiros ou os reais.

Porém o domínio, não poderá ser "s*eres humanos"* pois não terá sentido escrever.

q(mulher) : 2(mulher) + 9 = 12 não é verdadeiro (**v**) nem falso (**f**)

p(2) : $2 + 4 > 7$ é falso (**f**)

c) r(x) : *x é humano*

É função proposicional e seu domínio pode ser todo ser animado[13] ou inanimado[14], e assim teríamos por exemplo as proposições:

[13] A que se deu alma ou vida, ou aparência de vida

r(mulher) : Mulher é humano é verdadeiro (**v**)

r(gato) : O gato é humano é falso (**f**)

r(caneta) : A caneta é humano é falso (**f**)

2.4.2 Raíz de uma função proposicional.

Quando ao substituir o valor da variável x por um valor específico a de seu domínio, obtemos uma proposição verdadeira, então o valor específico de a é uma solução ou raíz da função proposicional.

Exemplo 2.57

Suponhamos p(x) : 7 x - 5 = 9 ao substituirmos x = 2 obtemos:

p(2) : 7(2) - 5 = 9 verdadeiro (**v**)

Logo x = 2 é raíz de p(x) : 7 x - 5 = 9.

Ao substituirmos x = 3 obtemos: p(3) : 7(3) - 5 = 9 falso (**f**)

Logo x = 3 não é raiz de p(x).

Definição 2.10 Conjunto verdade.

Chama-se conjunto verdade de uma função proposicional p(x) *no domínio* D, *ao conjunto de todos os elementos em* a $\in$ D tais que a proposição p(a) *seja verdadeira. Denotamos o conjunto verdade para a* proposição p, *como* V_p.

Exemplo 2.59

Seja o conjunto de números A= { 1, 2, 3, 4, 5 } e p(x) : x < 4; então V_p = { 1, 2, 3 }

2.5 QUANTIFICADORES

Quando escrevemos x + 6 = 9, não podemos classificar tal enunciado aberto como proposição verdadeira (**v**) ou falsa (**f**), ao menos que sejam atribuídos valores à variável x.

Uma situação bem diferente acontece quando afirmamos que:

"*Para todo valor* x, *temos* x+6 = 9".

Esta sentença é uma proposição evidentemente falsa, porém tornou possível classifica-la como proposição falsa. Por outro lado se afirmamos:

"*Existe um valor* x, *tal que* x+6 = 9".

neste caso a sentença é verdadeira.

[14] Sem ânimo; morto

Seja p(x) uma função proposicional definida num conjunto D, e V_p seu conjunto verdade. Quando V_p = D, todos os elementos de D satisfazem a sentença aberta p(x), podemos afirmar:

a) Para todo elemento x de D, temos que p(x) é verdadeira.

b) Qualquer que seja o elemento x de D, temos que p(x) é verdadeira.

Um quantificador universal é uma proposição da forma:

Para todo x, p(x), onde p(x) é uma função proposicional.

No simbolismo da lógica matemática indica-se a palavra "*para todo*" com $\forall$

Exemplo 2.59

1. A proposição: $\forall\ n \in \mathbf{N}$ tal que p(n) : n +8 > 4 é verdadeira; observe que $V_p = \{ 1, 2, 3, , . . . \}$

2. A proposição: $\forall\ n \in \mathbf{N}$ tal que q(n) : n +10 < 14 é falsa; observe que $V_q = \{ 1, 2, 3, ,4 \}$, e não cumpre para todo $n \in \mathbf{N}$. Somente existem alguns valores de $n \in \mathbf{N}$.

Seja p(x) uma função proposicional num conjunto D, e V_p seu conjunto verdade. Quando $V_p \neq D$, alguns os elementos de D satisfazem a sentença aberta (p(x), podemos afirmar:

a) Existem elementos x de D, tais que p(x) é verdadeira.

b) Para algum elemento x de D, temos que p(x) é verdadeira.

Um quantificador existencial, é uma expressão da forma: *Existe x tal que* p(x), onde p(x) é uma função proposicional.

No simbolismo da Lógica matemática indica-se a palavra "*existe*" com $\exists$.

A função proposicional que forma parte de uma quantificação recebe o nome de, *o quantificado* e à frase que precede, o nome de *quantificador*.

Exemplo 2.60

1. A proposição: $\exists\ n \in \mathbf{N}$ tal que p(n) : n +8 > 4 é falsa; observe que $V_p = \{ 1, 2, 3, , . . . \} = \mathbf{N}^+$. Isto é, satisfaz para todos os valores de $\mathbf{N}^+$

2. A proposição: $\exists\ n \in \mathbf{N}$ tal que q(n) : n +10 < 14 é verdadeira; observe que $V_q = \{ 1, 2, 3 \}$, e cumpre o fato de existir elementos $n \in \mathbf{N}$. Não satisfaz para todos os valores de $n \in \mathbf{N}$.

Exemplo 2.61

1. $\forall$ x; $x^2 + 2 \geq 4x$ se lê: Para todo x, tem-se que $x^2 + 2 \geq 4x$
2. $\exists$ x; $x^2 + 2 \geq 4x$ se lê: Existe x tal que $x^2 + 2 \geq 4x$
3. $\forall$ x; $x < 10$ se lê: Para todo x, tem-se que $x < 10$
4. $\exists$ x; $x = 2$ se lê: Existe x, tal que $x = 2$

Exemplo 2.62

Suponhamos temos números naturais: a, b, c, . . .

- $\exists$ $b \in \mathbf{N}$ /. $a = b+b$ exprime a condição acerca de $a \in \mathbf{N}$ como um número par.
- $\forall$ a , $\exists$ b /. $a = b +$ b não diz nada respeito de $a \in \mathbf{N}$. Esta proposição definitivamente é falsa.

Observação 2.4

- Observe que somente p(x) não é uma proposição; somente é uma função proposicional por conseguinte não tem valor de verdade.
- Quando escrevemos $\forall$ p(x) ou $\exists$ p(x) são proposições, portanto tem valor verdade (**v**)
- Algumas vezes o domínio da variável esta implícito, quando não for assim, devemos indicar o domínio no mesmo quantificador.

Na língua portuguesa se dizer:

"*Pedro ama alguém"*, com quantificadores posso escrever: $\exists$ b /. p(x, b).

"*Toda pessoa ama alguém"*, com quantificadores posso escrever: $\forall$ x, $\exists$ y /. p(x, y)

As variáveis x, y, . . . denotam pessoas arbitrarias; a constante **b** denota o individuo Pedro e a proposição p(x, y) significa "x *ama* y".

Exemplo 2.63

$\forall$ $x \in \mathbf{N}+$; $1/x > 0$, sendo $\mathbf{N}^+$ os números naturais positivos.

Se o domínio de x for implícito escreveríamos: $\forall$ x ; $1/x > 0$

Os quantificadores podem escrever-se com funções proposicionais de mais de uma variável.

Exemplo 2.64

Quantificador	Aqui diz:
1. $\forall$ x, $\exists$ y /. p(x, y)	Para todo x, existe y tal que p(x, y)
2. $\forall$ x, $\forall$ y /. q(x, y)	Para todo x, para todo y tal que q(x, y)
3. $\exists$ a, $\exists$ b /. p(a, b)	Existe a, e existe b tal que p(a, b)

4. $\exists$ a, $\forall$ a /. r(a, b) Existe a, para todo b tal que r(a, b)

Exemplo 2.65

Interpretar em palavras o seguinte argumento:

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ /. $\forall$ $x \in D(f)$, $x \neq a$ e $a - \delta < x < a + \delta$ então $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Solução

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo $x \in D(f)$ sendo $x \neq a$, se $a - \delta < x < a + \delta$ então $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Exemplo 2.65

Escrever com quantificadores o seguinte argumento:

Todo homem é mortal
Sócrates é homem

Sócrates é mortal

Solução

Consideremos as proposições: p(x) : x é homem, q(y) : y é mortal; e nossa variável **a** : Sócrates. Logo temos o seguinte diagrama:

$\forall$ x $(p(x) \Rightarrow q(x))$
p(**a**)

---

q (**a**)

2.5.1 Negação de quantificadores.

2.5.1 Negação de quantificadores.

A negação da proposição p : "*Todo estudante se alimenta"* é a proposição ~ p : "ão é verdade que todo estudante se alimenta". Isto é ~ p : "*Existe ao menos um estudante que não se alimenta*", assim denotando com D a todos os estudantes e por p(x) : x se alimenta. Então:

$$\sim (\forall\ x \in D :\ p(x)) \ \Leftrightarrow (\exists\ \ x \in D :\ \sim\ p(x))$$

é verdadeira.

Na negação das proposições que contem quantificadores, são verdadeiras as seguintes equivalência de Morgan.

A_1 $\sim (\forall\ \ x \in D\ /.\ \ p(x)) \ \Leftrightarrow (\exists\ \ x \in D\ /.\ \sim\ p(x))$

A_2 $\sim (\exists\ \ x \in D\ /.\ \ p(x)) \ \Leftrightarrow (\forall\ \ x \in D\ /.\ \sim p(x))$

Exemplo 2.67

a) $\sim (\forall \ \ x \in \mathbf{N} \ /. \ \ x + 1 > 10) \Leftrightarrow (\exists \ \ x \in \mathbf{N} \ /. \ \ x + 1 \leq 10)$

Em palavras: *Não é verdade que, para todo número natural* x, *temos que* x + 1 > 10; isto é logicamente equivalente a: *Existe pelo menos um número* natural x*, tal que* x + 1 ≤ 10

b) $\sim (\exists \ \ x \in \mathbf{R} \ /. \ \ x^2 < 0) \Leftrightarrow (\forall \ \ x \in \mathbf{R} \ /. \ \ x^2 \geq 0)$

Em palavras: *Não é verdade que exista um número real* x, *tal que* $x^2 < 0$; isto é logicamente equivalente a: *Para todo número real x, tem-se que* $x^2 \geq 0$.

As demonstrações deste tipo utilizam a equivalência lógica:

$$\sim(\forall \ \ x \in D \ /. \ \ p(x)) \Leftrightarrow (\exists \ \ x \in D \ /. \ \ \sim p(x))$$

isto é, para demonstrar que não é verdade que se cumpra p(x) para todo x ∈ D, é suficiente mostrar que existe pelo menos um x ∈ **N** D tal que não se cumpra p(x).

Exemplo 2.68

Demonstrar que: ``É falso que, para todo natural n, tenhamos n+1 = 5''.

Demonstração.

A demonstração será direta por contradição.

É suficiente achar um número natural n tal que não cumpra n+1 = 5.

Por exemplo considerar n = 6 ∈ **N**; logo 6 + 1 = 5 absurdo!

Portanto, é falso que, para todo natural n, tenhamos n+1 = 5.

Observação 2.5

Observe que o problema de determinar o valor de verdade de uma quantificação, podem-se apresentar os seguintes casos:

1. Demonstrar que: ∀ x /. p(x) é falsa, isto é [∀ x /. p(x)], é o caso do Exemplo (2.62).
2. Demonstrar que: ∀ x: /. p(x) é verdade. Neste caso a demonstração deve compreender a verdade de p(x) para todos os valores do domínio de x.
3. Demonstrar que: ∃ x /. p(x) é verdade. Nesta caso, basta achar um exemplo
4. Demonstrar que: ∃ x /. p(x) é falsa, isto é ~ [∃ x /. p(x)]. Aqui temos a mostrar que p(x) não se compre para nenhum elemento do domínio de x.

Exemplo 2.69

Dado o domínio D = { 1, 2, 3 }, determine o valor verdade para os seguintes enunciados:

1. $\forall$ a, $\exists$ b /. $a^2+b^2 < 12$ **2.** $\exists$ a, $\exists$ b $\forall$ c /. $a^2+b^2 < c^2$.

Solução (**1**)

O enunciado é verdadeiro, observe que para todo $a_0 \in$ D tem-se existe b = 1, de modo que $a_0^2 + 1^2 < 12$.

Solução **(2)**

O enunciado é falso, observe que se c_0 = 1, então $a^2+b^2 < c_0^2$ não tem solução em D.

2.5.2 Ambigüidades

Existem casos em que dado uma proposição, esta tenha uma interpretação ambígua, cabendo primeiro a nos resolver as ambigüidades para logo passarmos a resolver sua formalização.

Observe o enunciado: "*Todo motorista tem um santo padroeiro*"

Podemos escrever na forma: $\forall$ x $(p(x) \Rightarrow \exists \; y \; q(y, x))$ o também podemos escrever na forma: $\exists$ y, $\forall$ x $(p(x) \Rightarrow q(y, x))$.

Estas duas formalizações são equivalentes. Note que o artigo indefinido "*um*" é utilizado como significando o mesmo que "*um qualquer"*, isto é como se for um quantificador universal.

Exemplo 2.70

No enunciado: "*Os diâmetros de uma circunferência cortam-se num ponto*".

Aqui estão implícitos três quantificadores; temos a entender este enunciado na forma: "*para toda circunferência existe um ponto no qual todos os diâmetros se cortam"*.

Pequeno dicionário de heurística

Problema de determinação: Tem como objetivo encontrar um certo objeto, a incógnita do problema.

Problema de determinação: Tem como objetivo mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira, ou, então, que é falsa.

Raciocínio heurístico: é aquele que não se considera final e rigoroso, mais apenas provisório e plaussível, e que tem por objetivo descobrir a solução do problema que se apresenta.

Exercícios 2-2

1. Seja A = { 1, 2, 3, 4, 5 }, determine o valor lógico de cada uma das seguintes funções proposicionais:

   1. $\forall\ a \in A,\ |a| = a$ **2.** $\forall\ a \in A,\ a^2 = a$

   3. $\forall\ a \in A,\ a + 2 \geq a$ **4.** $\exists\ a \in A,\ |a| = a$

   5. $\exists\ a \in A,\ a^2 = a$ **6.** $\exists\ a \in A,\ a + 2 \geq a$

2. Determine a negação das proposições do exercício anterior.

3. Seja **R** o conjunto dos números reais, determine o valor lógico da cada uma das seguintes funções proposicionais:

   1. $\forall\ a \in \mathbf{R},\ |a| = a$ **2.** $\forall\ a \in \mathbf{R},\ a^2 = a$

   3. $\forall\ a \in \mathbf{R},\ a + 2 \geq a$ **4.** $\exists\ a \in \mathbf{R},\ |a| = a$

   5. $\exists\ a \in \mathbf{R},\ a^2 = a$ **6.** $\exists\ a \in \mathbf{R},\ a + 2 \geq a$

4. Determine a negação das proposições do exercício anterior.

5. Sendo A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } determine um *contra-exemplo* para cada uma das seguintes proposições:

   1. $\forall\ a \in A,\ a + 4 < 11$ **2.** $\forall\ a \in A$, *a é primo*

   3. $\forall\ a \in A,\ a^2 \geq 1$ **4.** $\exists\ a \in A$, *a é par*

   5. $\exists\ a \in A,\ 1^a = 1$ **6.** $\exists\ a \in A,\ a \mid 32$

6. Expressar em palavras a seguinte simbologia:

   1. $\exists\ x$ /. $x+7 = 5$

   2. $\forall\ x,\ \exists\ y$ /. $X = y = 9$

   3. $\forall\ a,\ \forall\ b$ /. $a^2+b^2+c^2=16$

   4. $\forall\ n \in \mathbf{N}$ /. $n + 2 > n$

7. Escreva em símbolos, usando quantificadores:

   1. Todo número inteiro é par ou ímpar.

   2. Existem números inteiros que são pares ou ímpares.

   3. Todo número inteiro elevado ao quadrado dá sempre um resultado não negativo.

8. Escreva a negação de cada uma das proposições:

   1. Todo peruano é baixinho.

   2. Existem gatos que não têm rabo.

   3. Todos meus alunos são inteligentes.

   4. Todos os jornalistas são mentirosos.

9. Analisar os seguintes enunciados, logo:

(a) Determine quais são proposições.

(b) Quais são funções proposicionais.

(c) Determine o valor verdade das proposições.

1. $x + 5 = 9$ **2.** $\forall\ x \in \mathbf{N}$ /. $x+5=9$

3. $\exists\ x \in \mathbf{N}$ /. $x+2>x$ **4.** $\forall\ x \in \mathbf{N}$ /. $x+2 \geq x$

5. $\forall\ x \in \mathbf{N}$ /. $x+2>x$ **6.** $x + y \geq z$

7. $\exists\ x \in \mathbf{N}$, $\forall\ y \in \mathbf{N}$ /. $x\,y = y$

10. Negar as proposições do exercício anterior.

11. Determine o valor de verdade para cada uma das seguintes proposições se $x \in \mathbf{Z}$:

1. $\exists\ x : x^2=x$ **2.** $\forall\ x : x-7<x$ **3.** $\exists\ x : x+5 = 5$

4. $\forall\ x : x+8 \leq x$ **5.** $\forall\ x : x^2 \geq x$ **6.** $\forall\ x : x+1 = x$

12. Aplicando leis de Morgan para negação de quantificadores, determine proposições equivalentes às seguintes:

1. $\sim(\forall\ x$ /. $x+5=9)$ **2.** $\sim(\exists\ x$ /. $x-5> x)$

3. $\exists\ x$ /. $\sim(x+5 \neq x)$ **4.** $\forall\ x$ /. $\sim(x+10 < x)$

5. $\forall\ x$ /. x^2-2x-1 = 0 **6.** $\exists\ x$ /. $x - 7 = 0$

7. $\forall\ x$ /. $x+7> x+3$ **8.** $\exists\ x$ /. $x \leq 7$

13. Se, a coleção de números 1, 2, 3 , 4 , 5 é representada por D, demonstrar mediante contra-exemplos a falsidade das seguintes proposições:

1. $\forall\ x \in D$ /. $x+3 < 6$ **2.** $\forall\ x \in D$ /. $2x = 8$

3. $\sim(\exists\ x \in D$ /. $x^2 < 20)$ **4.** $\forall\ x \in D$ /. $\sim(x+10> x)$

14. Se $p(x) : 5x+1 > 10$, e temos $x=2y$, obter uma função proposicional $p(y)$ equivalente a $p(x)$.

15. Determine premissas e a conclusão para cada um dos seguintes argumentos:

1. $a + c = b + c$ se, e somente se, $a = b$.

2. Se $a.c = b.c$ e $c \neq 0$, então $a = b$.

3. $a.b = 0$ se, e somente se, $a = 0$ ou $b = 0$.

4. $a^2 = b^2$ se, e somente se, $a = b$ ou $a = -b$.

5. $a^2 + b^2 = 0$ se, e somente se, $a = 0$ e $b = 0$.

6. $a \geq 0$ e $b \geq 0$; $a \leq b$ se e somente se $a^2 \leq b^2$.

7. $ab \leq 0$ se, e somente se, $(a \geq 0$ e $b \leq 0)$ ou $(a \leq 0$ e $b \geq 0)$

8. Se $a^2 \leq b$, então $-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$

9. $a^2 \geq b$, então $a \geq \sqrt{b}$ ou $a \leq -\sqrt{b}$

10. $a > 0$ e $ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \forall \quad x \in \mathbf{R}$ se, e somente se, $b^2 \leq 4ac$.

11. Se $b > 0$ e $|a| = b$, então $a = b$ ou $a = -b$.

12. $|x| < b$ se, e somente se, $-b < x < b$.

13. Se o conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ sendo $A \neq \Phi$ e A limitado inferiormente, então o conjunto A possui ínfimo.

14. Dados os números inteiros a e b, existe um divisor comum da forma $d = ax + by$ para algum $x, \ y \in \mathbf{Z}$; e, todo divisor comum de a e b divide este d.

15. Se P(n) é uma proposição enunciada em termos de n, para $n \in \mathbf{N}$ tal que:

    1º P(1) é verdadeiro

    2º P(h) é verdadeiro para h > 1, implica.

    P(h+1) é verdadeiro.

    Então P(n) é verdadeiro $\forall \ n \in \mathbf{N}$.

16. Para qualquer par de números $r, \ s \in \mathbf{Q}$ tem-se :

    a) $a^r.a^s = a^{r+s}$ **b)** $(a^r)^s = a^{rs}$ **c)** $(ab)^r = a^r.b^r$

    d) $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r} \quad b \neq 0$ **e)** $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

17. Se $0 < a < 1$, então : a^x tende para $+\infty$ quando x tende para $-\infty$, e a^x tende para $-\infty$ quando x tende para $+\infty$.

18. Se T(cos t, sen t) é um ponto da circunferência unitária, então temos a relação fundamental: $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$.

19. $B(a, \ \delta) = \{ \ x \in \mathbf{R} \ /. \ |x - a| < \delta \ \}$

20. A intersecção de duas vizinhanças de a, é uma vizinhança de a.

21. Para que x = a seja ponto de acumulação do conjunto A, é necessário e suficiente que toda vizinhança B(a, r) contenha infinitos pontos de A.

22. Todo conjunto finito de pontos, não tem pontos de acumulação.

23. Seja $x \in \mathbf{R}$ e $x \geq 0$, se $x < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, então $x = 0$.

24. Quando $|x| < \varepsilon, \ \forall \ \varepsilon > 0 \ \Rightarrow \ x = 0$.

25. Quando exista o limite de uma aplicação, este limite é único.

16. Simbolize, no nível proposicional, os seguintes argumentos:

    1. Se não existe ouro no Perú, ou os peritos estão certos ou então o governo mente. Existe ouro no Perú ou os peritos estão errados. Portanto, o governo não mente.

    2. Os salários aumentam somente se há inflação. Se há inflação, então custo de vida aumenta. Os salários não aumentam. Portanto, o custo de vida aumenta.

    3. Se 2 é primo, é então o menor primo. Se 2 é o menor primo, estão 1 não é primo. O número 1 não é primo. Portanto 2 é primo.

17. Quais dos argumentos do exemplo anterior são verdadeiros e quais são falsos?

18. Considerando a interpretação:

Domínio: Conjunto de números naturais, $p(x)$: x é par; $q(x)$: x é primo, $r(x)$: x é ímpar, $s(x, y)$: y múltiplo de x, traduzir as seguintes proposições determinando quais são verdadeiras e quais são falsas.

1. $\forall x \ (s(2, x) \Rightarrow p(x))$;
2. $\exists x \ (p(x) \land s(x, 3))$;
3. $\exists x \ (r(x) \land s(0, x))$;
4. $\forall x \ (\sim p(x) \Rightarrow \ \sim s(2, x))$;
5. $\forall x \ (p(x) \Rightarrow \forall y \ (s(x, y) \Rightarrow p(y))$;
6. $\forall x \ (q(x) \Rightarrow \exists y \ (p(y) \land s(x, y)))$;
7. $\forall x \ (r(x) \Rightarrow \forall y \ (q(y) \Rightarrow \sim s(x, y)))$;

Miscelânea 2-1

1. Determine a negação para cada um dos seguintes enunciados:

   1. $\forall$ x /. $x+7 \neq 5$

   2. $\exists$ x, $\forall$ y /. $x \neq y \neq 9$

   3. $\exists$ a, $\exists$ b /. $a^2+b^2+c^2 \neq 16$

   4. $\exists$ $n \in$ **N** /. $n + 2 \leq n$

   5. $\forall$ x /. $x < 2$ então $6 < x$

   6. $\exists$ x, $\forall$ y /. $x \neq y \Leftrightarrow y \neq x-3$.

2. Dado o domínio **I** (números irracionais), determine o valor verdade para os seguintes enunciados:

   1. $\sim (\forall\ a \in \mathbf{I},\ \exists\ b \in \mathbf{I}\ /.\ a^2+b^2 > 12\ )$.

   2. $\sim (\ \exists\ a \in \mathbf{I}, \exists\ b \in \mathbf{I}\ \ \forall\ c \in \mathbf{I}\ /. a^2+b^2 < c^2\ )$.

3. Demonstre que, se p e p $\Rightarrow$ q são proposições verdadeiras, então q também é proposição verdadeira. Sugestão: Supor que q não seja verdadeira.

4. Simbolize, no nível proposicional, os seguintes argumentos:

   1. Karyn ou é boa aluna ou é boa violinista. Karyn é boa violinista. Portanto Karyn não é boa aluna.

   2. Só pago aos credores se ganhar a supersena. Os credores não ficam satisfeitos exceto se eu lhes pagar.

   Portanto, ganho a supersena ou os credores não ficam satisfeitos.

5. Quais dos argumentos do exemplo anterior são verdadeiros e quais são falsos?

6. Determine premissas e conclusão para cada um dos seguintes argumentos.

   1. As diagonais de um paralelogramo dividem-se mutuamente ao meio.

   2. Enunciar a recíproca do Exercício anterior.

   3. As diagonais de um losango cortam-se mutuamente ao meio e sob ângulo reto.

   4. O segmento retilíneo que une os pontos médios de dois lados quaisquer de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual á metade de seu comprimento.

   5. O ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo é eqüidistante dos três vértices.

   6. Os ângulos opostos aos lados iguais de um triângulo isósceles são iguais.

   7. Enunciar a recíproca do Exercício anterior.

   8. Se as diagonais de um paralelogramo são iguais, a figura é um retângulo.

   9. As medianas relativas aos lados iguais de um triângulo isósceles são iguais.

10, Enunciar a recíproca do Exercício anterior.

11. Os dois segmentos retilíneos formados pela união de um par de vértices opostos de um paralelogramo aos pontos médios dos lados opostos são iguais em comprimento e paralelos.

12. O segmento retilíneo determinado pelos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e igual á semi-soma de seus comprimentos.

13. O segmento retilíneo que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é de comprimento igual á semi-diferença dos comprimentos dos lados paralelos.

14. A soma dos quadrados dos comprimentos dos lados de qualquer paralelogramo é igual á soma dos quadrados dos cumprimentos de suas diagonais.

15. Os segmentos retilíneos que unem os pontos médios de lados opostos de qualquer quadrilátero cortam-se mutuamente ao meio.

16. Os segmentos retilíneos que unem os pontos médios dos lados sucessivos de um retângulo formam um losango.

17. Os segmentos retilíneos que unem os pontos médios dos lados sucessivos de um losango formam um retângulo.

18. Os ângulos das bases de um trapézio isósceles são iguais.

19. Os pontos médios de dois lados opostos de qualquer quadrilátero e os pontos médios das diagonais são os vértices de um paralelogramo.

20. Enunciar a recíproca do Teorema de Pitágoras.

21. O segmento retilíneo que une os pontos médios de dois lados opostos de qualquer quadrilátero e o segmento retilíneo que une os pontos médios das diagonais do quadrilátero cortam-se mutuamente ao meio.

22.O segmento retilíneo que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio cortam ao meio cada uma de suas diagonais.

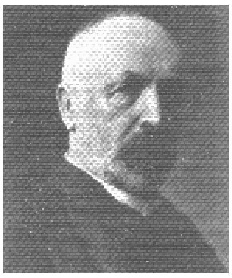
23. A soma dos quadrados das distâncias de qualquer ponto do plano a dois vértices opostos de qualquer retângulo é igual á soma dos quadrados de suas distâncias aos outros dois vértices.

24. Enunciar a recíproca do Exercício anterior.

25. Sejam O, A, B e C os vértices sucessivos de um paralelogramo e sejam D e E os pontos médios dos lados $\overline{AO}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Então os segmentos retilíneos $\overline{DB}$ e $\overline{OB}$ trissectam a diagonal $\overline{AC}$.

Capítulo III

CONJUNTOS



G. Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor nasceu na cidade de St. Petersburgo o 03 de março de 1845 e faleceu no hospital de doenças mentais de Halle em 1918. Passou a maior parte de sua vida na Alemanha. Seus pais eram cristãos de ascendência judia, e Georg logo se interessou pelos conceitos de continuidade e infinito da Teologia medieval.

Estudou em Zurich, Göttingen e Berlim, concentrando-se em Filosofia, Física e Matemática, possuindo grande imaginação, em 1867 obteve o grau de doutor em Berlim, com uma tese sobre Teoria dos Números.

Muito atraído pela Análise, sua preocupação estava voltada para a idéia do ``infinito'', que até 1872 foi muito discutida tanto em Teologia como em Matemática, mas sem se chegar a uma conclusão precisa.

Em 1874, Cantor publicou no Journal de Crelle o mais revolucionário artigo que até mesmo seus editores hesitaram em aceitar. Havia reconhecido a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos e, ao contrário de Dedekind (1831-1916), percebeu que nem todos eram iguais, passando a construir uma hierarquia destes conjuntos conforme suas potências.

Mostrou que o conjunto dos quadrados perfeitos tem a mesma potência que o dos inteiros positivos pois, podem ser postos em correspondência biunívoca; provou que o conjunto de todas as frações é contável (enumerável) e que a potência ,do conjunto dos pontos de um segmento de reta unitário é igual à potência do conjunto dos pontos de um quadrado de lado unitário.

Alguns destes resultados eram tão paradoxais que o próprio Cantor, certa vez escrevendo a Dedekind, disse: "*Eu vejo isso, mas não acredito*", e pediu ao seu amigo que verificasse a demonstração. Seus incríveis resultados levaram ao estabelecimento da Teoria dos Conjuntos como uma disciplina matemática completamente desenvolvida, de profundos efeitos no ensino.

Os matemáticos da época duvidavam da teoria da infinidade completa de Cantor, mas este, juntando as provas, construiu toda uma aritmética transfinita.

Cantor passou a maior parte de sua carreira na Universidade de Halle, de pouca importância, nunca conseguindo realizar uma de suas grandes aspirações que era a de ser professor na Universidade de Berlim, devido à perseguição de Kronecker (1823-1891).

O reconhecimento de suas realizações mereceram a exclamação de Hilbert (1862-1943):

"Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós".

3.1 ESTUDO AXIOMÁTICO DA TEORIA DE CONJUNTOS

Uma definição matemática é uma convenção que consiste usar um nome, ou uma sentença breve, para designar um objeto ou uma propriedade cuja descrição normalmente exigiria o emprego de uma sentença mais longa; os padrões atuais são: de precisão e objetividade.

Axioma é um princípio básico que é assumido como regra de jogo no processo de inferência lógica, sem demonstração previa.

Na antiga Grécia é onde começo o uso de axiomas, enunciados ou afirmações, sempre condicionados pela sua aparência auto-evidente.

Exemplo 3.1

- "Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa simultaneamente".
- "O todo é maior que qualquer de suas partes".

A base da construção de qualquer disciplina matemática é o método axiomático, isto é; o estabelecimento de um conjunto de regras de raciocínio, de enunciados e axiomas (ou postulados) a partir dos quais, e por regras de inferência do sistema derivam-se outros enunciados ou proposições chamados teoremas.

Assim, em geral quando estudamos matemática, freqüentemente encontramos a seguinte terminologia: método axiomático; teorema; corolário; lema.

Método axiomático: Consiste em uma lista de conceitos primitivos, enunciados, axiomas ou postulados de uma teoria matemática todas as demais noções devem ser definidas e as afirmações seguintes devem ser demonstradas.

Teoremas: São proposições a serem demonstradas.

Corolários: São conseqüências imediatas dos teoremas.

Lema: É uma proposição auxiliar usada na demonstração de um teorema.

Um axioma é pois, um princípio que permite iniciar um processo lógico de dedução considerando-o como partida dos passos do raciocínio.

A coleção inicial de sinais, definições, enunciados, axiomas (ou postulados) e regras de derivação[15] desde tais axiomas é o "*sistema axiomático*" da disciplina que se construa. Este grupo inicial de axiomas ou regras não pode ser qualquer dos enunciados, toda vez que devem cumprir certos requisitos necessários para o desenvolvimento lógico.

Com efeito, estas regras devem ter efeito indecidível, consistente e não contraditório, isto é, a partir de elas podem-se derivar qualquer enunciado da disciplina para o qual serve como fundamento. Justifica-se:

[15] Derivação no sentido de derivar: Desviar do seu curso; mudar a direção de; dirigir para outro ponto.

Indecidível: Nenhum axioma do "*sistema"* pode ser obtido como um teorema partindo dos outros axiomas.

Consistente internamente: Não poderemos ter como teorema do "*sistema*", alguma contradição de um axioma.

Não contraditório: O afirmado por um axioma não contradiz o afirmado por qualquer dos restantes axiomas do sistema

Assim, pode-se observar que os teoremas desenvolvem-se apoiados fundamentalmente nos axiomas e definições.

Logo, no desenvolvimento de um "*sistema axiomático"* de uma teoria matemática, tem-se:

1. Termos não definidos.
2. Relações não definidas.
3. Axiomas que relacionam os termos não definidos e as relações não definidas.

Termos não definidos, são princípios ou regras que disciplinem sua utilização e estabeleçam suas propriedades, estes princípios são chamados *axiomas* ou *postulados* e, são proposições que não se demonstram; se aceitam.

Exemplo 3.2

No desenvolvimento axiomático da geometria plana:

- "Pontos" e "retas" são termos não definidos.
- "Ponto em uma reta" ou, o que é equivalente "reta que contem um ponto" é uma relação não definida.
- Dois dos axiomas são:

Axioma 1. Dois pontos distintos estão sobre uma mesma reta.

Axioma 2. Duas retas distintas não podem ter mais de um ponto em comum.

Exemplo 3.3

No desenvolvimento axiomático da teoria de conjuntos:

- "Elemento" e "conjunto" são termos não definidos.
- "Pertinência de um elemento a um conjunto" é uma relação não definida.
- Dois dos axiomas são:

Axioma 1. Dois conjuntos A e B que tem os mesmos elementos, representam o mesmo conjunto.

Axioma 2. Sejam p(x) uma proposição para x, e A um conjunto então existe um conjunto:

$$B = \{ a /. \quad a \in A, \quad p(a) \text{ } \textit{é verdadeira} \}$$

A teoria de conjuntos foi criada em uma situação semi-intuitiva, sua formalização como uma teoria axiomática resultou extremamente difícil, não obstante o simples e pouco problemática que aparentava a noção de conjunto. Seus primeiros desenvolvimentos fizeram aparecer os famosos paradoxos: de Burali-Forte, de Cantor, de Russell; as discussões respeito do axioma de escolha e a hipótese do continuo.

Em toda axiomatização da teoria de conjuntos, é necessário pelo menos, um axioma ou regra que permita discernir sob que condições vários conjuntos representam o mesmo conjunto, isto é, algo que permita nos estender, fazer uma extensão, do conceito de conjunto. Também precisamos de outro axioma que nos permita definir tipos de conjuntos; isto é, outro axioma que poderíamos chamar de "*axioma formador de conjuntos*".

A primeira axiomatização apareceu em 1908, com os sete axiomas de Zermelo (1871 --1953).

1. Axioma de extensão.

2. Axioma de especificação.

3. Axioma do par não ordenado.

4. Axioma das potências.

5. Axioma das uniões.

6. Axioma de escolha.

7. Axioma de infinitude.

A existência de alguns conjuntos não ficava garantida com estes sete axiomas proposto por Zermelo, isto acontecia quando apareceram conceitos de "*relações entre conjuntos*", devido a esta situação Fraenkel (1891--1965) em 1922 propus adicionar um oitavo axioma:

8. Axioma de substituição.

Resultando conhecido como o "*sistema axiomático*" de Zermelo -- Fraenkel (sistema **Z--F**).

Ainda assim com estes 8 axiomas o sistema era incompleto, pois isto acontecia quando comparava-se conjuntos de infinitos elementos como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 3.4 Paradoxo de Galileu.

Esse paradoxo afirma que há tantos números quadrados perfeitos quanto há números naturais e vice-versa. Isso é mostrado com a correspondência:

Ao número	1	2	3	4	5	6	. . .
Corresponde	1	4	9	16	25	36	. . .

No entanto, como é possível que isso aconteça se nem todo número é um quadrado?

Este paradoxo é explicado pela observação de que o fenômeno descrito é uma característica que distingue os conjuntos infinitos. Um conjunto infinito é simplesmente um conjunto que pode ser posto em correspondência um a um com um subconjunto próprio dele mesmo.

Von Neumann (1903-1957) em 1925 apresentou um sistema axiomático que representava um avanço sobre o sistema **Z--F**, pois admitia as classes universais (de todos os conjuntos: os ordinais, os cardinais, etc), no estudados no sistema **Z--F.**

O conceito primário utilizado por Von Neumann foi o de "*aplicação"* (função) e não o de conjunto ou classe. A ``tradução'' do sistema formulado por Von Neumann de modo que o conceito primário seja o de classe e elemento de classe, e não o de ``aplicação'', deve-se a Bernays (1898-1977).

Os trabalhos de Bernays deram o rigor à axiomatização da teoria de conjuntos, graças as contribuições de Gödel (1906-1978) e de Quine (1908-2000).

A intenção destas notas é estudar o sistema axiomático **N-B-G-Q** (Neumann-Bernays-Gödel- Quine). Expondo um sistema de 10 axiomas, estudando propriedades das classes e conjuntos que evidenciem a necessidade de formula-os.

9. Axioma de regularidade.

10. Axioma do conjunto vazio.

3.1.1 Conceitos primitivos.

Conceitos primitivos, são ações "*in natura*" que permitem formular uma idéia por meio de palavras e/ou caracterização. As seguintes noções são admitidas como conceitos primitivos, e portanto não serão definidas.

- Classe[16].
- Elemento de uma classe.
- A relação de pertinência.
- A relação de igualdade.

Chamaremos "*conjunto"* as classes que são elementos de outras classes, e chamaremos "*classes últimas"* (conjunto universal) as classes que não são elementos de outras classes.

Os conjuntos em geral são representados por letras maiúsculas do alfabeto: A, B, C, D, E, . . . ; e seus elementos pelas letras minúsculas: a, b, c, d, e, ...

Símbolos

- Variáveis: a, b, c,. . . , são letras minúsculas de nosso alfabeto.
- Relações binárias: $=$ `` . . . é igual a . . .''; $\in$ `` . . . é elemento de . . .'' ou `` . . . pertence a . . . '', $\subseteq$ `` . . . está contido a . . . '' ou `` . . . é igual a . . . ''

[16] Classe no sentido de agrupamento de objetos que têm uma ou mais características em comum

- Conectivos: $\sim$ "negação"; $\wedge$ "e"; $\vee$ "ou"; $\Rightarrow$ "se. . . então, . ." ou " , , implica que, . . . "; $\Leftrightarrow$ ". . . se e somente se, . . . "
- Quantificadores: $\forall$ "para todo . . . "; $\exists$ "existe ao menos um . . ." ou "para algum . . "; $\exists!$ "existe um único . . "'
- Descritores: ! "o . . . tal que. . ."

Para indicar que um elemento a faz parte de um conjunto A, usaremos a notação $a \in A$ e dizemos "a *é um elemento do conjunto* A" ou "a *pertence a* A". Se "*a não é elemento do conjunto* A", denotamos $a \notin A$. Observe que $a \in A$ e $a \notin A$ são proposições recíprocas.

Se dois símbolos a e b representam o mesmo elemento, escreveremos a = b e dizemos "a *é igual a* b". A negação da igualdade a = b denotamos $a \neq b$ e dizemos que "a é *diferente de* b"; isto é, os símbolos a e b não representam o mesmo elemento.

Denotamos a classe de um objeto x por C(x); logo dizer que $y \in C(x)$, significa que y tem todas as características comuns com x.

Admitiremos que a relação de igualdade entre elementos, é de equivalência isto é; satisfaz as propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva. Logo quaisquer que sejam os símbolos a, b e c, temos:

- a = a . . . (reflexiva)
- a = b, então b = a . . . (simétrica)
- a = b e b = c então a = c . . . (transitiva)

Equivalências ($\equiv$).

São equivalentes as seguintes expressões de negação:

- $a \neq b \equiv \sim (a = b)$
- $a \notin b \equiv \sim (a \in b)$

Variáveis dependentes e variáveis independentes.

Em uma sentença matemática, as variáveis que seguem a os quantificadores e ao descritor são as chamadas "*variáveis dependentes*", e as outras variáveis são chamadas "*variáveis independentes"*.

Fórmulas.

Uma fórmula p(x) é geralmente uma proposição composta que depende da variável x. Aqui x é a variável independente.

O conceito de "*conjunto*" é fundamental em todos os ramos da matemática, nosso estudo axiomático será sob um ponto de vista intuitivo.

Tem-se que um conjunto é uma classe, bem definido de elementos, sendo que este podem ser números, pessoas, rios, etc.

Exemplo 3.5

1. Os números 1, 2, 3, 8, 10.

2. A solução da equação $x^2+6x-5=0$

3. As vogais do alfabeto Português.

4. As pessoas que habitam Pato Branco.

5. Estudantes Pedro, Maria e Fredy.

6. Os rios de Pato Branco.

7. Os números 3, 6, 9, 12, 15.

8. Alunos de *Cálculo* I.

Note que os conjuntos (1), (3), (5), (7) estão bem definidos, entanto os conjuntos (2), (4), (6), (8) estão definidos enunciando características do seus elementos.

Da mesma maneira, a idéia de "*elemento*" corresponde à de membro, componente, etc.

O conceito *conjunto*, está regido pelas seguintes regras:

1. Um conjunto está bem definido se possuí um critério que permita afirmar se um objeto pertence ou não ao conjunto.
2. Nenhum objeto poderá ser, ao mesmo tempo, conjunto e elemento de se mesmo; isto é não deve dar-se o caso $a \in a$.

Exemplo 3.6

O conjunto dos alunos mais elegantes do Curso de Agronomia da UTFPR, não é um conjunto no sentido matemático; "*ser mais elegante*" não constitui um critério que permite afirmar se uma determinada pessoa é ou não elemento do conjunto, a escolha estará sempre sujeita aos gostos e preferências.

Exemplo 3.7

O conjunto de todos os conjuntos não está bem definido em nossa teoria. Se supormos que ele exista, seria um elemento de se mesmo e assim estaria transgredindo a segunda regra.

Observação 3.1

Um símbolo pode estar representando um elemento determinado (específico) ou um elemento qualquer (genérico) de um conjunto. A diferença entre um e outro poderá obter-se do mesmo texto.

Assim, por exemplo, se A representa o conjunto das vogais, a expressão:

"*Seja a um elemento do conjunto* A"

não está afirmando que a letra a seja uma vogal, somente o símbolo a está representando no enunciado a qualquer das vogais; neste caso a é um elemento genérico (chama-se também variável) do conjunto.

Por outro lado, a expressão a $\in$ A dá a entender que o símbolo a está representando um elemento específico do conjunto A, em particular a letra a.

Observação 3.2

Podemos escrever os elementos de um conjunto de duas maneiras:

a) **Por extensão**: quando escrevemos cada um de seus elementos separados por vírgulas e colocando-os entre chaves; assim, se A é o conjunto de números naturais pares compreendidos entre 2 e 10, temos: A= { 4, 6, 8}. Esta escrita também é chamada de *forma tabular* ou *enumeração*.

b) **Por compreensão**: quando escrevemos as propriedades que devem ter todos seus elementos, colocando-os entre chaves ; assim se B é o conjunto de números naturais pares. Escrevemos B = { x $\in$ **N** /. x é par}. Esta escrita também é chamada de *forma construtiva* ou *caracterização*.

O símbolo / .se lê *tais que*. Outro modo de representar conjuntos é com letras maiúsculas e sub-índice, A_1, A_2, . . . , A_n sendo n $\in$ **N.**.

Exemplo 3.8

Os conjuntos do Ejemplo (3.5), podemos denotar como segue:

1. A_1 = { 1, 2, 3, 8, 10 }.

2. A_2 = { x /. $x^2+6x-5=0$ }

3. A_3 = { x /. x é vogal do alfabeto Português }.

4. A_4 = { x /. x pessoa que habita Pato Branco }.

5. A_5 = { Estudantes Pedro, Maria e Fredy }.

6. A_6 = { x /. x é rio de Pato Branco }.

7. A_7 = { 3, 6, 9, 12, 15 }.

8. A_8 = { Alunos de *Cálculo* I }.

Conjuntos numéricos.

No que segue indicaremos a notação a utilizar para a designação de alguns conjuntos numéricos.

N = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . . , n } . . . naturais.

Z = { $-\infty$ . . . , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, . . . $+\infty$ } . . . inteiros.

Q = { $\dfrac{a}{b}$ /. a, b $\in$ **Z**, $b \neq 0$ } . . . racionais.

Q = { $-\infty$ . . . , -2, . . . $-\dfrac{3}{2}$, . . . , -1, 0, 1, $\dfrac{5}{2}$, 3, $\dfrac{11}{4}$, . . . $+\infty$ }

I = {$\pm\sqrt{2}$, $\pm\pi$, $\pm e$, $\pm\sqrt[3]{7}$, $\sqrt{5}$, . . . , } . . . irracionais.

O conjunto de números reais denotamos **R**, é aquele que tem como elementos todos os números racionais **Q** assim como todos os números irracionais **I**.

$\mathbf{C}$ = { a+bi; a, b $\in$ **R** onde i = $\sqrt{-1}$ } . . . complexos

$\mathbf{C}$ = { 1+2i, 3+2i, 5-4i, -1-i, i, 2, 8i, 7, . . . } . . . complexos

Observação 3.3

É importante mencionar que o número zero é considerado número natural, segundo as circunstâncias ou o tema em estudo a ser tratado.

3.1.2 Axioma de extensão.

A idéia de igualdade de dois conjuntos traduz a idéia intuitiva que um conjunto é completamente determinado pelos seus elementos.

O seguinte axioma estabelece uma simples condição para que duas classes sejam a mesma classe

Axioma 3.1 De Extensão (1º. axioma de Zermelo).

Dois conjuntos A, B, que têm os mesmos elementos, representam o mesmo conjunto.

Em notação simbólica:

$$\forall \; A, B; \quad (\forall \; a \,/. \quad a \in A \quad \Leftrightarrow \quad a \in B) \Rightarrow \quad A = B$$

Este axioma assegura que o símbolo lógico = para a igualdade de objetos desta teoria coincide com a intuição de que dois conjuntos são iguais se eles tem os mesmos elementos.

Isto é, todo elemento do conjunto A pertence ao conjunto B, e todo elemento de B pertence ao conjunto A. Denotamos a igualdade entre os conjuntos A e B como A= B.

Exemplo 3.9

Temos a seguinte igualdade entre conjuntos:

a) Sejam A = { 1, 3, 5, 7 } e B = { 7, 5, 3, 1 }, então A= B, isto é { 1, 3, 5, 7 } = { 7, 5, 3, 1 }.

b) Sejam M = { 2, 4, 2, 6 } e N = { 4, 2, 2, 6 }, então M = N, isto é { 2, 4, 6 } = { 4, 2, 6 }.

c) E = { x $\in$ **R** /. x^2-3x+2=0 }, F = { 2, 1 }, e G = { 1, 2, 2, 1 }. Aqui resulta E = F = G

Ejemplo 3.10

- Seja A o conjunto de números naturais que são múltiplos de 10 e B o conjunto de números naturais que terminam em zero. Logo A = B.
- Seja B o conjunto de todos os números reais que não são racionais nem irracionais e M o conjunto de todos os números que não são complexos. Aqui B = M.
- Seja L o conjunto de todas as retas do plano que passam por um ponto β. S o plano que contém L e β; logo S = L.

3.1.3 Axioma de especificação.

Este axioma garante que, para cada proposição p(x) existe ao menos uma classe formada por todos os conjuntos que satisfazem esta propriedade p(x).

Axioma 3.2 De especificação (2º. axioma de Zermelo)

Para todo conjunto A e toda proposição p(x), corresponde um conjunto B cujos elementos são exatamente os elementos de A para os quais p(x) é verdadeira.

Em símbolos podemos escrever:

$$\forall\ A,\ \exists\ B\ \ /.\ \ B = \{\ x\ /.\ \ x \in A \wedge p(x)\ \}\ \text{ aqui B depende também de} \}\ p(x)$$

Este axioma expressa que se p(x) é uma proposição na linguagem da teoria de conjuntos sendo a variável x livre e A um conjunto, então a classe (coleção) $\{ x\ /.\ x \in A \wedge p(x) \}$ é um conjunto. Este axioma obriga que os conjuntos estejam formados por elementos de conjuntos já constituídos.

Mostra-se a seguir, que existe exatamente um único conjunto que satisfaz o Axioma (3.2).

Propriedade 3.1

O conjunto B do Axioma (3.2) é único.

Demonstração.

Isto é, temos a mostrar que:

$$\exists\ B\ \ /.\ \ B = \{\ x\ /.\ \ x \in A \wedge p(x)\ \}\ \text{aqui B depende também de } p(x)$$

Com efeito, suponhamos que exista outro conjunto C com a mesma propriedade, isto é, suponha que:

$$\exists\ C\ \ /.\ \ C = \{\ x\ /.\ \ x \in A \wedge p(x)\ \}\ \text{aqui C depende também de } p(x)$$

Pelo Axioma (3.2) sabe-se que:

$$\exists\ B\ \ /.\ \ B = \{\ x\ /.\ \ x \in A \wedge p(x)\ \}\ \text{ aqui B depende também de } p(x)$$

Aplicando o Axioma (3.1) segue que:

$$\exists\ \ B , C\ \ /.\ \ \{\ x\ /.\ \ x \in A \wedge p(x)\ \}$$

Como B e C dependem da mesma proposição p(x), tem-se que A = B.

Portanto, A = B.

3.1.4 Definições de classes.

Lembre que quando falamos de classe, seus elementos podem ser conjuntos ou elementos de um determinado conjunto.

Assim, para cada fórmula p(x) onde o conjunto A depende da proposição p(x), existe somente um tipo de conjuntos que verificam p(x). Esta classe podemos representar por: $C(x) = \{ x /. p(x) \}$; a classe dos elementos x tais que verificam a propriedade p(x).

E, a podemos definir por:

$$\{ x /. p(x) \} = \exists ! \ A /. \ \forall x, \ (x \in A \Leftrightarrow C(x) \wedge p(x))$$

O fato de que para cada fórmula p(x) exista uma única classe que a verifica, permite definir classes mediante fórmulas. Mostremos uma lista das principais:

1. A classe unitária: $\{ a \} = \{ a /. \ a = b \vee \sim C(b) \}$
2. A classe vazia: $\Phi = \{ x /. \ x \neq x \}$
3. A classe universal: $\mathbf{U} = \{ x /. \ x = x \}$
4. A inclusão de classes: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x, /. \ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
5. A classe união de classes: $A \cup B = \{ x /. \ p(x) \equiv x \in A \vee x \in B \}$
6. A classe interseção de classes: $A \cap B = \{ x /. \ p(x) \equiv x \in A \wedge x \in B \}$
7. A classe diferença de classes: $A - B = \{ x /. \ x \in A \wedge x \notin B \}$
8. A classe par ordenado: $\{ a, b \} = \{ a \} \cup \{ b \}$
9. A classe da união generalizada: $\bigcap_{i \in J} A_i = \{ x /. \ \exists i \in J \wedge x \in A_i \}$
10. A classe da interseção generalizada: $\bigcup_{i \in J} A_i = \{ x /. \ \forall i \in J \Rightarrow x \in A_i \}$

De estas e outras definições obtém-se diversos resultados que determinam toda a *Teoria de Conjuntos*. Estudemos alguns resultados imediatos da definição de conjunto finito, infinito, vazio, universal, potência. Assim como união, interseção e inclusão de classes.

3.1.5 Conjunto Infinito.

Pelo número de elementos de um conjunto, podemos classificar em:

- *Conjuntos infinitos*: Intuitivamente, quando no processo da contagem do número de seus elementos, este processo nunca termina.
- *Conjuntos finitos*: Quando no processo da contagem do número de elementos, este processo termina. Logo, um conjunto é finito se consta de n elementos; sendo n um número natural fixo. Assim, dizemos que um conjunto é finito se não for conjunto infinito.

Exemplo 3.11

São exemplos de conjuntos infinitos:

- A, o conjunto de números naturais maiores que 7.
- B, o conjunto de números reais maiores que 7, e menores que 7,0001.
- C, o conjunto de pontos de uma reta.
- L, o conjunto de todas as retas do plano que pasma por um ponto β.

Exemplo 3.12

São exemplos de conjuntos finitos:

- Seja A o conjunto dos dias da semana.
- Seja B o conjunto dos vértices de um polígono regular de n lados.
- Seja L o conjunto de retas que passam por dois pontos fixos num plano.

Exemplo 3.13

a) São conjuntos infinitos:

- $A_4 = \{ x \in \mathbf{R} \ /. \ x \text{ é par. } \}$
- $A_5 = \{$ As estrelas do Universo. $\}$
- $A_6 = \{ x \in \mathbf{N} \ /. \ x \text{ é ímpar. } \}$

b) São conjuntos finitos:

- $A_1 = \{$O conjunto de dias do mês. $\}$
- $A_2 = \{$Os alunos de Matemática da UFT-Araguaina$\}$
- B, o conjunto de números naturais maiores que 7, e menores que 7,0001.
- $A_3 = \{$Os rios da Terra. $\}$
- $A_4 = \{ a \}$ chamado conjunto unitário (classe unitária)

3.1.6 Classe: Vazia. Universal

3.1.6.1 A Classe vazia.

O *Axioma de especificação* permite definir a classe vazia $\Phi = \{x \ /. \ x \neq x \}$, que também pode ser denotada por $\{ \ \}$.

Esta classe não possui nenhum elemento; em conseqüência à proposição: $a \in \Phi$ sempre é falsa.

Exemplo 3.14

a) A classe das pessoas vivas com mais de 300 anos.

b) $A = \{ \ x \in \mathbf{R} \ /. \ x^2 + 4 = 0 \ \}$

c) O conjunto de números ímpares compreendidos entre 2 e 2,5.

3.1.6.2 A Classe universal.

Na teoria de conjuntos, todos as classes que se consideram serão provavelmente subclasses de uma determinada classe; esta última classe é chamada de *classe universal* e denotamos por **U**. Pelo *Axioma de especificação* a classe universal é: $\mathbf{U} = \{ x \ /. \ x = x \}$

Exemplo 3.15

a) A classe $\mathbf{U} = \{ \ x \ /. \ x \text{ é um número } \}$.

b) A geometria plana é a classe universal de todos os pontos do plano.

3.1.7 Axioma do par não ordenado.

Verificam-se as seguintes propriedades para pares não ordenados:

Propriedade 3.2

i) $\forall$ a, b ; $(C(a) \Rightarrow a \in \{ a, b \})$

ii) $\forall$ a, b ; $(C(b) \wedge C(c) \Rightarrow \forall \; a \in \{ b, c \} \Rightarrow a = b \vee a = c)$

iii) $\forall$ a ; $(\{ a, a \} = \{ a \})$

iv) $\forall$ a, b ; $(\{ a, b \} = \{ b, a \})$

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

É imediato que se ao menos um dos elementos do par é uma classe última, (classe universal) então o par também o é, pela parte **(ii)** da Propriedade (3.2); isto é: $\{ b \} = \mathbf{U} \Rightarrow \{ a, b \} = \{ a \} \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$.

O problema se apresenta quando os dois elementos do par são conjuntos.

Será que o conjunto também é um par?

Para dar resposta a esta questão precisamos do axioma do par não ordenado: "*O par formado por dois conjuntos também é um conjunto*".

Axioma 3.3 Do par não ordenado (3º axioma de Zermelo).

Para todo par de elementos a, b, tem-se que a classe C(a) e, a classe C(b) determinam a classe C{ a, b }.

Isto é: $\forall$ a, b ; $(C(a) \wedge C(b) \Rightarrow C\{ a, b \})$.

Conseqüência imediata deste axioma, é o caráter de conjunto para a classe unitária.

Propriedade 3.3

A classe unitária { a } é o conjunto C{a}.

Demonstração.

Com efeito, pela Propriedade (3.2) para todo a, tem-se que { a } = { a, a }, então C{ a, a } implica C{a}.

Observação 3.4

- Um conjunto não muda se reordenarmos seus elementos.
- Um conjunto não muda se repetimos seus elementos.
- Logo A = B se, e somente se, as proposições $a \in A$ e $a \in B$ são equivalentes.

Estes enunciados mostram que um conjunto fica determinado pelos seus elementos, e ao mesmo tempo nos dão uma regra sobre o uso do símbolo pertence ($\in$). É evidente que a relação de igualdade entre conjuntos é reflexiva, simétrica e transitiva.

3.1.8 Inclusão de conjuntos.

Observação 3.5

É importante diferenciar entre um objeto a qualquer e o conjunto que possui o objeto a como seu único elemento; isto é: entre a e { a }. Pela definição de conjunto, cumpre-se que: $a \in \{ a \}$ e $b \in \{ a \} \Leftrightarrow a = b$.

Definição 3.1 Subconjunto.

Sejam A e B dois conjuntos tais que todo elemento de A também é elemento de B; logo dizemos que A é subconjunto de B e denotamos $A \subseteq B$.

Quando todos os elementos de A também sejam todos os elementos de B, tem-se a inclusão de classes: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall\ x;\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Para o caso do conjunto B ter além dos elementos de A outros elementos, tem-se a inclusão de classes: $A \subset B \Leftrightarrow \forall\ x;\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Se um conjunto A é subconjunto de B, também dizemos que A é uma parte de B, ou que B contém A. Se $A \subseteq B$ podemos escrever $B \subseteq A$ (o conjunto B contém o conjunto A); o símbolo $\subseteq$ é denominado símbolo de inclusão.

Exemplo 3.16

a) O conjunto C= { 1, 3, 5 } é subconjunto do conjunto D= { 1, 3, 5 , 7, 9 }

b) Sejam $M = \{ x \in \mathbf{N} /.\ x$ é par $\}$ e $N = \{ a \in \mathbf{N} /.\ a$ é múltiplo de 10 $\}$. Logo N é subconjunto de M

c) Da Definição (3.1) podemos afirmar que qualquer que seja o conjunto A cumpre-se: $\Phi \subseteq A$ e $A \subseteq A$.

Definição 3.2 Subconjunto próprio.

Se $A \subseteq B$, *e o conjunto* A *é diferente do conjunto* B, *dizemos que* A *é* "*subconjunto próprio* de B", *ou que* A *é uma parte própria de* B, *ou ainda*, A *está contido propriamente em* B *e denotamos* $A \underset{\neq}{\subseteq} B$ ou $A \subset B$.

Logo o conjunto A é uma parte própria de B se, e somente se, todo elemento de A é um elemento de B e existe pelo menos um elemento de B que não pertence ao conjunto A.

Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais e escrevemos A = B se, e somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Propriedade 3.4

Observe que a relação de inclusão é reflexiva e transitiva, isto é, se A, B e C são conjuntos, tem-se:

a) $A \subseteq A$ . . . reflexiva.

b) $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$ . . . transitiva

Demonstração **a)**

A mostrar que se $x \in A \Rightarrow x \in A$.

1. Seja $x \in A$ . . . hipótese auxiliar

2. $x \in A$ e $x \in A$ então $x \in A$ . . . tautologia $p \wedge p \Rightarrow p$

3. $x \in A \Rightarrow x \in A$ . . .(1 - 2)

4. $A \subseteq A$ . . . def. de inclusão.

Portanto, $A \subseteq A$

Demonstração **b)**

1. $A \subseteq B$ . . . hipótese.

2. Seja $x \in A$ . . . hipótese auxiliar.

3. $x \in A \Rightarrow x \in B$ . . .(1), def. $\subseteq$

4. $B \subseteq C$ . . . hipótese.

5. $x \in B \Rightarrow x \in C$ . . .(3) def. $\subseteq$

6. $x \in A \Rightarrow x \in C$ . . .(3), (5), tautologia (silog. hipot.)

7. $A \subseteq C$ . . . def. de $\subseteq$

Portanto, $A \subseteq C$

A negação de $A \subseteq B$ denotamos $A \underset{\neq}{\subseteq} B$ isto quer dizer que o conjunto A não está contido no conjunto B; ou que existe um elemento $a \in A$ tal que $a \notin B$.

Quando dizemos que $A \subseteq B$ e $B \underset{\neq}{\subseteq} A$ estamos indicando que A é parte própria de B.

Se o conjunto A é parte própria do conjunto B denotamos $A \subset B$

Exemplo 3.17

Seja **Z** o conjunto de todos os inteiros, e **Q** o conjunto de todos os números racionais; então temos que $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$ e $\mathbf{Z} \neq \mathbf{Q}$, lembrar que cada elemento do conjunto de todos os números racionais podemos escrever na forma a/b onde a e b são números inteiros com $b \neq 0$; em particular quando b = 1 temos que $a \in \mathbf{Z}$, assim **Z** é uma parte própria de **Q**.

Definição 3.3 Conjuntos comparáveis.

Dois conjuntos A e B são comparáveis, se: $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.

Definição 3.4 Conjuntos não comparáveis.

Diz-se que dois conjuntos A e B são não comparáveis, se $A \underset{\neq}{\subseteq} B$ e $B \underset{\neq}{\subseteq} A$.

Logo, se dois conjuntos são comparáveis, então $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.

Exemplo 3.18

a) Sejam A= { m, n } e B = { m, n, p }. Logo A é comparável com B, pois $A \subseteq B$

b) Sejam M= { m, n ,o } e N = { m, n, p }. Logo M é não comparável com N, pois $M \underset{\neq}{\subseteq} N$ e $N \underset{\neq}{\subseteq} M$

Propriedade 3.5

Suponha $A \neq \Phi$ e $B \neq \Phi$, mostre que se A e B não tem elementos em comum, então A e B são não comparáveis.

Isto é, dados os conjuntos A e B, se $A \underset{\neq}{\subseteq} B$ e $B \underset{\neq}{\subseteq} A$ então A e B são não comparáveis.

Demonstração.

Sendo $A \neq \Phi$ e $B \neq \Phi$, então existem elementos $a \in A$ e $b \in B$. Como A e B não tem elementos em comum, então $a \notin B$ e $b \notin A$.

Portanto $A \underset{\neq}{\subseteq} B$ e $B \underset{\neq}{\subseteq} A$, isto é A e B são não comparáveis.

3.1.9 Axioma das potências.

Ocorre algumas vezes que os elementos de um conjunto estão determinados por outros conjuntos; por exemplo o conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto A. Neste caso diz-se que temos uma *família de conjuntos* ou *classe de conjuntos*. Em tais casos para evitar confusão se indicam estes conjuntos com as letras inglesas *A*, *B*, etc.

Exemplo 3.19

a) O conjunto { {2, 3 }, {2}, {3, 4 } } é uma família de conjuntos

b) O conjunto { {a, b }, a, {b, c }, c } não é uma família de conjuntos, alguns elementos são conjuntos, e outros não.

3.1.10 Conjunto: Potência. Disjunto.

3.1.10.1 Conjunto potência.

A família de todos os subconjuntos de um determinado conjunto dado A, é chamado de *conjunto potência de* A} e, é denotado por *P*(A) ou 2^A.

Define-se a classe das partes de um conjunto A, ou classe potência de um conjunto A como o conjunto *P*(A) que satisfaz:

$$P(A) = \{ \ X \ /. \ \ X \subseteq A \ \}$$

Axioma 3.4 Das potências (4º. axioma de Zermelo).

Para cada conjunto existe uma coleção de conjuntos os quais contêm entre seus elementos todos os subconjuntos do dado conjunto.

Isto é, para cada conjunto A, a classe C(A) está contida na classe C(P(A)). Onde C(x) indica todos os elementos que pertencem, a uma mesma classe x.

Se um conjunto A tiver n elementos, então o número de elementos do conjunto P(A) tem 2^n elementos.

Exemplo 3.20

a) Seja A = { 5, 4 }, então P(A) = { {a}, {b}, {a, b}, Φ }

b) Seja B = { a, b, c }, então P(B) = { {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, B, Φ }

Exemplo 3.21

- Seja A = { Φ }, então A é um conjunto unitário; P(A) = { Φ, A } ou P(A) = { Φ , { Φ } }
- Seja B= { 0, { 0 }}, então temos que P(B) = { Φ , {0}, {{0}}, B }

Observação 3.6

Para o Exemplo (3.21) temos:

a) Φ e A são elementos de P(A) e não são subconjuntos de P(A).

b) Logo Φ $\in$ P(A) e A $\in$ P(A) e não Φ $\subseteq$ P(A) e A $\subseteq$ P(A)

c) 0 $\in$ B e 0 $\notin$ P(B).

Propriedade 3.6

Suponhamos A e B dois conjuntos: A $\subseteq$ B se, e somente se, P(A) $\subseteq$ P(B).

Demonstração

1.	Suponhamos que A $\subseteq$ B	. . . hipótese.
2.	Seja X $\in$ P(A)	. . . hipótese auxiliar.
3.	X é subconjunto de A	. . . def. de P(A)
4.	X $\subseteq$ B	. . . (1), def. de $\subseteq$
5.	X $\in$ P(B)	. . . def. de P(B)
6.	P(A) $\subseteq$ P(B)	. . . (2) - (5)

Inversamente ($\Leftarrow$).

Suponhamos que P(A) $\subseteq$ P(B)	. . . hipótese.
Em particular, A $\in$ P(A)	. . . def. de P(A)
A $\in$ P(B)	. . . (7), def. de $\subseteq$
Logo, A $\subseteq$ B	. . . def. de P(B)

Portanto, de (6) e (10) temos que A $\subseteq$ B se, e somente se, P(A) $\subseteq$ P(B)

3.1.10.2 Conjuntos disjuntos.

Se dois conjuntos, por exemplo, A e B, não tem elementos em comum, dizemos que os conjuntos são disjuntos.

Exemplo 3.22-

Os conjuntos A = { 5, 4 } e B = { 3, 2 }, são conjuntos disjuntos.

Os conjuntos N = { a, b, c } e M = { c, m }, estes conjuntos não são disjuntos.

3.1.11 Diagramas: De Venn-Euler. Linear.

De modo simples e ilustra-se as relações entre conjuntos mediante os chamados "*diagramas de Venn-Euler"* ou simplesmente "*diagramas de Venn*", que representam um conjunto em uma região plana, limitada geralmente por círculos, quadrados, retângulos, losangos.

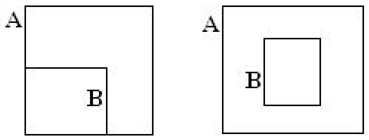


Figura 3.1:

Exemplo 3.23

Suponha $A \subset B$, então cada um dos diagramas da Figura (3.1) ilustra esses conjuntos.

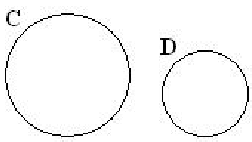


Figura 3.2:

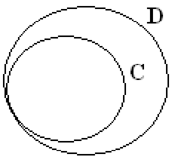


Figura 3.3:

Exemplo 3.24

Se os conjuntos C e D são não comparáveis, podemos representa-los mediante os seguintes diagramas das Figuras (3.2) e (3.3).

Outro modo de representar as relações entre conjuntos é a utilização de diagramas lineares. Se $A \subseteq B$, escreve-se então B acima de A e assinalamos estes dois conjuntos mediante uma linha reta, como mostra a Figura (3.4).

Figura 3.4:

Exemplo 3.25

a) Sejam A={ a }, B = { b } e C={ a, b }. Determine seu diagrama linear.

b) Sejam M={ 1 }, N = { 1, 2 }, P={ 1, 2, 3 } e Q = { 1, 2, 4 }. Determine seu diagrama linear.

Solução

O diagrama do exemplo (a) mostra-se na Figura (3.5); e, o diagrama do exemplo (b) mostra-se na Figura (3.6)

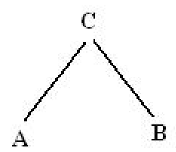


Figura 3.5

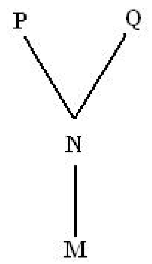


Figura 3.6

3.1.12 Complemento de um conjunto.

Seja A subconjunto de um conjunto universal **U**.

Definição 3.5 Complemento de um conjunto.

O subconjunto A' de **U**, formado por todos os elementos a tais que a $\notin$ A; isto é A' = $\{a \in \mathbf{U} \,/.\; a \notin A\}$, é denominado conjunto complemento de A com respeito a **U** ou complementar de A em **U**.

O conjunto A' também é denotado por $C_{\mathbf{U}}A$.

Exemplo 3.26

Seja A o conjunto de todos os números naturais pares, logo o complemento de A é dado por: $C_{\mathbf{U}}A = \{ a \in \mathbf{N} \,/.\; a \text{ } \textit{é ímpar} \}$. Note que estamos considerando **U** = **N**.

Exemplo 3.27

Considerando o conjunto **U** = **R**, temos que $C_{\mathbf{U}}\mathbf{Q} = \{ a \in \mathbf{R} \,/.\; a \notin \mathbf{Q}\} \} = \mathbf{I}$; logo o complementar do conjunto dos números racionais em **R** é o conjunto de números irracionais.

Exemplo 3.28

Esquematizar o princípio lógico da propriedade: *Se* A $\subseteq$ B, *tem-se que* $C_{\mathbf{U}}B \subseteq C_{\mathbf{U}}A$.

Solução

Sejam p: $x \in A$

q: $x \in B$

Logo, ~ p: $x \notin A$, isto é ~ p: $x \in C_{\mathbf{U}}A$

$\sim q$: $x \notin B$ isto é $\sim q$: $x \in C_U B$

Logo, o esquema lógico de $A \subseteq B \Rightarrow C_U B \subseteq C_U A$ é $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$, como podemos verificar representa um princípio lógico (tautologia)

Propriedade 3.7

Sejam A e B dos subconjuntos de um conjunto **U**, então:

1º. Se $A \subseteq B$, tem-se que $C_U B \subseteq C_U A$.

2º. $C_U[C_U A] = A$.

Demonstração. **1º.**

Demonstração por contradição.

1.	Seja $a \in C_U B$	. . . hipótese auxiliar.
2.	$a \notin B$ e $a \in \mathbf{U}$	. . . def. de conjunto complementar
3.	$a \notin A$ e $a \in \mathbf{U}$	. . . da hipótese $A \subseteq B$.
4.	$a \in C_U A$	. . . def. de conjunto complementar
5.	$a \in C_U B \Rightarrow a \in C_U A$	. . . (1)-(4)

Portanto, $C_U B \subseteq C_U A$.

Demonstração. **2º.**

É suficiente mostrar que $C_U[C_U A] \subseteq A$ e $A \subseteq C_U[C_U A]$.

Seja a um elemento quaisquer do conjunto **U**, e suponhamos que $a \in C_U[C_U A]$, então $a \notin C_U A$ e $a \in \mathbf{U}$, como o conjunto $C_U A$ é o complementar de A, então $a \in A$; logo da definição de inclusão $C_U[C_{UA}] \subseteq A$.

Por outro lado, seja x um elemento quaisquer do conjunto A, então $x \notin C_U A$ e $x \in \mathbf{U}$; como $C_U A$ é subconjunto de **U**, da definição de conjunto complementar segue que $x \in C_U[C_U A]$ e $x \in \mathbf{U}$; portanto $A \subseteq C_U[C_U A]$.

Exercícios 3-1

1. Quais dos seguintes conjuntos são bem determinados? Justifique sua resposta.

   1. { x, {x} } **2.** { x, {x, y}, A}

   3. X = {a, b, x } **4.** {{1}, { Φ }}

   5. Os alunos mais inteligentes do 1^o ano.

   6. O conjunto A cujos elementos são: a, {a}, , {b} e B

   7. O conjunto de todos os alunos da UFT.

   8. O conjunto de todos os números naturais menores que zero.

   9. O conjunto de alunos altos da Licenciatura em Matemática em Pato Branco.

   10. O conjunto das ruas limpas de Pato Branco.

   11. O conjunto de números naturais compreendidos entre a e u.

2. Escrever em notação de conjunto o seguinte:

   1. A é superconjunto de B **2.** x é elemento de A

   3. M não é subconjunto de P **4.** a não pertence a A.

   5. O conjunto potência de B **6**. A classe vazia.

   7. A pertence a *P*(A) **8**. M está incluído em N.

   9. A constituído pelos números 5, 8, 15, 13.

   10. B tem como elementos os números naturais menores que 9.

   11. C formado pelos números naturais múltiplos de 7.

   12. D constituído pelos inteiros negativos maiores que 3.

3. Traduzir à linguagem oral os seguintes conjuntos:

   1. A = { x /. x mora em Lima } **2.** B = { x /. x fala espanhol}

   3. C = { a /. a é maior de 18 anos } **4**. D = {b /. b é cidadão inglês}

4. Escrever por extensão os seguintes conjuntos:

   1. A_1 = { x /. x^2-5x+6=0 }
   2. A_2 = { x /. x é uma vogal da palavra *Fundamentos* }
   3. A_3 = { a /. a^2=16, a + 6 = 9 }
   4. A_4 = { b /. b é algarismo do número 2002 }
   5. $A_5 = \{ a \in \mathbf{N} \ /. \ a \leq 3 \vee 5 < x < 7 \}$
   6. $A_6 = \{ (a^2-1) \ /. \ a \in \mathbf{Z} \wedge -1 \leq a \leq 3 \}$
   7. $A_7 = \{ a^3 \in \mathbf{N} \ /. \ x = 2 \vee x = 4 \vee x = 3 \}$
   8. $A_8 = \{ \frac{a+1}{a-1} \ /. \ A \in \mathbf{N},\ a < 10 \wedge a \in \{1, 5, 9\} \}$

9. $A_9 = \{ \ x \in \mathbf{Z} \ /. \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \ \}$

10. $A_{10} = \{ \ x \ /. \quad x = (-1)^n, \quad x \in \mathbf{N} \ \}$

11. $A_{11} = \{ \ \frac{1}{2x} \ /. \quad x \in \mathbf{N}, 2 \leq x \leq 10, \ \ x$ ímpar $\}$

12. $A_{12} = \{ \ (3\text{-}5x) \ /. \quad x \in \mathbf{Z} \ , -2 \leq x < 5 \ \wedge \ 3 < x \leq 8 \ \}$

5. Determine se os seguintes conjuntos são iguais:

1. $\{ \ \}$ e $\{ 1\}$ **2.** $\{ \ \}$ e Φ

3. $\{a \}$ e $\{\{a\} \}$ **4.** $\{ \Phi \ \}$ e $\{\{0\}\}$

6. Poderá se cumprir para algum objeto A que $A \in B$ e ao mesmo tempo $A \subset B$. Justificar sua resposta com um exemplo.

7. Seja o conjunto $A = \{a, \{a\}, \ \Phi \ \}$. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

1. $a \in A$ **2.** $\{a\} \in A$ **3.** $\{a\} \subset A$ 4. $\Phi \in A$

5. $\Phi \subset A$ **6.** $\Phi \subset \{ a\}$ **7.** $\Phi \subset \Phi$ **8.** $A \not\subset \{ a \}$

9. $a \in \Phi$ **10**. $\Phi \in \{ \ \ \}$ **11.** $\Phi \subset \{ \ \ \}$ **12.** $\{a\} \subset \Phi$

13. $\{ \ \ \} \in A$ **14.** $\{\{a\}\} \subset A$ **15.** $A \in \{A \}$

8. Considere os seguintes conjuntos:

$A = \{x \in \mathbf{Z} \ /. \quad (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0 \ \}$ $C = \{x \in \mathbf{Z} \ /. \quad 3x=5 \ \}$

$B = \{x \in \mathbf{Z}$ /. x positivo menor que 7 $\}$ $D = \{x \in \mathbf{Z} \ /. \ x^2\text{-}3x+2=0\}$

Verifique se as seguintes inclusões são verdadeiras:

1. $A \subseteq B$ 2. $D \subseteq A$ **3.** $D \not\subset C$

4. $B \not\subset A$ **5.** $C \subseteq A \ \wedge \ C \subseteq B$

9. Sejam A, B e C três subconjuntos de um conjunto universal **U** e suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Mostre que:

1. Se $x \notin B$ então $x \notin A$.

2. Se $x \in B$ e x A então $x \in C$.

3. Se A é parte própria de B, então A é parte própria de C.

4. Se B é parte própria de C, então A é parte própria de C.

10. Seja $A = \{k \in \mathbf{Z} \ /. \quad k$ é múltiplo de $-1 \ \}$. Mostre que $\mathbf{Z} \subseteq A$, logo concluímos que **Z** e A são conjuntos iguais.

11. Seja *L* uma reta no plano *P* e A um ponto em *L*. Verificar quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

1. $L \in P$ **2.** $\{ A \} \subseteq P$ **3.** $A \in P$

4. $A \in L$ **5.** $A \underset{\neq}{\subseteq} P$ **6.** $\{ A \} \subseteq P$

7. A é subconjunto de *P*.

8. A é subconjunto próprio de *P*

9. A não é subconjunto próprio de *P*

12. Dados os conjuntos A e B não comparáveis, então A e B são disjuntos ?

13. Sejam os conjuntos A = {{5}} e B = {5}. Justificar o seguinte:

1. É verdade que A = B ? **2**. É verdade que : B $\subseteq$ A ?

3. É verdade que A $\neq$ B ?

14. Seja A = { {3, 4 }, {5}} e temos que 4 $\in$ {3, 4}, então 4 $\in$ A? Justificar sua resposta.

15. Verificar quais das seguintes proposições são verdadeiras:

1.Se *P*(A) $\subseteq$ *P*(B) e *P*(B) $\subseteq$ *P*(A) então *P*(A) = *P*(B)

2. { m, n, p }$\subseteq$ *P* ({ m, n})

3. Qualquer que seja o conjunto A, nunca *P*(A) é a classe vazia.

4. Se A é um conjunto com um número ímpar de elementos, então *P*(A) também tem um número ímpar de elementos.

16. Mostre que: *P* ({a, b}) = *P* ({a})se, e somente se, a = b.

17. Determine o erro se houver, nas seguintes deduções:

1. Seja A= {a, b} e **U** = {a, c, d}; logo $C_{\mathbf{U}}$ A = {c, d}.

2. $C_{\mathbf{B}}$A = Φ $\Leftrightarrow$ A = Φ , onde B = Φ

3. a $\in$ A e A $\subset$ B $\Rightarrow$ a $\in$ B

4. a $\notin$ A e A $\subset$ B $\Rightarrow$ a $\in$ B

5. A $\subset$ B e a $\notin$ B $\Rightarrow$ a $\notin$ A

18. Seja A = { 2n+1 /. n $\in$ **N**}. Determine se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas; justifique sua resposta.

1. Caso a = $(2n + 1)^2$ para algum n $\in$ **N**, então a $\in$ A.

2. Se a $\in$ A, então a = $(2n + 1)^2$ para algum n $\in$ **N**.

3.Se existem a, b $\in$ A tais que c = a.b, então c $\in$ A

4. Se a $\in$ A, então existem b, c $\in$ A tais que a = b.c

19. Mostre que { a } = { b, c } se, e somente se a = b = c.

20. Mostre que {{a } { a, b }} = {{c }, { c, d }} se e somente se a = c e b = d.

21. Quais dos conjuntos A = { x $\in$ **R** /. x^2 = 1 }, B = { x $\in$ **R** /. x^4 = 1 }, C = { x $\in$ **C** /. x^2 = 1 } , D = { x $\in$ **C** /. x^4 = 1 } são iguais, e quais distintos. Quais são subconjuntos um dos outros. Justifique.

22. Demonstrar as seguintes igualdades entre conjuntos:

1. { x $\in$ **R** /. x^3 - x > 0 } = { x $\in$ **R** /. - 1 < x < 0 $\vee$ x > 1 } .

2. { (x, y, z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ /. x = y, x + y + z = 1 } =

= { (x, y, z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ /. x = t/2, y= t/2, z = 1 - t para algum t $\in$ **R** } .

23. É verdade que $A \subseteq B$ se e somente se $P(A) \subseteq P(B)$? Justifique.

24. Seja $A_0 = \Phi$, $A_n = P(A_{n-1})$, $n \in \mathbf{N}$. Descrever explicitamente A_1, A_2, A_3, A_4.

1. Quantos elementos tem cada um destes conjuntos?

2. Quantos elementos tem A_n sendo n arbitrário?

25. Da turma do 1º. ano da Licenciatura em Matemática, sabe-se que:

Pelo menos o 70% estuda Geometria, ao menos o 75% estuda Cálculo I, ao menos o 80% estuda Tópicos da Matemática e pelo menos o 85% estuda Fundamentos da Matemática. Qual a porcentagem (pelo menos) que estudam as quatro disciplinas?

Sugestão: Para dois conjuntos quaisquer temos:

$$o(A \cup B) = o(A) + o(B) - o(A \cap B)$$

3.2 OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

3.2.1 União de conjuntos.

Definição 3.6 União de conjuntos.

A união de dois conjuntos A e B, pelo Axioma (3.2) é a classe indicada por $A \cup B$, e definida pelo conjunto**:**

$$\{ x \ /. \quad p(x) \equiv x \in A \vee x \in B \}$$

Em alguns livros a união dos conjuntos A e B denota-se por A + B e, é chamado a *soma conjuntista* de A e B.

O conectivo lógico "*ou*" é no sentido "*inclusivo*" de fato, quando dizemos que x está em A ou x está em B, queremos dizer que x está em pelo menos um dois conjuntos com a possibilidade de estar em ambos.

Graficamente podemos indicar a união de dois conjuntos A e B pela Figura (3.7), onde A é o paralelogramo da esquerda, B o da direita e $A \cup B$ a parte sombreada.

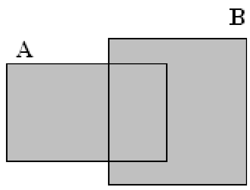


Figura 3.7

Ejemplo 3.29

- Para qualquer conjunto A, temos que $A \cup A = A$.
- Se B é um subconjunto do conjunto A, então $A \cup B = A$.
- Se $A = \{ x_1, x_2 \}$ e $B = \{ y_1, y_2, y_3 \}$, então:

  $A \cup B = \{ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \}$

Propriedade 3.8

1. $A \cup B = B \cup A$ . . . comutativa.

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ . . . associativa.

3. $A \cup A = A$ . . . idempotente

4. $A \cup \Phi = A$ . . . identidade

5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

6. $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$

7. $A \subseteq (A \cup B) \wedge B \subseteq (A \cup B)$

Demonstração. (**1**)

- Demonstração por pertinência de elementos

1. $x \in A \cup B$ . . . hipótese.

2. $x \in A \vee x \in B$ . . . def de $\cup$

3. $x \in B \vee x \in A$ . . . tautologia

4. $x \in B \cup A$ . . . def. de $\cup$

5. $(A \cup B) \subseteq B \cup A$ . . . (1) - (4), def. de $\subseteq$

6. $x \in B \cup A$ . . . hipótese.

7. $x \in B \vee x \in A$ . . . def de $\cup$

8. $x \in A \vee x \in B$ . . . tautologia

9. $x \in (A \cup B)$ . . . def. de $\cup$

10. $(B \cup A) \subseteq A \cup B$ . . . (5) (9), def. de $\subseteq$

Portanto de (5) e (10) seque que $A \cup B = B \cup A$

Demonstração. Por tautologias.

Na verdade, a demonstração é a mesma da anterior, somente que utilizamos fortemente a aplicação da lógica, ao usar simbologia das proposições.

Sejam p: $x \in A$ e q: $x \in B$, um esquema lógico representativo de $A \cup B = B \cup A$ é $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$. Se logramos mostrar que este esquema $A \cup B = B \cup A$ é tautologia então a igualdade será verdadeira.

No "*Capítulo* I" já mostramos que é tautologia (lei comutativa para a disjunção).

Portanto a $A \cup B = B \cup A$ igualdade é válida.

Demonstração (**5**)

1. $x \in (A \cup B)$ . . . hipóteses.

2. $x \in A \vee x \in B$ . . . def. de $\cup$

3. $A \subseteq B$ . . . hipóteses.

4. $x \in B$ . . . (2)-(3)

5. $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in B$ . . . (1)-(4)

6. $(A \cup B) \subseteq B$ . . . def. de $\subseteq$

Inversamente ($\Leftarrow$)

7. Seja $x \in B$ . . . hipótese.

8. $x \in B \vee x \in A$ . . . tautologia $p \Rightarrow p \vee q$

9. $x \in (B \cup A)$ . . . def. de $\cup$

10. $x \in (A \cup B)$ . . . prop. $A \cup B=B \cup A$

11. $B \subseteq (A \cup B)$

Portanto, de (6) e (11), se $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

A demonstração das demais propriedades é exercício para o leitor.

3.2.2 Interseção de conjuntos.

Definição 3.7 Interseção de conjuntos.

A interseção de dois conjuntos A e B, pelo Axioma (3.2) é a classe indicada por $A \cap B$, é definida pelo conjunto:

$$A \cap B = \{ x /. \quad p(x) \equiv x \in A \wedge x \in B \}$$

A interseção é portanto, o conjunto de todos os elementos que estão tanto no conjunto A como em B.

Graficamente podemos indicar a interseção de dois conjuntos A e B pela Figura (3.8), observe que, nela o conjunto A é o paralelogramo da esquerda, B o da direita e $A \cap B$ a parte sombreada.

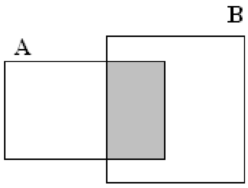


Figura 3.8

Exemplo 3.30

- Para qualquer conjunto A, temos que $A \cap A = A$.
- Se B é um subconjunto do conjunto A, então: $A \cap B = B$.
- Se $A = \{ x_1, x_2 \}$ e $B = \{ x_1, y_2, y_3 \}$, então: $A \cap B = \{ x_1 \}$

Propriedade 3.9

1. $A \cap B = B \cap A$ . . . comutativa.
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ associativa.
3. $A \cap A = A$ . . . idempotente
4. $A \cap \Phi = \Phi$ . . . identidade
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$l
6. $(A \cap B) \subseteq A$ e $(A \cap B) \subseteq B$
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demonstração. (**2**.)

1. $x \in (A \cap B) \cap C$ . . . hipótese.
2. $x \in (A \cap B) \wedge x \in C$ . . .def. de $\cap$
3. $(x \in A \wedge x \in B) \wedge \in C$ .. . def. de $\cap$
4. $x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$ . . . . .tautologia $((p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r))$
5. $x \in A \cap (B \cap C)$ . . . def. de $\cap$
6. $(A \cap B) \cap C) \subseteq A \cap (B \cap C)$. (1)-(5), def. de $\subseteq$

Inversamente ($\Leftarrow$).

7. $x \in A \cap (B \cap C)$ . . . hipótese.

8. $x \in A \wedge x \in (B \cap C)$ . . .def. de $\cap$

9. $x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$ .. . def. de $\cap$

10. $(x \in A \wedge x \in B) \wedge \in C$ . . tautologia $((p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r))$

11. $x \in (A \cap B) \wedge x \in C$ . . .def. de $\cap$

12. $x \in (A \cap B) \cap C$ . . . def. de $\cap$

13. $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$ . . . (7)-(12), def. de $\subseteq$

Portanto, de (6) e (13) temos que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Demonstração. (**4**)

1. $x \in A \cap \Phi$ . . . hipótese.

2. $x \in A \wedge x \in \Phi$ . . . def. de $\cap$

3. $x \in \Phi$ . . . tautologia $(p \wedge q \Rightarrow q)$

4. $(A \cap \Phi) \subseteq \Phi$ . . . (1)-(3)

5. $\Phi \subseteq (A \cap \Phi)$ . . . def. de Φ

Portanto, de (4) e (5) tem-se que $A \cap \Phi = \Phi$.

Demonstração. (**7**)

A demonstrar que:

i). $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ii). $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Com efeito, para a parte (**i).**

1. Seja um elemento $x \in A \cap (B \cup C)$ . . . hipótese.

2. $\Rightarrow x \in A$ e $x \in (B \cup C)$ . . . def. de $\cap$

3. $\Rightarrow x \in A$ e $x \in B$ ou $x \in C$ . . . def. de $\cup$

4. $\Rightarrow$ $(x \in A$ e $x \in B)$ ou $(x \in A$ e $x \in C)$ . . . tautologia

5. $\Rightarrow$ $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . . . def. de $\cup$, def. $\cap$

6. Portanto $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . . . def. de $\subset$

Inversamente (**ii**)

7. Seja um elemento $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . . . hipótese.

8. $\Rightarrow$ $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cap C)$ . . . def. $\cup$

9. $\Rightarrow$ $(x \in A$ e $x \in B)$ ou $(x \in A$ e $x \in C)$ . . . def. $\cap$

10. $\Rightarrow (x \in A$ e $x \in B)$ ou $x \in C$ . . . tautologia.

11. $\Rightarrow x \in A$ e $x \in (B \cup C)$ . . . def. $\cup$

12. $\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$ . . . def. $\cap$

13. Portanto $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ . . . def. $\subseteq$

Logo, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ pelo mostrado em **i)** e **ii).**

A demonstração das demais propriedades é exercício para o leitor.

Definição 3.8 Conjuntos disjuntos.

Dois conjuntos são ditos disjuntos se sua interseção é a classe vazia.

Isto é, A e B são disjuntos se $A \cap B = \Phi$.

Exemplo 3.31

Se A é o conjunto de todos os números naturais pares e B o conjunto de todos os naturais ímpares, então $A \cap B$ é a classe vazia.

Exemplo 3.32

Pede-se informações sobre o número de professores que ensinam Cálculo III, História e Geografia e se obtém o seguinte:

- A quarta parte de professores que ensinam Cálculo III, também ensinam História;
- só dois dos professores ensinam nos três cursos;
- só um dos professores ensina Cálculo III e Geografia;
- dos quatorze professores de Geografia, a metade também são dos outros cursos;
- o triplo do número de professores que ensinam só Cálculo III ensina História;

Dar uma informação detalhada, sabendo-se que são 72 professores.

Solução

Considerando diagrama de Venn da Figura (3.9) tem-se:

$3(4x) - ((x - 2) + 2 - 4) = 11x + 4$

Resolvendo esta igualdade, temos

$16x + 8 = 72 \Rightarrow 16x = 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4.$

História:	12x
Somente cálculo:	4x
Somente cálculo e geografia:	1
Somente geografia:	7

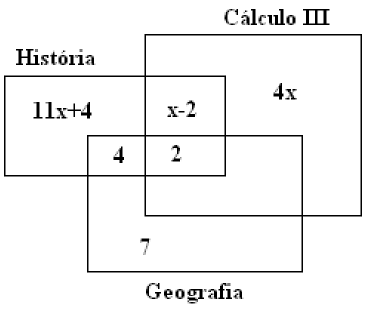


Figura 3.9:

Assim de acordo com o diagrama da Figura (3.9) temos que o número de:

Professores que ensinam Cálculo III e História são 4.

Aqueles que ensinam somente História são 48.

Os professores que ensinam somente Cálculo III são 16.

3.3.3 Diferença de conjuntos.

Definição 3.9 Diferença de conjuntos.

O conjunto diferença de A e B (nessa ordem) , pelo Axioma (3.2) é a classe indicada por A - B, é o conjunto

$$\{ x \ /. \ \ x \in A \wedge x \notin B \}$$

Graficamente, representa-se pela Figura (3.10).

Observe que para qualquer conjunto A, temos a igualdade $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ ainda mais; o conjunto $B \cap (A - B)$ é a classe vazia.

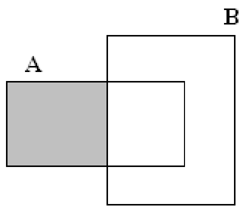


Figura 3.10

Propriedade 3.10

Para todos os subconjuntos A e B de um conjunto universal **U** tem-se:

1. $A - B \neq B - A$

2. $A - A = \Phi$

3. $A - \Phi = A$

4. $A - \mathbf{U} = \Phi$

5. $(A - B) \subseteq A$

6. Os conjuntos $(A - B)$, $(A \cap B)$ e $(B - A)$ são disjuntos dois a dois.

7. Se $A \subseteq B \Rightarrow A \cup (B - A) = B$

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Exemplo 3.33

Dados os conjuntos:

A = { x /. x é número natural divisor de 12 }

B = { x /. x é número natural divisor de 18 }

C = { x /. x é número natural divisor de 16 }

Determine: **a**) $(A\text{-}B) \cap (B\text{-}C)$ **b)** $(A\text{-}B) \cup (B\text{-}C)$

Solução

Por extensão, os conjuntos do problema, podemos escrever:

A = { 1, 2, 3, 4, 6, 12 }, B={ 1, 2, 3, 6, 9, 18} e C = { 1, 2, 4, 8, 16 }.

Por outro lado, A-B = { 4, 12 } e B-C = { 3, 6, 9, 18 }

Solução (a)

$(A\text{-}B) \cap (B\text{-}C)=\{ \ \}= \Phi$

Solução **(b)**

$(A-B) \cup (B-C)=\{ 3, 4, 6, 9, 12, 18 \}$

Propriedade 3.11

Para todos os subconjuntos A e B de um conjunto universal **U** tem-se:

1. $A \cup A' = \mathbf{U}$

2. $A \cap A' = \Phi$

3. $(A')' = A$

4. $\mathbf{U}' = \Phi$ $\quad\quad$ $\Phi = \mathbf{U}$

5. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

6. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

7. $A - B = A \cap B'$

8. $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

Demonstração. (5)

1. $x \in (A \cup B)'$ . . . hipótese.

2. $x \notin (A \cup B)$ . . . def. de complemento

3. $x \notin A \wedge x \notin B$ . . . tautologia.

4. $x \in A' \wedge x \in B'$ . . . def. de complemento.

5. $x \in (A' \cap B')$ . . . def. de $\cap$

6. $x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \in (A' \cap B')$ . . (1) - (5)

7. $(A \cup B)' \subseteq (A' \cap B')$ . . . def. de $\subseteq$

8. $x \in (A' \cap B')$ . . . hipótese.

9. $x \in A' \wedge x \in B'$ . . . def. de $\subseteq$

10. $x \notin A \wedge x \notin B$ . . . def. de complemento.

11. $x \notin (A \cup B)$ . . . tautologia

12. $x \in (A \cup B)'$ . . . def. de complemento.

13. $(A' \cap B') \subseteq (A \cup B)'$ . . . (8)-(12) complemento.

Portanto de (7) e (12), segue que $(A' \cap B') =(A \cup B)'$

Demonstração. (8)

1. $x \in B'$ . . . hipótese.

2. $x \notin B$ . . . def. de complemento.

3. $A \subseteq B$ . . . hipótese.

4. $x \notin A$ . . . (3), (2)

5. $x \in A'$ . . . def. de complemento.

6. $x \in B' \Rightarrow x \in A'$ . . . (1)-(5)

7. $B' \subseteq A'$ . . . def. de $\subseteq$

Portanto, $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

A demonstração das demais propriedades é exercício para o leitor.

3.2.4 Diferença simétrica de conjuntos.

A diferença simétrica (ou soma booleana) de conjuntos A e B (nessa ordem) é denotada por $A \Delta B$ e define-se como o conjunto:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

A parte sombreada mostrada na Figura (3.11) representa a diferença simétrica entre os conjuntos A e B.

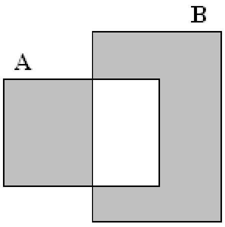


Figura 3.11

Exemplo 3.34

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X. Demonstre que:

i) $A \Delta B = \Phi \Leftrightarrow A = B$

ii) $A = C_X B$ então $A \Delta B = X$

Demonstração. **i)**

Suponhamos $A \Delta B = \Phi$, então $(A \cup B) - (A \cap B) = \Phi$, isto implica que $A \cup B = \Phi$ e $A \cap B = \Phi$, logo $A \cup B = A \cap B$.

De onde $A \subseteq B \subseteq A$, assim $A = B$.

Por outro lado, se $A = B$, tem-se que $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap A) = A - A = \Phi$.

Portanto, $A \Delta B = \Phi \Leftrightarrow A = B$

Demonstração **ii)**

Pelo fato $A = C_X B$ segue que $A = X - B$, isto é $A = X \cap B'$, de onde $A \cup B = X$ e $A \cap B = \Phi$.

Logo, $A \Delta B = X - \Phi = X$.

Portanto, se $A = C_X B$ então $A \Delta B = X$.

3.3 ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

As operações de união, interseção e de complemento entre conjuntos, verificam varias identidades:

3.3.1 Leis da álgebra de conjuntos.

3.3.1.1 Lei de idempotência.

a) $A \cup A = A$ **b**) $A \cap A = A$

3.3.1.2 Leis associativas.

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ **b)** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3.3.1.3 Leis distributivas.

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3.3.1.4 Leis comutativas.

a) $A \cup B = B \cup A)$ **b)** $A \cap B = B \cap A$

3.3.1.5 Lei de identidade.

a) $A \cup \Phi = A$ **b)** $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$

c) $A \cap \Phi = \Phi$ **d)** $A \cap \mathbf{U} = A$

3.3.1.6 Lei de complemento.

a) $A \cup A' = \mathbf{U}$ **b)** $A \cap A' = \Phi$

c) $(A')' = A$ **d)** $\mathbf{U}' = \Phi$ $\Phi' = \mathbf{U}$

3.3.1.7 Leis de Morgan.

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ **b)** $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Observe que o conceito de elemento e de pertinência não aparecem em nenhuma destas propriedades, lembre que estes conceitos eram essenciais no desenvolvimento da teoria de conjuntos em seções anteriores. A relação A *é um subconjunto de* B define-se na álgebra de conjuntos por: $A \subseteq B$ *significa* $A \cap B = A$.

Exemplo 3.35

Mostre que $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

Demonstração

1. $(A \cap B) \cup (A \cap B')$ . . . hipótese.

2. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B')$ . . . lei distributiva.

3. $B \cup B' = \mathbf{U}$ . . . lei de complemento.

4. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap \mathbf{U}$ . . . (3) em (2), substituição.

5. $A \cap \mathbf{U} = A$ . . . lei de identidade.

6. Por tanto, $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$ . . . (5) em (4), substituição.

Exemplo 3.36

Mostre que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Demonstração

1. $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ . . . hipótese.

2. $A \cap B = A$ e $B \cap C = B$ . . . definição de subconjuntos.

3. $(A \cap (B \cap C)) = A$ . . . substituição.

4. $((A \cap B) \cap C) = A$ . . . lei associativa.

5. $(A \cap C) = A$ . . . substituição.

6. Por tanto, $A \subseteq C$ . . . def. de subconjunto.

3.3.2 Princípio de dualidade.

Se intercaláramos $\cap$ por $\cup$, assim como **U** por Φ em qualquer raciocínio sobre conjuntos, o novo enunciado resultante é chamado *dual do primeiro*.

Exemplo 3.37

O dual do conjunto $(\mathbf{U} \cap B) \cup (A \cap \Phi)$ é o conjunto $(\Phi \cup B) \cap (A \cup \mathbf{U})$.

Observe que o dual de cada lei da álgebra de conjuntos, encontra-se na mesma lei; fato de muita importância pela seguinte propriedade.

Propriedade 3.12 Princípio de dualidade.

Se alguns axiomas implicam seus próprios duais, então o dual de qualquer teorema que seja conseqüência dos axiomas, é também conseqüência dos axiomas.

Isto significa que, dados qualquer teorema e sua demonstração, o dual do teorema podemos demonstrar do mesmo modo aplicando o dual da cada passo da primeira demonstração.

Exemplo 3.38

Mostre que $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$

Demonstração

Observe que o dual de $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$ é $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$ mostrado que a igualdade é verdadeira no Exemplo (3.32). Portanto a igualdade é verdadeira pelo princípio de dualidade.

3.3.3 Família de conjuntos.

Sejam os conjuntos $A_1 = \{ a, b \}$, $A_2 = \{ a, b, c \}$, $A_3 = \{ a, d, e, g \}$, $A_4 = \{ b, c, g, f \}$, $A_5 = \{ c, d, g, m, n \}$ e o conjunto $I = \{ 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Observe que, para cada elemento $i \in I$ corresponde um conjunto A_i. Dizemos então que I é o conjunto de índices, e que os conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 estão induzidos. Uma família de conjuntos induzidos denotamos por $F = \{A_i\}_{i \in I}$

Em uma família induzida de conjuntos, podemos observar que a cada elemento $i \in I$, corresponde um único conjunto A_i, assim podemos estabelecer uma relação de I para $\{A_i\}_{i \in I}$. O conjunto I também pode ser um conjunto não finito.

Exemplo 3.39

- Seja $A_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ onde $n \in \mathbf{N}$. Então temos que $A_1=[-1, 1]$, $A_2 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $A_3 = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, . . .
- Seja $B_n = \{ x /. \ x$ é múltiplo de $n \}$ onde $n \in \mathbf{Z}$.

Então $B_1 = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \}$, $B_2 = \{ \ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots \}$, $B_3 = \{ \ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots \}$, $B_4 = \{ \ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots \}$, . . . $B_{10} = \{ \ldots, -20, -10, 0, 10, 20, 30, \ldots \}$

3.3.4 Axioma das uniões.

Se A_1 e A_2 são conjuntos, é natural querer às vezes unir seus elementos dentro de um conjunto que os compreenda. Uma maneira de descrever tal conjunto compreensivo é exigir que ele contenha todos os elementos que pertençam a pelo menos um dos membros do par $\{ A_1, A_2 \}$. A questão é saber se a união de uma família de conjuntos é ou não um conjunto, esta formulação sugere uma generalização abrangente de si mesma; certamente uma construção semelhante poderia ter sido aplicada a coleções arbitrarias de conjuntos e não só a pares de conjuntos. O que se deseja, em outras palavras, é um quinto axioma o das uniões.

Axioma 3.5 Das uniões (5º. axioma de Zermelo).

Para toda família de conjuntos existe um conjunto que contém todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos da dada família.

Isto é, suponha temos a família de conjuntos $F = \{A_i\}_{i \in I}$, e denotamos $\bigcup_{i\in I} A_i$ o conjunto que contém todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos da dada família. O axioma diz:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{ a /. \ a \in X \ \text{ para algum } X \in F \}$$

Este conjunto $\bigcup_{i\in I} A_i$ é chamado de união da família F.

Propriedade 3.13

Tem-se as seguintes propriedades para a união:

i) $\forall\ A_1, A_i /. \ A_1 \in A_i \Rightarrow A_1 \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$

ii) $\bigcup_{i\in I} \Phi = \Phi$ **iii)** $\bigcup_{i\in I} A = A$

Demonstração **i)**

Seja $A_1 \in A_i$, então $\forall$ a $\in$ A_1 tem-se que $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$.

Portanto, $A_1 \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

Demonstração **(ii)**

Pelo Axioma (3.5) tem-se que $\bigcup_{i\in I} \Phi = \{ a /. \ a \in X$ *para algum* $X \in F \}$, onde $F = \{ \Phi \}$. Assim, $\bigcup_{i\in I} \Phi \subseteq \Phi$.

Inversamente.

Para todo conjunto X, tem-se que $X \notin F$, então $\Phi \subseteq \bigcup_{i\in I} \Phi$.

Portanto, $\bigcup_{i\in I} \Phi = \Phi$.

Demonstração **iii)**

Seja $a \in \bigcup_{i\in I} A$, então pelo Axioma (3.5) $a \in A$ para algum $A \in G$ da família $G = \{ A \}$, logo $\bigcup_{i\in I} A \subseteq A$.

Inversamente.

Seja $a \in A$, pela definição de G, tem-se que $x \in A$ para algum $A \in G$, logo $A \subseteq \bigcup_{i\in I} A$.

Portanto, $\bigcup_{i\in I} A = A$

Conseqüência imediata do Axioma (3.5) é que a união de dois conjuntos também é um conjunto. Assim a classe *união de classes* é bem definida como mostra a seguinte propriedade.

Propriedade 3.14

Para todo par de conjuntos A_1, A_2 tem-se que $\bigcup_{i\in I} A_i = A_1 \cup A_2$, onde $I = \{ 1, 2 \}$

Demonstração.

Com efeito, seja $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$, então $a \in X$ para algum $X \in \{ A_1, A_2 \}$.

Assim, $a \in A_1$ ou $a \in A_2$, isto é $a \in A_1 \cup A_2$.

Logo, $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq A_1 \cup A_2$.

Inversamente.

Seja $a \in A_1 \cup A_2$, então $a \in X$ para algum $X \in \{ A_1, A_2 \}$, logo $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ onde $I = \{ 1, 2 \}$. Isto implica que $A_1 \cup A_2 \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

Portanto, $\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2$.

3.3.5 Operações generalizadas.

A existência da operação geral da interseção depende do fato que, para toda família não vazia de conjuntos existe um conjunto que contém exatamente aqueles elementos que pertencem a cada um dos conjuntos da dada família.

Isto é, para toda coleção F, existe outra não vazia A tal que $a \in A$ se e somente se $a \in X$ para todo $X \in F$. Este conjunto A é chamado interseção da família F.

Então, as operações de união e interseção, definidas para conjuntos podemos generalizar por indução a um número finito de conjuntos; assim dados os conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, . . . A_n, podemos escrever:

$$\bigcup_{n \in N} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \ . \ . \ . \ \cup A_n$$

$$\bigcap_{n \in N} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \ . \ . \ . \ \cap A_n$$

Pela lei associativa, a interseção (união) de uma família de conjuntos, podemos agrupar em qualquer modo; por exemplo, seja $J \subseteq I$ e a família de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$. Assim tem-se as classes:

- A classe da união generalizada: $\bigcup_{i \in J} A_i = \{ x /. \ \exists \ i \in J \ \wedge \ x \in A_i \}$
- A classe da interseção generalizada: $\bigcap_{i \in J} A_i = \{ x /. \ \forall \ i \in J \Rightarrow x \in A_i \}$

Propriedade 3.15 Leis de Morgan.

Dado um conjunto X, seja $C = \{ A_i \ /. \ i \in I \}$ uma família de subconjuntos de X com conjunto de índices I, então:

i) $C(\bigcup_{i \in J} A_i) = \bigcap_{i \in J} C(A_i)$

ii) $C(\bigcap_{i \in J} A_i) = \bigcup_{i \in J} C(A_i)$

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Exemplo 3.40

- Sejam $A_1 = \{ 2, 4, 6, 10 \}$, $A_2 = \{ 1, 10 \}$, $A_3 = \{ 6, 5, 10 \}$, $A_4 = \{ 3 , 9, 6 \}$, $A_5 = \{ 8, 4 \}$ e $J = \{ 1, 3, 4 \}$.

  Então $\bigcup_{i \in J} A_i = \{ 2, 4, 6, 10, 5, 3, 9 \}$ e $\bigcap_{i \in J} A_i = \{ 6 \}$

- Seja $B_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ onde $n \in \mathbf{N}$.

  Então $\bigcup_{i\in N} B_i = [-1, 1]$ e $\bigcap_{i\in N} B_i = \{ 0 \}$

- Seja $C_n = \{ x \ /. \ x$ é múltiplo de $n \in \mathbf{N} \}$.

  Então $\bigcup_{i\in N} C_i = \mathbf{N}$ e $\bigcap_{i\in N} C_i = \{0\}$

Propriedade 3.16

Dada uma família induzida de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$, para qualquer conjunto B temos as seguintes igualdades:

a) $B \cap (\bigcup_{i\in N} A_i) = \bigcup_{i\in N} (B \cap A_i)$ **b)** $B \cup (\bigcap_{n\in N} A_i) = \bigcap_{n\in N} (B \cup A_i)$

Demonstração **(a)**

1. Seja $x \in B \cap (\bigcup_{i\in N} A_i)$ . . . hipótese.

2. $x \in B \wedge x \in (\bigcup_{i\in N} A_i)$ . . . def. de $\cap$.

3. $x \in B \wedge x \in A_i$ para algum $i \in \mathbf{N}$ . . . def. de $\bigcup_{i\in N} A_i$

4. $x \in (B \cap A_i)$ para algum $i \in \mathbf{N}$ . . . def. de $\cap$

5. $x \in \bigcup_{i\in N} (B \cap A_i)$ . . . def. de $\bigcup_{i\in N}$

6. $B \cap (\bigcup_{i\in N} A_i) \subseteq \bigcup_{i\in N} (B \cap A_i)$ . . . de (1)-(5)

Inversamente (exercício para o leitor)

Portanto, de (6) e (7) segue que $B \cap (\bigcup_{i\in N} A_i) = \bigcup_{i\in N} (B \cap A_i)$

A demonstração de **b)** é exercício para o leitor.

Dado um conjunto T, dizemos que T funciona como um conjunto de índices para a família $F = \{A_\alpha\}$ de conjuntos se para todo $\alpha \in T$ existe um conjunto A_α na família F. O conjunto T pode ser finito ou infinito. Freqüentemente usamos o conjunto dos números inteiros não negativos como conjunto de índices, porém T pode ser qualquer conjunto não vazio.

Sejam $\alpha \in T$ e A_α, indicamos a reunião dos conjuntos A_α como $\bigcup_{\alpha\in T} A_\alpha$ e definimos a reunião dos conjuntos A_α como o conjunto $\{ x \ /. \ x \in A_\alpha$ para pelo menos um $\alpha \in T\}$; a interseção dos conjuntos A_α indicamos como $\bigcap_{\alpha\in T} A_\alpha$ e definimos como o conjunto $\{ x \ /. \ x \in A_\alpha$ para todo $\alpha \in T \}$.

Dois conjuntos A_α e A_β são disjuntos, se para $\alpha \neq \beta$ temos que $A_\alpha \cap A_\beta = \Phi$ é o conjunto vazio.

Exemplo 3.41

Seja S = **R** o conjunto de números reais e T = **Q** o conjunto de números racionais; para cada $\alpha \in$ **Q** seja $A_\alpha = \{\ x \in \mathbf{R}\ /.\ \ x \geq \alpha\}$. Observe que $\bigcup_{\alpha\in Q} A_\alpha = \mathbf{R}$ entanto $\bigcap_{\alpha\in Q} A_\alpha = \Phi$; os conjuntos A_α são mutuamente disjuntos.

Exemplo 3.42

Sejam $A_1, A_2, A_3, \ . \ . \ . \ A_n$ conjuntos arbitrários. Mostrar que $\bigcap_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$.

Demonstração.

1. Seja $X \in \bigcap_{i=1}^{n} P(A_i)$ . . . hipótese (conclusão)
2. $\Leftrightarrow X \in P(A_i)$ para todo i = 1, 2, 3, . . . , n . . . . def. $\bigcap_{i=1}^{n}$
3. $\Leftrightarrow X \subset$ A_i def. conj. potência
4. $\Leftrightarrow X \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ l propriedade da $\cap$
5. $\Leftrightarrow X \in P(\bigcap_{i=1}^{n} Ai)$ conclusão (hipótese)

Portanto, $\bigcap_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$.

Observação 3.7

Em geral para a união cumpre-se que: $\bigcup_{i=1}^{n} P(A_i) \subset P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$.

3.3.6 Axioma do conjunto vazio.

Suponha temos a família $F = \{\ A_i\ /.\ \ i \in \mathbf{N}\}$ onde os conjuntos A_i são todos o conjunto vazio.

Para família de conjuntos, temos a seguinte propriedade:

Propriedade 3.17

A interseção de uma família de conjuntos vazios é a classe universal.

Demonstração.

Pela classe da interseção arbitrara sabe-se que $\bigcap_{n\in N} A_i = \{\ x\ /.\ \ \forall\ \ i \ \in \mathbf{N}$ então $x \in A_i\ \}$.

Para todo $x \in \bigcap_{n\in N} A_i$ tem-se que $x \in C(x)$ e, para todo $i \in \mathbf{N}$ tem-se que $x \in A_i$ onde $A_i \in F$, assim somente acontece que $x \in C(x)$.

Logo $\bigcap_{n\in N} A_i = \{ x /. \quad x \in C(x) \} = \{ x /. \quad x = x \} = \mathbf{U}$.

Portanto, $\bigcap_{n\in N} \Phi = \mathbf{U}$.

Axioma 3.6 Do conjunto vazio (10º. axioma de Neumann-Bernays-Gödel- Quine).

Existe um conjunto sem elementos C(Φ).

Conseqüência deste axioma é a seguinte propriedade:

Propriedade 3.18

A interseção de uma família de conjuntos universais, é o conjunto vazio.

Demonstração.

Pelo absurdo.

Suponhamos que $\cap \mathbf{U} \neq \Phi$.

Sabe-se que $\cap \mathbf{U} = \{ x /. \quad \forall y \in \mathbf{U},$ tem-se que $x \in C(y) \}$.

Como $\cap \mathbf{U} \neq \Phi$ então, $[\cap \mathbf{U} \cap C(\Phi)]$ implica que $\Phi \in \mathbf{U}$. Assim, existe $x \in \Phi$, logo Φ é não vazio. Contradição !

Portanto, não é verdade que $\cap \mathbf{U} \neq \Phi$;assim, $\cap \mathbf{U} = \Phi$.

Exercícios 3-2

1. Mostre que, uma condição necessária e suficiente para que $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ é que $C \subseteq A$.

2. Dados os conjuntos $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, $B= \{ 5, 3, 2, 7 \}$, $C = \{ 8, 4, 1, 6 \}$ e $\mathbf{U} = \{ x \in \mathbf{N} /. \ 1 \leq x \leq 8 \}$ calcular o seguinte:

1. $A \cap B$	**2.** $[(A' \cap B') \cup (A - C)]'$	**3.** $[(A- B)- (A - C)]'$
4. $A \cup B$	**5.** $[(A' \cap B')- (A' \cap C')]'$	**6.** $[(A \cap B)- (A \cap C)]'$
7. $(A-B)'$	**8.** $[(A' \cap B')- (A' \cup C')]'$	**9.** $[(A \cap B)- (A \cup C)]'$
10. $(A \cap B) \cup C$	**11.** $(A' \cap B)' \cup C$	**12.** $[(A- B) \cap (A - C)]'$
13. $[C - (A \cap B)]'$	**14.** $[(A' \cap B') \cup (A - C)]'$	**15.** $[(A \cap B) \cup (A - C)]'$

3. Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer, demonstre as seguintes proposições:

1. $A \cap A = A$	**2.** $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	**4.** $A \cap B = B \cap A$
5. $A \subseteq A \cup B$ e $A \cap B \subseteq A$	**6.** $A \cup A = A$
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	**8.** $A \cap \Phi = \Phi$
9. $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$	**10.** $A \cup \Phi = A$
11. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	**12.** $A - A = \Phi$
13. $A \cup B = \Phi \Rightarrow A = \Phi \wedge B = \Phi$	**14.** $A - (A - A) = A$

4. Dados: $A=\{ x \in \mathbf{R} /. \ -3 \leq x \leq 5 \}$, $B = \{ x \in \mathbf{R} /. \ 0 \leq x \leq 9 \}$ e $C = \{ x \in \mathbf{R} /. \ 4 \leq x \leq 8 \}$. Determine o conjunto $A \cap B \cap C$

5. Sejam: $A=\{ a \in \mathbf{N} /. \ a$ é múltiplo de 2 $\}$, $B = \{ b \in \mathbf{N} /.$ b é múltiplo de 4 $\}$. Demonstre que $A - B = \{ c \in \mathbf{N} /. \ c = 2k,$ k é ímpar $\}$

6. Demonstrar as seguintes proposições.
   1. Se $A \subseteq B$ e C é um conjuntos quaisquer, então $A \cup C \subseteq B \cup C$.
   2. Se $A \subseteq B$ e C é um conjuntos quaisquer, então $A \cap C \subseteq B \cap C$.
   3. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.
   4. $A \subseteq B$ se, e somente se, $A \cap B = A$.
   5. $B \subseteq A$ se, e somente se, $A = A \cup B$.
   6. Se $B \subseteq A$, então $(A - B) \cup B = A$.

7. Sejam os conjuntos A, B, C qualquer. Demonstrar o seguinte:
   1. $A \cap (B-C) \subset A - (B \cap C)$
   2. $(A - B) \cap C \subseteq A - (B \cap C)$
   3. $(A-B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$
   4. $A \cup (B-C) = (A \cup B) - (C - A)$

5. $A - (A - B) = A \cap B$ &

6. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

7. $A \cap (B - A) = \Phi$

8. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

9. $A - (B-A) = A$

10. $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

11. $A \cap \mathbf{U} = A$

12. $(C-D) \cap (A-B) \subseteq (C \cap A) - (B \cap D)$

13. $B \subseteq A \Rightarrow B - C \subseteq A - C$

14. $B \subseteq A \Rightarrow C - A \subseteq C - B$

15. $A - (A - A) = A$

16. $(A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cap C)$

17. $(A \cup B) - C \subseteq A \cup (B - C)$

18. $A = (A \cap B) \cup (A - B)$

8. Para cada proposição, mostre com um exemplo que:

1. $A - (B \cap C) \not\subset A \cap (B-C)$

2. $A - (B \cap C) \not\subset (A-B) \cap C)$

3. Não é verdade que $A - (B-C) = (A-B) \cup (A - C)$

4. $(C \cap A) - (B \cap D) \not\subset (C-D) \cap (A-B)$

5. $A - (B \cap C) \not\subset (A - B) \cap (A - C)$

6. $A \cup (B - C) \not\subset (A \cup B) - C$

9. Demonstrar que:

1. $A \cup B \not\subset (A - A \cap B) \cup (B - A \cap B$ e ilustre usando diagrama de Venn.

2. Dar um exemplo que a outra inclusão $A \cup B \subseteq (A - A \cap B) \cup (B - A \cap B$) não se cumpre.

3. Dar uma condição necessária e suficiente para que se cumpra a igualdade: $A \cup B = (A - A \cap B) \cup (B - A \cap B)$

10. Dados três conjuntos quaisquer, demonstre que:

1. $A \Delta B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$ **2.** $(A \Delta B) \Delta C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

3. $A \Delta (B \cap C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

11. Determine se o seguinte é verdadeiro. Justificar sua resposta.

1. Se $A - B = \Phi$, então $A = B$.

2. $A \cup B \subset A \cup (B \cap C)$, onde C é conjunto arbitrário, $C \neq A$ e $C \neq B$.

3. $A - B = \Phi$ e $B - A = \Phi \Leftrightarrow A = B$.

12. Demonstre que:

1. $B - \bigcup_{n\in N} A_n = \bigcap_{n\in N} (B - A_n)$ **2**. $B - \bigcap_{n\in N} A_n = \bigcup_{n\in N} (B - A_n)$

13. Sejam $A_n \subseteq A_{n+1}$ para $n \in \mathbf{N}$. Demonstre que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup [\bigcup_{n=2}^{\infty} (A_n - A_{n-1})]$

14. Seja M um conjunto finito, para cada $x \in M$ definimos o conjunto $N_x = M - \{x\}$. Determine:

1. $\bigcap_{x\in M} N_x$ **2.** $\bigcup_{x\in M} N_x$

15. Sejam A_i subconjunto do conjunto **U** para i = 1, 2, ,3, . . . , n. Demonstre que:

1. $C_U[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] = \bigcap_{i=1}^{n} C_U(A_i)$ **2**. $C_U[\bigcap_{i=1}^{n} A_i] = \bigcup_{i=1}^{n} C_U(A_i)$

16. Suponhamos $A_n = \{ x \in \mathbf{N} \ /. \ x$ é múltiplo de $n \}$, onde $n \in \mathbf{N}$. Determine:

1. $A_7 \cap A_2$ **2.** $A_6 \cap A_8$ **3.** $A_3 \cap A_2$ **4**. $A_s \cap A_{st}$

17. Seja $B_i = [i, \ i+1)$ um intervalo semi-aberto $i\in \mathbf{N}$.Determine:

1. $\bigcup_{i=0}^{15} B_{5+i}$ **2.** $\bigcup_{i\in N} B_{5+i}$ **3**. B_4 $\cap$ B_5 **4.** $B_6 \cap B_7$

18. Sejam A, B subconjuntos de um conjunto X. Mostre que X - A = B se e somente se $A \cup B = X$, $A \cap B = \Phi$.

19. Mostre que se $A \subseteq B$ se e somente se A- B = Φ .

20. Dados os conjuntos X e A, B, C $\subseteq$ X defina o conjunto A - (B- C)). Os conjuntos A - (B-C) e (A-B)-C são iguais, justifique.

21. Sejam $A_0 = \Phi$, $A_n = A_{n-1} \cup \{A_{n-1}\}$, $n \in \mathbf{N}$. Descrever explicitamente A_1, A_2, A_3, A_4.

1. Quantos elementos tem cada um destes conjuntos?

2. Quantos elementos tem A_n sendo n arbitrário?

22. Seja A_1 um conjunto arbitrário, e definimos $A_{n+1} = P(A_n)$, $n \in \mathbf{N}$, $A = \bigcup_{n\in N} A_n$.

É verdade que $B \subseteq A$ se e somente se $P(B) \subseteq A$?

23. Para cada $k \in \mathbf{N}$, seja $A_k = \{ n \in \mathbf{Z} \ /. \ n \geq k \}$, verificar que:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ . . . \ \supseteq A_k \supseteq A_{k+1} \supseteq . . .$$

por conseguinte $\bigcap_{n=1}^{k} A_n = A_k \neq \Phi$ para qualquer $k \in \mathbf{N}$. Porém $\bigcap_{n\in N} A_n = \Phi$.

24. Para cada $n \in \mathbf{N}$ seja $A_n = [0, 1-\frac{1}{2^n}]$, $B_n = [0, 1-\frac{1}{3^n}]$. Mostre que A_n está estritamente contido em B_n para todo $n \in \mathbf{N}$.

A união de todos os A_n está estritamente contida na união dos B_n? Sugestão: Mostre que $\bigcup_{n\in N} A_n = \bigcup_{n\in N} B_n = [0, 1)$.

25. Leia com atenção:

a) Em um hospital existem 2 médicos pediatras, paulistas, recém- formados;

b) Há 12 médicos recém- formados;

c) Há 13 médicos pediatras;

d) Há 11 médicos paulistas;

e) Há 4 médicos pediatras que não são paulistas nem recém- formados;

f) Existem 5 médicos recém- formados que não são paulistas nem pediatras;

g) São 3 médicos paulistas que não são recém formados e nem pediatras;

h) O total é de 23 pessoas.

Quantos são os médicos paulistas recém formados, que não são pediatras?

26. O resultado do levantamento de preferência de suco de frutas de maça, morango e abacaxi, é o seguinte: 60% gostam de maça, 50% gostam de morango, 40% gostam de abacaxi, 30% gostam de maça e abacaxi, 20% gostam de morango e abacaxi, 15% gostam de maça e abacaxi e 5% gostam os três sabores.Qual é a porcentagem de pessoas da pesquisa que não gosta suco de frutas mencionadas?

27. Na Licenciatura de Matemática do UFT foi realizada uma pesquisa com 100 estudantes, que reprovaram matérias e o resultado foi o seguinte: 28 reprovaram em Cálculo II, 30 em Cálculo I, 42 em Fundamentos, 8 em Cálculo II e Cálculo I, 10 em Cálculo II e Fundamentos, 5 em Cálculo I e Fundamentos e 3 nas três matérias.

a) Quantos alunos não reprovaram estas três matérias?

b) Quantos alunos somente reprovaram em Fundamentos?

c) Quantos estudantes foram reprovados em Cálculo II ou Cálculo I mas não em Fundamentos?

28. Assistiram a um jogo de futebol 120 torcedores, num gol mal cobrado pelo juiz todos brigaram e o resultado foi o seguinte: 45 foram feridos na cabeça, 42 no braço, 40 na perna, somente: 7 foram feridos na cabeça e braço, 12 na perna e braço, 15 na perna e cabeça. Se os 120 foram feridos, averiguar quantos feridos houve nos três lugares do corpo.

29. No ano de 2002, de um total de 41 alunos do 1^o da Licenciatura em Matemática que participaram das provas das disciplinas Cálculo I (C), Fundamentos da Matemática (F) e Geometria (G), obteve-se a seguinte informação:

Disciplinas	C	F	G	C, F	C, G	F, G	C, F, G
Alunos reprovados	12	5	8	2	6	3	1

Pergunta-se: Qual o número de estudantes que aprovaram as três disciplinas?

Capitulo IV

RELAÇÕES

Zermelo

Zermelo nasceu em Berlin em 27 de Julho de 1871 e faleceu em Freiburg im Breisgau (Alemanha), em 21 de maio de 1953 . Estudou nas universidades de Berlin, Halle e Freiburg; recebeu aulas de Frobenius, Planck, Schmidt y Schwarz.

Formou-se doutor em 1894 na universidade de Berlim com um trabalho sobre as pesquisas de Weierstrass no cálculo de variações. Zermelo permaneceu na universidade de Berlim, seu trabalho girava mais para áreas de matemática aplicada e, sob a orientação de Planck fez trabalhos sobre hidrodinâmica.

Em 1897 Zermelo foi a Göttingen onde naquela época era o maior centro de pesquisa matemática no mundo, se interessou pela hipótese o contínuo que havia adiantado Cantor (cada subconjunto infinito do contínuo é enumerável ou tem a cardinalidade do contínuo).

Zermelo começou a trabalhar nos problemas da teoria de conjuntos, analisando a idéia de Hilbert e direcionando para uma definição do problema da hipótese do contínuo.

Em 1902, Zermelo publicou seu primeiro trabalho sobre teoria dos conjuntos. Tratava- se sobre a adição dos cardinais transfinitos. Em 1904 Zermelo demonstro que todo conjunto pode estar bem ordenado. A demonstração foi baseada no axioma de eleição. Este resultado trouxe fama a Zermelo e proporcionando-lhe também um promoção rápida á professor, porém muitos matemáticos não aceitaram o tipo de provas que Zermelo utilizo.

Em 1908 , Zermelo publicou seu sistema axioma que contem sete axiomas apesar de sua falha para provar a consistência. Zermelo indicou geralmente seus axiomas e teoremas em palavras melhor que com símbolos. Skolem e Fraenkel melhoraram independentemente este sistema. O sistema resultante, com 10 axiomas, é agora geralmente o mais usado para a teoria de conjuntos. Uma curiosidade de Zermelo é que não utilizava símbolos em seus desenvolvimentos.

Em 1910 Zermelo deixou Göttingen ao receber uma proposta de trabalho da Universidade de Zurich. Em 1916 Zermelo renunciou a seu posto em Zurich e regressou a Alemanha onde viveu durante 10 anos.

4.1 OUTRAS CLASSES DE CONJUNTOS

Dizemos no capitulo anterior que C(x) são todos os elementos que pertencem, a uma mesma classe, e p(x) é a propriedade que satisfazem os elementos x de uma classe.

O axioma de especificação garante que, para cada propriedade (fórmula) p(x) existe ao menos uma classe formada por todos os conjuntos que satisfazem a fórmula p(x) . Lembre que, quando falamos de classe, seus elementos podem ser conjuntos ou elementos de um determinado conjunto.

Assim, para cada proposição p(x) existe somente uma classe dos conjuntos que verificam p(x). Este fato permite definir classes adicionais mediante que satisfazem a proposição p(x) , entre elas temos:

1. A classe par ordenado, ou bem, díada: $(a, b) = \{ \{a\}, \{a, b\} \}$
2. A classe relação: $R(A) \Leftrightarrow (\forall x), (x \in A \Rightarrow (\exists a, b) (a, b) = x))$
3. A classe domínio e contradomínio de uma relação R :

   Domínio: $D(R) = \{ a /. \exists b \wedge (a, b) \in R \}$

   Contradomínio: $Im(R) = \{ b /. \exists a \wedge (a, b) \in R \}$
4. A classe relação inversa de outra relação: $R^* = \{(b, a) /. \exists R \wedge (a, b) \in R \}$
5. A classe aplicação: $f(A) \Leftrightarrow R(A) \wedge (\forall a, b, c) ((a, b) \in R \wedge (a, c) \in R \Rightarrow b = c))$
6. A classe aplicação Bijetiva:

   $$Bi(f(A)) \Leftrightarrow f(A) \wedge (\forall a, b, c)((a, b) \in f \wedge (c, b) \in f \Rightarrow a = c)$$
7. As classes coordenáveis ou eqüipolentes:

   $$A \sim B \Leftrightarrow (\exists f(A)) (Bi(f(A)) \wedge D(f) = A \wedge Im(f) = B)$$
8. A classe de menor ou igual potência que outra:

   $$A \leq B \Leftrightarrow (\exists S) (S \subseteq B \wedge A \sim S)$$
9. A classe estritamente de menor potência que outra:

   $$o(A) < o(B) \Leftrightarrow (\exists S) (S \subseteq B \wedge (\exists b \in B\text{-}S) \wedge A \sim S)$$
10. A classe infinita: $Inf(A) \Leftrightarrow (\exists X) (X \subseteq A \wedge X \neq A \wedge A \sim X)$
11. A classe finita: $Fin(A) \Leftrightarrow \sim Inf(A)$
12. A classe indutiva: $Ind(A) \Leftrightarrow \Phi \in A \wedge (\forall a \in A \Rightarrow s(a) \in A)$
13. A classe inclusiva: $Inc(A) \Leftrightarrow (\forall X) (X \in A \Rightarrow X \subseteq A)$
14. A classe sucessor de outra classe: $s(a) = a \cup \{ a \}$

4.1.1 Propriedade definida sobre um conjunto.

Definição 4.1

Seja A um subconjunto do conjunto E, dizemos propriedade característica dos elementos do conjunto A , a todo critério que permite decidir se qualquer elemento x de E , entre:

$$x \in A \text{ ou } x \notin A$$

Se p(x) é uma propriedade característica dos elementos de A, então ~ p(x) será uma propriedade característica dos elementos do $C_E(A)$.

De p(x) dizemos que é uma propriedade definida sobre o conjunto E. Logo compre que:

- $p(x) \Leftrightarrow x \in A$
- $\sim p(x) \Leftrightarrow x \in C_E(A)$.

Podemos escrever então:

$$A = \{ x \in E /. \ p(x) \} \text{ ou } C_E(A)=\{ x \in E /. \sim p(x) \}$$

Exemplo 4.1

1. $A = \{ x \in \mathbf{N} /. \ x > 0 \}$; aqui p(x): x>0 .

x>0 é uma propriedade característica dos elementos de A.

x > 0 é uma característica definida sobre **Z**.

2. $B = \{ x \in \mathbf{N} /. \ x < 10 \}$; aqui p(x) x< 10 .

x < 10 é uma propriedade característica dos elementos de B.

x < 10 é uma característica definida sobre **N**.

3. Seja T o conjunto de todos os triângulos do plano.

$C = \{ x \in T /. \ x$ é isósceles } .

"x *é isósceles*" é uma propriedade característica dos elementos de C.

" x *é isósceles*" é uma característica definida sobre T .

4.1.2 Quantificadores.

Seja E um subconjunto de um conjunto universal **U** , a proposição: "*Para todo* x *de* E , *cumpre-se a propriedade* p(x) ", escreve-se:

$$\forall \ x \in E /. \ p(x)$$

se esta proposição for verdadeira, descreverá todo o conjunto E ; aqui p(x) é uma propriedade definida sobre E e a característica dos elementos de E . Conseqüentemente ~ p(x) é uma propriedade característica dos elementos de $C_U(E) = \Phi$; isto significa que não existem elementos $x \in E$ que cumpram a propriedade ~ p(x) .

A proposição: "*Existe algum elemento* x de E *que cumpra* ~ p(x)", escreve-se

$$\exists \ x \in E /. \sim p(x)$$

e descreve o conjunto $\Phi = C_U(E)$.

Estabelecemos então as seguintes equivalências:

$$\sim [\exists \ x \in E /. \sim p(x)] \quad \Leftrightarrow \quad [\forall \ x \in E /. \ p(x)]$$

ou o que é o mesmo:

$$\sim [\forall \ x \in E \ /. \ p(x)] \quad \Leftrightarrow \quad [\ \exists \ x \in E \ /. \sim p(x)\ ]$$

se na primeira equivalência trocamos p(x) por ~ q(x) resulta:

$$\sim [\exists \ x \in E \ /. \ q(x)] \quad \Leftrightarrow \quad [\forall \ x \in E \ /. \sim q(x)\ ]$$

Em resumo:

$$\sim [\forall \ x \in E \ /. \ p(x)] \quad \Leftrightarrow \quad [\ \exists \ x \in E \ /. \sim p(x)\ ]$$

$$\sim [\exists \ x \in E \ /. \ p(x)] \quad \Leftrightarrow \quad [\forall \ x \in E \ /. \sim p(x)\ ]$$

Observação 4.1

Se p(x) é uma propriedade definida sobre E e é a característica dos elementos de $A \subset E$, então as proposições:

$$[\forall \ x \in E \ /. \ p(x)\ ] \ ; \quad [\exists \ x \in E \ /. \ p(x)\ ] \quad e \quad \sim [\exists \ x \in E \ /. \ p(x)\ ]$$

são equivalentes a $A = E$, $A \neq \Phi$ e $A = \Phi$.

4.2 CONJUNTO PRODUTO

4.2.1 Par ordenado.

Intuitivamente, um par ordenado é um objeto matemático que consta de dois elementos, por exemplo, a e b , de modo, que no par designa-se com o *primeiro* e *segundo elemento* respectivamente.

Logo, o conjunto { a, b } com a propriedade que a é o primeiro e b o segundo elemento, constitui um par ordenado.

Para não confundir par ordenado com conjunto de dois elementos, um par ordenado denota-se por (a, b) e é definido como u = (a, b) .

Como conjuntos, { a, b } = { b, a } , entanto como pares ordenados, em geral $(a, \ b) \neq (b, \ a)$. A operação de pares está sujeita á seguinte regra:

> *"Para que se cumpra que* (a, b) = (c, d) *tem que acontecer que* a = c *e* b = d . *Em particular* (a, b) = (b, a) *se, e somente se,* a = b*"*

A igualdade entre pares verifica o axioma de extensão, e portanto, são objetos matemáticos que podem ser elementos de um conjunto.

O conceito de *par* podemos ampliar da seguinte maneira: Dados três objetos matemáticos a, b e c , definimos (a, b, c) = ((a, , b), c) e dizemos que (a, b, c) é uma terna ordenada.

Para que duas ternas ordenadas (a, b, c) e (m, n, p) sejam iguais, é necessário que a =m, b =n e c= p .

4.2.2 Produto cartesiano.

Definição 4.2 Produto cartesiano**.**

Dados dois conjuntos A e B , o produto cartesiano $A \times B$ (nessa ordem) é o conjunto constituído pelos pares ordenados $\{ (x, y) \in A \times B \ /. \ x \in A \wedge y \in B \}$

Dois elementos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) do produto cartesiano $A \times B$ dizemos que são iguais se, e somente se, $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.

Dados os conjuntos A e B , podemos construir os conjuntos $A \times B$ e $B \times A$ que, em geral são distintos. Para o caso de A = B o produto $A \times B$ cartesiano simbolizamos A^2 .

Suponhamos temos o conjunto A , e consideremos o produto cartesiano $A \times A$, mostra-se que se A é um conjunto finito com n elementos, então o conjunto $A \times A$ tem n^2 elementos.

Exemplo 4.2

a) Considere os conjuntos A = {2, 3, 4 } e B = { 3, 5 } , o produto cartesiano $A \times B$ = {(2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 5) }

b) Seja A = {1, 2, 3} e B = {a, b}, então $B\times A$ = { (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)}

c) Suponhamos os conjuntos A = { 2 } , B = { 3, 5 } e C = { a, b } , então $(A \times B) \times C$ = { ((2, 3), a), ((2, 3), b), ((2, 5), a), ((2, 5), b), }

Propriedade 4.1

Para qualquer conjunto A, B e C tem-se:

1. $A \times B \neq B \times A$ . . . não é comutativa
2. $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ . . . não é associativa.
3. $A \times \Phi = \Phi$
4. $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$
5. $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$
6. $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$
7. $A \times B = \Phi \Rightarrow A = \Phi \vee B = \Phi$
8. $A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$
9. $A \times C = B \times C \wedge C \neq \Phi \Rightarrow A = B$

Demonstração (4)

1. $(x, y) \in A \times (B \cup C)$ . . .hipótese.

2. $x \in A \wedge y \in (B \cup C)$ . . . def. de $\times$.

3. $x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$ . . . def. de $\cup$.

4. $(x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C$ . . . tautologia.

5. $(x, y) \in (A \times B) \vee (x, y) \in (A \times C)$ . . . def. de $\times$.

6. $(x, y) \in ((A \times B) \cup (A \times C))$ . . . def. de $\cup$

7. $A \times (B \cup C) \subseteq ((A \times B) \cup (A \times C))$ . . . de (1)-(6)

8. $(x, y) \in ((A \times B) \cup (A \times C))$ . . . hipótese.

9. $(x, y) \in (A \times B) \vee (x, y) \in (A \times C)$ . . . def. de $\cup$

10. $(x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$ . . . def. de $\times$.

11. $x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$ . . . tautologia

12. $x \in A \wedge y \in (B \cup C)$ . . . def. de $\cup$.

13. $(x, y) \in A \times (B \cup C)$ . . . def. de $\times$.

14. $((A \times B) \cup (A \times C)) \subseteq A \times (B \cup C)$ . . . de (8)-(13)

Portanto, de (7) e (14) segue que $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$.

Demonstração (74)

Suponhamos que não seja verdade $A = \Phi \vee B = \Phi$, isto é

1. $\sim (A = \Phi \vee B = \Phi)$ . . . hipótese auxiliar.
2. $A \neq \Phi \wedge B \neq \Phi$ . . .lei de Morgan
3. $\exists\, a \in A, \ \exists\, b \in B$ . . . def. de Φ
4. $\exists\, (a, b) \in A \times B$ . . .def. de $\times$
5. $A \times B \neq \Phi$ . . . def. de $\times$, def. de Φ
6. $A \neq \Phi \wedge B \neq \Phi \Rightarrow A \times B \neq \Phi$ . . . (1)-(6)
7. $A \times B = \Phi \Rightarrow A = \Phi \vee B = \Phi$ . . . tautologia.

Portanto, de (7) $A \times B = \Phi$ ==> $A = \Phi \vee B = \Phi$

A demonstração das demais propriedades é exercício para o leitor.

4.2.3 Diagonal de um produto cartesiano.

Definição 4.3 Diagonal do produto.

Dado o conjunto A, a diagonal do produto cartesiano $A \times A$ é o conjunto ΔA definido por: $\Delta A = \{ (x, y) /. x = y \}$

Logo, se A = { a_i /. i = 1, 2, 3, . . .   } , então o conjunto: Δ A ={ (a_i, a_i) ∈ A × A /. i = 1, 2, 3, . . . , n } é a diagonal de A × A

Exemplo 4.3

Se A= { 3, 5, 9 } então Δ A = { (3, 3), (5, 5), (9, 9) }

4.2.4 Relações.

Definição 4.4 Relações**.**

Dados os conjuntos A e B , dizemos relação de A em B a todo subconjunto de A × B .

Isto é, *R* é relação de A em B se, e somente se, $R \subseteq A \times B$.

Exemplo 4.4

Sejam os conjuntos A = { alunos do 1º. ano de Fundamentos da Matemática } e B = N , então entre A e B podemos formar algumas relações como:

S_1 = {(x, y) ∈ A × B /. x tem y anos }

S_2 = {(x, y) ∈ A × B /. x tem y reais }

S_3 = {(x, y) ∈ A × B /. x tem y de nota na primeira prova }

Observação 4.2

- Se o conjunto A tiver n elementos, o conjunto B tiver m elementos, então A × B têm n.m elementos; e assim podemos obter 2^{nm} subconjuntos diferentes (relações binárias).
- Sendo a relação um conjunto, ela é determinada por extensão nomeando todos seus elementos, ou por compreensão expressando um enunciado aberto $p_{(a,\ b)}$ tal que para todo (a, b) ∈ A × B , a sentença $p_{(a,\ b)}$ seja uma proposição.

Exemplo 4.5

Sejam A= { a, b } e B = { 2, 5 } , sabe-se que A × B = { (a, 2), (a, 5), (b, 2), (b, 5) } , e aqui podemos obter 2^4 = 16 relações diferentes a saber:

R_1 = { } = Φ

R_2 = { (a, 2) }

R_3 = { (a, 2), (a, 5) }

R_4 = { (b, 2), (b, 5) }

R_5 = { (a, 5), (b, 2), (b, 5) }

.

.

.

R_{15} = { (a, 2), (a, 5), (b, 5) }

R_{16} = { (a, 2), (a, 5), (b, 2), (b, 5) }= A × B

Exemplo 4.6

Seja S = { 7, 4, 9, 6, 2 } e T = {5, 1, 4, 3, 2 } e considere a relação R que diz: ". . . é dobro de . . . ", então podemos escrever:

$R = \{ (x, y) \in S \times T /.\ \ x$ é dobro de $y \}$ . . . por compreensão.

$R = \{ (4, 2), (6, 3), (2, 1), \}$ . . . por extensão.

Observação 4.3

1. Se $x \in A$ e $y \in B$ e satisfaz que, $(x, y) \in R$, então diz-se que x está em relação com y mediante R e denotamos com o símbolo $x\ R\ y$.

2. Se R é uma relação de A em B , o conjunto A é chamado de "conjunto de partida" e o conjunto B é chamado de "conjunto de chegada".

3. Dado que o conjunto vazio $\Phi \subseteq A \times B$, então Φ é uma relação de A em B e é chamada de ``relação nula ou vazia''.

4. Temos que R é uma relação de A em B se, e somente se, $R \subseteq A \times B$.

Propriedade 4.2

Quaisquer que seja uma relação R , tem-se que $R \subseteq \mathbf{U} \times \mathbf{U}$.

Demonstração.

Para todo $x \in R$ tem-se que $\exists$ a, b $\in \mathbf{U}$ tal que (a, b) = x .

Assim, $x \in R$ implica que $C(x) \Rightarrow C(a, b)$, então $C(a) \wedge C(b) \Rightarrow (a, b) \in \mathbf{U} \times \mathbf{U}$.

Portanto, $R \subseteq \mathbf{U} \times \mathbf{U}$.

4.2. 5 Domínio e Imagem de uma relação.

Seja R uma relação não vazia de A em B , isto é: $R = \{(x, y) \in A \times B\ /.\ x\ R\ y \}$

Definição 4.5 Domínio de uma relação.

O domínio da relação R é o conjunto dos elementos $x \in A$ para os quais existe um elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$, e denotamos:

$$D(R) = \{ x \in A /.\ \exists\, y \in B\ \wedge (x, y) \in R \}$$

Isto é, o domínio de R é o subconjunto de elementos de A formado pelas primeiras componentes dos pares ordenados que pertencem à relação.

Definição 4.6 Imagem de uma relação.

A imagem ou contradomínio de uma relação R é o conjunto dos elementos y $\in$ B para os quais existe um elemento x $\in$ A tal que (x, y) $\in$ A $\times$ B ; e denotamos: Im(R) = { y $\in$ B /. $\exists$ x $\in$ A $\wedge$ (x, y) R }

Isto é, a imagem de R é o subconjunto de B formado pelas segundas componentes dos pares ordenados que pertencem à relação.

Exemplo 4.7

No Exemplo (4.5) temos que:

D(R_1) = Φ,	Im(R_1) = Φ ;
D(R_2) = {a} ,	Im(R_2) = {2} ;
D(R_3) = {a} ,	Im(R_3) = {2, 5} ;
D(R_4) = {b} ,	Im(R_4)={2, 5} e
D(R_5) = {a, b} ,	Im(R_5) ={2, 5}

Exemplo 4.8

No Exemplo (4.6) temos que:

D(R) = { 4, 6, 2 } e Im(R) = { 2, 3, 1 }

4.2.6 Diagramas de coordenadas.

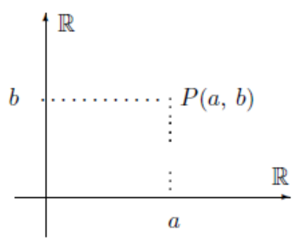


Figura 4.1:

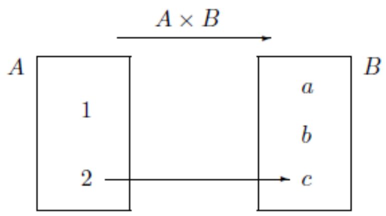


Figura 4.2:

Estamos familiarizados com o plano cartesiano **R** $\times$ **R** como mostra a Figura (4.1), cada ponto P $\in$ $\mathbf{R}^2$ representa um par ordenado (a, b) de números reais. Uma reta imaginária vertical que passa por P corta o eixo horizontal em a e outra reta horizontal corta o eixo vertical em b .

Quando o produto cartesiano de dois conjuntos não tiver muitos elementos, podemos representar em um diagrama de coordenadas diferente. Por exemplo se A = { 1, 2 } e B= { a, b, c } , o produto cartesiano A × B podemos representar mediante o diagrama da Figura (4.2); o ponto Q é o par (2, c) .

Exemplo 9

Sejam os conjuntos A = { x_1, x_2, x_3, x_4 } e B = { y_1, y_2, y_3, y_4 } , e a relação: *R* = { (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)}

O diagrama da relação *R* mostra-se na Figura (4.3).

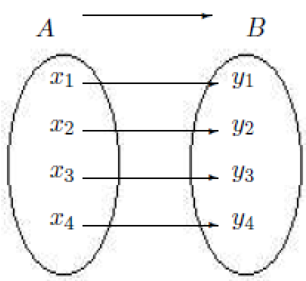


Figura 4.3:

4.2.7 Gráfico de uma relação.

Definição 4.7 Gráfico de uma relação.

Dados os conjuntos A, B , seu produto cartesiano A × B e uma relação *R* ⊆ A × B . Chamamos de gráfico G_ *R* de *R* ao conjunto:

$$G_R = \{ (a, b) \in A \times B \ /. \ (a, b) \in R \}$$

Se um par ordenado (a, b) ∈ G_R , dizemos que “**b** corresponde **a** segundo *R* ''.

Exemplo 4.10

Seja B = { 1, 2, 3, 4 } e a relação *T* ⊆ B × **R** definida por *T* = { (x, x+3) } , então *T* tem por gráfico o conjunto G_T = { (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7) }

Exemplo 4.11

Se A = {1 , 2 , 3} e B = {a, b} , então G_R = {(1, a), (2, a), (3, a), (3, b)} é um gráfico, observe que G_R ⊆ A × B .

Exemplo 4.12

Seja **N** e a relação *S* ⊆ **N** × **N** definida por *S* = { (x, x^3) } . Então o gráfico G_S de *S* é o conjunto: G_S = { (1, 1), (2, 8), (3, 27), (4, 64), (5, 125), . . . , (n, n^3), . . . }

Exemplo 4.13

Sejam os conjuntos: A = { 3, 4, 5, 6 } , B = {1, 2, 3, 4 } e a relação: *S* = {(x, y) ∈ A × B /. x = y+2 } . Podemos escrever: *S* = {(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4) }

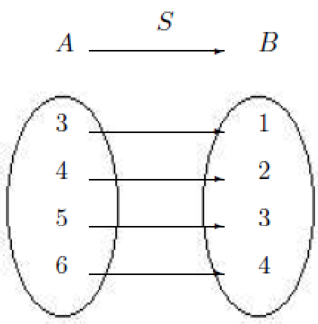


Figura 4.4:

A Figura (4.4) representa o diagrama da relação de S .

O domínio e imagem da relação S é: D(S) = {3, 4, 5, 6 } e Im(S) = {1, 2, 3, 4 } respectivamente.

Exemplo 4.14

Para os conjuntos do Exemplo (4.13) seja: T = {(x, y) $\in$ A $\times$ B /. x > y } , logo

T = {(3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2),

(6, 2), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (5, 4), (6, 4) } .

O domínio da relação T é: D(T) = {3, 4, 5, 6 } ; é a imagem da relação T é: Im(T) = {1, 2, 3, 4 } .

4.3 TIPOS DE RELAÇÕES

4.3.1 Relação binária.

Definição 4.8 Relação binária.

Seja A=B dizemos relação binária, a toda relação entre elementos de A.

Segundo nossa definição R é uma relação binária sobre A, se $R \subseteq$ A $\times$ A .

4.3.2 Relação reflexiva.

Definição 4.9 Relação reflexiva.

Seja R uma relação binária definida do conjunto A ; dizemos que R é reflexiva se, qualquer que seja o elemento x $\in$ A , o par (x, y) verifica a relação x = y .

Isto é, R é reflexiva se, e somente se, $\forall$ x $\in$ A, (x, x) $\in$ R

Exemplo 4.15

Seja A = **N** e R a relação “. . . tem como quadrado a . . . “.

Esta relação não é reflexiva, observe que os únicos pares ordenados que satisfazem a relação são (0, 0) e (1, 1)

Exemplo 4.16

Seja A = **N** e R a relação x = y, x, y $\in$ **N**.

Os pares ordenados (0, 0), (1, 1) e (2, 2) , pertencem ao gráfico da relação R , então para todo x $\in$ **N**, (x, y) $\in$ R ; isto é R é reflexiva.

O gráfico de R contém os pares (x, x) , que é a diagonal do conjunto A^2 .

Então R é reflexiva se, e somente se, $\Delta A^2 \subseteq G\_ R$.

Exemplo 4.17

Seja A um conjunto, consideramos o conjunto de partes P(A) , então a inclusão e a igualdade em P(A) são reflexivas.

Exemplo 4.18

1. Suponha o conjunto B = { x /. x é uma reta do plano } e a relação definida por:

   $$R_1 = \{ (x, y) \in B \times B /.\ x \text{ é paralela a } y \}$$

   ela é reflexiva em B , pois toda reta é paralela consigo mesma; cumpre que $(x, x) \in R_1\ \forall\ x \in B$.

2. Suponha o conjunto B = { x /. x é uma reta do plano } e a relação definida por:

   $$R_2 = \{ (x, y) \in B \times B /.\ x \text{ é perpendicular a } y \}$$

   ela não é reflexiva em B , pois toda reta não é perpendicular consigo mesma; não cumpre que $(x, x) \in R_2\ \ \forall\ x \in B$.

4.3.3 Relação simétrica.

Definição 4.10 Relação simétrica.

Uma relação binária R , definida de um conjunto A , é simétrica se qualquer que seja o par $(x, y) \in R$ que verifica a relação, então o par (y, x) também verifica a relação.

De outro modo; uma relação $R \subseteq A \times A$ é simétrica se, e somente se, $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R,\ \ \forall\ (x, y) \in R$.

Exemplo 4.19

Sejam A = { x /. x é uma reta do plano } e a relação $R = \{ (x, y) \in A^2 /.\ x$ é perpendicular a y } é simétrica em A , pois toda reta x que seja perpendicular a y , cumpre que y é perpendicular a x ; isto é, cumpre que $(y, x) \in R\ \ \forall\ (x, y) \in R$.

Exemplo 4.20

Em **N** a relação x = y é simétrica; isto do fato y = x .

Exemplo 4.21

Em **N** a relação “ . . . têm por quadrado a . . . “ não é simétrica, é suficiente observar que o par (3, 9) verifica, porém o par (9, 3) não satisfaz a relação.

4.3.4 Relação anti-simétrica.

Definição 4.11 Relação anti-simétrica.

Dizemos que uma relação binária R sobre A é anti-simétrica, se para todo (x, y) $\in R$ e (y, x) $\in R$; verifica a relação x = y

Isto é, $R \subseteq A \times A$ é anti-simétrica se, e somente se, $[(x, y) \in R \ \wedge\ (y, x) \in R\ ] \Rightarrow x = y$

Exemplo 4.22

Seja P(A) o conjunto potência de A , a relação $R = \{ (A, B) \in P(A)^2 /.\ A \subseteq B \}$ é anti-simétrica.

Com efeito:

1. $A \subseteq B$ e $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ . . . def. de $\subseteq$

2. Logo, $(A, B) \in R \wedge (B, A) \in R \Rightarrow A = B$ . . (1), def. de =

Portanto de (2), R é anti-simétrica.

Exemplo 4.23

A relação $R = \{ (a, b) \in \mathbf{R}^2 /.\ a \leq b \}$ é anti-simétrica. Com efeito:

1. $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$ . . . def. de $\leq$

2. Logo, $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$ . . (1), def. de =

Portanto de (2), R é anti-simétrica.

Exemplo 4.24

Seja A = **N** e R a relação ". . . divide a . . . ".

Esta relação é anti-simétrica, observe que se x divide y e y divide x então, x = y .

4.3.5 Relação transitiva.

Definição 4.12 Relação transitiva.

Dizemos que uma relação binária R sobre A é transitiva, se para todo $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ verifica-se que $(x, z) \in R$.

Isto é, $R \subseteq A \times A$ é transitiva se, e somente se, $[(x, y) \in R \ \wedge\ (y, z) \in R\ ] \Rightarrow (x, z) \in R$.

Exemplo 4.25

A relação $R = \{ (a, b) \in \mathbf{R}^2 /.\ a < b \}$ é transitiva.

Com efeito:

1. a < b e b < c $\Rightarrow$ a < c . . . def. de <

2. Logo, (a, b) $\in R \wedge$ (b, c) $\in R \Rightarrow$ (a, c) $\in R$ . . . (1), def. de R

Portanto de (2), R é transitiva.

Exemplo 4.26

1. A relação de inclusão $\subseteq$ é transitiva; isto do fato que se A $\subseteq$ B $\wedge$ B $\subseteq$ C $\Rightarrow$ A $\subseteq$ C

2. A relação de igualdade = em P(A) é transitiva.

3. Se R = { (2, 1), (1, 2), (1, 1), (1, 3), (4, 4) } , então R não é transitiva. Isto pelo fato (2, 1) $\in R \wedge$ (1, 3) $\in R$, não implica que (2, 3) $\in R$

4.3.6 Relação de equivalência.

Definição 4.13 Relação de equivalência.

Uma relação binária, definida em um conjunto A $\neq \Phi$, é relação de equivalência se, e somente se, ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

Isto é; diz-se que um subconjunto R de A $\times$ A define uma relação de equivalência sobre A , se satisfaz as seguintes condições:

1. (a, a) $\in R$ para todo a $\in$ A .

2. (a, b) $\in R$ implica que, (b, a) $\in R$.

3. (a, b) $\in R$ e (b, c) $\in R$ então (a, c) $\in R$

Ao invés de falar de subconjuntos de A $\times$ A podemos falar de uma relação binária $*$ (relação entre dois elementos de A) sobre o próprio A , definindo que b esta relacionado com a se (a, b) $\in R$.

Exemplo 4.27

Seja **Z** o conjunto de números inteiros. Dados a, b $\in$ A definamos a$*$b se a-b for um número inteiro par. Verifiquemos que $*$ define uma relação de equivalência em **Z** $\times$ **Z**.

Solução.

1. Do fato 0 = a - a é par, segue que a $*$ a .

2. Para a $*$ b tem-se que a - b é par, do fato b-a = -(a-b) tem-se que a - b também é par, portanto cumpre que b $*$r a (é bem definido).

3. Se a $*$ b e b $*$ c , então tanto a - b e b-c são pares, logo a - c = (a - b) + (b - c) é par, assim a $*$ c é bem definido.

Portanto, $*$ define uma relação de equivalência em **Z** $\times$ **Z** .

Nossa definição de relação de equivalência podemos escrever na forma: $\sim$

Definição 4.14

A relação binária, $\sim$ sobre A é dita uma relação de equivalência sobre A , se para qualquer elemento a, b, c $\in$ A tem-se que:

1. $a \sim a$.

2. $a \sim b$ implica que, $b \sim a$.

3. $a \sim b$ e $b \sim c$ implica $a \sim c$.

A primeira destas relações é a reflexibilidade, a segunda simetria e a terceira transitividade.

O conceito de relação de equivalência é bastante importante e desempenha um papel central em toda a matemática.

Exemplo 4.28

A semelhança de triângulos é um exemplo de relação de equivalência

Isto significa que, se a, b e c são três triângulos semelhantes quaisquer, então verificam as três seguintes condições:

1. a é semelhante com a .

2. Se a é semelhante com b , então b é semelhante com a .

3. Se a é semelhante com b e, se b é semelhante com c , então a é semelhante com c .

Exemplo 4.29

Outro exemplo de relação de equivalência é a congruência de triângulos, as condições do (1), (2) e (3) do Exemplo (4.28) também verificam-se se substituímos a palavra "semelhante" por \`"*congruente"*.

Observação 4.4

Se *R* é uma relação de equivalência, para traduzir que o par (a, b) verifica a relação *R* , podemos substituir a notação $(a, b) \in R$ por $a \equiv b \mod R$, e se lê \`\` a é equivalente a b módulo *R* ''

Logo, se a, b, c são elementos quaisquer de um conjunto A , e se *R* é relação de equivalência em A , tem-se:

- $\forall\ a \in A,\quad a \equiv a \mod R$
- $a \equiv b \mod R \Rightarrow b \equiv a \mod R$
- $a \equiv b \mod R \wedge b \equiv c \mod R$ $a \equiv c \mod R$

Exemplo 4.29

Seja A = **Z** . Considere em A = **Z** a relação binária *R* ``. . . a diferença de dois inteiros, é um múltiplo de 3”.

Esta relação é de equivalência pelo seguinte:

- $\forall$ $a \in A$, $a \equiv a$ mod 3 , isto é a - a = 0 = 3k para algum k $\in$ **N**, logo é múltiplo de 3 . . . reflexiva
- $a \equiv b$ mod 3 , isto é a-b = 3r o que podemos escrever b - a = 3(-r) para algum r $\in$ **N** logo, b-a é múltiplo de 3 , assim $b \equiv a$ mod 3 . . . simétrica
- $a \equiv b$ mod 3 , isto é a-b = 3t para algum t $\in$ **N** e de $b \equiv c$ mod 3 , segue que b - c = 3s para algum s $\in$ **N**, logo a - c = (a - b)+ (b - c) = 3(t+s) $\Rightarrow$ a - c = 3(t+s) para algum t+s $\in$ **N**, logo a-c é múltiplo de 3 e, $a \equiv c$ mod 3 . . . transitiva

Exemplo 4.30

Seja P o conjunto de proposições. A relação *R* = { (p, q) $\in$ P $\times$ P /. p $\Rightarrow$ q } não é de equivalência.

Com efeito.

A relação é reflexiva; temos que p $\Rightarrow$ p é verdadeira (tautologia) $\forall$ p $\in$ P .

A relação é transitiva; lembre que (p $\Rightarrow$ q $\wedge$ q $\Rightarrow$ r) $\Rightarrow$ (p $\Rightarrow$ r) é verdadeira (tautologia).

A relação *R* não é simétrica (p $\Rightarrow$ q) $\Rightarrow$ (q $\Rightarrow$ p) não é tautologia.

Portanto, *R* não é de equivalência.

Exemplo 4.31

Se A = {π, Δ, φ } .

a. Defina em A , uma relação que seja simétrica e não reflexiva.
b. Defina em A , uma relação que seja transitiva e não simétrica.
c. Defina em A , uma relação que seja reflexiva e não seja simétrica nem transitiva.

Solução **(a)**

R_1= { (π,Δ), (Δ,π), (π,φ), (φ, π) , (φ, Δ), (Δ,φ) }

Solução **(b)**

R_2= { (πi, Δ), (Δ,φ), (π, φ) }

Solução **(c)**

R_3= { (π,π), (Δ,Δ), (φ, φ), (π, Δ), (Δ,φ) }

4.3.7 Relação inversa.

Definição 4.15

Seja $R \subseteq A \times B$, a relação inversa de R denotada por R^* é definida por: $R^* = \{ (b, a) \in B \times A \ /. \ (a, b) \in A \times B \}$

Exemplo 4.33

Sejam A = { 1, 2, 3 } e B = { a, b } e consideremos a relação R = { (1, a), (1, b), (3, a) } de A em B , logo a relação inversa de R é o conjunto R^* ={ (a, 3), (b, 1), (a, 1) }

Exemplo 4.34

Se uma relação R é transitiva, então sua relação inversa R^* também é transitiva?

Solução.

Sejam (a, b) e (b, c) elementos de R^* , então $(b, a) \in R$ e $(c, b) \in R$, como R é transitiva então $(c, a) \in R$; logo $(a, c) \in R^*$.

Portanto mostramos que se, $(a, b) \in R^*$ e $(b, c) \in R^*$ então $(a, c) \in R^*$; a relação R^* é transitiva.

Exemplo 4.35

Que relação existe entre o domínio e imagem de uma relação R , e o domínio e imagem de sua relação inversa R^* ?

Solução.

Como R^* tem os mesmos pares que R na ordem inversa (de escrita), cada primeiro elemento de um par em R é o segundo elemento de um par em R^* , e cada segundo elemento em R é o primeiro elemento em R^* . Conseqüentemente, o domínio de R é a imagem de R^* , e a imagem de R é o domínio de R^* .

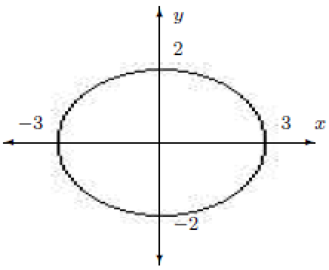


Figura 4.5:

Exemplo 4.36

Seja a relação:

$R = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \ /. \ 4x^2+9y^2= 36 \}$.

Determine: **a)** O domínio de definição de R ; **b)** a imagem de definição de R ; **c)** a relação R^*

Solução **(a)**

O domínio de definição de R é o intervalo [-3, 3] , uma vertical por cada um destes números contém ao menos um ponto de R.

Solução **(b)**

A imagem é o conjunto [2, 2] , uma horizontal por cada um destes elementos contém ao menos um ponto de *R*.

Solução (c)

A relação *R** encontra-se se intercambiamos x e y no enunciado formal que define *R* , logo *R** = { (x, y) / x ∈ **R**, y ∈ **R**, $9x^2 + 4y^2 = 36$ }

Exemplo 4.37

Seja *R* a relação nos números naturais **N** definida pelo enunciado formal 2x+y = 10 . Determine: **a)** O domínio e imagem de *R*. **b)** A relação *R** .

Solução **(a)**

O domínio D(R) = { 0, 1, 2, 3, 4 } e a imagem Im(R) = { 0, 8, 6, 4, 2 }

Solução (**b**)

*R**= { (x, y) /.   x ∈ **N**, y ∈ **N**, x + 2y = 10 } ; isto é *R** = { (8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4) }

Exercícios 4-1

1. Determine os valores de x, y, z da seguinte igualdade entre os pares ordenados:

   1. $(x+1, 2) = (3, y+3)$ **2.** $(2x+3y, x-2y) = (1, 2)$

   3. $(x+y, 3) = (5, y-x)$ **4.** $(2x+2y+3z, x+y+z, x-y+z) = (14, 5, 9)$

   5. $(x+5, 3-y) = (7, 2)$ **6.** $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{3}, \frac{x+z}{4}\right) = (1, 2, 3)$

2. Suponhamos os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 5\}$. Verifique as seguintes proposições:

   1. $A \times B \neq B \times A$ **2.** $(A \times B) \times B \neq A \times (B \times A)$.

   3 $A \times B = \{(1, 1), (1, 5), (2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5)\}$.

   4. $B \times A = \{(1, 1), (5, 1), (1, 2), (5, 2), (1, 3), (5, 3)\}$.

   5. A^2 ≠ B^2 (A^2 = A × A e B^2 = B × B).

3. Sejam A, B , C e D conjuntos quaisquer. Demonstrar:

   1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ **3.** $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

   2. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

4. Mostre que: $A \subset X$ e $B \subset Y$, se, e somente se $A \times B \subset X \times Y$, desde que $A \times B \neq \Phi$.

5. Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Demonstrar as seguintes proposições:

   1. $A \times B = B \times A$ se, e somente se, $A = B$ ou ao menos um deles é o conjunto vazio.

   2. Se $(x, y) \in A^2$, então $(y, x) \in A^2$.

   3. $A \times B = A \times C$ se, e somente se, $B = C$ ou $A = \Phi$.

   4. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ se, e somente se, ao menos um dos conjuntos A, B ou C é vazio.

6. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 5\}$, analisar quais dos conjuntos R_i são relações de A em B .

   1. $R_1 = \{(1, 4), (1, 5)\}$ **2.** $R_2 = \{(1, 4), (1, 7)\}$

   3. $R_3 = \{(1, 4), (1, 5), (3, 5)\}$ **4.** $R_4 = \{\ \} = \Phi$

   5. $R_5 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 4)\}$ **6.** $R_6 = A \times B$

7. Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 5\}$ e $B = \{3, 6, 7, 10\}$, analisar quais dos conjuntos R_i são relações de A em B .

   1. $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \ /.\ x = y\}$

   2. $R_2 = \{(x, y) \in \ \times N \ /.\ x = 2y\}$

3. R_3 = { (x, y) ∈ A × B /. x > 5 }

8. Sejam os conjuntos A = {0, 1, 2 } e B = {3, 2, 1 } , escrever em forma de conjuntos a relação de A em B definida por x = y ; para x ∈ A e y ∈ B .

9. Suponha os conjuntos A = { 3, 5, 8, 9 } e B = { 1, 3, 5, 7 } , escrever em forma de conjuntos a relação de A em B definida por:

   1. x < y; x ∈A e y ∈ B **2.** x ≥ y; x ∈ A e y ∈ B

   3. x = y; x ∈ A e y ∈ B **4.** y + x = 4; x ∈ A e y ∈ B .

   5. x é divisível por y; x ∈ A e y ∈ B .

10. Seja A = **N** , e a relação a = b , cujo gráfico é G_{A × A} = { (a, b) ∈ **N** × **N** /. a = b } , construir uma relação binária definida sobre **N** .

11. Seja A = { 1, 2, 3 } . O os conjuntos A = { (1, 1), (2, 2), (3, 3) } e K = { (1, 2), (2, 3) } constituem gráficos de relações binárias sobre A , em tanto que o conjunto L = { (1, 5), (2, 3) } não. Por quê?

12. Dados os conjuntos A = { a, b, c } e B = { a, b, d } . Quais dos seguintes conjuntos são gráficos de relação entre elementos x ∈ A e y ∈ B ? Em cada caso dar o domínio e imagem.

   1. R_1 = { (a, a), (b, b), (c, c) }

   2. R_2 = { (b, c) }

   3. R_3 = { (a, d), (b, d), (d, a) }

   4. R_4 = { (b, a), (a, b), (c, c) }

   5. R_5 = { (d, a), (d, d), (b, d) }

13. Quais dos conjuntos do exercício anterior são gráficos de relação entre elementos x ∈ B e y ∈ A ?

14. Se A = { (3a+1) /. (a ∈ **N** ∧ a ≤ 3) ∨ (a ∈ **Z** ∧ 0 ≤ a <5 } . Calcule a diagonal de A × A . Construir o gráfico.

15. Se A = { x ∈ **R** /. 2 < x < 5 } e B = { x ∈ **R** /. 1 < x < 4 } . Construir o gráfico A × B ; logo B × A .

16. Se M = { x ∈ **R** /. 2 ≤ x ≤ 5 } e N = { x ∈ **R** /. 1 ≤ x < 4 } . Construir o gráfico de M × N ; logo N × M .

17. Seja *R* uma relação em A = { 2, 3, 4, 5 } definida pelo enunciado formal “x e y são primos relativos”.

   1. Escrever *R* como conjunto de pares ordenados.

   2. Representar *R* num diagrama de coordenadas A × A .

18. Seja A um conjunto qualquer e seja Δ A a diagonal de A × A . Que relação existe entre todas as relações reflexivas de A × A e A ?

19. Os enunciados formais que seguem, definem relações no conjunto **R**. Representar cada relação em um diagrama de coordenadas de **R** × **R** .

   1. $y < x^2-4x+2$ **2.** $x < y^2$ **3.** $y \geq \frac{x}{2} + 2$ **4.** $x \geq \text{sen } x$

20. Seja A = { 1, 2, 3, 4 } e a relação R_i sobre A, *para* i = 1, 2, 3, 4 . Determine se a relação:

1. R = { (1, 1), (1, 3), (2, 2) , (3, 1), (4, 4) } é reflexiva.

2. R = { (1, 2), (3, 4), (2, 1) , (3, 3) } é simétrica.

3. R = { (1, 2), (3, 4), (2, 2), (3, 3), (2, 1) } é anti-simétrica.

4. R = { (1, 2), (4, 3), (2, 2), (2, 1) , (3, 3) } é transitiva.

21. Dado A = { 1, , 2, 3, 4, 5 } considere as seguintes relações em A :

1. R_1 = { (1, 1), (1, 2) } **2.** R_2 = { (1, 1), (2, 2), (3, 3) }

3. R_3 = { (1, 1), (2, 3), (4, 1) } **4.** R_4 = { (1, 3), (2, 4) }

Determine, quais dessas relações é: Reflexiva, simétrica, anti-simétrica ou transitiva.

22. Existe algum conjunto A no qual toda relação seja simétrica?

23. Mostre que se R e S são relações simétricas em um conjunto A , então $R \cap S$ é uma relação simétrica em A .

24. Pode uma relação em um conjunto A ser simétrica e anti-simétrica?

25. Seja A = { 1, 2, 3 } . Determine se cada uma das seguintes relações em A é anti-simétrica.

1. R _1 = { (1, 1) } **2.** R_2 = { (1, 2) } **3.** R _3=A × A

4. R_4 = { (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3) } **5.** R_5 = { (1, 1), (2, 3), (3, 2) }

26. Os seguintes enunciados formais definem cada um uma relação R no conjunto de números naturais **N** . Determine para cada caso se a relação é: **a)** Reflexiva. **b)** Simétrica. **c)** Transitiva. **d**) Anti-simétrica.

1. x é menor que y **2.** x+y = 12 **3.** x e y são primos relativos.

4. x divide y **5.** x + 4y = 12 **6.** x é menor ou igual que y

7. x é múltiplo de y **8.** x vezes y é o quadrado de um número

27. Para cada umas das relações R do exercício anterior, determine um enunciado formal que defina a relação R^*

28. Seja $R = \{ (a, b) \in \mathbf{R}^2 /.\ b \geq a \}$ mostre que R é anti-simétrica.

29. Prove que em N a relação “x divide a y” é uma relação anti-simétrica.

30. Seja A = { 1, 2, 3 } . Dar um exemplo de uma relação em A que não seja simétrica nem anti-simétrica.

31. Quando uma relação R sobre um conjunto A é:

1. Não reflexiva? **2.** Não simétrica?

3. Não anti-simétrica? **4.** Não transitiva?

32. Estabelecer a verdade ou falsidade das seguintes proposições, supondo R e R^* relações em um mesmo conjunto A .

1. Se R é simétrica, então, R^* é simétrica.

2. Se R é anti-simétrica, então, R^* é anti-simétrica.

3. Se R é reflexiva, então $R \cap R^* \neq \Phi$.

4. Se R é simétrica, então $R \cap R^* \neq \Phi$.

5. Se R é transitiva e R^* é transitiva então $R \cap R^*$ é reflexiva.

6. Se R é transitiva e R^* é transitiva então $R \cup R^*$ é reflexiva.

7. Se R é reflexiva e R^* é reflexiva então $R \cap R^*$ é reflexiva.

8. Se R é anti-simétrica e R ^* é anti-simétrica então $R \cap R$ ^* é anti-simétrica.

9. Se R é reflexiva e R^* é reflexiva então $R \cup R^*$ é reflexiva.

10. Se R é anti-simétrica e R^* é anti-simétrica então $R \cup R^*$ é anti-simétrica.

4.4 CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

Se *R* é uma relação de equivalência em A e $a \in A$, chamamos classe de equivalência de a por intermédio de *R* ao conjunto de todos os elementos de A que estão relacionados com a . A classe de a denotamos por cl(a) e se lê "*classe de equivalência de a*"..

Em forma simbólica: $cl(a) = \{ x \in A /. \ x \equiv a \text{ mod } R \}$

Exemplo 4.38

Seja A={ 1, 2, 3 } e *R* uma relação de equivalência em A definida por *R*={ (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3) } , temos que as classes de equivalência de 1 e 3 são respectivamente: cl(1) = { 1, 2 } e cl(3) = { 3 } . Note que a classe de equivalência do 2 é cl(2) ={ 1, 2 } , isto é cl(2)= cl(1)

Exemplo 4.39

Seja *R* a relação definida pelos inteiros $x \equiv b$ mod 5 ; isto é `` x é congruente com y módulo 5 ''. Determine todas as classes de equivalência.

Solução.

Temos que *R* é uma relação de equivalência, e como todo inteiro podemos expressar na forma $x = 5q + r$ onde $0 \leq r < 5$ existem cinco classes cl(0), cl(1), cl(2), cl(3) e cl(4) ; estas classes são:

cl(0) = { . . . , -10, -5, 0, 5, 10,. . . }

cl(1) = { . . . , -9, -4, 1, 6, 11, . . . }

cl(2) = { . . . , -8, -3, 2, 7, 12, . . . }

cl(3) = { . . . ,-7, -2, 3, 8, 13, . . . }

cl(4) = { . . . , -6, -1, 4, 9, 14, . . . }

4.4.1 Conjunto quociente.

É uma família de elementos formada por todas as classes distintas de uma relação de equivalência. Se a relação de equivalência é *R* está definida no conjunto A , denotamos A/ *R* e se lê *"conjunto quociente de* A *pela relação R".*

Exemplo 4.40

Para o Exemplo (4.38) temos que A/R = { cl(1), cl(3) }

Exemplo 4.41

Determine o conjunto quociente para as classes do Exemplo (4.39).

Solução.

O conjunto quociente é: **Z**/*R* = { cl(0), cl(1), cl(2), cl(3), cl(4) }

4.4.2 Partição de um conjunto.

Consideremos o conjunto A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } e os subconjuntos B_1 = { 7, 8, 10 }, B_2 = { 2, 5, 6 }, B_3 = { 4, 9 }, B_4 = { 3, 1 } observe que a família de conjuntos $\mathcal{B}$ = { B_1, B_2, B_3, B_4 } tem as seguintes propriedades:

1. O conjunto A é a união de todos os elementos de B ; isto é $A = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$
2. Para qualquer dos conjuntos B_i e B_j tem-se que $B_i \cap B_j = B_i$ ou $B_i \cap B_j = \Phi$

Definição 4.16 Partição de um conjunto.

Dada uma família não vazia $\{B_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de A ; dizemos que $\{B_i\}_{i \in I}$ é uma partição de A se satisfaz:

1. $\bigcup\limits_{i \in I} B_i = A$
2. $B_i \cap B_j = B_i$ ou $B_i \cap B_j = \Phi$ para todo i, j $\in$ I .

Cada um dos B_i é chamado de uma partição de A .

Exemplo 4.42

- Sejam A= { números naturais pares } e B = {números naturais ímpares }. Então { A, B } é uma partição para **N**
- Sejam P = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , 10 }, A = { 2 , 6, 10 }, B = { 3, 5 , 6 , 8 }, C = { 1, 3 , 5 , 7 , 9 } . Observe que { A, B, C } não é uma partição de P ; aqui $A \cap B \neq \Phi$, e $A \neq B$.

Propriedade 4.3

Toda relação de equivalência R em A , determina uma partição em A . Esta partição é precisamente o conjunto quociente A/R .

Demonstração.

Seja R uma relação de equivalência em A, e para cada $\alpha \in A$ consideremos o conjunto $B_\alpha = \{ x /. (x, \alpha) \in R \}$, então a família B_α é uma partição de A .

A mostrar que na verdade, B_α é uma partição de A .

Como R é reflexiva, isto é cada elemento está relacionado consigo mesmo, então $a \in B_a$ para todo $a \in A$. Logo $A = \bigcup\limits_{\alpha} B_\alpha$.

Suponhamos que $B_r \cap B_s \neq \Phi$, e consideremos $a \in B_r \cap B_s$, então $(a, r) \in R$ e $(a, s) \in R$. Seja $x \in B_r$ então $(x, r) \in R$ mas pela simetria $(r, a) \in R$, assim $(x, r) \in R \wedge (r, a) \in R \Rightarrow (x, a) \in R$ isto pela transitividade; do mesmo modo $(x, a) \in R \wedge (a, s) \in R \Rightarrow (x, s) \in R$. Logo $x \in B_s$; sendo x elemento quaisquer de B_r então $B_r \subseteq B_s$ de modo análogo mostra-se que $B_s \subseteq B_r$ de onde $B_r = B_s$.

Conseqüentemente $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma partição de A , esta partição podemos denotar com A/R .

Exemplo 4.43

Seja A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 } e a relação R = { (a, b) $\in A^2$ /. a ≡ b mod 4 } . Determine uma partição em A mediante *R*.

Solução.

Temos que R = { (0, 0), (0, 4), (4, 4), (4, 0), (1, 1), (1, 5), (5, 5), (5, 1), (2, 2), (3, 3) } de onde podemos obter as seguintes classes de equivalências diferentes:

cl(0) = { 0, 4 }, cl(1) = { 1, 5 },

cl(2) = { 2 }, cl(3) = { 3 } .

O conjunto quociente é A/ R = { { 0, 4 }, { 1, 5 }, { 2 }, { 3 } } , que é precisamente a partição de A mediante a relação R .

Logo uma partição de A determinada por R é; { cl(0), cl(1) , cl(2), cl(3) }

Propriedade 4.4

Toda partição de A determina uma relação de equivalência em A .

Demonstração.

Seja Γ um conjunto de índices e suponhamos que $A = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$, onde A_α são mutuamente disjuntos e não vazios. Dado um elemento a $\in$ A, então ele está exatamente em algum A_α , onde $\alpha \in \Gamma$.

Definimos para a, b $\in$ A a relação a $*$ b se os elementos estão no mesmo A_α. É suficiente mostrar que a relação $*$ é de equivalência. (Exercício para o leitor)

Exemplo 4.44

Seja A = { a, b, c, d, e } e uma partição de A o conjunto { {a, b}, {c, e}, {d} } e seu diagrama mostra-se na Figura (4.6)

A relação de equivalência em A determinado por R é { (a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c),(c, e), (e, c), (e, e), (d, d) } que obtemos relacionando os elementos em sua respectiva parte, naturalmente:

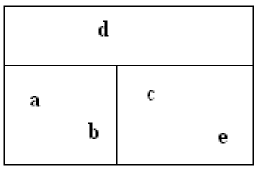


Figura 4.6:

A/ R = { {a, b}, {c, e}, {d} } .

4.5 APLICAÇÃO

O conceito básico de aplicação é o seguinte:

> "*Toda vez que temos dois conjuntos e algum tipo de associação entre eles, que faça corresponder a todo elemento do primeiro conjunto um único elemento do segundo, ocorre uma aplicação*".

De outro modo, dados os conjuntos A e B , existem diversas relações de A em B , entre estas tem particular importância aquelas que satisfazem a seguinte definição:

Definição 4.17 Aplicação.

Uma relação f de A em B denotado f: A —> B, é uma “aplicação” se, e somente se a todo elemento $a \in A$, corresponde um único elemento $b \in B$.

A definição é conhecida como, “*conceito intuitivo de aplicação*”. Se $(a, b) \in f$, observe que ao elemento $a \in A$ corresponde o elemento $b \in B$, logo dizemos que *“a imagem de* a *mediante a aplicação* f *é o elemento* b”, este elemento a é denominado “*pré-imagem do elemento* b *pela aplicação* f” e denotamos $b = f(a)$.

Logo, as duas condições que deve cumprir toda relação f de A em B para que seja aplicação são:

Existência: $\forall\ a \in A$, existe um elemento $b \in B$, tal que $(a, b) \in f$.

Unicidade: $\forall\ a \in A$, existe um único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Isto é, se $(a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2$

Observe os diagramas das relações das Figuras (4.7) e (4.8).

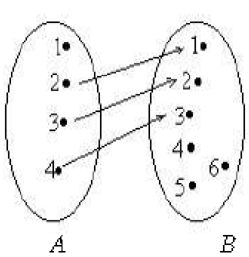


Figura 4.7:

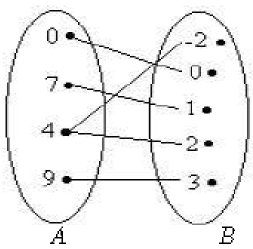


Figura 4.8:

A relação da Figura (4.7) acima não é uma aplicação, pois existe o elemento 1 no conjunto A , que não está associado a nenhum elemento do conjunto B .

A relação da Figura (4.8) também não é uma aplicação, pois existe o elemento 4 no conjunto A , que está associado a mais de um elemento do conjunto B . Preste muita atenção no diagrama da Figura (4.9).

A relação da Figura (4.9) é uma aplicação, pois todo elemento do conjunto A , está associado a somente um único elemento do conjunto B .

De um modo geral, dados dois conjuntos A, B e uma relação entre eles, dizemos que essa relação é uma aplicação de A em B se, e somente se, para todo $a \in A$ existe um único $b \in B$ de modo que a se relacione com b .

Com base nos diagramas da Figura (4.7) - (4.9) acima, concluímos que existem duas condições para que uma relação f seja uma aplicação:

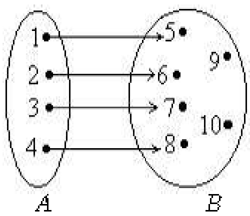


Figura 4.9:

1º. O domínio deve sempre coincidir com o conjunto de partida, ou seja, todo elemento de A é ponto de partida de uma "flecha". Se tivermos um elemento de A do qual não parta uma flecha, a relação não é aplicação.

2º. De cada elemento de A deve partir uma única "flecha". Se de um elemento de A partir mais de uma "flecha", a relação não é aplicação.

Logo, dados dois conjuntos não vazios A e B, dizemos aplicação f de A em B a qualquer relação binária que vincula a cada elemento $a \in A$ um único elemento $b \in B$, e denotamos $f:A \longrightarrow B$ e se lê "a aplicação f de A em B".

Quando o domínio e imagem de uma aplicação são o mesmo conjunto; isto é $f:A \longrightarrow A$ é freqüente chamar f de "operador ou transformação sobre A". Os operadores são casos especiais importantes de aplicações.

4.5.1 Domínio e Imagem de uma aplicação.

Da definição de aplicação temos que toda aplicação é uma relação, porém nem toda relação é uma aplicação, o domínio e imagem de uma aplicação são respectivamente o domínio e imagem da relação que ela representa.

Seja $f:A \longrightarrow B$, definimos o domínio de f como o conjunto A e denotamos D(f) ; e a imagem de f como sendo o conjunto $Im(f) = \{ b \in B \ /. \ \exists \ a \in A \wedge b = f(a) \}$.

Observação 4.5

1. Alguns autores definem aplicação com a possibilidade do domínio D(f) ser um subconjunto próprio de A, isto é $D(f) \subset A$, e quando cumpre que D(f)= A eles chamam "aplicação totalmente definida".
2. Segundo nossa definição de aplicação, tem-se que o domínio de uma aplicação $f : A \longrightarrow B$ é o conjunto D(f)= A .

4.5.2 Axioma de substituição.

O que interessa saber é se uma subclasse de conjunto também é um conjunto e se uma aplicação realmente é um conjunto. Para saber isto é necessário o axioma de substituição.

Axioma 4.1 De substituição (8º. axioma de Fraenkel).

Dado um conjunto A e p(a, b) uma proposição de modo que para cada $a \in A$ o conjunto $\{ b \ /. \ p(a, b) \}$ pode ser formado, então existe uma aplicação f com domínio D(f) = A tal que $f(a) = \{ b \ /. \ p(a, b) \}$ para cada $a \in A$.

Dizer que $\{ b \ /. \ p(a, b) \}$ pode ser formado significa, naturalmente que um conjunto f(a) tal que $b \in f(a)$ se e somente se p(a, b) é verdade.

A razão para o nome deste axioma é que ele capacita-nos a construir um novo conjunto a partir de um velho pela substituição de cada elemento do velho por uma coisa nova.

A mais importante aplicação deste axioma está em estender o processo de contagem para além dois números naturais.

Propriedade 4.5

$\forall$ (A, B) (CB $\wedge$ A $\subseteq$ B $\Rightarrow$ CA) .

Demonstração. **a)**

Suponhamos os conjuntos X $\subseteq$ Y.

Se X = Φ tem-se que CY $\wedge$ X $\subseteq$ Y implicam de imediato a CX = C Φ .

Suponhamos que X $\neq \Phi$, então existe a $\in$ X .

Definimos: g = { (m, n) /. (m $\in$ X $\wedge$ m=n) $\vee$ (m $\in$ Y-X $\wedge$ n=a) } então para aplicação g(Y) tem-se que $D_1(g) = X \cup (Y - X) = Y \wedge D_2(g) = X \cup \{a\} = X$, isto implica que $D_1(g) = Y \wedge D_2(g) = X$ então $D_1(g) = Y \wedge D_2(g) = X \wedge CY$, isto é $CD_1(g)=Y \Rightarrow CD_2(g)=X)$. Assim, $CD_2(g)=Y$ implica CX .

Definição 4.18 Aplicações iguais.

Se f e g são aplicações definidas num mesmo domínio A e se f(a) = g(a) $\forall$ a $\in$ D(f) , então as aplicações são iguais e escrevemos f = g .

Exemplo 4.45

Sejam os conjuntos A = { 2, 3, 5 } e B = { a, b, c }

- A relação f_1 = { (2, a), (3, b) } não é aplicação de A em B , isto pelo fato de 5 não ser pré-imagem de elemento algum.
- A relação f_2 = { (2, a), (2, b), (3, b), (5, c) } não é aplicação, isto pelo fato de existirem dois pares diferentes com a mesma primeira componente.
- A relação f_3 = { (2, a), (3, a), (5, a) } é aplicação, isto pelo fato $D(f_3)$= A e não existem pares diferentes com a mesma primeira componente; observe que Im(f) = { a } .
- A relação f_4 = { (2, a), (3, b), (5, c) } é aplicação, isto pelo fato $D(f_4)$= A e não existem pares diferentes com a mesma primeira componente; observe que Im (f) = { a, b, c } .

Exemplo 4.46

Sejam os conjuntos C = { 5, 2, 3 } e D = { 4, 2 }

A relação g_1 = { (5, 4), (2, 4), (3, 2) } é aplicação de C em D , isto pelo fato $D(g_1)$= C e não existem em g_1 pares diferentes com a mesma primeira componente.

A relação g_2 = { (5, 4), (2, 4), (5, 4) } não é aplicação, isto pelo fato $D(g_2) \neq C$.

A relação g_3 = { (5, 4), (2, 4), (5, 4), (3, 2) } é aplicação de C em D , isto pelo fato $D(g_3)$= C e não existem pares diferentes com a mesma primeira componente.

Observação 4.6

Seja a aplicação f:A —> B e (a, b) $\in$ f , como a e b tem seus valores variando nos conjuntos A e B respectivamente, a e b recebem o nome de *variáveis*.

A variável x é chamada “variável independente” e a variável b, “variável dependente”, é costume escrever (a, b) $\in$ f como b=f(a) e, para obter o valor de b dependemos de um valor de a .

Uma aplicação f fica definida quando são dados seu domínio (conjunto A), seu contradomínio (conjunto B) e a lei de associação b = f(a).

4.5.3 Gráfico de uma aplicação.

O gráfico de uma aplicação é o mesmo gráfico da relação que ela representa. Dada uma aplicação podemos desenhar seu gráfico em um sistema de coordenadas cartesianas, seguindo o mesmo processo para diagrama de relações.

4.4.2.1 Construção do diagrama de uma aplicação.

Um sistema de coordenadas cartesianas consiste em um par de retas de números reais as quais se interceptam formando ângulo reto como mostra a Figura (4.10); a reta horizontal é chamado “eixo- x” ou “eixo das abscissas” e a reta vertical é chamada de “eixo- y” ou “eixo das ordenadas”.

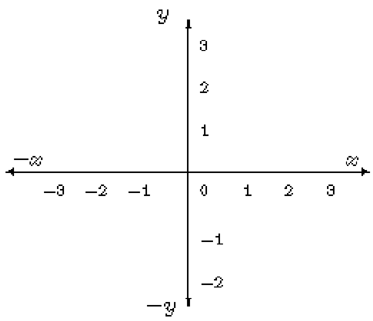


Figura 4.10

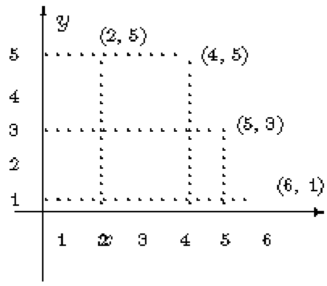


Figura 4.11

Para desenhar o gráfico de uma aplicação y = f(x), é suficiente atribuir valores do domínio D(f) à variável x e, usando a relação matemática que define a aplicação, calcular os correspondentes valores para y = f(x).

Exemplo 4.47

Sejam os conjuntos A = { 4, 6, 2, 5 } e B = { 3, 0, 5, 1, 9 } .

Para o diagrama do gráfico da aplicação f = {(4, 5), (6, 1), (2, 5), (5, 3) } é suficiente considerar um sistema de coordenadas cartesianas com os respectivos elementos de f como mostra a Figura (4.11).

Exemplo 4.48

Desejamos construir o diagrama da aplicação f: **R** —> **R** definia por y = f(x) = 2x - 1. Primeiro observe que o domínio são todos os números reais, logo podemos considerar $x = 2$, $x = 4$, $x = 6$, $x = 8$, e assim calculamos os respectivos valores para y , como indica a Tabela 4.1.

Identificamos os pontos encontrados no plano cartesiano como mostra a Figura (4.123).

X	2	4	6	8	10	11
Y	3	7	11	15	19	21

Tabela 4.1:

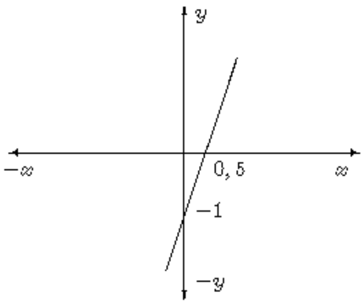


Figura 4.12:

O diagrama da aplicação é uma reta que passa pelos seis pontos encontrados. Basta traçar a reta pelo fato $f \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, e o diagrama estará construído.

Do fato da unicidade, deduz-se que se um a aplicação tem seu diagrama num sistema de coordenadas retangulares, toda reta paralela ao eixo vertical intercepta este diagrama somente num ponto.

4.5.4 Definição formal de aplicação.

Definição 4.19

Uma aplicação f definida em A com valores em B e domínio $D(f) \subseteq A$, a um subconjunto $G_f \subseteq A \times B$ que satisfaz as seguintes condições:

i) $\forall \ x \in D(f)$, $\exists \ y \in B$ tal que $(x, y) \in G_f$.

ii) Se $(x, y) \in G_f$ e $(x, z) \in G_f$, então $y = z$.

Da parte (**i)** podemos afirmar que a todo elemento $x \in D(f)$ corresponde pelo menos um elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in G_f$; e de (**ii)** o elemento y associado ao elemento x é único.

4.5.5 Aplicação biunívoca, sobrejetiva e bijetiva.

Definição 4.20 Aplicação biunívoca.

Dizemos que uma aplicação $f:A \longrightarrow B$ com domínio $D(f) \subseteq A$ é biunívoca se, elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas; isto é para qualquer x_1 , $x_2 \in D(f)$ com $x_1 \neq x_2$ tem-se que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Esta definição é equivalente a:

Dizemos que uma aplicação f: A —> B com domínio D(f) , é "biunívoca" se para qualquer x_1 , x_2 $\in$ D(f) com $f(x_1) = f(x_2)$ tem-se que $x_1 = x_2$.}

Definição 4.21 Aplicação sobrejetiva.

Dizemos que uma aplicação f: A —> B com domínio D(f) $\subseteq$ A , é "sobrejetiva" se, e somente se, o seu conjunto imagem for igual ao contradomínio; isto é para todo é para todo y $\in$ B , existe x $\in$ Df) tal que f(x) = y ; logo a aplicação f: A —> B é sobrejetiva se Im(f) = B .

Definição 4.22 Aplicação bijetiva.

Uma aplicação é bijetiva quando ela é sobrejetiva e biunívoca.

Exemplo 4.49

a) A aplicação f: **R** —> **R** definida por f(x) = 3x é biunívoca pois se $x_1 \neq x_2$ então $3x_1 \neq 3x_2$, portanto $f(x_1) \neq f(x_2)$.

b) A aplicação f: **R** —> **R** definida por y = 3x é biunívoca, como vimos na parte (**a)** deste exemplo. Ela também é sobrejetiva, pois Im(f) = B = **R**. Logo, esta aplicação é bijetiva.

c) A aplicação g: **N** —> **N** definida por y = x+5 não é sobrejetiva. Pois Im(g) = { 5 , 6, 7, 8, . . . } e o contradomínio é N , mas é biunívoca, pois valores diferentes de x têm imagens distintas. Então essa aplicação não é bijetiva.

Exemplo4.50

Considere os conjuntos A = { 5, 6, 7, 8} e B = { 1, 2, 3, 4, 9 } definida pela equação y = x - 4 .

Para cada a $\in$ A fica associado um único y $\in$ B .

Considerando y = f(x) = x - 4 tem-se f(5) = 1, f(6) = 2, f(3) = 7 e f(8) = 4 . Esta aplicação é biunívoca, não é sobrejetiva (para o elemento 9 $\in$ B, não existe um elemento em A), logo não é bijetiva.

São sinônimos de aplicação biunívoca; aplicação injetiva ou aplicação um-a-um.

Exemplo 4.51

a) Sejam A = {1, 3, 9, 10 } e B = { 2, 3, 4, 5 } e f :A —> B a aplicação definida por f(1) = 2, f(9) = 3 , f(3) = 4 e f(11) = 5 é aplicação bijetiva.

b) A aplicação h = {(x, y) $\in$ $\mathbf{R}^2$ /. y = x^2+1; -3 < x $\leq$ 3 } não é biunívoca.

Definição 4.23 Aplicação identidade**.**

Seja f:A —> A uma aplicação, definida por f(x) = x ; isto é a aplicação que faz corresponder a cada elemento de A o mesmo elemento, é chamada de "aplicação identidade". Denotamos a aplicação identidade em A com o $\mathbf{1}_A$

Definição 4.24

Uma aplicação f:A —> B é chamada “aplicação constante”, se a todo elemento a $\in$ A corresponde somente o elemento b $\in$ B . Logo D(f)=A e Im(f) = { b } .

4.5.6 Composição de aplicações.

Definição 4.25 Composição de aplicações.

Sejam f: A —> B e g: B —> C duas aplicações tais que Im(f) $\subseteq$ B ; a aplicação (gof) definida por (gof)(x) = g(f(x)) denomina-se “aplicação composta de g e f “ (nessa ordem).

O domínio da aplicação gof é: D(gof) = { x $\in$ D(f) /. f(x) $\in$ D(g) } .

O esquema da Figura (4.13) mostra como está definida a composição de aplicações.

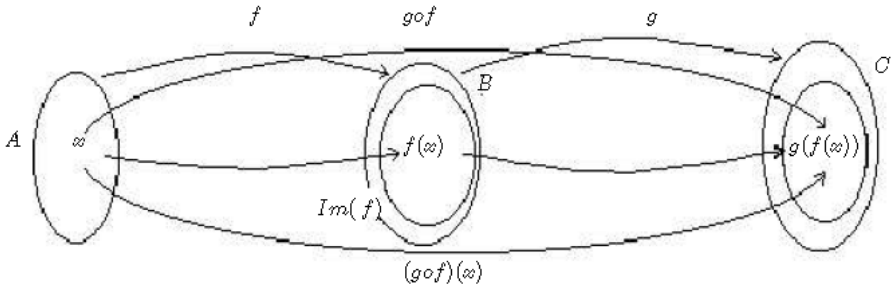


Figura 4.13:

Exemplo 4.52

Seja A = { 1, 2, 3, 4, 5 } e sejam f, g: A $\Rightarrow$ A definidas por: f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 3, f(4) = 1, f(5) = 2, g(1) = 4, g(2) = 1, g(3) = 1, g(4) = 2, g(5) = 3 .

Determine gof e fog .

Solução.

(gof)(1) = g(f(1)) = g(3) = 1	(fog)(1) = f(g(1)) = f(4) = 1
(gof)(2) = g(f(2)) = g(5) = 3	(fog)(2) = f(g(2)) = f(1) = 3
(gof)(3) = g(f(3)) = g(3) = 1	(fog)(3) = f(g(3)) = f(1) = 3
(gof)(4) = g(f(4)) = g(1) = 4	(fog)(4) = f(g(4)) = f(2) = 5
(gof)(5) = g(f(5)) = g(2) = 1	(fog)(5) =f(g(5)) = f(3) = 3

Observe que as aplicações gof e fog não tem a mesma definição.

Exemplo 4.53

a) Dadas as aplicações $f(x) = x^2-1$ e $g(x) = 2x$, determine (fog)(x) e (gof)(x) .

b) Dadas as aplicações $f(x)=5x$ e $(fog)(x) = 3x + 2$, determine g(x) .

c) Dadas as aplicações $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 3x - 4$, determine (fog)(3) .

Solução. (**a)**

$(fog)(x)= f[g(x)] = f(2x) = (2x)^2-1 = 4x^2-1$.

$(gof)(x) = g[f(x)] = g(x\text{^}2-1) = 2(x\text{^}2-1) = 2x^2 - 2$

Solução. **(b)**

Como $f(x)=5x$, então $(fog)(x)= f[g(x)]= 5.g(x)$.

Porém, $(fog)(x) = f[g(x)]=3x+2$; logo $5.g(x)=3x+2$, e daí $g(x)= \frac{3x+2}{5}$.

Solução. **(c)**

$g(3) = 3(3) - 4 = 5$ então $(fog)(3) = f[g(3)] = f(5) = 5^2 + 1 = 25 + 1 = 26$.

Exemplo 4.54

Sejam f e g duas aplicações definidas por $f(x) = 3x – 2$ e $g(x) = x^2 + 4x$. Determine as aplicações (gof)(x) e (fog)(x).

Solução.

Temos os seguintes domínios e imagens para cada uma das aplicações: D(f) = **R**, Im(f) = **R**, D(g) = **R** e Im(g) = $[-4, +\infty)$.

i) Do fato $Im(f) \subseteq D(g)$ então $(gof)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 4\ f(x) \Rightarrow g(f(x)) =[3x - 2]^2 + 4[3x - 2] = 9x^2 -4$.

Portanto, (gof)(x) = 9x^2 -4 e D(gof) = R .

ii) Do fato $Im(g) \subseteq D(f)$ então $(fog)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 2 \Rightarrow f(g(x)) = 3(x\text{^}2 +4x) - 2 = 3x^2 + 12x - 2$.

Portanto, $(fog)(x) = 3x^2 +12x -2$ e D(fog) = R .

Muitas vezes são dadas aplicações f(x) e g(x) sem especificar quais são seus domínios; para obter (gof)(x) o domínio de f deve ser escolhido de modo que $Im(f) \subseteq D(g)$.

Exemplo 4.55

Sejam as aplicações h(x) = 10 definida em [-3, 4] e $s(x) = x^2 - 8$ definida em [0, 7] . Determine (hos)(x) e (soh)(x)

Solução. **(i)**

Solução de (hos)(x)

Temos que D(h) = [-3, 4] e D(s) = [0, 7] .

Por outro lado, $(hos)(x) = h(s(x)) = 10 \quad \forall\ x \in [0, 7]$ e $s(x) \in [-3, 4]$; isto é, $\forall\ x \in [0, 7]$ e $-3 \leq x\text{^}2 - 8 \leq 4$ então $x \in [0, 7]$ e $5 \leq x^2 \leq 12$.

Portanto, $(hos)(x) = 10 \quad \forall\ x \in [\sqrt{5}\ ,\ \sqrt{12}\,]$

Solução. **(ii)**

Solução de (soh)(x) .

Observe que, (soh)(x) = s(h(x)) = [h(x)]^2 - 8 = 10^2 - 8 = 92 , para todo x $\in$ [-3, 4] e h(x) $\in$ [0, 7] ; isto é $\forall$ x $\in$ [-3, 4] e $0 \leq 10 \leq 7$ (isto último é absurdo !).

Portanto, não existe (soh)(x)

4.5.7 Imagem inversa de uma aplicação.

Suponhamos que f: A —> B seja uma aplicação bijetiva, e b $\in$ B. A imagem inversa da aplicação f denotamos por f* , e é o conjunto { a $\in$ A /. f(a) = b }

4.5.8 Aplicação inversa.

Seja f:A —> B uma aplicação. Em geral f*(B) pode ter mais de um elemento, ou ainda ser o conjunto vazio Φ

. Definição 4.26 Aplicação inversa.

Se f:A —> B é uma aplicação bijetiva, então para cada b $\in$ B , a imagem inversa f*(b) consta somente de um elemento em A .

Logo f*:B —> A é uma aplicação e f* é chamado "aplicação inversa de f ".

Sejam a aplicação f:C —> D, A $\subseteq$ C e B $\subseteq$ D ,tais f(A) = { f(a) $\in$ B /. a $\in$ A } e f^*(B) = { a $\in$ A /. f(a) $\in$ B } .

Podemos considerar estas expressões como regras para aplicações f de *P* (A) em *P* (B) assim como para aplicações f* de *P* (B) em *P*(A) . Por outro lado, f(a) $\in$ f(A) $\Leftrightarrow$ a $\in$ A além disso, a $\in$ f*(B) $\Leftrightarrow$ f(a) $\in$ B .

Propriedade 4.6

Se f :A —> B e se, { A_i /. i $\in$ I } é uma coleção de conjuntos em *P*(A) , então:

a) $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ **b)** $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ }

Demonstração **(b)**

1. Seja $f(a) \in f(\bigcap_{i\in I} A_i) \Rightarrow$ . . . hipótese.

2. $\Rightarrow$ $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$ . . . def. de $\bigcap_{i\in I}$

3. $\Rightarrow$ a $\in$ A_i , para todo i $\in$ I . . . def. de $\bigcap_{i\in I}$

4. $\Rightarrow$ f(a) $\in$ f(A_i) , para todo i $\in$ I . . . def. de f .

5. $\Rightarrow$ $f(a) \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ . . . def. de $\bigcap_{i\in I}$

Nesta nem sempre é verdadeira a igualdade (**b);** observe o seguinte exemplo.

Exemplo 4.56

Seja $f(x)= |x|$ para $x \in [-1, 1]$, e consideremos os conjuntos $A_1 = [-1, 0]$ e $A_2 = [0, 1]$, temos que $A_1 \cap A_2 = \{0\}$, assim $f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = 0$. Por outro lado, $f(A_1) = [0, 1]$ e $f(A_2) = [0, 1]$, logo $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 1]$.

Propriedade 4.7

Se $f : A \longrightarrow B$ é uma aplicação biunívoca e se, $\{ A_i /.\ i \in I \}$ é uma coleção de conjuntos em $P(A)$, então: $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

Demonstração.

1. $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i) \Longrightarrow$ . . . hipótese.

2. $\Rightarrow y \in f(A_i)$ para todo $i \in I$ . . def. de $\bigcap_{i\in I}$

3. $\Rightarrow \exists\, x_i \in A_i$, tal que $y = f(x_i)$ . . . f é sobrejetiva.

4. Os x_i são iguais $\forall\, i \in I$ . . . f é biunívoca.

5. $\Rightarrow x = x_i$

6. $\Rightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i$

7. $\Rightarrow y \in f(\bigcap_{i\in I} A_i)$

8. $\bigcap_{i\in I} f(A_i) \subseteq f(\bigcap_{i\in I} A_i)$

Portanto, da Propriedade (4.4) **(b)** e de (8) segue que $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

Propriedade 4.8

Se $f : A \longrightarrow B$ e se, $\{ B_i /.\ i \in I \}$ é uma coleção de conjuntos em $P(B)$, então:

a) $f^*(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^*(B_i)$ **b)** $f\hat{}^*(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^*(B_i)$

Demonstração **(a)**

1. $x \in f^*(\bigcup_{i\in I} B_i) \Leftrightarrow$ . . . hipótese.

2. $\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i$ . . . def. de f^* .

3. $\Leftrightarrow f(x) \in B_i$, para algum $i \in I$ . . . def. de $\bigcup_{i\in I}$ B_i.

4. $\Leftrightarrow x \in f^*(B_i)$, para algum $i \in I$ . . . def. de f^* .

5. $\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^*(B_i)$

Portanto, de (1)-(5), segue que $f^*(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^*(B_i)$

A demonstração de **(b**) é exercício para o leitor.

4.6 CARDINALIDADE DE UM CONJUNTO

Definição 4.27 Cardinalidade.

Define-se a cardinalidade de um conjunto A , como a número de elementos que pertencem ao conjunto A .

Denotamos a cardinalidade de um conjunto A por card(A) ou o(A) , e se lê "cardinalidade de A" ou "número de elementos de A".

Observe que a cardinalidade de um conjunto A , sempre é menor ou igual que a cardinalidade do conjunto P(A).

Exemplo 4.57

- Seja o conjunto A = { 1, 0, 3 } , então o(A) = 3
- Seja B = { -1, 0, 1, 3, 8 } então o(B) = 5
- Seja A = { } , então o(A) = 0
- Seja A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . , n } , então o(A) = n
- Seja A = { Φ } , então o(A) = 1

Exemplo 4.58

Sejam A e B dois subconjuntos finitos de um conjunto universal **U**. Demonstrar que:

1. $o(A \cup B)= o(A) + o(B) - o(A \cap B)$.

2. Deduzir fórmulas para $A \cap B = \Phi$ e $A \subseteq B$.

3. Determine uma fórmula para $o(A\cap B\cap C)$, onde A , B e C são subconjuntos finitos quaisquer de **U.**

Solução. **(1)**

Suponhamos A = { $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ } onde todos os a_i são distintos, para i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . , n e B = { $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_m$ } onde todos os b_i são distintos, para i = 1, 2, 3, 4, 5, . . . , m , logo o(A) = n e o(B)= m .

Suponhamos que $A \cap B \neq \Phi$ e que $o(A \cap B) = r \geq 1$, então isto implica que em A existem r elementos iguais aos que existem em B ; suponhamos por exemplo que sejam $a_1 = b_1$, $a_2= b_2$, $a_3 = b_3, \ldots , a_r = b_r$, logo podemos escrever os elementos do conjunto A e B do seguinte modo:

$$A = \{ \underbrace{a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3, a_4=b_4, \ldots , a_r = b_r}_{\text{r elementos}} ,\ \underbrace{a_{r+1}, a_{r+2} \ldots a_n}_{\text{n-r elementos}} \}$$

$$B = \{ \underbrace{a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3, a_4=b_4, \ldots, a_r = b_r}_{\text{r elementos}}, \underbrace{b_{r+1}, b_{r+2} \ldots b_m}_{\text{m-r elementos}} \}$$

É claro que $o(A)= r + (n - r)$ e $o(B)= r + (m - r)$

Por outro lado, $A \cup B = \{ a_{r+1}, a_{r+2} \ldots a_n , a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3, a_4=b_4, \ldots , a_r = b_r, b_{r+1}, b_{r+2} \ldots b_m \}$.

Logo $o(A \cup B) = (n-r)+ r +(m-r) = n + m - r = o(A) + o(B) - o(A \cap B)$

Portanto, $o(A \cup B)= o(A) + o(B) - o(A \cap B)$

Solução. **(2)**

Como $A \cap B = \Phi$, então $o(A \cap B) = 0$; logo $o(A \cup B)= o(A) + o(B)$

Quando $A \subseteq B$, podemos escrever $B = A \cup (B-A)$ e como $A \cap (B-A) = \Phi$, segue que $o(B) = o(A) + o(B-A)$, assim $o(B - A) = o(B) - o(A)$.

Solução. **(3)**

$A\cap B\cap C = (A\cap B) \cap C$, então:

$$o(A\cap B\cap C) = o((A\cap B) \cap C)= o(A \cap B) + o(C) - o((A \cap B) \cup C) \qquad \textbf{(4.1)}$$

Por outro lado, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, logo

$$o((A \cap B) \cup C)) = o(A\cup C) + o(B\cup C) - o(A\cup B\cup C) \qquad \textbf{(4.2)}$$

Do fato:

$o(A \cup C) = o(A) + o(C) - o(A \cap C)$ e $o(B\cup C) = o(B) + o(C) - o(B \cap C)$

segue em (4.2) que:

$o((A \cap B) \cup C)) =$

$= [o(A) + o(C) - o(A \cap C)] + [o(B) + o(C) - o(B \cap C)]-o(A\cup B \cup C) =$

$= o(A) + o(B) + 2[o(C)] - o(A \cap C) - o(B \cap C) - o(A \cup B\cup C)$,

de onde, em (4.1) vem que:

$o(A \cap B \cap C) = o(A) + o(B) + o(C) - o(A \cap C) - o(B \cap C) - o(A \cap B) - o(A\cup B\cup C)$

4.6.1 Conjuntos enumeráveis.

Denotemos $\mathbf{N}(n) = \{ k \in \mathbf{N} /.\ k\leq n \}$

Definição 4.28 Conjunto finito.

Dizemos que um conjunto A é finito, se A = Φ ou se, existe n $\in$**N** tal que a aplicação f : N (n) —> A seja uma bijeção.

Propriedade 4.9

Sejam m, n $\in$**N**. Se existe uma bijeção f : N (m) —> N (n) , então m = n

Demonstração.

Suponhamos que n= 1, então temos a aplicação f: N(m) —> N(1)= {1} definida por f(x) = 1 para todo x $\in$**N**(m) . Pelo fato ser f uma bijeção segue-se que existe um único x $\in$**N**(m) .

Se m $\neq$ 1 , existe y $\neq$ x para o qual f(y) = 1 . Isto contradiz o fato ser f biunívoca. Portanto, m = 1

Suponhamos a propriedade seja verdadeira para n $\in$**N**.

Se para n $\in$**N** a aplicação f: N(m) —> N(n+1) é uma bijeção, então m $\neq$ 1 ; caso contrário f(N(m)) = f(N(1)) = {f(1)} e em N(n+1) teríamos somente elementos distintos de f(1) que não estão na imagem de f , além disso f(x)=n+1 para um único x $\in$**N**(m) .

A aplicação g:(N(m)-{x}) —> N(n) definida por g(k) = f(k) se k $\in$**N**(m) está bem definida, e é bijetiva.

Definimos h(k) = k se k < n e h(k) = k+1 se, x < k $\leq$ m-1 também está bem definida e é bijetiva. De modo que, pela hipótese de supor que a propriedade é verdadeira para n $\in$**N** e sabendo que a composições de aplicações bijetivas é bijetiva, então: goh: N (m-1) —> N (n) é uma bijeção. Isto obriga que m = n+1 .

Definição 4.29 Conjunto enumerável.

Um conjunto A diz-se enumerável, quando é finito ou quando podemos estabelecer uma aplicação bijetiva f: N —> A .

Caso exista a aplicação f , dizemos que o conjunto A é infinito enumerável, e seus elementos podemos relacionar como segue: f(1)=a_1, f(2)=a_2, f(3)=a_3, f(5)=a_5, . . . , f(n)=a_n, onde n $\in$**N** e A = { a_1, a_2, a_3, a_4, . . . , a_n }

Exemplo 4.59

- O conjunto dos números naturais pares é infinito enumerável; é suficiente definir f: **N** —> **N** como sendo f(n) = 2n .
- O conjunto dos números naturais ímpares é infinito enumerável; é suficiente definir g: **N** —> **N** como sendo g(n) = 2n-1 .
- O conjunto dos números inteiros é infinito enumerável; é suficiente definir a aplicação h: **N** —> **Z** pela lei.

- $h(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{1-n}{2} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$

Um bom exemplo de conjunto não enumerável é o conjunto dos números reais R ; isto mostraremos posteriormente.

Intuitivamente definimos no Capítulo III Seção 1 a cardinalidade de um conjunto, lembre que dois conjuntos A e B tem o mesmo cardinal, e escrevemos card(A) = card(B) para significar que existe uma bijeção f:A —> B .

Logo se A for infinito enumerável, tem-se que card(A) = card(B) se, e somente se, B for infinito enumerável.

Dados os conjuntos A e B , diremos que card(A) < card(B), quando existir uma aplicação f:A —> B somente biunívoca mas não sobrejetiva.

Definição 4.30 Conjuntos equipotêntes.

Dizemos que dos conjuntos A e B são equipotêntes se eles têm o mesmo cardinal, e denotamos $A \sim B$.

Por exemplo, todos os conjuntos infinitos enumeráveis são equipotêntes com **N** .

Dizemos que um conjunto A tem cardinal do contínuo, se A é equipotêntes com **R** .

Exemplo 4.60

Os seguintes conjuntos tem o cardinal do continuo:

i) Qualquer subintervalo de **R** .

ii) O conjunto dos números complexos **C** .

iii) Qualquer espaço vetorial de dimensão finita sobre **R** .

O Axioma (3.4) é necessário para demonstrar alguns resultados básicos da teoria de conjuntos como são por exemplo os teoremas (sem demonstração):

Propriedade 4.10 Teorema de Bernstein.

$$(\forall\ A, B)\ \ (C(A) \wedge o(A) \leq o(B) \wedge o(B) \leq o(A) \ \Rightarrow\ A \sim B)$$

Propriedade 4.11 Teorema de Cantor.

$$(\forall\ A)\ \ (C(A) \Rightarrow\ 0(A) \leq o(P(A))$$

É importante mencionar o seguinte paradoxo da teoria de conjuntos.

4.6.2 Paradoxo de Cantor.

> *"Seja C o conjunto de todos os conjuntos. Então todo subconjunto de C é um elemento de C; logo, o conjunto potência denotado P(C) é um subconjunto de C ; porém, isto implica que a cardinalidade do conjunto potência seja menor ou igual a cardinalidade de C".*

Segundo a propriedade (Teorema de Cantor), a cardinalidade de *C* deve ser menor que a cardinalidade do conjunto potência *P*(*C*) .

Assim, o conceito de conjunto de todos os conjuntos leva a uma contradição.

Em geral, para todo conjunto finito A tem-se que:

$$\text{card}(A) < \text{card}(\mathbf{N}^{+}) < \text{card}(\mathbf{R})$$

A hipótese do contínuo diz:

Não existe conjunto A tal que:

"Cardinalidade do enumerável < card(A) < cardinalidade do contínuo"

Exercícios 4-2

1. Dada uma família *A* de conjuntos, seja *R* a relação definida em *A* por "x é disjunto de y". Dizer se *R* é: **a)** reflexiva; **b**)simétrica ; **c)** anti-simétrica ; **d)** transitiva.

2. Mostre que A $\times$ A é uma relação de equivalência em A .

3. Determine as quinze partições diferentes do conjunto A = { 1, 2, 3, 4 }

4. No conjunto **Z** considere a relação a *R* b definida por a *R* b $\Leftrightarrow$ a.b ≥ 0 . Determine se *R* define uma relação de equivalência sobre **Z** .

5. Seja A = { a, b, c, d, e, f } e *R* = { (a, a), (a, d), (b, b), (b, c), (b, f), (c, b), (c, c), (c, f), (d, a), (d, d), (e, e), (f, b), (f, c), (f, f) } e uma relação de equivalência. Determine as classes de equivalência e verifique que formam uma partição de A .

6. Suponha que A_1 = { 1, 2, 4 } é uma classe de equivalência com respeito a uma relação de equivalência em um conjunto A . Determine os elementos que pertencem à relação de equivalência para que A_1 seja subconjunto de A.

7. Se A = { a, b, c, d, e } particionamos da seguinte maneira: A_1 = { a } , A_2 = { b, d } , A_3 = { c } e A_4 = { e } . Determine a relação de equivalência que induzem estes quatro subconjuntos.

8. Dado B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } determine se as seguintes famílias determinam uma partição de B .

   1. { {1, 3, 5}, {2, 4 }, {3, 6} } **2.** { {1, 5}, {2}, {4}, {1, 5}, {3, 6} }

   3. { {1, 5}, {2}, {3, 6} } **4.** { {1, 2 3, 4, 5} }

9. Dado o conjunto **N** $\times$ **N** e *R* ={ ((a, b), (c, d)) $\in$ (N $\times$ N $)^2$ /. ad = bc } . Mostre que *R* é uma relação de equivalência e, portanto induz uma partição de **N** $\times$ **N.**

10. Dado o conjunto N $\times$ N e *R* ={ ((a, b), (c, d))$\in$(**N** $\times$ **N** $)^2$ /. a + d = b + c }. Mostre que *R* é uma relação de equivalência e, portanto induz uma partição de **N** $\times$ **N.**

11. Seja A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }determine se as seguintes famílias de conjuntos são ou não partições:

    1. *B*={B_1 = { 1, 3, 5 }, B_2 = { 2 }, B_3 = { 7, 4 }}

    2. *C*={C_1 = { 1, 5, 7 }, C_2 = { 3, 4 }, C_3 = { 2, 5, 6 }}

    3. *D*={D_1 = { 1, 2, 5, 7 }, D_2 = { 3 }, D_3 = { 4, 6 }}

    4. *E*={E_1 = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } }

12. Determine se as seguintes relações são de equivalência:

    1. *A* = { a /. a = (x, y) $\in$ $\mathbf{Z}^2$, $\wedge$ x < y }

    2. *B* = { a /. a = (x, y) $\in$ $\mathbf{Z}^2$, $\wedge$ x $\leq$ y }

    3. *C* = { a /. a = (x, y) $\in$ $\mathbf{Z}^2$, $\wedge$ x $\equiv$ y (mod 3) }

13. Demonstrar que E = { (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (0, 2), (1, 3), (2, 0), (3, 1) } é uma relação de equivalência em A = { 0, 1, 2, 3 } . Achar as classes de equivalência cl(0), cl(1), cl(2), cl(3) .

14. Seja A = { a /. a = (x, y) $\in$ $\mathbf{Z}^2$ onde x - y é divisível por 3 } . Mostre que A é uma relação de equivalência em **Z** e achar as distintas classes de equivalência.

15. Sejam f: A —> B, g: B —> C e h: C —> D. Demonstre que (hog)of = h o(gof).

16. Sejam os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = { a, b } . Quantas aplicações diferentes de A em B existem, e quais são?

17. Dadas as aplicações f_1, f_2, f_3 e f_4 , determine quais são biunívocas em R

    1. $f_1(x) = x^2$ **2.** $f_2(t) = t+2$ **3.** $f_3(s) = \sqrt{s^2}$

    4. f_4 correspondendo a cada número seu quadrado.

18. Dadas as seguintes aplicações, determine quais são biunívocas. Justifique sua resposta.

    1. A cada pessoa que habita Pato Branco, corresponde o número de seus anos.

    2. A cada cidade de Brasil, corresponde o número de seus habitantes.

    3. A todo livro escrito somente por um autor, assiná-lê o autor.

19. Pode uma aplicação biunívoca ser constante? Justifique sua resposta.

20. Pode uma aplicação sobrejetiva ser constante? Justifique sua resposta.

21. Dar um exemplo de:

    1. Uma aplicação de **N** a um subconjunto próprio de **N** que não seja uma bijeção.

    2. Uma injeção de N a um subconjunto próprio de **N** .

    3. De **Z** a um subconjunto próprio de **Z**, que não seja injeção.

    4. Uma injeção de **Z** a um subconjunto próprio de **Z**.

    5. Uma aplicação de **R** a **N** .

    6. Uma aplicação de **R** a **N** tal que para todo x $\in$ **R**, $f(x) \neq x$

22. Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. Mostre que o conjunto quociente A/ R é uma partição de A. Isto é, mostre que:

    a) $a \in [a], \ \forall \ a \in A$.

    b) $[a] = [b] \Leftrightarrow (a, b) \in R$.

    c) Se $[a] \neq [b] \Rightarrow [a]$ e $[b]$ são disjuntos.

23. Dar um exemplo de uma aplicação para cada item:

    1. De um subconjunto próprio de **N** para N que não seja bijeção.

    2. De uma injeção, de um subconjunto próprio de **N** para **N** .

    3. De um subconjunto próprio de **Z** a **Z** , que não seja injeção.

    4. De uma injeção de um subconjunto próprio de **Z** para **Z**.

    5. De uma aplicação de **N** a **R** .

6. De uma aplicação de N a R tal que para todo $f(x) \neq x$.

24. Resolva cada um dos seguintes exercícios:

    1. Dadas as aplicações $f(x) = x^2-1$ e $g(x) = 2x$,calcule $f[g(x)]$ e $g[f(x)]$.

    2. Dadas as aplicações $f(x)=5x$ e $f[g(x)] = 3x + 2$,calcule $g(x)$.

    3. Dadas as aplicações $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 3x -4$, determine $f[g(3)]$.

25. Se f é uma bijeção de A sobre B . Existe uma aplicação inversa de f escrita f^* , que é uma bijeção de B sobre A ?

26. Seja $f:A \longrightarrow B$ uma aplicação bijetiva; demonstre que as seguintes proposições são verdadeiras:

    1. $C \subseteq f^*(f(C))$ para todo subconjunto C de A .

    2. $f(f^*(D)) \subseteq D$ para todo subconjunto D de B .

27. Sejam $f:A \longrightarrow B$ uma aplicação, e A_1 e A_2 subconjuntos de A , demonstre as seguintes relações:

    1. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$. **2.** $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

    3. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ **4.** $f(A_1) - f(A_2) \subseteq f(A_1 - A_2)$

28. . \item Sejam $f:A \longrightarrow B$ uma aplicação, e B_1 e B_2 subconjuntos de B , demonstre as seguintes relações:

    1. $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f\hat{}*(B_1) \subseteq f\hat{}*(B_2)$ **2.** $f^*(B_1 \cup B_2) = f^*(B_1) \cup f^*(B_2)$.

    3. $f^*(B_1 \cap B_2) = f^*(B_1) \cap f^*(B_2)$ **4.** $f^*(B_1) - f^*(B_2) = f^*(B_1 - B_2)$.

29. Seja $f:A \longrightarrow B$ uma aplicação; a igualdade das imagens por f no conjunto de chegada B implica a equivalência dos elementos do conjunto de partida em A ? Isto é $x_1 \equiv x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (equivalência em A $\Leftrightarrow$ igualdade em B)

30. Seja $f: A \longrightarrow N$, onde A = { -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 } e $f(x) = \frac{|X| + X}{2}$. Determine uma partição para A.

31. Mostre que a aplicação composta gof das aplicações biunívocas $f:A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$ é uma injeção de $A \longrightarrow C$.

32. Mostre que a aplicação composta gof das aplicações sobrejetivas $f:A \longrightarrow B$ e $g:B \longrightarrow C$ é sobrejetiva de $A \longrightarrow C$.

33. Mostre que a aplicação composta gof das aplicações bijetivas $f:A \longrightarrow B$ e $g:B \longrightarrow C$ é uma bijeção de $A \longrightarrow C$.

34. Para todo subconjunto B de um conjunto A, definimos a aplicação característica φ_B de B , como a aplicação do conjunto B ao conjunto { 0, 1 } definida por: $\varphi_B(x) = 0$ se $x \notin B$ e $\varphi_B(x) = 1$ se $x \in B$. Para A = { a, b, c } e B= { b, d } , construir o gráfico de $\varphi_B(x)$.

    Calcule $1 - \varphi_B(x)$ para todo $x \in A$. Qual é o subconjunto de A que admite por aplicação característica a aplicação ψ, definida por $\psi(x) = 1 - \varphi_B(x)$?

35. Sejam A = { a, b, c, d, e }, B= { a, b, c }, C={ b, c, e } e $\varphi_B(x)$ a aplicação característica de B . Para todo $x \in A$, calcule:

1. $\varphi_B(x).\varphi_C(x)$ **2**. $\varphi_B B(x) + \varphi_C(x) - \varphi_B(x).\varphi_C(x)$.

36. Mostre que a relação: *R* $((x_1, y_1), (x\_2, y\_2)) \Leftrightarrow x_1y_1(x_2^2-y_2^2)= x_2y_2(x_1^2-y_1^2)$.

37. Definida sobre $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \ / \ x \neq 0, \ y \neq 0 \}$ é uma relação de equivalência.

38. Para a relação *R* da pergunta anterior.

Seja (a, b) um elemento fixo de S , mostre que:

$$R\,((x, y), (a, b)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x} = -\frac{a}{b}$$

Miscelânea 4-1

1. Seja $A \neq \Phi$. Será Φ o gráfico de uma relação binária sobre A ?. Se sua resposta for afirmativa, será esta relação reflexiva? Transitiva? De equivalência?

2. Idem ao exercício anterior para o conjunto $A = \Phi$.

3. Sejam $A = \{ a, b \}$ e $B = \{ \{a\}, \{a, b\}, \Phi \}$. Determinar o gráfico da relação *R* entre os elementos $x \in A$ e $y \in B$, onde *R*(x, y) ; "x *é elemento de* y".

4. Sejam $E = \{ a, b, c \}$ e $F = E$. Determinar o gráfico $G \subset E \times F$ da relação *R* , onde *R*(x, y) ; "x *não é elemento de* y".

5. Seja E={ a, b } . Determinar o gráfico da relação binária *R* definida sobre *P*(E) , onde *R* (x, y) ; "x *está contido em* y".

6. Seja *R* a relação "x+y=0" e *R* está definida sobre $E=\{ 1, \frac{1}{2}, -3, 0, 3, \frac{1}{3}\}$. Determinar o gráfico de *R*.

7. Seja *R* uma relação em **N** definida por: $a \, R \, b \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 7k, \ \forall \ k \in \mathbf{Z}$. Mostre que *R* é uma relação reflexiva e simétrica.

8. Mostre que a relação *R* definida sobre **R** por: $(x, y) \in R \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2(x-y)$ é uma relação simétrica e transitiva.

9. Mostre que se f é uma bijeção de A em B, então f o f* = 1_B e f* o f = 1_A

10. Seja $F = \{ f : A \longrightarrow B \ /. \ f$ é aplicação $\}$ e seja $G = \{ g : B \longrightarrow A \ /. \ g$ é aplicação $\}$. Mostre que, se existe uma aplicação $h \in G$, tal que f o h = 1_B então, a aplicação $f \in F$ é sobrejetiva.

11. Mostre que, se existe uma aplicação $g \in G$, tal que gof = 1_A então, a aplicação $f \in F$ é biunívoca.

12. Mostre que, se f: A —> B e g: B —> C são aplicações bijetivas, então (g o f)* = f* o g* .

13. Mostre que S_3, o conjunto de todas as aplicações bijetivas de $\{x_1, x_2, x_3\}$ em si mesmo, tem seis elementos.

14. Sejam X, Y, X_λ subconjuntos de A, suponhamos aplicação f:P(A) —> *P*(A) tal que $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$ e $f(f(X))=X$. Mostre que $f(\bigcup_{\lambda\in L} X_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in L} f(X_\lambda)$ e $f(\bigcap_{\lambda\in L} X_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in L} f(X_\lambda)$.

15. Dadas as famílias $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ e $\{B_\mu\}_{\mu\in M}$ forme duas famílias com índices em L×M considerando os conjuntos:

$$(A_\lambda \cup B_\mu)_{(\lambda, \mu) \in L\times M} \ \text{ e } \ (A_\lambda \cap B_\mu)_{(\lambda,\mu) \in L\times M}$$

16. Prove que se tem:

1. $(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda) \cap (\bigcup_{\mu\in M} B_\mu) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$

2. $\left(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$

17. Seja $\{A_{ij}\}_{(i,\, j)\, \in\, \mathbf{N}^+ \times \mathbf{N}^+}$ uma família de conjuntos com índices em $\mathbf{N}^+ \times \mathbf{N}^+$, prove ou desaprove por contra-exemplo, a igualdade:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{ij}\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij}\right)$$

18. Mostre que todo subconjunto $A \subseteq N$ finito é limitado.

19. Mostre que todo subconjunto $A \subseteq N$ é enumerável.

20. Mostre que, se $\varphi : A \longrightarrow B$ é biunívoca e B é enumerável então, A é enumerável.

21. Mostre que toda seqüência infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots\ a_n \ldots$ de elementos distintos é enumerável.

22. Mostre que o conjunto $\mathbf{N}^+ \times \mathbf{N}^+$ é enumerável.

23. Mostre que o conjunto $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ é enumerável.

24. Mostre que se $\varphi : A \longrightarrow B$ é sobrejetiva e se A é enumerável então, B também é enumerável.

25. Sejam A e B conjuntos enumeráveis. Mostre que o produto cartesiano $A \times B$ é enumerável.

Capitulo V

NÚMEROS NATURAIS

G. Peano

Giuseppe Peano nasceu em 27 agosto de 1858 em Cuneo, Piemonte, Itália. Em 1876, ingressou à universidade de Turin para estudar a engenharia, porém decidiu estudar matemática pura, formando-se como doutor em 29 de setembro de 1880. Após graduar-se, trabalho como professor assistente na universidade de Turin em 1880, professor extraordinário em 1890 e professor ordinário em 1895.

Em 1886 provou que se o y = f(x, y) fosse contínuo então a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ tem uma solução. A existência das soluções com hipóteses mais fortes para y=f(x, y) tinha sido dada resolvida por Cauchy e Lipschitz. Quatro anos mais tarde Peano mostrou que as soluções não eram únicas, dando como um exemplo a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{y^3}$, com a condição inicial y(0) = 0.

Em 1888 Peano publicou ``Cálculo Geométrico", que começa com um capítulo de lógica matemática, e deu definições novas para o comprimento de um arco e para a área de uma superfície curvada. Em 1889 publicou seus famosos axiomas, chamados "axiomas de Peano", que definiram os números naturais nos termos de conjuntos.

As maiores contribuições de Peano, entretanto, estavam nos estudos do axiomatização da matemática e da lógica matemática. Produziu uma definição axiomática do sistema de número natural e mostrou como o sistema de número real pode ser derivado destes postulados.

A lógica matemática é o uso dos símbolos em vez das palavras para escrever indicações matemáticas. Peano introduziu os símbolos para representar "pertence ao conjunto" e "existe" respectivamente. A lógica matemática transformou-se rapidamente o foco de seu trabalho. Em 1889, Peano publicou a primeira versão de um sistema da lógica-matemática em seu "Princípio de Aritmética", que incluiu seus famosos axiomas de números naturais. Dois anos mais tarde, estabeleceu um jornal, "Rivista di matematica", orientada principalmente à lógica e aos fundamentos da matemática. O projeto, transformou-se seu centro por os quinze anos seguintes. Quando foi terminado em 1908, o livro conteve 4200 fórmulas e teoremas simbolizados com provas em somente 516 páginas. Foi eleito membro da academia das ciências em Turin em 1891. Além, foi honrado pelo governo italiano com diversas distinções.

Embora Peano seja um fundador da lógica matemática, o filósofo matemático alemão Gottlob Frege (1848-1925) é considerado o pai da lógica matemática. Peano também foi interessado no universal, ou internacional, nas línguas e criou o interlingua artificial da língua em 1903. Compilou o vocabulário fazendo exame de palavras de inglês, de francês, o alemão e o latin. Morreu de um ataque de coração em Turin em 20 de abril de 1932.

Neste capítulo, propomo-nos a desenvolver o estudo do conjunto dos números naturais **N**. A idéia de número natural está ligado ao problema de contar ou enumerar objetos de um conjunto dado. Nosso objetivo será então o de caracterizar os números naturais. Uma das maneiras de fazê-lo é elaborar um conjunto de axiomas e definições.

5.1 CONJUNTO INDUTIVO

Em quanto os conjuntos constituem um meio auxiliar, os números são um dos dois objetos principais de que se ocupa a matemática. Números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza.

Definição 5.1 Sucessor.

Para todo conjunto A, definimos o sucessor A^* de A pelo acréscimo A, a os elementos de A; em outras palavras:

$$A^* = A \cup \{A\}$$

O sucessor de A geralmente é denotado por A^*. Estamos em condições para definir números naturais, definimos 0 (número zero) como o conjunto que não tem elementos; isto é: $0 = \{\ \} = \Phi$.

Se todo número natural deve ser igual ao conjunto de seus predecessores, podemos definir os números 1, 2, 3, . . .

$1=0^*=0 \cup \{0\} = \Phi \cup \{0\} = \{0\}$

$2=1^* = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\}= \{0, 1\}$

$3=2^*=2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\}= \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$

e assim sucessivamente pode ser levada a frente com o mesmo e único conjunto.

Definição 5.2 Conjunto indutivo.

Um conjunto de números M, diz-se que é indutivo, se satisfaz as seguintes propriedades:

i) $0 \in M$.

ii) $\forall\ n \in M$ então $n^* \in M$

Exemplo 5.1

Os seguintes conjuntos não são indutivos:

- $\{ 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \}$
- $\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$

- { 0, 2, 4, 6, . . . }

Observe que um conjunto indutivo é tal que contém ao conjunto vazio, e; para todo conjunto A que pertença a ele, também pertence o seguinte conjunto A^*. A classe de todos os conjuntos indutivos será:

$$a = \{ \ x \ /. \ \text{indu}(x) \ \} \qquad \textbf{(5.1)}$$

5.1.1 Axioma de Infinitude.

A questão é saber se realmente existe algum outro conjunto com estas característica, ou inversamente saber se a classe dos conjuntos com estas características é vazia.

Para resolver-nos este problema, na teoria de conjuntos foi formulado mais um axioma chamado "*Axioma de infinitude"* que garante a existência desse tipo de conjuntos.

Axioma 5.1. Axioma de infinitude (**7**º. axioma de Zermelo).

Existe um conjunto que contem o 0 e o sucessor de cada um de seus elementos.

Em nossa teoria matemática um bom exemplo é o conjunto **N**; seus elementos 0, 1, 2, 3, . . . , constituirão a nossa espécie fundamental de números; e são chamados "*números naturais*".

Infelizmente a expressão é um pouco ambígua, pois alguns autores incluem o zero entre os naturais, enquanto outros não o fazem, mas não nos preocupemos com isso. A idéia intuitiva que temos dos números naturais é que são todos os números cada um dos quais pode ser obtido principiando com o zero e somando um, tantas vezes quantas forem necessárias.

O Axioma (5.1) indica que existe pelo menos um conjunto da classe a de (5.1), pelo que poderíamos formar a intersecção de seus elementos.

Propriedade 5.1

A classe $\bigcap$ a existe, é um conjunto e é a classe indutiva mínima.

Demonstração.

Com efeito, $\bigcap$ a existe pelo Axioma (5.1) toda vez que a não é vazia.

Por outro lado, para todo $x \in a$ tem-se que $\bigcap a \subseteq x$, logo pela Propriedade (4.5) segue que existe a classe $C(\bigcap a)$.

Mostremos que $\cap$ a é indutivo.

Para todo $y \in a$, tem-se que $\Phi \in y$, então $\Phi \in \bigcap a$.

Seja $x \in a$, então para todo $y \in a \ \wedge \ s(x) \in y$ segue que $s(x) \in \bigcap a$.

Por último, $\bigcap a$ é o mínimo entre os conjuntos indutivos por ser sua intersecção.

Definição 5.3

Chamamos de números naturais ao conjunto **N** = $\bigcap$ a que, pela Propriedade (5.1) é indutivo.

O matemático italiano Peano foi o primeiro a organizar as leis fundamentais desses números em um corpo axiomático; o seu conjunto de cinco axiomas é notável. Examinemos esses axiomas para conhecermos mais de perto os números naturais e para vermos, em seguida de que modos outras espécies de números podem ser reduzidas à espécie natural. Os axiomas de Peano, postos em palavras, são estes:

1. Zero é um número natural.
2. O sucessor imediato de qualquer número natural é também um número natural.
3. Números naturais distintos nunca têm o mesmo sucessor imediato.
4. Zero não é o sucessor imediato de nenhum número natural.
5. Se algo vale para zero e, valendo para um dado número, também vale para o seu sucessor imediato , valerá , ainda, para todos os números naturais.

Esses axiomas contém três termos não-definidos: "*zero*", "*sucessor imediato*" e "*número natural"*. Os axiomas, por si mesmos, não nos revelam o que tais termos devam significar (embora entrelacem quaisquer significados que os termos possam ter) e não nos dão qualquer evidência a favor do fato de os termos poderem referir-se a qualquer coisa real.

Do ponto de vista do ensino a nível do Ensino Médio, não tem cabimento expor a matemática sob forma axiomática. Mas é necessário que o professor saiba que ela pode ser organizada sob a forma acima delineada. Uma linha de equilíbrio a ser seguida na sala de aula deve basear-se nos seguintes preceitos:

1. Nunca dar explicação falsa sob o pretexto de que os alunos ainda não têm maturidade para entender a verdade.
2. Não insistir em detalhes formais para justificar afirmações que, além de verdadeiras, são intuitivamente óbvias e aceitas por todos sem discussão nem duvidas.

   As demonstrações quando objetivas e bem apresentadas, contribuem para desenvolver o raciocínio, o espírito crítico, a maturidade e ajudam a entender o encadeamento lógico das proposições matemáticas.
3. Ter sempre em mente que, a importância social da matemática provém de que ela fornece modelos para analisar situações da vida real. Assim, por exemplo, conjuntos são o modelo para disciplinar o raciocínio lógico, números naturais são o modelo para contagem e números reais são o modelo para medida; etc.
4. A matemática fornece modelos abstratos para serem utilizados em situações concretas, do dia-a-dia e das ciências.

5.2 NÚMEROS NATURAIS

Existe um conjunto **N** chamado de "*conjunto dos números naturais*"' para o qual os seguintes axiomas (chamados axiomas de Peano) são verificados:

Axioma 5.2

Ao conjunto **N**, dos números naturais, pertence o zero 0.

Axioma 5.3

A todo número natural n corresponde outro número natural único, chamado o sucessor de n o qual representamos por n^* = n+1.

Axioma 5.4

Dois números naturais distintos, tem sucessores distintos.

Axioma 5.5

O zero não é sucessor de nenhum número natural.

Axioma 5.6

Se A é uma parte de **N** que tem por elementos o zero e o sucessor de todo número natural n, então A = **N**.

Assim, pelo Axioma (5.2) o conjunto de números naturais **N** é não vazio e fica determinado pela seguinte coleção:

$$\mathbf{N} = \{ \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ \ldots, \ n, \ \ldots, \ \}$$

Denotamos o conjunto dos números naturais positivos por:

$\mathbf{N}^{+} = \{ \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ \ldots, \ n, \ \ldots, \ \}$.

Exemplo 5.2

- O conjunto **N** de números naturais é indutivo, pois 0 é um número natural e n+1 também é natural para todo n natural.
- O conjunto de todos os números inteiros é indutivo.
- O conjunto $\{0, \ \frac{1}{2}, \ 1, \ \frac{3}{2}, \ 2, \ \frac{5}{2}, \ \ldots \ \}$ é indutivo

Observação 5.1

1. Denotamos o antecessor de qualquer número natural n ∈ **N**^+ como *n; e este número satisfaz a igualdade: *n +1 = n.

2. Denotamos o consecutivo de qualquer número natural n ∈ **N** como n*; e este número satisfaz a igualdade: n* = n +1.

Propriedade 5.2

Para qualquer números naturais m, e n tem-se:

i)} $m \neq n \quad \Rightarrow \quad m^* \neq n^*$.

ii) $n \neq n^*$.

iii) $n \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \; p \in \mathbf{N}$, tal que $p^*=n$.

Demonstração. **i)**

Suponhamos que $m \neq n$ e $m^* \neq n^*$, então pelo Axioma (5.4) teremos $m = n$, contrariando a hipótese.

Demonstração. **ii)**

Seja $A =\{ \; m \in \mathbf{N} \;\; /. \;\; m \neq m^* \; \}$, pelo Axioma (5.2) temos que $0 \in \mathbf{N}$ logo $0 \in A$, e se $m \in A$, pela definição de A temos que $m \neq m^*$ e conseqüentemente pela parte **i),** segue que $m^* \neq (m^*)^*$, logo $m^* \in A$ e pelo Axioma (5.6) vamos ter que $A = \mathbf{N}$.

Portanto, para todo $n \in \mathbf{N}$ tem-se que $n \neq n^*$.

Demonstração. **iii)**

Seja $A = \{0\} \cup \{ \; n \in \mathbf{N} \;\; /. \;\; \exists \;\; m, \;\; n \in \mathbf{N}$ tal que $n = m^* \; \}$.

Por definição de M, temos que $0 \in A$. Por outro lado, se $n \in M$, com $n \neq 0$, tem-se que $n = m^*$, para algum $m \in \mathbf{N}$.

De onde $n^* = (m^*)^*$ e n^* é o sucessor de m^*, logo $n^* \in A$ e pelo Axioma (5.6) segue que $A= \mathbf{N}$.

5.2.1 Indução matemática.

Em matemática, muitas definições e proposições se realizam utilizando o "princípio de indução matemática". A generalização de uma propriedade após verificação de que a propriedade é válida em alguns casos particulares, pode conduzir a sérios enganos como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 5.3

Considere a relação $f(n) = 2^{2^n}+1$ definida para todo $n \in \mathbf{N}$.

Temos que, quando:

$n = 0$ então $f(0) = 2^{2^0} + 1 = 3$

$n = 1$ então $f(1) = 2^{2^1} + 1 = 5$

$n = 2$ então $f(2) = 2^{2^2} + 1 = 17$

$n = 3$ então $f(3) = 2^{2^3} + 1 = 257$

$n = 4$ então $f(4) = 2^{2^4} + 1 = 65537$

Observe que todos aqueles números encontrados são números primos; P. Fermat (1601 - 1665) acreditou que a fórmula f(n) representaria números primos qualquer que fosse o valor positivo para n $\in$ **N**, pois esta indução era falsa, Euler (1707 - 1783) mostrou que para n = 5 resulta f(5) = 4294967297 = 641 $\times$ 6700417, logo a afirmação de P. Fermat foi precipitada.

Exemplo 5.4

Consideremos a relação f(n) = n^2 + n + 41 definida para todo n $\in$ **N**, observe que, para valores menores que 40, f(n) é um número primo.

Com efeito, se n = 1, f(1) = 43; se n = 2, f(2) = 47; se n = 3, f(3) = 53; . . . ; se n = 39 , f(39) = 1601. Porém se n = 40 temos f(40) = $40^2 + 40 + 41$ = (41)(41) não é primo, mostrando que a sentença é falsa. Em 1772 Euler mostrou que f(n) = $n^2 + n + 41$ assume valores primos para n = 0, 1, 2, 3, . . . , 39.

Euler observando que f(n-1) = f(-n) mostrou que n^2 + n + 41 assume valores primos para 80 números inteiros consecutivos, sendo estes inteiros: n = -40, -39, -38, . . . 0 , 1, 2, 3, . . . 38, 39; substituindo a variável n por n - 40 temos f(n-40) = g(n) = $n^2 - 79n + 1.601$; logo g(n) = $n^2 - 79n + 1.601$ assume valores primos para todos os números naturais de 0 até 79.

Exemplo 5.5

A sentença:

"2n + 2 *é a soma de dois números primos*".

é uma sentença verdadeira para n = 1, n = 2, n = 3, n = 4, . . . e, como nos exemplos anteriores após muitas tentativas, não achamos algum número natural que a torne falsa.

Ninguém até hoje, achou um número natural que tornasse a sentença falsa e ninguém, até hoje, sabe demonstrar que a sentença é sempre verdadeira. Esta famosa sentença conhecida como conjetura de Goldbach feita em 1742, em uma carta dirigida a Euler diz:

> *"Todo inteiro par, maior do que 2, é a soma de dois números primos".*

Não sabemos até hoje se esta sentença é verdadeira ou falsa.

Em resumo, dada uma afirmação sobre números naturais, se encontramos um contra-exemplo, sabemos que a afirmação não é sempre verdadeira.

E se não achamos um contra-exemplo? Nesta caso, suspeitando que a afirmação seja verdadeira sempre, uma possibilidade é tentar demonstrá-la recorrendo ao princípio de indução; é necessário portanto, dispor de um método com base lógica que permita decidir sobre a validade ou não de uma determinada indução, isto esta garantido com a seguinte proposição:

Propriedade 5.3 1º. princípio de indução matemática.

Se P(n) é uma proposição enunciada em termos de n, para n $\in$ **N** tal que:

1º. P(0) é verdadeiro

2º. Para todo h $\in$ **N** P(h) é verdadeiro, implica P(h+1) é verdadeiro.

Então P(n) é verdadeiro $\forall$ n $\in$ **N**.

Demonstração.

Com efeito, seja A={ n $\in$ **N** /. p(n) é verdadeira }. Conforme as hipóteses **1º.** e **2º.** acima temos que 0 $\in$A e se k $\in$A então k+1 $\in$A ou seja as condições do Axioma (5.6) estão satisfeitas.

Portanto A coincide com o conjunto de todos os números naturais, isto é p(n) é verdadeira para todo número natural n.

Os números naturais são fechados respeito às operações de adição e multiplicação. As operações de subtração e divisão para números naturais, não se aplica; caso contrario teríamos que subtração e divisão de números naturais é um natural; isto último é um absurdo.

5.2.2 Adição de números naturais.

Definição 5.4 Adição.

Para todo m, n $\in$ **N**, a adição em **N**, é uma aplicação:

$$+ : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$$
$$(m, n) \rightarrow +(m, n)$$

simplesmente denotamos +(m, n) como a+b e satisfaz o seguinte axioma:

Axioma 5.7

- Para todo n $\in$ **N**, n + 0 = n
- Para todo (m, n) $\in$ **N** $\times$ **N**, n + m* = (n+m)*

Propriedade 5.4

O número zero é o elemento neutro para adição em **N**.

Demonstração.

A propriedade é verdadeira para n = 0, isto é 0 + 0 = 0, o zero é neutro à direita.

Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para todo n $\in$ **N**; isto é 0 + n = n

Mostrarei que a propriedade é válida para o sucessor de n; isto é para n*.

Por definição de adição 0 + n* = (0+n)*, e pela hipótese de indução 0 + n = n, logo 0 + n^* = (0+n)* = n*, e esta propriedade é verdadeira para n^*.

Portanto, pelo axioma de indução (Axioma (5.6)) a propriedade é verdadeira para todo n $\in$ **N**.

Propriedade 5.5

Se o sucessor de zero é 1, então para todo n $\in$ **N**, n* = n+1.

Demonstração.

Com efeito, pela hipótese temos que $0^* = 1$

Como $n + 1 = n + 0^{\wedge *} = (n + 0)^*$, isto implica pela Propriedade (5.4) que $n + 1 = n^*$.

Propriedade 5.6 Associativa.

A operação de adição **+** em **N**, é associativa; isto é:

Para todo m, n, p $\in$ **N**, $(m+n)+p = m+ (n+p)$.

Demonstração.

Por indução sobre p.

Esta propriedade é verdadeira para p = 0.

$(m + n) + 0 = m + (n + 0)$ . . . def. de adição.

Suponhamos para todo p, seja verdadeira. . . . hipótese de indução.

Mostrarei que a propriedade é válida para p^*.

$(m+n)+p^* = ((m+n)+p)^*$ . . . def. de adição.

$= (m+(n+p))^*$ . . . hipóteses de indução.

$= m + (n+p)^*$ . . . definição de adição.

$= m + (n+p^*)$ . . . definição de adição.

Pelo axioma de indução concluímos que esta propriedade é válida para todo número n $\in$ **N**.

Propriedade 5.7 Comutativa.

A lei + é comutativa; isto é para todo m, n $\in$ **N** temos que $m + n = n + m$.

Demonstração.

Exercício para o leitor.

Propriedade 5.8

Em **N**, nenhum elemento distinto de zero tem simétrico para a adição; isto é $m + n = 0$ então $m = 0$ e $n = 0$.

Demonstração.

Seja $m + n = 0$. . . . hipótese.

Suponhamos que $n \neq 0$ . . . hipótese auxiliar.

Logo n tem um antecessor $^{\wedge *}n$ . . . def. de antecessor.

Assim, $n= {}^*n+1$.

Por conseguinte, $m + n = m + ({}^*n+1)$ . . . substituição.

$m + n = (m + {}^*n) + 1$ . . . associatividade

$m + n = (m+{}^*n)^*$ . . . def. de sucessor.

Então $m + n = 0 = (m+{}^*n)^*$, isto implica que zero é o sucessor de algum número. Isto é absurdo ao Axioma (5.5).

Portanto supor $n \neq 0$ é errado; n tem que ser zero, e pelo Axioma (5.6) resulta $m = 0$.

Propriedade 5.9 Cancelamento.

Todo número natural é regular para a adição, isto é: $\forall\ n \in \mathbf{N}$ se, $a + n = b + n$, então $a = b$.

Demonstração.

A demonstração é por indução sobre n, e utilizamos o fato da aplicação f de **N** em **N** definida por $f(n) = n+1$ ser injetiva.

A propriedade é verdadeira para $n = 0$: $a+0 = b + 0$ então $a = b$.

Suponhamos que seja verdadeira para $n \in \mathbf{N}$, $a + n = b + n$, então $a = b$.

Mostrarei que a propriedade é válida para n^*

Seja $a+n^* = b + n^*$, ou $(a+n)^* = (b+n)^*$ . . . def. de adição.

Como f é injetiva segue de $f(a+n) = f(b+n)$, então $a + n = b + n$ implica $a = b$, segundo a hipótese de indução.

5.2.3 Relação de ordem em N.

Definição 5.5

1. Sejam os números $m,\ n \in \mathbf{N}$, dizemos que ``m é maior que n'' e escrevemos $m > n$, se existe $x \in \mathbf{N}$ tal que $m = n+x$.

2. Sejam os números $a,\ b \in \mathbf{N}$, dizemos que ``a é menor que b'' e escrevemos $a < b$, se existe $y \in \mathbf{N}$ tal que $a+y = b$.

Propriedade 5.10

Sejam $m,\ n \in \mathbf{N}$ então:

i) $m<n$ e $n < p$, então $m < p$. . . . transitividade

ii) $m<n$ se, e somente se $m+p<n+p$ . . . monotonicidade

Demonstração. **i)**

Por hipótese $m<n$ e $n < p$, logo existem números naturais r e t, tais que $n=m+r$ e $p=n+t$.

Assim, $p=n+t = (m+r)+t = m+(r+t)$ de onde $p > m$.

Portanto, $m < p$.

Demonstração. **ii)**

Se $m<n$, então existe $r \in \mathbf{N}$ tal que $n = m+r$, logo $n+p=(m+r)+p = m+(r+p) = m+(p+r)=(m+p)+r$ e portanto, $m+p < n+p$.

Inversamente.

Se $m+p < n+p$, então existe $t \in \mathbf{N}$ tal que $n+p = (m+p)+t = m+(t+p) = (m+t)+p$, assim $n = m+t$, de onde $m < n$.

Observação 5.2

A relação $<$ é transitiva, porém não é reflexiva e nem simétrica.

Propriedade 5.11 Lei de tricotomia.

Se $m, n \in \mathbf{N}$ uma e somente uma das seguintes alternativas é verdadeira:

i) $m = n$ **ii)** $m < n$ **iii)** $m > n$

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Definição 5.6

Dados m $n \in \mathbf{N}$, diz-se que m é menor ou igual que n e escrevemos $m \leq n$ se, $m<n$ ou $m=n$.

Analogamente define-se a relação $m \geq n$ (maior ou igual).

Definição 5.7

Seja A um subconjunto de $\mathbf{N}$. Dizemos que $m \in \mathbf{N}$ é o menor elemento de A se:

i) $m \in A$.

ii) $m \leq n$ para todo $n \in A$.

Propriedade 5.12 Princípio da boa ordem.

Se A é um subconjunto não vazio de números naturais, então A possui um menor elemento.

Demonstração.

Seja $A \subseteq \mathbf{N}$, $A \neq \Phi$. Se $0 \in A$, então 0 é o menor elemento de A.

Suponhamos então que $0 \notin A$ e que A não tenha menor elemento $m \in \mathbf{N}$. Isto vai levar a uma contradição.

Como m não é o menor elemento de A, segue-se que $m \notin A$ ou existe $n \in A$ tal que $n < m$.

Seja $B = \{ n \in \mathbf{N} \ /. \ m \leq n \text{ onde } m \notin A \}$, é imediato que $A \cap B = \Phi$, caso contrario, se existe $p \in A \cap B$, então $p \in A$ e $p \in B$ implica $p \leq p$ onde $p \notin A$. Isto é contradição; logo $A \cap B= \Phi$.

Por outro lado, $0 \in B$, pois por hipótese $0 \notin A$.

Suponhamos então que $n \in B$, como $m \notin A$, se $m \leq n$ então $n^* \notin A$ caso contrario n^* seria um menor elemento para A. Assim, se $m \leq n^{\wedge *}$ tem-se que $m \notin A$ e $n^* \in B$.

Mostramos que $0 \in B$ e que $n \in B$ implica $n^* \in B$, podemos concluir pelo princípio de indução generalizada para segue que $B = \mathbf{N}$, mas $A \cap B = \Phi$ e como $B = \mathbf{N}$ segue que $A = \Phi$.

Por redução ao absurdo segue que todo subconjunto não vazio $A \subseteq \mathbf{N}$ possui um menor elemento.

Propriedade 5.13

Seja A subconjunto de números naturais tais que $k \in A$ e $m^* \in A$, para todo $m \geq k$ em A. Então, A contém todos os números naturais $n \geq k$.

Demonstração.

Seja $B = \{ 0, 1, 2, \ldots, s \} \cup A$ onde s é tal que $s^*=k$.

Tem-se que $0 \in B$, suponhamos que $n \in B$, então $n^* \in B$; logo pelo princípio de indução (Propriedade (5.3)) segue que $B = \mathbf{N}$.

Portanto, A contêm todos os números naturais $n \geq k$.

Assumindo o princípio da boa ordem como axioma, podemos enunciar o princípio de indução generalizada.

Propriedade 5.14 2º. princípio de indução matemática.

Seja P(n) é uma proposição enunciada para $n \in \mathbf{N}$ tal que:

1º. Para $n_0 \neq 0$ tem-se que $P(n_0)$ é verdadeira.

2º. Se P(h) é verdadeiro para $h > n_0$, implica P(h+1) é verdadeiro.

Então P(n) é verdadeiro $\forall \; n \in \mathbf{N}$, tal que $n \geq n_0$.

Demonstração.

Consideremos $A = \{ n \in \mathbf{N} \;/.\; P(n)$ é proposição falsa $\}$, então $A \subset \mathbf{N}$ e $C_{\mathbf{N}}(A) \subset \mathbf{N}$, onde $C_{\mathbf{N}}(A) = \{ n \in \mathbf{N} \;/.\; P(n)$ é proposição verdadeira $\}$.

Pelo princípio da boa ordem (Propriedade (5.12)) o conjunto $C_{\mathbf{N}}(A)$ possui um menor elemento n_0, como $n_0 \notin A$ então a proposição $P(n_0)$ é verdadeira, logo em virtude da **1º.** hipótese $n_0 \neq 0$.

Para $h > n_0$ se P(h) é verdadeira, implica que também $P(h^*)$ é verdadeira, logo $h^* \in C_{\mathbf{N}}(A)$ de onde $h^* \geq n_0$ em $C_{\mathbf{N}}(A)$.

Em virtude da Propriedade (5.13) segue que $C_{\mathbf{N}}(A)$ contém todos os naturais $n \neq n_0$.

Portanto, P(n) é verdadeiro $\forall \; n \in \mathbf{N}$, tal que $n \geq n_0$.

Exemplo 5.6

Utilizando o princípio de indução matemática, mostre que:

$$3[1^2+3^2+5^2+ \ \ldots \ + (2n-1)^2] = n(4n^2-1) \quad \forall \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \neq 0$$

Solução.

Seja S o conjunto dos números naturais que satisfazem:

$$3[1^2+3^2+5^2+ \ \ldots \ + (2n-1)^2] = n(4n^2-1) \qquad \textbf{(5.2)}$$

Se n = 2 tem-se de (5.2) que, $3[1^2+3^2] = (2)(3)(5) = 30$, logo a proposição é verdadeira.

Suponhamos para $h \in S$ em (5.2) a seguinte igualdade seja verdadeira.

$$3[1\text{^}2+3\text{^}2+5\text{^}2+ \ \ldots \ p + (2h-1)\text{^}2] = h(4h\text{^}2-1) \qquad \textbf{(5.3)}$$

Para $h+1 \in S$ tem-se pela hipótese auxiliar (5.3) que:

$$3[1^2+3^2+5^2+ \ \ldots \ + (2h-1)^2 + (2h+1)^2] =$$

$$h(4h^2-1)+ 3(2h+1)^2= (h+1)(2h+1)(2h+3)$$

Portanto, S = **N** e a fórmula (5.2) é válida $\forall \; n \in \mathbf{N}, \; n \neq 0$.

Exemplo 5.7

Mostre que, para todo número real $(1+x)^n \geq -1$ e para qualquer natural $n \in \mathbf{N}$ então tem-se a desigualdade $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Demonstração.

Seja S o conjunto de números naturais para os quais (1+x)^n ≥ 1 + nx.

1º. $1 \in S$ pois, (1+x)^1 ≥ 1 + (1)x.

2º. Se $h \in S$, temos que (1+x)^h ≥ 1 + hx, então (1+x)^{h+1} = (1+x)(1+x)^h ≥ (1+x)(1+hx) ≥ 1 + x + hx + hx^2 ≥ 1 + (h+1)x.

Logo, se $h \in S$ então $(h+1) \in S$.

Aplicando o princípio de indução matemática temos que S = **N**.

5.2.4 Multiplicação de números naturais.

Definição 5.8 Multiplicação em **N**.

Para todo m, $n \in \mathbf{N}$, a multiplicação em **N**, é uma aplicação:

$$\bullet : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$$
$$(m, \; n) \quad \rightarrow \quad \bullet(m, \; n) = m\,n$$

simplesmente denotamos $\bullet\,(m, \; n)$ como m n e satisfaz o seguinte axioma:

Axioma 5..8

1. Para todo $n \in \mathbf{N}$, n 1 =n.

2. Para todo $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $m\,n^* = m\,n + m$.

Propriedade 5.15

O número zero satisfaz $0\ n = n\ 0 = 0$.

Demonstração.

Por indução sobre n.

Esta propriedade é verdadeira para $n = 0$, portanto $0.0 = 0$ por definição de multiplicação.

Suponhamos seja verdadeira para n, logo:

$0\ n = 0$ . . . hipótese auxiliar.

Mostrarei que é válida para n^*.

$0\ n^* = 0\ n + 0$ . . . def. de multiplicação.

$= 0 + 0$ . . . hipótese de indução.

Segundo o axioma de indução, a propriedade é verdadeira para todo $n \in \mathbf{N}$.

Propriedade 5.16 Elemento neutro multiplicativo.

O número 1 é o elemento neutro para a multiplicação, isto é, $\forall\ n \in \mathbf{N}$, $1\ n = n\ 1 = n$.

Demonstração.

É suficiente mostrar que 1 é elemento neutro à direita.

Com efeito, se $n=1$ tem-se que $1\ 1 = 1$ o qual é verdadeiro.

Suponhamos para $h > 1$, que $1\ h = h$. Mostrarei que $1\ h^* = h^*$.

Aplicando a hipótese indutiva, observe que $1\ h^* = 1\ h + 1 = h+1 = h$^*.

Portanto, o número 1 é o elemento neutro para a multiplicação.

Propriedade 5.17

O conjunto dos números naturais é fechado respeito da multiplicação; isto é, para todo $m, n \in \mathbf{N}$ tem-se $m\ n \in \mathbf{N}$.

Demonstração.

Suponhamos n seja número natural arbitrário fixo, e consideremos a proposição: $P(m)$: $n\ m \in \mathbf{N}$, para todo $m \in \mathbf{N}$.

Assim, $P(1)$: $n\ 1 = n \in \mathbf{N}$ é verdadeira, pois $n\ 1 = n$.

Suponhamos que para algum $h \in \mathbf{N}$ a proposição $P(h)$: $n\ h \in \mathbf{N}$ seja verdadeira.

Logo, pelo Axioma (5.8) e hipótese indutiva, segue que $n\ h^* = n\ h + n$ é verdadeira. Isto é $n\ h^* \in \mathbf{N}$.

Portanto, o conjunto dos números naturais é fechado respeito da multiplicação.

Propriedade 5.18

Quaisquer que sejam os números naturais m e n, tem-se que m* n = mn + n.

Demonstração.

Exercício para o leitor.

Propriedade 5.19 Comutativa.

A multiplicação é comutativa; isto é para todo (m, n) $\in$ **N** × **N**, temos mn = n m.

Demonstração.

Esta propriedade é verdadeira para n = 0

m. 0 = 0. m . . . Propriedade (5.5)

Suponhamos verdadeira para n, então m n = n m . . . hipótese auxiliar.

Mostrarei que é válida para n*

m n* = m n + m . . . def. de multiplicação.

= n m+m . . . hipótese de indução.

= n* m . . . Propriedade (5.18)

Pelo axioma de indução, segue que a propriedade é válida $\forall$ n $\in$ **N**.

Existe uma propriedade em **N** que relaciona ambas as operações de adição e multiplicação, chamada propriedade distributiva.

Propriedade 5.20 Distributiva.

A multiplicação é distributiva respeito à adição; isto é para todo (m, n, p) $\in$ **N** × **N** × **N** tem-se que: (m+n) p = m p + n p.

Demonstração.

É suficiente mostrar a distributividade pela direita por indução sobre p.

A propriedade é verdadeira para p = 0, então (m+n).0 = m 0+n 0

Suponhamos seja verdade para p, (m+n)p = m p + n p

Mostrarei para p*.

(m+n)p* = (m+n)p + (m+n) . . . def. de multiplicação.

= m p + n p + m + n . . . hipótese de indução.

$= (m\ p + m) + (n\ p + n)$ . . . comutativa da adição.

$= m\ p^* + n\ p^*$ . . . def. de multiplicação.

Pelo axioma de indução, a propriedade é verdadeira $\forall\ n \in \mathbf{N}$.

Propriedade 5.21 Associativa.

A multiplicação é associativa, isto é, para todo m, n, p $\in$ **N**, $(m\ n)\ p = m\ (n\ p)$.

Demonstração.

Mostra-se por indução sobre p, usando a Propriedade (5.20)

Propriedade 5.22

Em **N**, se um produto é nulo, então ao menos um dos elementos é nulo; isto é: se $m.n = 0$, então $m = 0$ ou $n = 0$.

Demonstração.

1) Suponhamos $m\ n = 0$ e $m \neq 0$. . . . hipótese.

2) $m\ n^* = m\ n + m$. Axioma da multiplicação

3) $m\ n^* = 0 + m$ . . (2) e (1)

4) $m\ n^* = m\ 1$ . . (3) e Axioma da multiplicação

5) $n^* = 1$ . . . (4) e Propriedade

6) $n=0$ . . .. $(0^\wedge{*} = 1)$

Portanto, $m.n = 0$ implica $m = 0$ ou $n = 0$.

Propriedade 5.23

Em **N**, nenhum elemento distinto de 1 tem simétrico para a multiplicação, isto é $m\ n = 1$, então $m = 1$ e $n = 1$.

Demonstração.

Suponhamos que $m\ n = 1$, se $n \neq 0$ pela Propriedade (5.20), existe $^*n \in \mathbf{N}$ tal que $m\ n = m(^*n) + m$.

Do mesmo modo, se $m \neq 0$, existe $^*m$ tal que $m = {}^*m+1$, logo $m\ n = {}^*m\ n + n = 1$, então $m\ (^*n) + {}^*n = 0$, logo $^*n = 0$ e $n = 1$.

De onde pela hipóteses temos que $1\ m = 1$ implica que $m = 1$.

Propriedade 5.24

Em $\mathbf{N}^+ = \mathbf{N} - \{0\}$ todo elemento é regular, isto é $\forall\ a, b \in \mathbf{N}^+$, $a\ n = b\ n$ e $n \neq 0$ então $a = b$.

Demonstração.

Demonstra-se por indução sobre n, considerando como primeiro elemento n = 1.

Conseqüência desta propriedade é que, $\forall$ a $\in$ **N*** definimos a aplicação g_a : **N** $\longrightarrow$ **N** por $g_a(n)$ = a.n. Observe que esta aplicação é injetiva e que a $\neq$ b implica $g_a \neq g_b$.

5.2.5 Potência inteira de um número natural.

Para todo a, n $\in$ **N** tem-se que a n-*ésima* potência do número a é outro natural denotado por a^n, e se lê "a *elevado à* n"

Definição 5.9

Seja a $\in$ **N**, a $\neq$ 0, para todo n $\in$ **N** definimos $a^0 = 1$ e $a^{n+1} = a^n a$

Desta definição resulta que, para o caso a = 0, a expressão 0^0 não está definida. **Propriedade 5.25**

As propriedades das potências inteiras resultam da definição, em particular.

- $\forall$ a, m, n $\in$ **N**, $a^m a^n = a^{m+n}$, se a $\neq$ 0.
- $\forall$ a, n, p $\in$ **N**, $(a^n)^p = a^{np}$, se a $\neq$ 0.

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Exemplo 5.8

Considere h: **N** $\times$ **N** $\longrightarrow$ **N** definida como segue: h(a, b) = a * b = a . Determine se h é comutativa, associativa. Determine o elemento neutro de h caso exista. Que elementos em **N** tem simétrico?

Solução.

Como a * b = a e b * a = b, logo h não é comutativa, a * (b * c) = a * b = a e (a * b) * c = a * c = a logo é associativa.

Se h tem elemento neutro e, então e * a = a para todo a $\in$ **N** porém a * e = a, assim não existe elemento neutro.

No tem sentido calcular o elemento simétrico se, não tem elemento neutro.

Exemplo 5.9

Seja ($\Diamond$) uma operação em $\mathbf{R}^2$ definida por (x, y) $\Diamond$ (x', y') = (xx'-yy', yx' + xy'). Demonstre que é comutativa e associativa.

Demonstração.

a) Comutativa?

(x, y) $\Diamond$ (x', y') = (xx'-yy', yx' + xy') =(x'x-y'y, y'x + x'y)=(x', y') $\Diamond$ (x, y)

b) Associativa?

((x, y) $\Diamond$ (x', y')) $\Diamond$ (c, d) =(xx'-yy', yx' + xy') $\Diamond$ (c, d) =

$$=(c(xx'-yy')-d(yx' + xy'),\quad c(yx' + xy')+ d(xx'-yy')) =$$

$$= (cxx'-cyy'- dyx'-dxy',\quad cyx' + cxy'+ dxx'-dyy') \qquad \textbf{(5.4)}$$

Por outro lado

$$(x,\quad y) \lozenge ((x',\quad y') \lozenge (c,\quad d)) = (x,\quad y) \lozenge (x'c-y'd,\ y'c + x'd) =$$

$$=(cxx'-cyy'- dyx'-dxy',\quad cyx' + cxy'+ dxx'-dyy') \qquad \textbf{(5.5)}$$

Observando (5.4) e (.55) tem-se que $((x,\ y) \lozenge (x',\ y')) \lozenge (c,\ d) = (x,\ y) \lozenge ((x',\ y') \lozenge (c,\ d))$

Portanto é associativa.

Exercícios 5-1

1. Mostre que, para todo $n \in \mathbf{N}$ tem-se $n+1=1+n$.
2. Mostre que a relação $+ : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ é comutativa; isto é para todo m, $n \in \mathbf{N}$ temos que $m + n = n + m$.
3. Mostre que $m + n \neq m$ para todo m, $n \in \mathbf{N}^+$.
4. Mostre que, dados m, $n \in \mathbf{N}$ tais que $m=n$, então $m+r=n+r$ para todo $r \in \mathbf{N}$.
5. Mostre que < em **N** ^+ é uma relação transitiva, mas não é reflexiva nem simétrica.
6. Mostre que $n \geq 0$, para todo $n \in \mathbf{N}$.
7. Demonstre que para qualquer m, $n \in \mathbf{N}$, uma e somente uma das proposições:

   (a) $m = n$, **(b)** $n > m$, **(c)** $m > n$

   é verdadeira. (Lei de tricotomia)
8. Demonstre que se, m, $n \in \mathbf{N}$ e $n>m$, então, para cada $p \in \mathbf{N}$, $n+p > m+p$ e reciprocamente.
9. Mostre que:

   a) $(m + n) (p + q) =(m p+ m q)+(n p+n q)$

   b) $m (n+p) q=(m n) q+m(p q)$

   c) $m^* + n^* = (m+n)^*+1$

   d) $m^* n^* = (mt n)^*+m + n$
10. Sejam m, n, p, $q \in \mathbf{N}$ e defina $m n pq = (m n p) q$: **(a)** Mostre que nesta igualdade, podemos inserir parênteses à vontade. (**b)** Prove que $m(npq) = m n + m p + m q$.
11. Identifique $S = \{ x /. x \in \mathbf{N}, n^{\wedge *} > x > n$ para todo $n \in \mathbf{N} \}$.
12. Se m, n, p, $q \in \mathbf{N}$ e se $n > m$ e $q > p$, mostre: **(a)** $n+q > m+p$, **(b)** $q n > m p$.
13. Sejam m, $n \in \mathbf{N}$. Mostre que (**a**) Se $m = n$, então $n < h^{\wedge *} m$ para todo $h \in \mathbf{N}$. (**b)** Se $h^* + m = n$ para algum $h \in \mathbf{N}$, então $n > m$.
14. Para m, $n \in \mathbf{N}$ mostre que: **(a)** $n^2 > m n > m^2$, **(b)** $m^2+n^2 > 2m n$
15. Mostre que, se o produto de n números positivos é igual a 1 (um), a soma dos mesmos não é menor que n.
16. Para todo $m \in \mathbf{N}$, defina $m^1= m$ e $m^{p+1} = m^p m$ desde que m^p esteja definido. Se m, n, p, $q \in \mathbf{N}$ prove que:

    a) $m^p m^q = m^{p+q}$ **b)** $(m^p)^q = m^{\wedge}\{p q\}$ **c)** $(m n)^p = m^p n^p$
17. Utilizando o princípio de indução matemática, mostre cada um dos seguintes enunciados:

    1.} $6 (1^2+2^2+3^2+ \ ... \ + n^2) = n(n+1)(2n+1)$ $\quad \forall \ n \in \mathbf{N}, n \neq 0$

2.} $4[1^3+2^3+3^3+ \ \ldots \ + n^3] = n^2(n+1)^2$ $\quad \forall \ n \in \mathbf{N}, \ n \neq 0$

3.} $2[1+4+7+ \ \ldots \ + (3n-2)] = n(3n-1)$ $\quad \forall \ n \in \mathbf{N}, \ n \neq 0$

4.} $3\,[1^2+3^2+52+ \ \ldots \ + (2n-1)^2] = n(4n^2-1)$ $\quad \forall \ n \in \mathbf{N}, \ n \neq 0$

5.} $2\,[2 + 5 + 8 + \ \ldots \ + (3n-1)] = n(1+3n)$ $\quad \forall \ n \in \mathbf{N}, \ n \geq 1$

6.} $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ \ldots \ + 2^{n-1} = 2^n - 1$ $\quad \forall \ n \in \mathbf{N}, \ n > 1$

7.} $3\,[1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ \ldots \ + n(n+1)] = n(n+1)(n+2)$ $\quad \forall \ n \in \mathbf{N}, \ n \neq 0$.

18. Mostre que, se $a, \ b \in \mathbf{N}$ tais que $b \geq a$ e $a \neq 0$, então uma das seguintes igualdades cumpre: **1.** $a = qb$ **2.** $a = qb + r$, $r < b$, onde $q, \ r \in \mathbf{N}$.

19. Se $n \in \mathbf{N}$, o fatorial do número n é denotado n!, e definido do modo seguinte:

    $0! = 1$, $1! = 1$ e quando $n > 1$ define-se $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ \ldots \ (n-1) \times n$ ou $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ \ldots \ 4 \times 3 \times 2 \times 1$. Mostre que:

    1. $2^{n-1} \leq n!$ $\quad \forall \ n \in \mathbf{N}$.

    2. $2^n < n! < n^n$ para $\forall \ n \in \mathbf{N}$ $n \geq 4$.

20. Mostre a desigualdade: $(n+1)^2 > 2^2\, n!$ para $n \in \mathbf{N}$ sendo $n \geq 2$.

21. Mostre que todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbf{N}$ possui um primeiro elemento, isto é, um elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in A$.

5.3 PROPRIEDADES ADICIONAIS EM N

5.3.1 Multiplicidade.

Definição 5.10 Múltiplo de um número.

Diz-se que um número natural a é múltiplo de outro natural b, se existe k $\in$ **N** tal que: a = b . k.

Exemplo 5.10

- O número 15 é múltiplo de 5, pois existe 3 $\in$ **N** tal que 15 = 5 $\times$ 3
- O número 24 é múltiplo de 4, pois 24 = 6 $\times$ 4.

Quando a = k . b, segue que a é múltiplo de b, mas também, a é múltiplo de k, como é o caso do número 35 que é múltiplo de 5 e de 7, pois: 35 = 7 $\times$ 5.

Observação 5.3

1. Quando a=k . b, então a é múltiplo de b e se conhecemos b e queremos obter todos os seus múltiplos, basta fazer k assumir todos os números naturais possíveis.
2. Como estamos considerando 0 como um número natural, então o número 0 (zero) será múltiplo de todo número natural. Considerando k=0 em a=k $\times$ b obtemos a=0 para todo b **N**.
3. Um número b é sempre múltiplo dele mesmo. a = 1 $\times$ b $\Leftrightarrow$ a = b

A definição de divisor está relacionada com a de múltiplo.

5.2.2 Divisibilidade.

Definição 5.11. Divisibilidade.

Sejam os números d, n $\in$ **N**, diz-se que d divide n e escrevemos d| n quando existe c $\in$ **N** tal que n = c . d.

A divisibilidade estabelece uma relação binária entre números naturais com as seguintes propriedades:

Propriedade 5.26

Sejam a, b, d, , n , m $\in$ **N**

1. n | n . . . reflexiva
2. d | n e n | m $\Rightarrow$ d | m . . . transitiva
3. d | a e d | b $\Rightarrow$ d | (a+b) e d | ab
4. d | n e d | m $\Rightarrow$ d | (an+bm) para algum a, b $\in$ **N** . . . linear

5. $d \mid n \Rightarrow ad \mid an$ . . . multiplicação

6. $ad \mid an$ e $a \neq 0 \Rightarrow d \mid n$ . . . simplificação

7. $1 \mid n$ . . . 1 é divisor de todo natural

8. $n \mid 0$ . . . todo natural é divisor do zero

9. $0 \mid n \Rightarrow n = 0$ . . . zero é divisor somente do zero

Exemplo 5.11

Mostre que $2 . (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) = n(n+1)$.

Solução.

Neste exemplo observe que $P(n) : 2. (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) = n(n+1)$.

Para $n = 1$, $P(1) : 2. 1 = 1(1+1)$ é verdadeira.

Suponhamos que $P(h) : 2. (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + h) = h(h+1)$ seja verdadeira.

Mostrarei que $P(h+1) : 2. ([1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + h + (h+1)] = (h+1)[(h+1)+1]$ é verdadeiro.

Com efeito, temos que:

$$2. [1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + h + (h+1)] =$$
$$= 2. [1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + h]+ 2 (h+1)] = h(h+1) + 2. (h+1)=$$
$$= (h+1)(h+2) = (h+1)[(h+1)+1].$$

Logo, pelo princípio de indução matemática cumpre:

$$2. (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) = n(n+1) \quad \forall \; n \in \mathbf{N}$$

Exemplo 5.12

Deseja-se construir uma parede decorativa com tijolos de vidro da seguinte forma: a primeira fileira (base) deverá ter 100 tijolos, a segunda fileira, 99 tijolos, a terceira, 98 tijolos e assim por diante até a última fileira que deverá ter apenas 1 tijolo. Determine o número total de tijolos necessários para construir desta parede. será igual a:

Solução.

Observe que a quantidade de número de tijolos necessários para cada fileira é um número natural decrescente a partir de 100, logo temos aplicando a fórmula do Exemplo (5.11) que o total de tijolos é: $2.(100 + 99 + \ldots + 3 + 2 + 1) = 100(100+1) = 5050$.

Portanto são necessários 5.050 tijolos.

Definição 5.12

Sejam os números naturais m e n, dizemos que ``m é maior ou igual que n'' e escrevemos m ≥q n se, e somente se, $m > n$ ou $m = n$.

Sejam os números naturais a e b, dizemos que ``a é menor ou igual que n'' e escrevemos $m \leq n$ se, e somente se, $n > m$ ou $m = n$.

Definição 5.13 Número primo.

Diz-se que um número natural n é um ``número primo'', se $n > 1$ e os únicos divisores positivos de n são 1 e o próprio n.

Se n não é número primo então é chamado de número composto.

Exemplo 5.13

São números primos: 2, 3, 7, 11 13, 17, 19

São números compostos: 4, 6, 8, 10, 16, 24

O número 1 não é primo; observe que não satisfaz a definição.

Propriedade 5.27

Todo número inteiro $n > 1$ é número primo ou produto de números primos.

Demonstração

Mostremos por indução sobre n. A propriedade é obvia para $n = 2$.

Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para cada inteiro menor que n . Se n não é primo, então n é divisível por um inteiro $d \neq 1$ e $d \neq n$. Portanto $n = cd$, de onde $c \neq n$, como c e d são menores que n e maiores que 1 , pelo que cada um deles é o produto de números primos; logo n é produto de números primos.

Propriedade 5.28 Euclides.

Existe uma infinidade de números primos.

Demonstração

Suponhamos exista uma quantidade finita de números primos, por exemplo:

$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \ldots\ , p_{n-1}, \quad p_n \qquad n \in \mathbf{N}$ n-fixo.

Consideremos o número $N = 1 + p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \ldots\ , p_{n-1}, \quad p_n$. Observe que $N > 1$ ou N é primo, ou N é produto de primos.

Porém N não é produto de primos, pois é maior que cada um dos p_i e nenhum dos p_i é divisor de N caso contrário, se p_1 | N então p_i também é divisor de 1, o que contradiz a propriedade.

Portanto N é número primo.

Propriedade 5.29 Teorema fundamental da aritmética.

Todo inteiro $n > 1$ podemos expressar como produto de fatores primos de modo único.

Demonstração

Mostraremos por indução. Para o caso n = 2 a propriedade é evidente.

Suponhamos a propriedade verdadeira para todo inteiro maior que 1 e menor do que n . A mostrar que é verdadeira para n. Se n é primo nada a mostrar.

Suponhamos que o número n seja composto e admite decomposição da forma:

$$n = p_1p_2p_3 \ldots p_s \text{ ou } n = q_1q_2q_3 \ldots q_t \Rightarrow p_1p_2p_3 \ldots p_s = q_1q_2q_3 \ldots q_t \quad \textbf{(5.6)}$$

A mostrar que s = t e que cada p é igual a q .

Dado que p_1 divide $n = q_1q_2q_3 \ldots q_t$, então deve dividir pelo menos um de eles, suponhamos que (depois de ordenados) $p_1 \mid q_1$, então $p_1 = q_1$ já que p_1 e q_1 são primos.

Assim, em (5.6) podemos obter $m = p_2p_3 \ldots p_s$ ou $m = q_2q_3 \ldots q_t \Rightarrow p_1p_2p_3 \ldots p_s = q_1q_2q_3 \ldots q_t$

Se $s > 1$ ou $t > 1$, então $1 < m < n$. A hipótese de indução diz que as duas decomposições são idênticas se prescindimos da ordem dos fatores. Conseqüentemente s = t e as decomposições em (5.6) também são idênticas, se prescindimos a ordem dos fatores.

Portanto a propriedade é válida.

Uma conseqüência imediata do Exercício 5-1 (16) é a a propriedade seguinte .

Propriedade 5.30

Para $a, b \in \mathbf{N}$ sendo $a \geq b > 0$ tem-se que existem os números $q, r \in \mathbf{N}$ tais que $b \mid q$, e:

$$a = bq + r, \qquad r < b$$

A demonstração é exercício para o leitor.

Na igualdade $a = bq + r$, o número a é chamado de "*dividendo*", b é o "divisor", q o "quociente" e r é chamado de "resto".

Definição 5.. Divisor Comum.

Sejam os números $a, b, d \in \mathbf{N}$, se o número d divide simultaneamente a os números a e b, o número d é chamado ``divisor comum de a e b''.

Exemplo 5.14

A divisão de um certo número inteiro N por 1994 deixa resto 148. Calcule o resto da divisão de N + 2000 pelo mesmo número 1994.

Solução.

Temos pelo enunciado: N = 1994. q + 148. Adicionando 2000 a ambos os membros, vem:

$$N + 2000 = 1994.\ q + 2000 + 148 \quad \Rightarrow \quad N + 2000 = 1994.\ q + 2000 + 148$$

Decompondo 2000 na soma equivalente 1994 + 6, fica:

$$N + 2000 = 1994.\ q + 1994 + 6 + 148 \Rightarrow N + 2000 = 1994.\ (q + 1) + 154$$

Logo, o novo quociente é q + 1 e o novo resto é igual a 154.

Propriedade 5.31 Algoritmo da Euclides.

Dados os números naturais a e b, podemos repetir o processo da Propriedade (5.30) como segue:

$$\begin{array}{ll}
a = bq + r_1 & 0 \leq r_1 < b \\
b = r_1q_1 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 = r_2q_2 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2 \\
\vdots & \vdots \\
r_{k-3} = r_{k-2}q_{k-2} + r_{k-1}, & 0 \leq r_{k-1} < r_{k-2} \\
r_{k-2} = r_{k-1}q_{k-1} + r_{k}, & 0 \leq r_k < r_{k-1}
\end{array}$$

Por último um dos r será zero, suponhamos o primeiro deles $r_k = 0$, logo $r_{k-1} \neq 0$.

Então r_{k-1} será o máximo divisor comum de a e b.

Demonstração

Existe um instante em que $r_k = 0$, pois os r_j são números naturais na ordem decrescente.

Sendo $r_k = 0$, então tem-se que $r_{k-2} = r_{k-1}q_{k-1} + 0$, logo $r_{k-1} \mid r_{k-2}$.

Por outro lado, aplicando a Propriedade (5.25) e de $r_{k-3} = r_{k-2}q_{k-2} + r_{k-1} \Rightarrow r_{k-1} \mid r_{k-3}$.

Podemos continuar este processo até que na primeira igualdade tem-se que r_{k-1} divide a r_1 e b, conseqüentemente divide a a.

Definição 5.. Máximo divisor comum.

O número natural r_{k-1} da Propriedade (5.30) é chamado "*máximo divisor comum de* a *e* b".

Observação 5.4

O "*máximo divisor comum de* a *e* b". denota-se d = m.d.c{ a, b }.

Também é costume denotar o m.d.c$\{a, b\}$de dois números, como o par não ordenado (a, b).

Para o caso do máximo divisor comum de três números $a, b, c \in \mathbf{N}$, denotamos $d = $ m.d.c$\{a, b, c\}$ ou $(a, b, c) = (a, (b, c)) = ((a, b), c)$. Isto é o máximo divisor comum depende somente dos números e não da ordem em que eles estão escritos.

Exemplo 5.15

Dado os números 726 e 275, determine seu m.d.c.

Solução.

$726 = 275 . (2) + 176$

$275 = 176 . (1) + 99$

$176 = 99. (1) + 77$

$99 = 77 . (1) + 22$

$77 = 22 . (3) + 11$

$22 = 11 . (2) + 0$

Portanto, $11 =$ m..d.c$\{726, 275\}$.

Propriedade 5.32

Dados $a, b, c \in \mathbf{N}$, existe um e somente um m.d.c.$\{a, b\} = d$ que satisfaz:

i) $d \mid a$ e $d \mid b$ . . d é um divisor comum de a e b.

ii) Se $c \mid a$ e $c \mid b \Rightarrow c \mid d$ . . . cada divisor comum divide d

Demonstração.

Pela Propriedade (5.30) existe pelo menos um d que satisfaz as condições **(i)}** e **(ii).**

Pela Propriedade (5.25) tem-se que $d \mid (a+b) \Rightarrow d = \gamma(a+b)$ para algum $\gamma \in \mathbf{N}$; como $c \mid a$ e $c \mid b$, então $a = \alpha. c$ e $b = \beta. c$ para $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$.

Logo $d = \gamma (a+b) = \gamma (\alpha. c + \beta . c) = c(\gamma . \alpha + \gamma . \beta) \Rightarrow c \mid d$.

Propriedade 5.33 Lema de Euclides.

Se $a \mid bc$ e m.d.c$\{a, b\} = 1$ então $a \mid c$.

Demonstração.

Desde que m.d.c$\{a, b\} = 1$, então a não divide b.

Do fato $a \mid bc \Rightarrow bc = \alpha a$ para algum $\alpha \in \mathbf{N}$, e como a não divide b $\Rightarrow a \mid c$.

Dados dos números naturais a e b, quando m.d.c$\{a, b\} = 1$, dizemos que os números a e b são primos relativos. Também é costume dizer que os números a e b são co-primos.

Exemplo 5.16

i) Os números 2 e 9 são primos relativos.

ii) Os números 3 e 15 não são primos relativos.

iii) Os números 3 e 11 são primos relativos.

Propriedade 5.34

Sejam $a, b \in \mathbf{N}$ tais que $a = p_1^{\beta_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_s^{\alpha_s}$ e $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \dots p_t^{\beta_t}$.

Então $d =$ m.d.c$\{a, b\}$, admite a decomposição: $d = p_1^{c_1} p_2^{c_2} p_3^{c_3} \dots p_k^{c_k}$, onde $c_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$.

Demonstração.

Seja $d = p_1^{c_1} p_2^{c_2} p_3^{c_3} \dots p_k^{c_k}$, dado que $c_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ então $c_i \leq \alpha_i$ e $c_i \leq \beta_i$, de onde $d \mid a$ e $d \mid b$, logo d é um divisor comum de a e b.

Suponhamos que d' seja outro divisor de a e b e consideremos a decomposição $d' = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \dots p_m^{e_m}$.

Então, $e_i \leq \alpha_i$ e $e_i \leq \beta_i$, logo pela Propriedade (5.33) segue que $e_i \leq c_i$.

Portanto, $d' \mid d$, logo $d =$ m.m.c$\{a, b\}$.

Observação 5.5

Os múltiplos de 2 são denominados números pares.

Os demais números naturais são denominados números ímpares.

Assim, denotando por P o conjunto dos números pares e por I o conjunto dos números ímpares, poderemos escrever: $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$ $I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$.

Observa-se que ambos os conjuntos são infinitos.

Exemplo 5.17

Seja $a \in \mathbf{N}$ tal que a seja número par se, e somente se a^2 também é número par.

Solução.

Como $a \in \mathbf{N}$ é par, então podemos escrever na forma $a = 2k$ para algum $k \in \mathbf{Z}$, logo $a^2 = a \cdot a = (2k) \cdot (2k) = 4k \cdot k = 2(2k^2) = 2 \cdot t$, onde $t = 2k^2 \in Z$ assim a^2 é par.

Reciprocamente ($\Leftarrow$).

A mostrar que se existe a^2 como número par, então a também é par.

Por contradição. Suponhamos que a é ímpar, então a = 2r+1 para algum r $\in$ **N**, isto implica que $a^2 = (2r+1) . (2r+1) = 4r^2 + 4r + 1 = 2(2r^2+2r)+ 1 = 2s + 1$, onde $(2r^2+2r) = s \in$ **N**.

Assim, a ímpar implica a^2 ímpar se, e somente se a^2 par implica a par.

Portanto, a $\in$ **N** é número par se, e somente se a^2 é par

Definição 5.. Mínimo Múltiplo Comum.

Diz-se que um número m é múltiplo comum dos número a e b e denotamos m = m.m.c{a, b}, se m é múltiplo de a e também é múltiplo de b; isto é: $m = k \times a$ e $m = r \times b$ onde k e r números naturais.

5.3.3 Relação entre o m.m.c. e m.d.c.

Uma relação importante e bastante útil entre o m.m.c. e o m.d.c. é o fato que o m.d.c.{a, b} multiplicado pelo m.m.c.{a, b} é igual ao produto de a e b, isto é:

$$\text{m.d.c.}\{a, b\} \times \text{m.m.c.}\{a, b\} = a \times b$$

Exemplo 5.18

Determinar o m.m.c. e o m.d.c. dos números 15 e 20.

Demonstração.

O primeiro passo é determinar o m.d.c. ou o m.m.c. dos números 15 e 20, obtido o m.d.c.{15, 20} = 5 e sabendo que $15 \times 20 = 300$, basta lembrar que m.d.c.{15, 20} $\times$ m.m.c.{15, 20} = 15×20 e fazer o cálculo.

Donde obtém-se que o m.m.c.{15, 20} é igual a 300 dividido por 5, ou seja m.d.c.{15, 20} = 60.

Exemplo 5.19

Seja f: **N** $\times$ **N** —> **N** a operação mínimo múltiplo comum, isto é f(a, b) = m.m.c.{a, b}. Esta aplicação f é comutativa? É associativa ? Determine o elemento neutro de f. Quantos elementos em **N** se existem, tem simétrico, e quais são?

Demonstração.

Como o m.m.c.{a, b} = m.m.c.{b, a} então f é comutativa. A demonstração da associatividade é óbvia.

O número 1 é o elemento neutro para f, observe que m.m.c.{a, 1} = a. Como o m.m.c.{a, b} = 1 se, e somente se, a=1 e b=1, o único número que tem simétrico multiplicativo é o 1, ademais é seu próprio simétrico.

5.3.4 Propriedades adicionais de divisibilidade.

Propriedade 5.35 Representação decimal de números naturais.

Para cada n $\in$ **N**, $n \geq 1$ existem “algarismos” a_0, a_1, a_2, : . . . a_s, onde $a_s \neq 0$ no conjunto { 0, 1, 2, . . . , 8, 9 } tais que:

$$n = \sum_{i=0}^{s} a_i \,.10^i = a_s 10^s + a_{s-1}10^{s-1} + \ldots + a_1.\,10 + a_0.\,10^0$$

Demonstração.

Se n = 1 podemos considerar n = a_0 = 1.

Suponhamos a propriedade seja válida para todo $1 \leq n \leq h$, logo é verdade que:

$$h = \sum_{i=0}^{s} a_i \,.10^i = a_s 10^s + a_{s-1}10^{s-1} + \ldots + a_1.\,10 + a_0.\,10^0$$

Seja n = h+1, então pelo algoritmo da divisão temos que h+1 = 10q + r com $0 \leq r < 10$.

Se $q = 0 \Rightarrow h+1 = r = a_0$, com $a_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$.

Se $q > 0 \Rightarrow q \leq h$, pois se $q > h$, $\Rightarrow h+1 = 10q+r > 10h+r \geq 10h$ e assim $h+1>10h$ e então $1 > 9h \geq 9$, o que é impossível.

Sendo então $1 \leq q \leq h$, pela hipótese de indução.

$$q = b_t 10^t + b_{t-1}10^{t-1} + \ldots + b_1.\,10 + b_0.\,10^0$$

para certos algarismos $b_t, \ldots, b_1, b_0$ todos em $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$.

Então $h+1 = 10q+r = 10(b_t 10^t + b_{t-1}10^{t-1} + \ldots + b_1.10 + b_0.10^0) + r = b_t 10^{t+1} + b^{t-1}10^t + \ldots + b_1.10 + b_0.10^1 + r$ com $b_t, \ldots, b_1, b_0, r$ todos em $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$.

Portanto, pelo princípio de indução finita, a propriedade é verdadeira.

A propriedade diz que quando escrevemos qualquer número inteiro, por exemplo 50237, podemos representar na forma:

$$50237 = 5.\,10^4 + 0\,.\,10^3 + 2.\,10^2 + 3.\,10^1 + 7$$

Seja $a \in \mathbf{N}$, por exemplo consideremos $a = \overline{xmznu}$; isto é a é um número composto por cinco dígitos. A decomposição polinômica na base decimal do número a é: $a = 10^5x+10^4m+10^3z+10^2n+u$ e, os dígitos satisfazem as seguintes propriedades:

O número $a \in \mathbf{N}$ é divisível por:

- 2 se, e somente se, u = 0, 2, 4, 6, 8.
- 3 (ou 9) se, e somente se, a soma x+m+z+n+u for divisível por 3 (ou 9).
- 4 se, e somente se, o número $\overline{nu}$ for múltiplo de 4.
- 5 se, e somente se, u = 0, 5.
- 6 se, e somente se, a for divisível por 2 e 3.
- 8 (ou 125) se, e somente se,o número $\overline{znu}$ for divisível por 8 (ou 125).
- 11 se, e somente se, (n+m) - (x+z+u) for divisível por 11.

- 25 se, e somente se, o número $\overline{nu}$ for múltiplo de 25, ou $\overline{nu}$ = ...00.

Exemplo 5.20

Seja a = 75341250 , este número é divisível por 2, 5 e 125 , observe que o número formado pelos três últimos dígitos de a é 250 e 125 | 250 . Também o número a é divisível por 3 e 9, pois 3 | (7+5+3+4+1+2+5+0), análogo para 9.

Exemplo 5.21

Mostre que $\forall$ $n \in \mathbf{N}$ a expressão $n^3 - n$ é divisível por 6 (seis).

Demonstração.

Temos que P(n) : $n^3 - n$

P(1) : 1^3-1 = 0 é divisível por 6.

Suponha que P(h) : $h^3 - h$ seja divisível por 6 sendo $h \in \mathbf{N}$.

Para n = h+1 temos P(h+1) :

$$(h+1)^3-(h+1) = (h+1)[(h+1)^2- 1] = h^3-h + 3h(h+1) \qquad \textbf{(5.7)}$$

Observe que 3h(h+1) é divisível por 6.

Com efeito, se h = 1 temos que 3(1)(2) é divisível por 6. Suponha 3h(h+1) é divisível por 6 $\forall$ $h \in \mathbf{N}$.

Logo para h+1 segue que 3(h+1)(h+2) = 3h(h+1) + 6 sendo divisível por 6. Então em (5.7) da hipótese auxiliar para P(n) concluímos que $\forall$ $n \in \mathbf{N}$ a expressão n^3-n é divisível por 6 (seis).

Exemplo 5.22

Determine a validade da seguinte proposição: (10^{n+1} + 10^n +1) é divisível por 3 para todo $n \in \mathbf{N}$.

Solução.

Seja S o conjunto dos números naturais que satisfazem:

$$(10^{n+1} + 10^n +1) \text{ é divisível por } 3, \ \forall \ n \in \mathbf{N} \qquad \textbf{(5.8)}$$

Se n = 1 tem-se na (5.8) que $10^2+10^1+1 = 111$ é divisível por 3, logo a proposição é verdadeira.

Suponhamos para $h \in S$ em (5.8) a seguinte proposição seja verdadeira.

$$(10^{h+1} + 10^h +1) \text{ é divisível por } 3, \ \forall \ h \in \mathbf{N} \qquad \textbf{(5.9)}$$

Para $h+1 \in S$ tem-se pela hipótese auxiliar (5.9) que:

$$10^{h+2} + 10^{h+1} +1 = 10(10^{h+1}+10+1)-9$$

é divisível por 3.

Portanto, S = **N** e a fórmula (5.8) é válida.

Exemplo 5.23

Mostre que se $n \in \mathbf{N}$, então $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ é um número natural.

Demonstração.

Seja S o conjunto de números naturais tais que $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ é um número natural.

O número $1 \in S$ pois $\frac{1}{3}(1^3+2(1)) = 1$.

Suponha que $h \in S$; isto é $\frac{1}{3}(h^3 + 2h)$ é um número natural.

Então, $\frac{1}{3}[(h+1)^3+2(h+1)] =$

$\frac{1}{3}[(h^3+3h^2+3h+1) + (2h+2)] = \frac{1}{3}(h^3+2h) + (h^2 + h + 1)$ é um número natural.

Assim $h \in S$ implica $(h+1) \in S$. Logo S = **N** pelo princípio de indução.

Exemplo 5.24

Mostre que $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$ com $a+b > 0$, $a \neq b$ e $n > 1$, $n \in \mathbf{N}$. é verdadeira.

Demonstração.

Para n = 2 a desigualdade é da forma:

$$2(a^2+b^2) > (a+b)^2 \qquad \textbf{(5.10)}$$

Como $a \neq b$, temos a desigualdade $(a - b)^2 > 0$ que, somando $(a+b)^2$ obtemos $(a - b)^2 + (a+b)^2 > (a+b)^2$ isto implica a desigualdade (5.10); portanto a desigualdade é válida para n = 2.

Suponhamos que a desigualdade seja válida para n = h; isto é:

$$2^{h-1}(a^h + b^h) > (a + b)^h \qquad \textbf{(5.11)}$$

Mostraremos a desigualdade para n = h+1, isto é:

$$2^h(a^{h+1} + b^{h+1}) > (a + b)^{h+1} \qquad \textbf{(5.12)}$$

Multiplicando em (5.11) por (a + b) tem-se $2^{h-1}(a^h + b^h)(a + b) > (a + b)^h (a + b) = (a + b)^{h+1}$. Resta mostrar que $2^h(a^{h+1} + b^{h+1}) > 2^{h-1}(a^h + b^h)(a + b)$.

Com efeito, $2^h(a^{h+1} + b^{h+1}) > 2^{h-1}(a^h + b^h)(a + b) \Rightarrow (a^{h+1} + b^{h+1}) > (a^h + b^h)(a + b) > (a^h + b^h)(a +b) \Rightarrow (a^{h+1} + b^{h+1}) > (a^h + b^h)(a +b)$. Esta última desigualdade podemos escrever sob a forma:

$$(a^h - b^h)(a - b) > 0 \quad \textbf{(5.13)}$$

Suponha $a > b$, da hipótese $a > 0$ segue que $a > |\,b\,|$; portanto $a^h > b^h$, logo (5.13) sempre é verdadeira. Para o caso $a < b$, então $a^h < b^h$ e a desigualdade é o produto de números negativos, logo (5.13) sempre é verdadeira. Assim se a desigualdade (5.12) vale para $n = h$, também vale para $n = h+1$.

Exemplo 5.25

Para que valores de $n \in \mathbf{N}$ verifica a desigualdade $2^n > n^2$?

Solução.

Quando $n = 1$ a desigualdade é verdadeira, tem-se $2^1 > 1^2$.

Para $n = 2$ tem-se que $2^2 = 2^2$, a desigualdade é falsa.

Para $n = 3$ a desigualdade $2^3 < 3^2$, a desigualdade é falsa.

Para $n = 4$ tem-se que $2^4 = 4^2$, a desigualdade é falsa.

Para $n = 5$ tem-se que $2^5 > 5^2$, a desigualdade é verdadeira.

Suponhamos em geral que $n > 4$, logo se $n= 5$ a desigualdade é verdadeira.

Suponhamos que para todo $k> 5$ número natural temos $2^k > k^2$.

Sabe-se em geral que para todo $k \in \mathbf{N}$ é válida a desigualdade $2^k > 2k + 1$, então adicionando o resultado da hipótese auxiliar segue que $2^k + 2^k > 2k + 1 + 2^k$ $\Rightarrow$ $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Portanto, $2^n > n^2$ para $n=1$ e $n > 4$.

Exemplo 5.26

Descubra o erro no seguinte raciocínio por indução:

Seja $P(n)$: "Se a e b são inteiros não negativos tais que $a+b \leq n \Rightarrow a = b$".

Observe que $P(0)$ é verdadeira.

Sejam a e b inteiros tais que $a+b \leq h+1$, defina $c = a-1$ e $d = b-1$, então $c + d = a + b - 2 \leq h +1 -2 \leq h$. A verdade de $P(h)$ implica que $a = b$; isto é $P(h+1)$ é verdadeira.

Portanto $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$.

Exemplo 5.27

Supondo que o número $k = \overline{abc}$ seja divisível por 21, mostre que o número $h = a-2b+4c$ também é divisível por 21.

Demonstração.

Como $k = \overline{abc} \Rightarrow k = 100a + 10b + c \Rightarrow k + 5h = 21(5a+c)$, por hipótese $k \mid 21 \Rightarrow 5h \mid 21$.

Sendo m.d.c.$\{\ 5,\ 21\ \} = 1 \Rightarrow 21 \mid h$.

Portanto, h é divisível por 21.

Exercícios 5-2

1. Sejam, a, b, c, n $\in$ **N**, mostre cada uma das seguintes proposições são verdadeiras:

   1. Se m.d.c{a, b} = 1 e c | a, d | b, então m.d.c{c, d} = 1

   2. Se m.d.c{a, b} = m.d.c{a, c}= 1 , então m.d.c{a, bc} = 1

   3. Se m.d.c{a, b}= 1 , então m.d.c{a^n, b^k} = 1, $\forall$ n, k $\in$ **N**

   4. Se m.d.c{a, b} = 1 , então m.d.c{a+b, a-b} = 1 ou 2.

   5. Se m.d.c{a, b} = 1 , então m.d.c{a+b, a^2-ab+b^2} = 1 ou 3.

   6. Se m.d.c{a, b} = 1 e se d | (a+b), então m.d.c{a, d} = m.d.c{b, d}= 1.

2. Para cada uma das seguintes proposições em **N**, demonstre ou considere um contra-exemplo:

   1. Se b^2 | n, a^2 | n e a^2 b^2, então a | b.

   2. Se b^2 é o maior quadrado que divide n, então a^2 | n implica a | b.

   3. Se a^n | b^n então a | b.

   4. Se n^n | m^m, então n | m.

   5. Se a^n| $2b^n$ e n > 1, então a | b.

3. Se a soma de dois números é 320 e o mínimo múltiplo comum entre eles é 600, quais são esses números? Qual é o máximo divisor comum entre eles?
4. Provar que se n > 1, então n^4 + 4 é número composto.
5. Mostre que, se a e b são números tais que não sejam divisíveis por 3 então, a^6-b^6 é divisível por 9.
6. Quais os dígitos que temos a substituir nas letras a e b do número 1a8b2 para que seja divisível por 4 e por 9?
7. Quais são as condições a satisfazer a e b para que a^2+b^2 seja múltiplo de 7?
8. Mostre que 3^{2n+3}+40n+37 é divisível por 64 para todo n $\in$ **N**.
9. Determine o menor número de modo que ao multiplicar por 4662, o produto resulte ser divisível por 3234.
10. Mostre que a soma dos 2n+1 números naturais consecutivos é divisível por 2n+1.
11. Mostre que se k = na+pb é divisível por n-p, então o produto h = (a+b)(n+p) também é divisível por n-p.
12. Mostre que o número 3^{2n}+ 7 é um múltiplo de 8 para todo n $\in$ **N**.
13. O resto da divisão de um número k por 4 é 3 e o resto da divisão do número k por 9 é 5. Determine o resto de k por 36.
14. Mostre que se um número primo p não divide a **a**, então (p, **a**) = 1.

15. Consideremos os números naturais ímpares tomados em ordem crescente: 1, 3, 5, 7, ... Indiquemos o primeiro com a_1, o segundo com a_2, o terceiro com a_3, e assim sucessivamente. Determine uma fórmula que relacione o número ímpar a_n e seu índice n.

16. Demonstre que o dobro da soma dos n primeiros números naturais é: n(n+1)

17. Determine uma fórmula para calcular a soma dos **n** primeiros números naturais ímpares.

18. Mostre que seis vezes a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é: n(n+1)(2n+1)

19. Sejam a, b $\in$ **N** com b $\neq 0$, e seja r o resto da divisão Euclidiana de a por b. Então m.d.c.{ a, b}=m.d.c.{ r, b }.

20. Determine r, s $\in$ **Z** tais que 5480r + 1780s = m.d.c.{ 5480, 1780 } = 20 .

21. Ao dividir 4373 e 826 por um número k, obtemos 8 e 7 como resto respectivamente. Determine o número k.

22. Suponhamos que m.m.c.{ a, b}=297 e $a^2+b^2 = (10)(13)(5)(3^4)$. Determine os números a e b.

23. Mostre que o quadrado de todo número ímpar, é múltiplo de mais uma unidade.

24. Determine todos os números inteiros positivos k de três dígitos tais que sejam divisíveis por 9 e 11.

25. Determine os dígitos a e b para que o número $1234\overline{ab}$ seja divisível por 8 e 9.

26. Sejam a $\perp$ 5 e n $\in$ **N**. Mostre que o número $h = a^{8n}+3a^4-4$ é divisível por 5.

27. Dado qualquer número n $\in$ **N** da forma $n = a_s.\ 10^s + a_{s-1}.\ 10^{s-1} + \ldots\ a_1.\ 10^1 + a_0$, mostre que:

    1. n é divisível por 3 se, e somente se, $a_s+a_{s-1} + \ldots\ a_1+a_0$ é divisível por 3.

    2. n é divisível por 4 se, e somente se, $2a_1 + a_0$ é divisível por 4.

    3. n é divisível por 8 se, e somente se, $4a_2 + 2a_1 + a_0$ é divisível por 8.

    4. n é divisível por 9 se, e somente se, $a_s + a_{s-1} + \ldots\ a_1 + a_0$ é divisível por 9.

28. Utilizando o princípio de indução matemática, verifique a validade de cada um dos seguintes enunciados:

    1. $(n^2 + n)$ é divisível por 2, $\forall$ n $\in$ **N**.

    2. $(n^3 + 2n)$ é divisível por 3, $\forall$ n $\in$ **N**.

    3. n(n+1)(n+2) é divisível por 6. $\forall$ n $\in$ **N**, n $\neq 0$.

    4. $(3^{2n} - 1)$ é divisível por 8, $\forall$ n $\in$ **N**.

    5. $(10^n - 1)$ é divisível por 9, $\forall$ n $\in$ **N**.

    6. $2^n \geq n^2$; $\forall$ n $\in$ **N**, $n \geq 4$.

    7. $3^n \geq (1 + 2n)$; $\forall$ n $\in$ **N**.

    8. 8 é um fator de $5^{2n} + 7$ $\forall$ n $\in$ **N**, $n \geq 1$.

29. Determine a validade das seguintes proposições; justifique sua resposta.

1. Se $x, y \in \mathbf{R}$, com $0 < x < y$, então $x^n < y^n \quad \forall \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \neq 0$.

2. $(4^n - 1)$ é divisível por 3, $\forall \quad n \in \mathbf{N}$.

3. $(8^n - 5^n)$ é divisível por 3, $\forall \quad n \in \mathbf{N}$.

4. $4^n > n^4$; $\forall \quad n \in \mathbf{N}, \; n \geq 5$.

5. $2^{2n+1}+3^{2n+1}$ é múltiplo de 5.

30. Demonstrar que:

$$1+ 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

31. Demonstrar que a soma dos cubos dos n primeiros números naturais é igual a $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

32. Mostre o seguinte:

1. Se $(a, \; s) = (b, \; s) = 1$, então $(ab, \; s) = 1$.

2. Se p é um número primo e $p|\, ab$, onde $a, \; b \in \mathbf{Z}$, então $p \mid a$ ou $p|\, b$.

33. Mostre que, se $a \in \mathbf{N}$ tal que $a > -1$ então, para todo $n \in \mathbf{N}^+$ temos a desigualdade: $(1+a)^n \geq 1+na$.

34. Mostre que a soma dos divisores de um número $K=p_1^{n_1}\, p_2^{n_2} p_3^{n_3} \,.\,.\,.\, p_{m-1}^{n_{m-1}} p_m^{n_m}$ é dada pela igualdade:

$$S(K) = \left(\frac{p_1^{n_1+1}}{p_1 - 1}\right)\left(\frac{p_2^{n_2+1}}{p_2 - 1}\right)\left(\frac{p_3^{n_3+1}}{p_3 - 1}\right). \; . \; . \; . \left(\frac{p_m^{n_m+1}}{p_m - 1}\right)$$

35. Mostre que o produto dos divisores de um número $k=p_1^{n_1}\, p_2^{n_2} p_3^{n_3} \,.\,.\,.\, p_{m-1}^{n_{m-1}} p_m^{n_m}$ é

$$P(k) = \sqrt{kp_1^{(n_1)^2} p_2^{(n_2)^2} p_3^{(n_3)^2} \ldots\ldots p_m^{(n_m)^2}}$$

36. Mostre que 2 e 3 são as únicas raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

37. Determine a soma: $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \; . \; . \; . \; + (n+1)x^n$.

Miscelânea 5-1

1 Determine a soma: $1 + 11 + 111 + 1111 + \ \ldots \ + 111111111\ldots 1$, se o último somando é um número de n dígitos.

2 Determine a soma: $S = nx + (n-1)x^2 + (n-2)x^3 + \ \ldots \ + 2x^{n-1} + x^n$.

3 Determine a soma: $S = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ \ldots \ + \frac{2n-1}{2^n}$

4 Mostre que, se $m \in \mathbf{N}$ são válidas as seguintes desigualdades:

1. $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \ \ldots \ + \frac{1}{2m} > \frac{1}{2}$

2 $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \ \ldots \ + \frac{1}{m+(2m+1)} > 1$

5 Prove que, para qualquer inteiro positivo n é valido o seguinte:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ \ldots \ + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$$

6 Mostre que, se $|x| < 1$, para qualquer inteiro $n \geq 2$, então é válida a desigualdade: $(1 - x)^n + (1 + x)^n < 2^n$.

7 Mostre que se $ab \geq 0$, então $ab \geq \min.\{a^2, \ b^2\}$.

8 Mostre por indução sobre n, que:

1. Se $x = p + \sqrt{q}$, onde p e q são racionais, e $n \in \mathbf{N} -\{0\}$ então x^n $= a + b\sqrt{q}$ sendo a e b números racionais.

2. Mostre que: $(p - \sqrt{q})^n = a - b\sqrt{q}$.

9 O símbolo $\sum_{i=1}^{n} a_i$ é usado para representar a soma de todos os a_i para valores do inteiro i desde 1 até n; isto é $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_{n-1} + a_n$. Mostre que: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

10 Calcular a soma $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$ sendo $a_i = k$ uma constante.

11 Mostre que: $\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

12 Prove que se $m \in \mathbf{N} -\{0\}$, então: $1^m + 2^m + 3^m + \ldots \ (n-1)^m + n^m \leq n^{m+1}$, $n \geq 1$

13 Mostre por indução que para qualquer inteiro $k > 1$ e $n \in \mathbf{N} -\{0\}$:

1. $n^{k+1} \geq (k+1).[1 + 2^k + 3^k + \ldots \ + (n-2)^k + (n-1)^k]$

2. $k \cdot n^{\frac{k-1}{k}} \geq (k-1).[1 + 2^{-\frac{1}{k}} + 3^{-\frac{1}{k}} + \ldots + (n-1)^{-\frac{1}{k}} + n^{-\frac{1}{k}}]$

14 Mostre por indução o seguinte:

1. A desigualdade de Cauchy : $\left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]$.

2. $(1+q)(1+q^2)(1+q^4) \ldots (1+q^{2(n-1)})(1+q^{2n}) = \dfrac{1-q^{2(n+1)}}{1-q}$ $\quad q \neq 1$.

15 Mostre a seguinte igualdade: $\sum_{i=1}^{n}(b+a_i) = nb + \sum_{i=1}^{n} a_i$

16 Define-se o coeficiente binomial $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ se $0 \leq m \leq n$. Mostre que:

1. $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}$ se $1 \leq m \leq n$.

2. $(a+b)^n = \sum_{j=o}^{n}\binom{n}{j} a^{n-j}b^j \quad \forall\ a, b \in \mathbf{R}$.

17 Mostre que: $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - \ldots + (-1)^{n-1}.\ n^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

18 Mostre que: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^m = \dfrac{x^{m+1}-1}{x-1} \quad \forall\ m \in \mathbf{N},\ x \neq 1$

19 Mostre que: $3.\,[1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n(n+1)] = n(n+1)(n+2) \quad \forall\ n \in \mathbf{N},\ n \neq 0$.

20 Mostre que: $\text{sen}\, x + \text{sen}\, 2x + \text{sen}\, 3x + \ldots + \text{sen}\, nx = \dfrac{\text{sen}\dfrac{(n+1)x}{2}}{\text{sen}\dfrac{x}{2}}.\text{sen}\dfrac{nx}{2}$

21 Demonstrar que: $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n[\cos \frac{n\pi}{4} + i\ \text{sen}\ \frac{n\pi}{4}]$ $\quad n \in \mathbf{N}$.

22 Demonstrar que: $(\cos x + i\ \text{sen}\ x)^n = = \cos nx + i\ \text{sen}\ nx \quad \forall\ n \in \mathbf{N}$.

23 Demonstrar que para todo número natural $n > 1$ tem-se:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

24 Demonstrar que: $2^{n-1}(a^n+b^n) > (a+b)^n$ onde $a+b > 0$, $a \neq b$ e n é um número natural maior que 1.

25 Mostre que, para números naturais x e y, e $n \in \mathbf{N}$ n \geq 2 são válidas as seguintes igualdades:

1. $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}.y + x^{n-3}.y^2 + \ldots + x^2.y^{n-3} + x.y^{n-2} + y^{n-1})$

2. $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}.y + x^{n-3}.y^2 - \ ...\ +(-1)^{n-3} x^2.y^{n-3} - x.y^{n-2} + y^{n-1})$ somente para n ímpar.

26 Mostre que, se o produto de n números positivos é igual a 1 (um), a soma dos mesmos não é menor que n.

27 Mostre que todo número natural podemos escrever como o produto de números primos.

28 Mostre por indução que: $a_n = \dfrac{\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n}{\sqrt{5}}$ $\forall\ n \in \mathbf{N}$ é um número natural.

29 Mostre que, se $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...\ ,\ a_n$ são números reais tais que $|\ a_1\ | \leq 1$ e $|$ a_n - $a_{n-1}\ | \leq 1$, então $|\ a_n\ | \leq 1$.

30 Mostre que, para todo inteiro positivo n e para p > 0 número real a seguinte desigualdade é válida: $(1+ p)^n \geq 1 + np + \dfrac{n(n+1)}{2}p^2$.

31 Mostre que, para qualquer x > 0 e para todo número natural n, a seguinte desigualdade é verdadeira: $x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + ... + \dfrac{1}{x^{n-4}} + \dfrac{1}{x^{n-2}} + \dfrac{1}{x^2} \geq n+1$

32 Utilizando o princípio de indução matemática, mostre que:

$$\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1} \qquad \forall\ n \in \mathbf{N},\ n \neq 0$$

33 Mostre que, se $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...\ ,\ a_n$, $n \in \mathbf{N}$ não nulos, tem-se:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + ,....+ \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n$$

34 Mostre que, para quaisquer que sejam os números positivos diferentes a e b é válida a desigualdade: $\sqrt[n+1]{ab^n} < \dfrac{a+bn}{n+1}$.

35 Mostre que: $\left[1+\dfrac{1}{1}\right]\left[1+\dfrac{1}{2}\right]^2\left[1+\dfrac{1}{3}\right]^3 ... \left[1+\dfrac{1}{n}\right]^n = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$ $\forall\ n \in \mathbf{N}$.

36 Seja $r \neq 1$.

1. Deduzir que, $a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ ...\ + ar^{n-1} = a\left[\dfrac{1-r^n}{1-r}\right]$

2. Mostre por indução sobre n que: $a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ ...\ + ar^{n-1} = a\left[\dfrac{1-r^n}{1-r}\right]$

37 Demonstrar a identidade : $\cos\alpha.\ \cos 2\alpha.\ \cos 4\alpha\ ...\ \cos 2^n\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\operatorname{sen}\alpha}$

Capítulo VI

OPERAÇÕES BINÁRIAS

Kurt Godel

Kurt Gödel nasceu em 28 de abril de 1906 , em Brünn, Áustria-Hungria (hoje Brno, na República Tcheca) e faleceu em Princeton, EUA, 14 de Janeiro de 1978 . Foi filho de um gerente de fábrica têxtil. Em família, Kurt era conhecido por Der Herr Warum (Sr. Por quê?.

Em 1923, concluiu, com louvor, o curso fundamental na escola alemã de Brünn e embora tivesse excelente talento para linguagens, ele se aprofundou em História e Matemática. Seu interesse pela Matemática aumentou em 1920 , quando acompanhou Rudolf, seu irmão mais velho, que fora para Viena cursar a Escola de Medicina da Universidade de Viena.

Durante a adolescência, estudou Goethe, o Manual de Gabelsberger , a teoria das cores de Isaac Newton e as “Críticas” de Kant.

Em lógica matemática, os Teoremas da incompletude de Gödel são resultados provados em 1930 . O primeiro teorema afirma, de forma simplificada:.

> *“Em qualquer formalismo matemático consistente suficientemente e robusto para definir os conceitos de números naturais (da aritmética), existirá a possibilidade de formar uma afirmação indecidível, ou seja, não pode ser provada verdadeira nem falsa”.*

O segundo teorema da incompletude de Gödel, provado por formalização do próprio primeiro teorema em si, enuncia-se:.

> *“Nenhum sistema consistente pode ser utilizado para provar a sua própria consistência”.*

O resultado foi devastador para uma abordagem filosófica à matemática conhecida como Programa de Hilbert. David Hilbert propôs que a consistência de sistemas mais complexos, como análise real, poderiam ser provados em termos de sistemas mais simples. Assim, a consistência de toda a matemática seria reduzida à aritmética básica. O segundo teorema da incompletude de Gödel mostra que a aritmética básica não pode ser usada para provar sua própria consistência, portanto não pode ser usada para provar a consistência de nada mais forte.

6.1 RELAÇÃO DE ORDEM

6.1.1 Relação de ordem parcial.

Definição 6.1 Relação de ordem parcial.

Dada uma relação $R \subseteq A \times A$, dizemos que R é de ordem parcial se, e somente se, R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Isto é:

1. $(a, a) \in R, \qquad \forall\ a \in A$
2. $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$
3. $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

Se R é de ordem parcial em A, dizemos que A é um "conjunto parcialmente ordenado".

Definição 6.2 Conjunto parcialmente ordenado.

Um conjunto A e uma relação R de ordem parcial em A, constituem um conjunto parcialmente ordenado.

Se uma relação R em A define um ordem parcial em A, então $(a, b) \in R$ denotamos por $a \preceq b$ que se lê "a anterior ao elemento b".

Exemplo 6.1

- Seja A uma família de conjuntos, a relação definida em A por x *é subconjunto de* y, é de ordem parcial.
- Seja A um subconjunto de números reais, a relação em A definida por $x \leq y$, é de ordem parcial em A, é chamado de *ordem natural* em A.

Exemplo 6.2

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. O diagrama da Figura (6.1) define um ordem parcial em A do seguinte modo: $x \preceq y$ se, $x = y$ ou se podemos ir de x até y no diagrama na direção ascendente indicada. Observe que $2 \preceq 1$, $4 \preceq 1$ e $5 \preceq 3$.

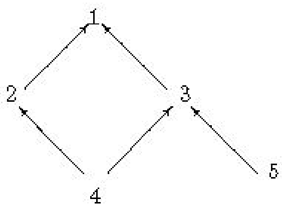


Figura 6.1:

Exemplo 6.3

Seja R a relação definida em os números naturais **N** por "x é *múltiplo* de y", então R é um ordem parcial em **N** e temos $6 \preceq 2$, $15 \preceq 3$ e $17 \preceq 17$.

Observação 6.1

Para os conceitos de parcialmente ordenado se utilizam as seguintes notações:

- $a \prec b$ significa $a \underset{=}{\prec} b$ e $a \neq b$; se lê "a *estritamente anterior a* b".
- $b \underset{=}{\succ} a$ significa $a \underset{=}{\prec} b$; se lê "b *supera a* a".
- $b \succ a$ significa $a \prec b$; se lê "b *estritamente superior a* a"

Definição 6.3 Elementos não comparáveis.

Dois elementos a e b de um conjunto parcialmente ordenado se dizem não comparáveis, se $a \underset{\neq}{\prec} b$ e $b \underset{\neq}{\prec} a$

Isto é, se nenhum de eles precede ao outro. No Exemplo (6.3) os números 4 e 5 não são comparáveis.

Observação 6.2

Se uma relação R em um conjunto A é reflexiva, anti-simétrica e transitiva, então a relação recíproca R^* é também reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Isto é, se R define um ordem parcial em A , então R^* também define um ordem parcial em A , e se chama a *ordem inversa*.

Para resultados mais profundos a respeito de conjuntos parcialmente ordenados precisamos de uma nova ferramenta da teoria de conjuntos.

Observe que se $\{A_i\}$ é uma família finita de conjuntos, para $i \in \mathbf{N}$, digamos então que uma condição necessária e suficiente para que seu produto cartesiano seja nulo é que pelo menos um dos $A_i = \Phi$. Isto mostra-se por indução sobre **N**.

A generalização para família infinitas da afirmação do parágrafo precedente é o seguinte axioma da teoria de conjuntos.

Axioma 6.1 Axioma de escolha (6º. axioma de Zermelo)

O produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios é não-vazio.

Em outras palavras, se $\{B_i\}_{i \in \Lambda}$ é uma família finita de conjuntos não-vazios indexado por um conjunto Λ não-vazio, então existe uma família $\{b_i\}_{i \in \Lambda}$ tal que $b_i \in B_i$ para cada $i \in \Lambda$.

6.1.2 Relação de ordem total.

Definição 6.4

Dada uma relação $R \subseteq A \times A$, dizemos que R é de ordem total se, e somente se:

1. R é de ordem parcial.

2. $(x, y) \in R \vee (y, x) \in R, \quad \forall (x, y) \in A \times A$.

Se R é uma relação de ordem total em A, dizemos que A é um conjunto totalmente ordenado por R. A palavra *parcial* utilizamos para definir ordem parcial em um conjunto A , isto pelo fato de alguns dos elementos de A não serem comparáveis. Por outro lado, se cada par de elementos de um conjunto parcialmente ordenado A são comparáveis, então dizemos que A é de *ordem total*.

Definição 6.5 Conjunto totalmente ordenado.

Um conjunto A parcialmente ordenado, com a propriedade adicional de $a \prec b$, $a = b$ ou $a \succ b$ para quaisquer dos elementos $a, b \in A$, constituem um conjunto totalmente ordenado.

Exemplo 6.4

- A ordem parcial em qualquer conjunto A de números reais (com a ordem natural), é uma ordem total, isto do fato de dois números quaisquer serem comparáveis.
- Seja R a ordem parcial em $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ definido por `` x divide a y ''. Então R não é uma ordem total em A , isto do fato 3 e 5 não serem comparáveis.

Exemplo 6.5

Consideremos o conjunto $P(S)$, e a relação $R = \{(A, B) \in P(S) \times P(S) \ /. \ A \subseteq B\}$ não é de ordem total, isto pelo fato, que não satisfaz a propriedade simétrica, dado o par $(A, B) \in P(S) \times P(S)$ pode acontecer $A \underset{\neq}{\subseteq} B \wedge B \underset{\neq}{\subseteq} A$

Exemplo 6.6

Mostre que o conjunto $T = \{ (a, b) \in \mathbf{R}^2 \ /. \ a \leq b\}$ é uma relação de ordem total no conjunto de números reais $\mathbf{R}$.

Demonstração.

Com efeito, $a \leq a, \ \forall \ a \in r$, logo $(a, a) \in T$, $a \in \mathbf{R}$.

Se $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$, logo $(a, b) \in T \wedge (b, a) \in T \Rightarrow a = b$.

Se $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$, logo $(a, b) \in T \wedge (b, c) \in T \Rightarrow (a, c) \in T$.

É verdade que $a \leq b \vee b \leq a \ \forall \ (a, b) \in \mathbf{R}^2$ isto é, $(a, b) \in T \vee (b, c) \in T, \ \forall \ (a, b) \in \mathbf{R}^2$.

Portanto, T é uma relação de ordem total.

6.2 LIMITES: Superior. Inferior.

Definição 6.6 Limite inferior.

Seja A um conjunto ordenado, dizemos que $a \in A$ é limite inferior de A se para todo $x \in A$ temos que $a \preceq x$; isto é o elemento a, é anterior a todos os elementos de A.

Definição 6.7 Limite Superior.

Dizemos que $b \in A$ é limite superior de A , se para todo $x \in A$ temos que $x \preceq b$; isto é b é posterior a todos os elementos de A.

6.2.1 Supremo. Ínfimo.

Seja B um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado A .

Definição 6.8. Minorante.

Um elemento m de A é chamado de minorante de B , se para todo $x \in B$ tem-se que $m \preceq x$; isto é, m é anterior ou inferior a todo elemento de B.

Exemplo 6.7

Seja $A \subseteq \mathbf{R}$, o conjunto (intervalo) $A = (-4, 6)$ tem como limite inferior qualquer número $x \in \mathbf{R}$ sempre que $x \leq -4$; e como limite superior qualquer número $y \in \mathbf{R}$ sempre que $6 \leq y$.

Definição 6.9 Ínfimo de um conjunto.

Se um minorante de B é posterior ou superior a todos os minorantes de B , dizemos que é o ínfimo de B e denotamos por $\inf.(B)$.

Em geral B pode não ter minorantes ou ter muitos, porém caso exista somente pode ter um $\inf.(B)$.

Analogamente, um elemento M de A é chamado de maiorante de B , se para todo $x \in B$ tem-se que $x \preceq M$; isto é, M é superior ou posterior a todos os elementos de B .

Definição 6.10 Supremo de um conjunto.

Se um maiorante de B é anterior ou inferior a todos os maiorantes de B , dizemos que M é o supremo de B e denotamos por $\sup.(B)$.

Em geral B pode não ter maiorantes ou ter muitos, porém caso exista somente pode ter um $\sup.(B)$.

Exemplo 6.8

No Exemplo (6.7), temos que $\inf.(B) = -4$ e $\sup.(B) = 6$

6.2.2 Elementos: Maximal. Minimal.

Definição 6.11 Elemento maximal.

Seja A um conjunto ordenado, dizemos que $\mathbf{a} \in A$ é *maximal* se $a \preceq x$ implica $a = x$; isto é $\mathbf{a} \in A$ é elemento maximal, se em A não existe nenhum elemento posterior a **a** no sentido estrito.

Definição 6.12 Elemento minimal.

De modo análogo, dizemos que b é elemento minimal se, $x \preceq b$ implica $b = x$; isto é $b \in A$ é elemento minimal, se em A não existe nenhum elemento anterior ao elemento b no sentido estrito.

Exemplo 6.9

- O conjunto do Exemplo (6.8), não tem elemento maximal, nem elemento minimal.
- O conjunto $A = [-4, 6) \subseteq \mathbf{R}$ tem como elemento minimal o -4 , não tem elemento maximal.
- O conjunto $A = (-4, 6] \subseteq \mathbf{R}$ tem como elemento maximal o 6 , não tem elemento minimal.

Exemplo 6.10

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ um conjunto ordenado pelo diagrama da Figura (6.2).

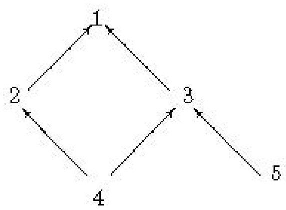


Figura 6.2:

Observe que:

$2 \preceq 1$, $4 \preceq 1$, $5 \preceq 3$, $4 \preceq 3$, $5 \preceq 1$.

Aqui, 4 e 5 são elementos minimais, o elemento maximal é o 1 .

6.3 LEIS DE COMPOSIÇÃO

6.3.1 Lei de composição interna.

Definição 6.13

Dizemos lei de composição interna sobre um conjunto A, à relação que a cada par ordenado $(a, b) \in A \times A$ associa outro elemento $c \in A$

O elemento $c \in A$ diz-se composto de a e b .

Para indicar uma lei de composição interna podemos utilizar, por exemplo, o sinal $*$, e escreve-se $a * b = c$.

Uma lei de composição interna é pois uma aplicação $f : A \times A \longrightarrow A$ de modo que $f(a, b) = c$.

Exemplo 6.11

No conjunto **N**, a lei de composição interna chamada multiplicação associa ao par (2, 5) o número 10 e escreve-se $2 \times 5 = 10$ ou $2 . 5 = 10$.

6.3.1.1 Propriedades da lei de composição interna.

Propriedade 6.1 Comutativa.

Uma lei de composição interna sobre um conjunto A , diz-se comutativa quando temos:

$$a * b = b * a \text{ para todo } a, b \in A$$

Exemplo 6.12

No conjunto **N**, a adição é comutativa: $a + b = b + a$ para todo $a, b \in \mathbf{N}$.

Propriedade 6.2 Associativa.

Uma lei de composição interna sobre um conjunto A , diz-se associativa quando temos:

$$(a * b)*c = a * (b*c) \ \forall; a, b, c \in A$$

Exemplo 6.13

No conjunto **N**, a multiplicação é associativa:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \ \forall \ a, b, c \in \mathbf{N}$$

Definição 6.14 Regularidade.

Uma elemento $a \in A$, diz-se regular para a lei de composição interna * , quando para todo $x, y \in A$ temos:

$$a * x = a * y \text{ e } x * a = y * a \Rightarrow x = y$$

Isto significa que na igualdade $a * x = a * b$ por exemplo, podemos simplificar o elemento a .

Exemplo 6.14

Todo número natural é regular em relação à adição:

$$a + x = a + y \Rightarrow x = y$$

Definição 6.15 Elemento neutro.

Um elemento $e \in A$ diz-se elemento neutro para a lei de composição interna $*$, quando para todo $x \in A$ temos: $a*e = e*a = a$

Exemplo 6.15

No conjunto dos números naturais **N**, o número 1 é o elemento neutro para a multiplicação: $n \times 1 = 1 \times n = n \;\; \forall \;\; n \in \mathbf{N}$.

Definição 6.16 Elemento simétrico.

Seja $*$ uma lei de composição interna sobre um conjunto A, possuindo um elemento neutro **e**. Diz-se que o elemento $x' \in A$ é simétrico de outro elemento $x \in A$, quando temos $x * x' = x' * x = \mathbf{e}$

Exemplo 6.16

No conjunto dos números inteiros **Z**, os números -3 e 3 são simétricos em relação à adição, isto pelo fato de $(5)+(-5) = (-5)+(5) = 0$.

Definição 6.17 Distributividade.

Sejam $*$ e ∇ duas leis de composição interna definidas sobre um conjunto A. Diz-se que a lei $*$ é distributiva em relação à lei ∇ quando temos: $a * (b \nabla c) = a * b \nabla a * c \quad \forall a, b, c \in \mathbf{N}.$

Exemplo 6.17

No conjunto dos números naturais **N**, a lei de multiplicação é distributiva em relação à lei de adição: $a \times (b+c) = a \times b + a \times c \quad \forall \; a, b \in \mathbf{N}.$

6.3.2 Isomorfismo.

Sejam dois conjuntos A e B, sendo A munido de uma lei de composição interna $*$ e B de outra lei interna ∇, denotamos $(A, *)$ e (B, ∇).

Definição 6.18 Isomorfismo.

Chama-se isomorfismo de $(A, *)$ sobre (B, ∇) a uma aplicação biunívoca f de A em B tal que para $a, b \in A$, temos:

$$f(a * b) = f(a) \nabla f(b)$$

Logo, dizemos que dois conjuntos ordenados são isomorfos, se existe entre seus elementos uma correspondência biunívoca que preserva a relação de ordem.

Quando um conjunto ordenado A é isomorfo a um conjunto ordenado B, denotamos $A \approx B$.

Portanto, se existe uma aplicação $f{:}A \longrightarrow B$ injetiva e sobrejetiva que tem a propriedade de que, $\forall \; a, b \in A$, $a \prec b$ se, e somente se, $f(a) \prec f(b)$.

Dizemos que a aplicação f é uma "*aplicação isomorfa*" ou simplesmente "f é isomorfismo de A em B".

Exemplo 6.18

Consideremos o conjunto dos números reais positivos $\mathbf{R}^+$, onde a lei $\times$ é a multiplicação, e o conjunto $\mathbf{R}$ onde a lei interna é a adição $+$.

A aplicação $x \to \log x$, isto é $f(x) = \log x$ é um isomorfismo, isto pelo fato de $\log (x \times y) = \log x + \log y$ e a aplicação é biunívoca, pois $\log u = \log v \Rightarrow u = v$

Exemplo 6.19

Seja o conjunto $A = \{ 1, 2, 6, 8 \}$ ordenado pela relação "x *divide a* y", e o conjunto $B = \{ a, b, c, d \}$ ordenado pelo diagrama da Figura (6.3).

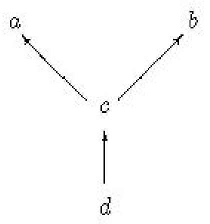


Figura 6.3:

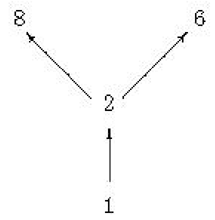


Figura 6.4:

Um diagrama para o conjunto A mostra-se na Figura (6.4). Então $A \approx B$, pois a aplicação $f: A \longrightarrow B$ é isomorfismo de A em B, observe que $f = \{ (8, a), (6, b), (2, c), (1, d) \}$ é uma correspondência biunívoca preservando a relação de ordem.

Note que $g = \{ (8, b), (6, a), (2, c), (1, d)\}$ também é um isomorfismo de A em B.

6.3.3 Lei de composição externa.

Definição 6.19 Lei de composição externa.

Dados dois conjuntos A e B, diz-se que existe sobre A uma lei de composição externa, quando a cada elemento $m \in A$ e a cada elemento $\alpha \in B$ se associa o elemento $\alpha m \in A$

Os elementos do conjunto A dizem-se operadores; assim o elemento $m \in A$ opera sobre o elemento $\alpha \in B$, transformando-o no elemento $\alpha\, m \in A$.

Uma tal lei de composição externa é uma aplicação do conjunto $A \times B$ no conjunto A.

Exemplo 6.20

Se A for o conjunto dos números reais $\mathbf{R}$, e B o conjunto de vetores de $\mathbf{R}^2$, isto é $\vec{u} = (a, b) \in \mathbf{R}^2$, ao par $(m, \vec{u}) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ fazemos corresponder o vetor

$m\vec{u}$, sendo a lei a multiplicação de um escalar por um vetor definido por $m\vec{u} = (ma, mb) \in \mathbf{R}^2$.

6.4 OPERAÇÕES BINÁRIAS

Definição 6.20 Operação binária.

Dado um conjunto não vazio A, dizemos operação binária em A a toda relação de $A \times A$ em A.

Denotando a operação binária com $*$, temos que:

$$* : A \times A \longrightarrow A$$
$$(a, b) \rightarrow a * b$$

indica-se que a cada par ordenado $(a, b) \in A \times A$ corresponde o elemento $a * b \in A$.

Exemplo 6.21

- A adição é uma operação binária no conjunto de números reais **R**.
- A subtração é uma operação binária no conjunto de números inteiros **Z**; porém não no conjunto de números naturais **N**.

Exemplo 6.22

Considere o conjunto $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ e a operação $*$ definida como se indica na Tabela (6.1)

Observe que para cada par (a, b), o resultado da operação $*$ encontra-se no cruze da fila que começa com a e a coluna que começa com b.

*	1	2	3	4a
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

Tabela 6.1

O resultado da operação $4 * 3$ é o elemento 2 que encontra-se assinalado.

Observação 6.3

1ª. A operação binária, também é conhecida como lei de composição interna.

2ª. Quando $*$ seja uma operação binária sobre um conjunto A dizemos que $*$ tem a propriedade da clausura.

3ª. Se $*$ é uma operação binária sobre um conjunto A e existe $B \subseteq A$ com a propriedade que se, $a, b \in B \Rightarrow a * b \in B$, dizemos que B é fechado sob a operação $*$.

Em geral como $A \subseteq A$, então A é fechado sob qualquer operação binária definida em A.

6.4.1 Operação binária univocamente definida.

Se $*$ é uma operação binária num conjunto A, e R uma relação de equivalência em A, operação $*$ em A, está univocamente definida respeito da relação R se, e somente se: $(a \; R \; b \wedge c \; R \; d) \Rightarrow (a * c) \; R \; (b * d)$ isto é: $(a, b) \in R \wedge (c, d) \in R \Rightarrow (a * c, b * d) \in R$.

Exemplo 6.21

Sejam a operação de adição em **N** e a relação de equivalência em **N** definida por $R = \{ (x, y) \in \mathbf{N}^2 \; / . \; x = y \}$. Então a operação de adição está univocamente definida em **N** com respeito a R.

Observe que, $\forall \; a, b \in \mathbf{N}$, tem-se que $a + b \in n$; por outro lado se $(a = b \wedge c = d) \Rightarrow a+c = b+d$, $\forall \; a, b., c, ;d \in \mathbf{N}$.

6.4.1 Sistema matemático.

Definição 6.21 Sistema matemático.

Chama-se sistema matemático a um conjunto não vazio A, no qual uma o mais operações estão univocamente definidas com respeito a uma relação de equivalência.

Um sistema matemático composto de um conjunto A e uma operação $*$ é denotado por $(A, *)$; quando o sistema estiver composto por A e as operações $*$ e $\lozenge$ o denotamos por $(A, *, \lozenge)$.

Exemplo 6.24

Sejam $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ e $R = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ uma relação de equivalência sobre A e $*$ uma operação definida pela Tabela (6.2).

Mostre que $(A, *)$ é um sistema matemático.

*	1	2	3	4a
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

Tabela 6.2

Solução.

O conjunto $A \neq \Phi$, por outro lado, $*$ é uma lei de composição interna, e se $(a, b) \in R \wedge (c, d) \in R \Rightarrow (a * c, b * d) \in R$

Exemplo 6.25

($\mathbf{N}$, +) onde + é a operação de adição em $\mathbf{N}$ é um sistema matemático.

Observe que $\mathbf{N} \neq \Phi$, e a adição em $\mathbf{N}$ está univocamente definida com respeito à identidade.

Exemplo 6.26

($\mathbf{R}$, +, .) onde + é a operação de adição, e . a operação de multiplicação em $\mathbf{R}$, é um sistema matemático.

Observe que $\mathbf{R} \neq \Phi$ e, em $\mathbf{R}$ as operações de + e . estão univocamente definidas pela relação de igualdade.

Exemplo 6.27

Os grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais são quatro exemplos de sistemas matemáticos.

6.4.3 Classificação dos sistemas matemáticos.

Os sistemas matemáticos classificam-se em: a**)** Sistema numérico. **b)** Grupos. **c)** Anéis. **d)** Corpos

Definição 6.22 Sistemas numéricos.

Um sistema matemático da forma (A, *, ∇) chama-se sistema numérico quando:

a) O operador * é comutativo e associativo.

b) O operador ∇ é comutativo e associativo.

c) Uma das operações seja distributiva respeito da outra.

Exemplo 6.28

São sistema numéricos ($\mathbf{N}$, +, .), ($\mathbf{Z}$, +, .), ($\mathbf{Q}$, +, .), ($\mathbf{R}$, +, .) onde + e . são as operações usuais de adição e multiplicação.

Exemplo 6.29

Sejam A = { a, b } e *, ∇ as operações definidas pela Tabela (6.3)

*	a	b
a	a	b
b	b	a

∇	a	b
a	a	a
b	b	b

Tabela 6.3

Logo $(A, *, \nabla)$ é um sistema numérico.

Definição 6.23 Número.

São chamados de número, cada elemento do conjunto A de um sistema numérico.

Logo de acordo com esta definição os elementos do conjunto A do Exemplo (6.28) cada um de eles é um número.

A relação de equivalência de um sistema numérico não necessariamente é a identidade, porém freqüentemente o é.

Definição 6. Grupo.

Um sistema matemático da forma $(G, *)$ diz-se que é um grupo com a operação $*$ se, e somente se satisfaz as seguintes propriedades:

1. Associatividade: $(a * b) * c = a * (b * c)\ \forall\ a, b, c \in G$.

2. Existência de um elemento neutro: $\exists\ e \in G$ tal que $e * a = a * e = a\ \forall\ a \in G$

3. Existência de um elemento simétrico $a' \in G$ para todo $a \in G$ de modo que $a*a' = a' * a = e$

Quando $a*b = b*a$ para todo $a, b \in G$, o grupo é denominado *grupo abeliano* ou *grupo comutativo*.

Se o conjunto G é finito, o número de seus elementos é chamado de *ordem do grupo*.

Exemplo 6.30

- O conjunto dos números inteiros $\mathbf{Z}$ em relação à adição.
- As rotações de um polígono regular em torno de um de seus vértices, em geometria plana constituem um grupo comutativo.

Exemplo 6.31

O conjunto $A = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$ com a operação usual de adição, não é um grupo.

Observe neste exemplo que a adição é associativa em A, o elemento neutro é o zero, e cada elemento de A tem inverso em A. O fato não ser grupo é que $(A, +)$ não é um sistema matemático, $+$ não é operação binária em A; isto é A não é fechado respeito adição. Temos que $2 \in A \wedge 1 \in A$ porém $2+1 \notin A$.

Definição 6.25 Subgrupo.

Dado um grupo $(G, *)$, chama-se subgrupo de G à parte H de G que constitua um grupo munido da mesma operação $*$.

Exemplo 6.33

O conjunto dos números inteiros $2\mathbf{Z}$ é um subgrupo comutativo de $\mathbf{Z}$ em relação à adição.

Definição 6.26 Anel.

Um sistema matemático da forma (A, *, ∇) diz-se que é um anel se, e somente se satisfaz as seguintes propriedades:

1º. (A *) é um grupo abeliano.

2º. A operação ∇ em A é associativa.

3º. A operação ∇ é distributiva respeito à operação * .

A = { -2, -1, 0, 1, 2 }

Exemplo 6.33

O conjunto A = { ◃, ▹, α , β } com as operações * e ∇ definidas na Tabela (6.4) é um anel.

*	◃	▹	α	β
◃	◃	▹	α	β
▹	▹	◃	β	α
α	α	β	◃	▹
β	β	α	▹	◃

∇	◃	▹	α	β
◃	◃	◃	◃	◃
▹	◃	▹	◃	▹
α	◃	α	◃	α
β	◃	β	◃	β

Tabela 6.4

Exemplo 6.34

Os seguintes sistemas matemáticos são exemplos de anéis: (**Z**, +, .), (**Q**, +, .), (**R**, +, .) , onde + e . são as operações usuais de adição e multiplicação.

Definição 6.26 Anel comutativo.

Diz-se que o anel (A, *, ∇) é comutativo, quando a operação binária ∇ for comutativa.

Definição 6.27 Anel com unidade.

Diz-se que o anel (A, *, ∇) tem unidade quando a operação binária ∇ possui elemento neutro.

Este elemento neutro é chamado de unidade do anel.

Exemplo 6.35

O conjunto dos números inteiros assim como o conjunto dos números irracionais proporcionam exemplos de anel comutativo com unidade. Os racionais tem a propriedade adicional que os inteiros não ao têm, cada elemento distinto de zero possui inverso multiplicativo.

Exemplo 6.36

Seja $A = \{ a, b \}$, e $*$ e $\lozenge$ as operações definidas na Tabela (6.5)

*	a	b
a	a	b
b	b	a

◊	a	b
a	a	a
b	a	b

Tabela 6.5

Tem-se que $(A, *, \lozenge)$ é um anel com unidade; o elemento neutro b é a unidade para a operação $\lozenge$.

Definição 6.29 Corpo.

Um corpo A é um anel comutativo com elemento unidade que cumpre a seguinte condição:

Para cada $a \in A$ onde $a \neq 0$, existe um elemento $a^* \in A$ tal que $a . a^* = 1$

Isto é, $(A, *, \lozenge)$ é um corpo se:

1) $(A, *, \lozenge)$, é um anel comutativo.

2) $(A, *, \lozenge)$, é um anel com unidade.

3) Cada elemento $a \in A$ não zero tem um simétrico respeito da operação $\lozenge$.

Exemplo 6.37

O conjunto dos números reais **R** proporciona exemplo de corpo.

Exemplo 6.38

O sistema matemático $(A, *, \lozenge)$ dado no Exemplo (6.36) é um corpo.

Exercícios 6-1

1. Mostre que o conjunto **N** é bem ordenado.

2. Mostre que 1 é o supremo do conjunto $E = \{ x \mathrel{/.} x = \frac{2^n - 1}{2^n},\ n \in \mathbf{N}\}$.

3. Seja R a relação em A= { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } definida por "a *divide* b". Determine se R é de ordem parcial, ilustrar mediante diagrama.

4. Mostre que a relação R definida por "A é equipotênte a um subconjunto de B" é de ordem parcial na família de conjuntos.

5. Sejam os conjuntos A e B totalmente ordenados. Seu produto cartesiano $A \times B$ pode-se ordenar totalmente? Justificar sua resposta.

6. A relação "x divide a y" no conjunto de números naturais, define uma ordem parcial. Quais dos seguintes subconjuntos de **N** são totalmente ordenados?

   1. A = { 4, 3, 15 } **2.** B = { 2, 4, 8, 16 }

   3. C = { 1, 2, 3, . . . , } **4.** D = { 5 }

7. Caso existam, determine o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo para cada um dos seguintes conjuntos:

   1. $B = \{ x \in n \mathrel{/.} | x^2-4 | < 16 \}$

   2. $A = \{ x \in z \mathrel{/.} | x^2-9 | + 3| x-4 | < 16 \}$

   3. $C = \{ x \in n \mathrel{/.} | x^2-x+1 | < 3 \}$

8. Se F = { 0, 1 } e E um conjunto qualquer, A subconjunto de E, a aplicação φ_A de E em F tal que $\varphi_A(x) = 0$ se $x \notin A$, $\varphi_A(x) = 1$ se $x \in A$

   1. Se E = { a, b, c, d } e A = { a, b, d } , represente o gráfico de $\varphi_A(x)$

   2. Se A e B são dois conjuntos quaisquer de E , A' o complemento de A com respeito a E . Mostre que qualquer que seja $x \in E$

   a) $\varphi_{A\cap B}(x) = \varphi_A(x).\ \varphi_B(x)$ **b)** $1-\varphi_A(x) = \varphi_{A'}(x)$

   c) $\varphi_{A\cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x)- \varphi_A(x)\ \varphi_B(x)$

   3. No conjunto das aplicações de E em F , definem-se as operações $(\bullet)$ e $(*)$ por: $\varphi_A .\varphi_B = \varphi_{A\cap B}$ e $\varphi_A * \varphi_B = \varphi_{A\cup B}$. Demonstre que: $\varphi_A.\varphi_A = \varphi_A$ e $\varphi_A * \varphi_A = \varphi_A$.

9. Determine se o conjunto A para o qual está definida a lei de composição interna * é um grupo:

   1. A = **Z** e * é a multiplicação usual de inteiros.

   2. A = **Q** e * é a multiplicação usual em **Q**.

   3. A = { q ∈ **Q** /. q > 0 } e * é a multiplicação usual em números racionais.

4. $A = \{ z \in \mathbf{Z} /. \ z = \sqrt{2} \}$ e $*$ é a multiplicação usual em $\mathbf{Z}$.

5. $A = \mathbf{R}$ e $*$ é a adição usual em números reais.

6. $A = \mathbf{Z}$ e $*$ define-se por $a * b, \forall \ a, \ b \in \mathbf{Z}$.

10. Mostre que a operação $*$ definida por $a * b = a + 2b + 3ab$, é uma lei de composição interna sobre o conjunto dos números naturais $\mathbf{N}$. Calcular $1 * 2$, $5 * 3$, $7 * 15$.

11. Mostre que a multiplicação de números reais, não é uma operação fechada no conjunto $A = \{ 1, \ 5 \}$

12. Determine se a subtração de números inteiros é uma operação fechada no conjunto de números inteiros positivos. Idem para o conjunto dos números inteiros múltiplos de três.

13. Determine todas as soluções das seguintes equações:

1. $4x \equiv 3 \pmod{7}$	**2.** $8x \equiv 6 \pmod{14}$
3. $2x \equiv 3 \pmod{5}$	**4.** $5x \equiv 3 \pmod{4}$

14. Demonstre que o conjunto $\mathbf{Z}_4$ das classes residuais módulo 4, é fechado respeito da operação $\oplus$ da adição das classes residuais.

15. Sejam $A = \{ 1, \ 2, \ 3, \ 4 \}$ e $*$ uma operação binária definida pela Tabela 6.5. Mostre que a operação $*$ está univocamente definida em A respeito da relação de identidade

$R = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \}$

$\oplus$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	2
3	3	4	1	2
4	4	2	2	3

16. Temos em cada exercício um conjunto e uma operação binária. Determine se cumpre as propriedades de: clausura, associatividade, comutatividade.

1. O conjunto dos inteiros $\mathbf{Z}$, com a operação $*$ definida por: $a * b = \dfrac{a}{b}$.

2. O conjunto $\mathbf{Q}$, com a operação ∇ definida por: $a \nabla b = \dfrac{a}{b}$.

3. O conjunto $P(A)$, potência de A, com a operação $\cup$ união de conjuntos.

4. O conjunto $P(A)$, potência de A, com a operação $\cap$ intersecção de conjuntos.

5. O conjunto $A = \{ 0, \ 1, \ 2, \ 3\}$, com a operação $\otimes$ de multiplicação módulo 4.

17. Para o exercício anterior, caso exista, assinale o elemento neutro.

18. Demonstrar que a operação m, máximo divisor comum de dois números não é distributiva pela esquerda respeito da adição de números inteiros positivos.

19. Demonstrar que o conjunto de números reais $\mathbf{R}_1 = \{ a + b\sqrt{2} \ /. \ a, \ b \in \mathbf{Z} \}$ forma um grupo com a operação de adição.

20. Seja $G = \{ 5a \ /. \ a \in \mathbf{Z} \}$. Mostre que $(G, +)$ é um grupo.

21. Determine se o conjunto $G = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$ junto com a operação usual de multiplicação constitui um grupo.

22. Demonstre que, caso exista o elemento neutro respeito de uma operação binária * sobre um conjunto A , é único.

23. Mostre que se $(G, *)$ é um grupo e para $a \in G$, então o elemento a' (inverso de a) é único.

24. Sejam $(G_1, *)$, $(G_2, \Diamond)$ grupos abelianos e (G_3, ∇) um grupo não abeliano. Determine em $G_1 \times G_2 \times G_3$ uma estrutura de grupo. Este grupo será abeliano?

25. Mostre que o conjunto $A = \{ a \ /. a = 2x-1, \ x \in \mathbf{Z} \}$ com a adição e multiplicação definida para números inteiros não é um anel.

26. Demonstre que o conjunto dos números reais $\mathbf{R}$ junto as operações usuais de adição e multiplicação constitui um corpo.

27. No conjunto dos números reais, definimos as operações * e ◊ como segue: $a * b = 2a+3b-5$, $a \Diamond b = a^2-3ab$. Segundo estas definições resolver as seguintes equações:

    1. $x * 4 = 8$ **2.** $3 \Diamond x = 1$ **3.** $4x * 1 = 5 \Diamond 2$ **4.** $5 \Diamond 2x = \frac{1}{3} \Diamond x$

28. Consideremos M o conjunto dos movimentos aplicados a um quadrado ABCD que conservam sua posição no plano.

    - E : Movimento idêntico (identidade)
    - S_1 : Simetria axil, de eixo a mediatriz dos lados AB e CD .
    - S_2 : Simetria axil, de eixo a mediatriz aos lados AD e BC .
    - S_3 : Simetria axil, de eixo a diagonal BD .
    - S_4 : Simetria axil, de eixo a diagonal AC .
    - S_5 : Simetria central, de centro o centro do quadrado.
    - S_6 : Giro de 90^o (dextrógiro) com centro no centro do quadrado.
    - S_7 : Giro de 90^o (evógiro) com centro no centro do quadrado.

Definamos em M a operação * considerando como resultado de efetuar * entre dois elementos de M o movimento que se obtém aplicando sucessivamente o primeiro movimento e o segundo S_2 * S_1 , logo:

1. Obter $S_1 * S_2$, $S_3 * G_1$, $G_1 * G_2$, $G_1 * S_3$.

2. Formar uma tabela da operação * .

3. (M, *) tem estrutura de grupo?. É abeliano?

4. Provar que $S_3 * S_2 = S_1 * S_3$. Podemos deduzir que S_2 = S_1 ?

Bibliografia

[1] Apostol T. M.- **Introducción a la Teoría Analítica de los Números**.- Editora Reverte S.A., 1980.

[2] Burton W. Jones.- **Teoría de los Números**}- Biblioteca de Matemática Superior. Editorial F. Trillas, S. A. México, 1969.

[3] Cortez M. Walter.- **Iniciación a las Matemáticas Superiores**.- Notas de Aula.- UNMSM; Editora San Marcos 1970.

[4] Eves Howard. **Introdução à História da Matemática** 2^a Edição Editora da UNICAMP.

[5] Halmos R. Paul.- **Teoria ingênua dos conjuntos**.- Coleção Clássicos da Matemática.- Editora Ciência Moderna, 2002.

[6] Irving M. Copi.- **Introducción a la Lógica.-** Manuales EUDEBA, 1973.

[7]Oliveira, Augusto J. F. **Lógica e Aritmética**. Brasília: Editora da UNB 2004.

[8]Pinedo Christian Q.- **Estruturação para o Ensino da Matemática**.- Pró-ciênias.- UTF-PR Pato Branco, Vol 2, 1999.

[9]__________________**História da Matemática I**.- Notas de Aula N^o 5- UTF-PR Pato Branco 2005.

[10] _______________ **Introdução as Estruturas Algébricas**.- UFT - Campus de Araguaína, 2007, pp 230.

[11]Polya, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciencia 1995.

[12] Russell Bertrand.- **Introdução à Filosofia Matemática.-** ZAHAR Editores, 1981.

[13] Symour Lipschutz.- **Teoría de Conjuntos.-** Libros McGraw - Hill, 1969.

[14] Spivak Michel.- **Calculus.-** Editora Reverte S.A., Vol II 1983.

[15] Sominski I. S.- **Método de Indução Matemática**.- Atual Editora. Traduzido por Gelson Iezzi 1996.

[16] Ulloa A. e Haro Luis.- **Matemática Básica.-** Editora San Marcos, 1970.