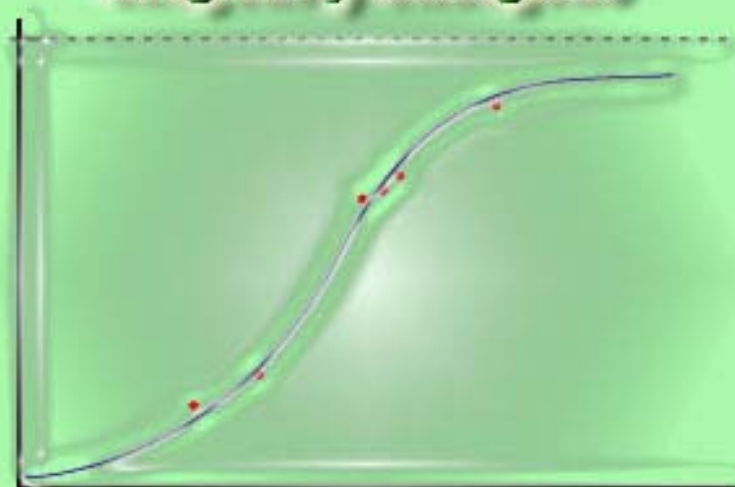


**Introducción a los  
modelos de  
crecimiento  
económico  
exógeno y endógeno**



**Andre Gerald Destinobles**

editado por  
**eumed.net**

***INTRODUCCION A LOS MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO EXÓGENO  
Y ENDÓGENO***

ANDRE GERALD DESTINOBLES

---

Para citar este libro puede utilizar el siguiente formato:

**Gerald Destinobles, A.:** (2007) *Introducción a los modelos de crecimiento económico exógeno y endógeno*. Edición electrónica gratuita. Texto completo en [www.eumed.net/libros/2007a/243/](http://www.eumed.net/libros/2007a/243/)

---

## ÍNDICE

Introducción

Capítulo I

Modelos de Crecimiento Exógeno

1.1 Consideraciones Teóricas

1.2 Modelo de Harrod-Domar

1.3 Modelo de Kaldor

1.4 Modelo Neoclásico de Crecimiento: Modelo de Solow

1.5 Recopilación de Algunas Críticas a los Modelos de Crecimiento Exógeno.

Capítulo II

Conceptos y Métodos de la Teoría del Crecimiento Endógeno.

2.1 Algunos Conceptos Relevantes

2.1.1 Información Asimétrica

2.1.2 Patente

2.1.3 Saber o Conocimiento

2.1.4 Bienes

2.1.5 Efectos Externos (Externalidades)

2.1.6 Inversión en I-D

2.2 Resultados de los Análisis Econométricos del Rendimiento Social vs el rendimiento Privado de las Inversiones en I-D y de las Externalidades de la I-D en los sectores de Fabricación y de Tecnología de Punta

Capítulo III

Modelos de Crecimiento Endógeno.

3.1 Modelo de Rebelo (1990)

3.2 Modelo de Romer (1986)

3.3 Modelo de Barro (1990)

3.4 Modelo de Romer (1990)

3.5 Modelo de Aghion y Howitt (1990)

3.6 Modelo de Guellec y Ralle (1991)

3.7 Modelo de Lucas (1988)

3.8 Recopilación de Algunas Críticas a los Modelos de Crecimiento Endógeno.

Consideraciones Finales

Bibliografía

## INTRODUCCIÓN

El bienestar económico es uno de los aspectos más importante del bienestar global de la sociedad y depende del ingreso nacional real per cápita, es decir, de la cantidad de bienes y servicios que el ciudadano puede procurarse con su ingreso durante un año, si bien es un elemento de la calidad de vida, pero se considera de manera general, que constituye un aspecto determinante del bienestar de la sociedad. Por ello, el hombre común, los universitarios, los responsables de tomar decisiones políticas y los economistas -siguiendo una práctica- al analizar el crecimiento económico hace de su eje central el ingreso nacional per cápita y se entienden para afirmar que hoy en día la mayoría de las economías van en la dirección de una economía del saber. El saber se entiende como fuente esencial de largo plazo y, además, de creación de empleo.

En este trabajo examinaremos los diversos elementos que generan el “saber” o conocimiento, sobre todo la acumulación de capital, el progreso tecnológico exógeno y endógeno, el *learning by doing*, el capital humano, etc.

Para tal efecto empezaremos analizando y comparando las teorías de crecimiento exógeno y endógeno.

En segunda instancia, analizaremos las diferentes fuentes que explican el crecimiento endógeno, para tal fin analizaremos de manera directa los trabajos teóricos de algunas autoridades en la materia, a saber por ejemplo: Paul Romer (1986 y 1990), Lucas (1988), Aghion y Howitt (1992), Hellpman y Grosman (1991), Guellec y Ralle (1996), Patrick Artus (1996), Sala-I-Marti (1994), etc.

La segunda parte tiene por objeto, identificar a las variables (factores) claves para manejar en la política económica, además nos validaremos de algunos trabajos empíricos para justificar los trabajos teóricos.

En tercer lugar, discutiremos el tono retador del concepto endógeno y demostraremos que éste concepto ya existía en los economistas clásicos.

Por último procederemos a la aplicación del modelo de Solow para la economía mexicana.

# CAPÍTULO I

## MODELOS DE CRECIMIENTO EXÓGENO

### 1.1 CONSIDERACIONES TEORICAS.

De manera general, la literatura sobre la teoría del crecimiento económico considera que el periodo 1936-1970 es marcado por una visión exógena, mientras que el periodo que va de 1985 hasta hoy en día se caracteriza por una visión endógena del crecimiento económico.

#### *VISIÓN EXÓGENA*

Autores como Roy Harrod (1939) y Evsey Domar (1946) han elaborado un modelo que busca las posibilidades de un crecimiento regular o equilibrado. Extienden a largo plazo el análisis corto placista de Keynes sobre la inestabilidad del capitalismo.

Para Keynes la inversión juega una doble función en la economía:

Determina el ingreso y la demanda global, por su aspecto de demanda (multiplicador) y por su apariencia de oferta aumenta la capacidad de producción.

De manera que la condición para un crecimiento regular y equilibrado, es cuando el crecimiento de la oferta es igual al crecimiento de la demanda. Al introducir las anticipaciones del crecimiento en la determinación de la inversión, Keynes termina por concluir que la relación que determina la tasa de crecimiento es inestable.

Inspirándose de este análisis, Harrod demostrará la inestabilidad del crecimiento económico, y considera que la obtención de la estabilidad, puede ser fruto del azar o de intervenciones de estabilizaciones derivadas de instrumentos monetarios y presupuestarios del Estado. La igualdad entre las tasas de crecimiento económico efectivo (G), garantizado

( $GW$  o  $\frac{s}{c}$ ) y natural (GN ó  $n+\lambda$ ) solamente se puede obtener sobre el filo de la navaja. A grandes rasgos podemos decir que el modelo de Harrod y Domar (que más adelante se desarrollará) tiende a evidenciar la inestabilidad del crecimiento, y que, matemáticamente, se trata de un modelo sobredeterminado - de 4 ecuaciones, con 3 incógnitas- que en general, no tiene solución; la tasa de crecimiento del trabajo (n), del (s) y (c) se determinan exógenamente:  $n = n_0$  ,  $s = s_0$  ,  $c=c$  y  $n = \frac{s}{c}$

A partir del modelo de Harrod-Domar surgieron tres grandes tipos de modelos que buscan obtener un crecimiento equilibrado de pleno empleo.

- El modelo de Kaldor (1956).

- El modelo de Solow (1956) y la modificación del coeficiente del capital.
- El modelo de tipo Maltusiano y la modificación de la tasa de crecimiento natural.

Dichos modelos faros se pueden encasillar en algunas posturas de la ciencia económica:

### *Poskeynesianos*

Kaldor (1956) para atenuar el pesimismo planteado en el modelo (H-D) toma tanto la (c) como la (n) como constantes y hace del ahorro una variable de ajuste. La estabilidad del crecimiento económico se lograra en la medida que la propensión a ahorrar varía en función de la distribución de los ingresos. De esta manera, Kaldor supone que la propensión a ahorrar de los trabajadores ( $s_w$ ) es inferior a la propensión a ahorrar de los capitalistas. Por lo tanto, hay una relación directa entre la tasa de ahorro y la parte del beneficio del producto nacional, además la tasa de crecimiento garantizada es también una función creciente de la tasa de beneficio. Hay pues, un valor de la tasa de beneficio que permite obtener un crecimiento equilibrado con pleno empleo.

Matemáticamente el sistema es:

$$n = n_0 \quad , \quad c = c_0 \quad \text{y} \quad n = \frac{s}{c} \Rightarrow s = n_0 c_0$$

### *Neoclásicos*

Solow, Swan, Meade y Tobin , representantes de la teoría neoclásica del crecimiento han retomando la teoría de la productividad marginal y han introducido la sustituibilidad entre los factores de la producción, o dicho de otra manera, la flexibilidad de las técnicas de producción. Al igual que los análisis tradicionales, Solow fundamenta su análisis sobre dos factores de producción: el trabajo y el capital. El crecimiento supone un desarrollo del capital mediante la inversión y un aumento de la población, aún cuando es considerado como limitado por un ritmo de crecimiento natural considerado como dato exógeno. El crecimiento del capital, a su vez, es limitado por la ley de los rendimientos decrecientes y a largo plazo por los rendimientos de escala constante. En este modelo se integra el progreso tecnológico (A) para mejorar la productividad de los factores. Dicho progreso técnico no es explicado por el análisis económico, es decir, es exógeno. La estabilidad del crecimiento es posible en la medida que el coeficiente de capital es variable.

Grosso modo, en el modelo neoclásico, hay mecanismos de ajuste (variación de la razón  $\frac{K}{Y}$  ó intensidad del capital) según la evolución (comportamiento) de los precios relativos de los factores de producción, que de manera automática lleva a la economía sobre un sendero de crecimiento equilibrado siempre y cuando los mercados no sean perturbados por rigideces y tampoco por intervenciones.

Matemáticamente el sistema es:

$$n = n_0 \quad , \quad s = s_0 \quad , \quad \frac{s}{c} = n \Rightarrow c = \frac{s_0}{n_0}$$

### ***Modelo tipo Malthusiano***

En este tipo de modelos el ajuste se hace por la modificación de  $n$ :

Matemáticamente tenemos:

$$c = c_0 \quad s = s_0 \quad \text{y} \quad \frac{s}{c} = n \Rightarrow n = \frac{s_0}{c_0}$$

Hoy en día, estos ajustes se llevan a cabo por las políticas relativas a la migración, la modificación en las tasas de actividad, y las salidas prejubilaciones.

En efecto los análisis que se derivan del modelo de Harrod y Domar sobre todo aquellos de los Postkeynesianos y Neoclásicos parten del postulado de que el crecimiento es el resultado de la acción de fuerzas externas, o dicho de otra manera que las variables explicativas del crecimiento económico son exógenas, sobre todo el progreso técnico integrado:

- Sea al conjunto de la función de producción (neutralidad del progreso técnico en el sentido de Hicks).
- Sea al factor trabajo (neutralidad del progreso técnico en el sentido de Harrod)
- Sea al capital (neutralidad del progreso técnico en el sentido de Solow)

Esta exteriorización de los factores de producción reduce el poder explicativo de esos modelos de crecimiento económico.

### ***VISIÓN ENDÓGENA***

Las nuevas teorías del crecimiento ponen en tela de juicio la idea de un progreso tecnológico exógeno. Esta concepción de que el ritmo de progreso técnico es determinado fuera de la esfera económica es muy débil. Para los endogeneistas, el progreso técnico es el fruto de inversiones que efectúan los agentes económicos (motivados por el beneficio), es decir, el progreso técnico (el crecimiento) no tiene nada de natural, es el comportamiento económico de los agentes el que determina su ritmo.

El modelo de Solow considera que hay convergencia entre los países. Mientras que la visión endógena recalca la heterogeneidad de las tasas de crecimiento entre países.

En el modelo de Solow se considera que el Estado no puede jugar ningún papel particular en el proceso de crecimiento. Mientras que para los endogeneistas, una intervención del

Estado puede estimular el crecimiento al incitar a los agentes a invertir más en el progreso técnico.

En el modelo de Solow el crecimiento se paraliza en ausencia de progreso técnico y del aumento de población por la hipótesis de la productividad marginal del capital decreciente. Al contrario, los endogeneistas consideran que la productividad del capital no decrece cuando el stock de capital aumenta.

Para la visión endógena del crecimiento hay cuatro factores que explican el proceso de crecimiento endógeno, además, esos factores generan externalidades positivas y son percibidas como fundamento para justificar la intervención del Estado. Esos factores son:

- (1) Capital físico. Los rendimientos crecientes son el fundamento del crecimiento económico en los primeros modelos. Romer (1986) atribuye el crecimiento a la acumulación de capital físico. Además no rompe totalmente con la hipótesis de los rendimientos constantes a escala, pues considera que es así para cada empresa, pero en contraparte existen rendimientos de escala crecientes relacionados con las externalidades positivas de las inversiones.
- (2) Capital público de infraestructura. El Estado al invertir en las infraestructuras puede conducir al mejoramiento de la productividad de las empresas privadas. En 1990, Barro en su primer modelo recalcó que las infraestructuras facilitan la circulación de las informaciones, de los bienes y de las personas. El impuesto (que es destinado para financiar esas inversiones) juega un papel positivo sobre el crecimiento.
- (3) Investigación y Desarrollo (I-D). La investigación y el desarrollo, desarrollado en los siguientes trabajos de Romer, son considerados como una actividad con rendimiento creciente. Esto es debido a que el saber tecnológico es un bien no-rival y además es difícil asegurar su uso exclusivo, es decir, su costo de apropiación es mínimo. La actividad de innovación llevada a cabo por algunos agentes con el fin de obtener algún beneficio, genera el crecimiento económico. Esos trabajos alcanzan a aquellos trabajos de Schumpeter, visto que lo que incita a la innovación está relacionado al poder monopólico que se le otorga temporalmente a los productores de nuevos bienes<sup>1</sup>.

En este sentido podemos mencionar tres tipos de trabajos: aquellos trabajos de Romer (1990) en donde el crecimiento es debido al aumento del número de inputs diferentes. Aquellos trabajos de Aghion y Howitt (1992) en donde se considera que el crecimiento económico es función del aumento de los inputs efectivamente utilizados y en aquellos trabajos de Coe y Helpman (1993) en donde se pone en evidencia la correlación entre la investigación y el desarrollo y la productividad para los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE).

---

<sup>1</sup> Hay una caracterización temporal del poder monopólico que es derivada a partir del mecanismo de "imitación". (ver Guellec D. y Ralle P. [1991], Product Innovation And endogenous growth, Document de Travail INSEE, N° 91-03). Éste mecanismo de imitación también ha sido mencionado por Schumpeter.



- (4) Capital Humano. El capital humano es definido como el stock de conocimientos que es valorizado económicamente e incorporado por los individuos (calificación, estado de salud, higiene...). Esta idea de la acumulación de capital humano fue puesta en valor en 1988 por Lucas, que desarrolló en su modelo el capital humano voluntario que corresponde a una acumulación de conocimientos (*schooling*) y la acumulación involuntaria (*learning by doing*).

Al mejorar su nivel de educación y de formación cada persona aumenta el stock de capital humano de una nación y de allí contribuye al mejoramiento de la productividad de la economía nacional, es decir, la productividad privada del capital humano tiene un efecto externo positivo.

## 1.2 MODELO DE HARROD-DOMAR

En el campo de la economía, Keynes es considerado como uno de los más importantes autores que ha hecho grandes aportaciones para comprender la inestabilidad del capitalismo, ha sido fuente de inspiración para un sin fin de autores, tales como: Harrod, quien en 1939 publica un ensayo titulado: “An essay in dynamic Theory”, y de Evsey Domar quien, por su parte, publica en 1946 “Capital expansion, rate of growth and employment”.

Estos dos autores en sus respectivos trabajos arriban a la misma conclusión en torno al sistema económico capitalista, es decir, llegan a la misma ecuación que muestra el comportamiento de la renta en el tiempo. A raíz de la similitud de sus conclusiones, en la literatura económica sobre crecimiento se habla en términos de un único modelo, es decir, el *modelo de Harrod-Domar*. Aún cuando hay autores como Giancarlo Gandolfo que considera que hay que mantenerlos separadamente ya que en el modelo de Harrod hay una función de inversión, no existente en el modelo de Domar, que se origina a partir de una hipótesis de comportamiento –por parte de los empresarios- respecto a decisiones de inversión. Consideró, que Domar buscó determinar la tasa de crecimiento de la inversión con el fin de evitar la capacidad ociosa.

En este libro no entablaremos discusión alguna en cuanto a la necesidad de separar ambos modelos, sino más bien, tomaremos por decreto al modelo de Harrod como sinónimo al modelo de Domar, y así, hablaremos del modelo Harrod-Domar.

En el modelo Harrod-Domar se reconoce tanto a la demanda efectiva como a la oferta de mano de obra (variable que considera exógena) como las variables que limitan el crecimiento y la compatibilidad de la demanda y la inversión es la condicionante para tener un crecimiento regular o equilibrado.

El nivel de inversión es proporcional a la demanda, o dicho de otra manera, las capacidades de producción son proporcionales al monto total de las inversiones sucesivas o tanto el

stock de capital como el producto crecen al mismo ritmo. La tasa de crecimiento se expresa como la razón entre la tasa de ahorro y el coeficiente fijo de capital,  $\frac{S}{C}$ .

### **La Función de Producción.**

En el proceso de producción de la economía hay una sustituibilidad nula de los factores de la producción, de manera que para generar una unidad de producto (output) se necesitará de C (coeficiente fijo) unidades de capital y de V (también coeficiente fijo) unidades de mano de obra.

La función de producción se puede escribir de la siguiente forma:

$$Y_t = \min \left[ \frac{K_t}{c}, \frac{L_t}{v} \right]^2 \quad (1)$$

Donde:

c es el coeficiente promedio del capital; Es constante (es idéntico al coeficiente marginal).

v es el coeficiente de uso del trabajo.

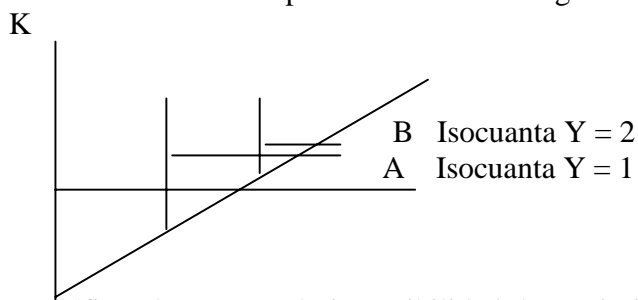
K representa el capital disponible en la economía.

Y designa a la producción.

L es la mano de obra o población económicamente activa.

El conjunto de coeficientes (c, v) que describe una actividad de producción lineal nos permite derivar las cantidades de inputs (K, L) que se necesitan para producir una unidad de output (ingreso). Las cantidades de inputs deseados por las empresas –dado un nivel específico del producto nacional (output)- se determinan de manera única.

Gráficamente la función de producción toma la siguiente forma:



En esta gráfica observamos la imposibilidad de sustituir los inputs (K, L), o dicho de otra manera, dados los coeficientes fijos, las isocuantas toman la forma de ángulo recto, revisten la forma de escuadras con esquinas a lo largo de la línea (OAB). Esa línea es el lugar geométrico en el que la ratio K y L es  $\frac{c}{v}$ , si los inputs están plenamente empleados, el producto nacional será igual a la ecuación 1. Además, cabe añadir que la unión de los

<sup>2</sup> Para aligerar las notaciones, los índices relativos al tiempo del tipo  $Y_t$  son omitidas.

vértices de los ángulos es el único camino para aumentar o disminuir la cantidad del producto.

Como ya se ha dicho anteriormente el modelo Harrod-Domar tiene como fuente de inspiración al modelo de Keynes. Sin embargo, el modelo Harrod-Domar difiere del modelo de Keynes en el sentido de que su análisis no es de corto plazo sino de largo plazo, es decir, de crecimiento económico. De allí, surge la importancia de analizar la manera en que los cambios en el stock de capital afectan a la renta (ingreso).

### ***Consumo-Ahorro-Inversión***

Con el objeto de analizar el crecimiento equilibrado se puede empezar por analizar el equilibrio keynesiano que requiere que el ahorro ex-ante (deseado) y la inversión ex-ante sean iguales y después analizar de qué manera el crecimiento equilibrado requiere que se sostenga sin discontinuidad la proporción ex-ante entre el stock de capital y el ritmo de producción.

### **SUPUESTOS**

El ahorro (S) es una fracción constante (s) del producto o renta (Y), de manera que:

$$S = sY \quad , \quad 0 < s < 1 \quad (2)$$

s es a la vez la proporción marginal (y media) a ahorrar los ingresos reales, es decir, el coeficiente de ahorro.

A partir de la función de ahorro podemos derivar la ecuación de la formación de capital (inversión) y de allí observar como afecta a la demanda.

Partiendo de una ecuación de gastos de consumo:

$$C = Y - sY \quad (3)$$

$$S = sY = Y - C \quad (4)$$

El equilibrio es:

$$I = S = sY = \frac{dK}{dt} \quad (5)$$

$$I = sY \quad (6)$$

De la ecuación (6) podemos derivar la ecuación de la demanda:

$$Y = I \left( \frac{1}{s} \right) \quad (7)$$

donde:

C es el gasto de consumo.

S es el ahorro.

I representa la inversión.

$\frac{1}{s}$  es el multiplicador de la inversión. Esta determinará los incrementos del producto demandado.

$$Y_t - Y_{t-1} = \frac{dY}{dt} = \frac{dL}{dt} \left( \frac{1}{s} \right) \quad (8)$$

Ahora, la condición de stock de capital plenamente empleado se deriva de la ecuación (1):

$$Y = \frac{K}{c}$$

Los incrementos del producto ofrecido se pueden representar de la siguiente manera:

$$Y_t - Y_{t-1} = \frac{dY}{dt} = \left( \frac{1}{c} \right) \frac{dK}{dt} = \frac{1}{c} \quad (9)$$

Volvemos a escribir de manera más sencilla la ecuación anterior, es decir, la ecuación que expresa el crecimiento del producto generado por el crecimiento del stock de capital.

$$\left( \frac{1}{c} \right) I = Y_t - Y_{t-1} \quad (10)$$

En equilibrio la ecuación (8) debe ser igual a la ecuación (10):

$$\left( \frac{dL}{dt} \right) \left( \frac{1}{s} \right) = Y_t - Y_{t-1}$$

$$I' \left( \frac{1}{s} \right) = I \left( \frac{1}{c} \right)$$

$$I^0 = \frac{I'}{I} = \frac{s}{c} \quad (11)$$

La ecuación (11) es la tasa de crecimiento garantizada de Harrod, que como se ha explicado ya, se deriva de la igualdad de las ecuaciones de demanda y oferta, es decir, el equilibrio en el mercado de bienes.

Considerando que estamos frente a un modelo dinámico, resulta importante encontrar su solución. Esta solución consiste en encontrar la trayectoria temporal de las variables.

Separando e integrando la ecuación de la tasa de crecimiento garantizado<sup>3</sup>:

$$\int \frac{dL}{L} = \int \frac{s}{c} dt$$

$$\text{Log} L = \frac{s}{c} t + c_0$$

$$L = e^{\left(\frac{s}{c}\right)t} e^{c_0}$$

En el periodo cero:

$$L_0 = e^{c_0}$$

De allí tenemos que:

$$L_t = e^{\left(\frac{s}{c}\right)t} \cdot L_0 \quad (12)$$

De manera similar podemos encontrar la solución, tanto para la tasa de crecimiento del producto como para la tasa de crecimiento del capital.

$$Y^0 = Y_0 e^{\left(\frac{s}{c}\right)t} \quad (13)$$

$$K^0 = K_0 e^{\left(\frac{s}{c}\right)t} \quad (14)$$

En efecto, podemos apreciar que en el tiempo la renta aumenta a la tasa de crecimiento garantizado (o dicho de otra manera a una tasa de crecimiento constante  $\frac{s}{c}$ ). Esa tasa es necesaria para la satisfacción de los deseos de los empresarios.

---

<sup>3</sup>  $c_0$  es una constante arbitraria

La tasa de crecimiento garantizada,  $\frac{s}{c}$ , expresa tanto la tasa que mantiene el pleno empleo del acervo de capital, como la tasa que permitirá la realización de lo que los empresarios estaban esperando del futuro (sus expectativas).

### ***Mercado de Mano de Obra***

Otro supuesto del modelo Harrod-Domar es con respecto al comportamiento de la fuerza de trabajo.

La demanda de la fuerza de trabajo está dada por la siguiente ecuación:

$$L = WY \quad (15)$$

Donde: W es el salario

La oferta de trabajo está dada por una tasa de crecimiento constante:

$$\frac{dL_t}{dt} = nL$$

$$L_t^0 - nL = 0$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden. Resolviéndola para  $n$ , tenemos:

$$\frac{L_t^0}{L} = n$$

Separando variables:

$$\left( \frac{dL_t}{dt} \right) \frac{1}{L} = n$$

$$\frac{dL_t}{L dt} = n \Rightarrow \frac{dL_t}{L_t} = n dt$$

Integrando:

$$\int \frac{dL_t}{L_t} = n \int dt$$

$$\ln L_t = n t$$

Eliminando Ln:

$$L_t = e^{nt} + c_0$$

$$L_0 = e^0 + c_0$$

$$L_0 = c_0$$

$c_0$  es el valor inicial de  $L_t$  en  $t=0$ .

La solución es:

$$L_t = L_0 e^{nt} \quad (16)$$

Ahora igualando la ecuación (15) y (16) obtenemos la condición de equilibrio del mercado de trabajo:

$$WY = L_0 e^{nt} \quad (17)$$

Sustituyendo la ecuación (13) en la ecuación (17) obtenemos la solución global del modelo:

$$WY_0 e^{\left(\frac{s}{c}\right)t} = L_0 e^{nt} \quad (18)$$

El modelo es congruente, es decir, se mantendrá el pleno empleo de  $L$  si y sólo si la tasa de crecimiento garantizada  $\frac{s}{c}$  es igual a la tasa de crecimiento natural ( $n$ ):

$$\frac{s}{c} = n \quad (19)$$

Ahora, si consideramos el efecto del progreso técnico ( $A$ ), la condición de Harrod y Domar para el pleno empleo del capital como de la mano de obra sería:

$$\frac{s}{c} = n + \lambda$$

Donde  $\lambda$  es la tasa de incremento en la productividad de la mano de obra y además es constante. De manera global la condición de H-D es:

$$\frac{Y^0}{Y} = \frac{K^0}{K} = \frac{I^0}{I} = \frac{L^0}{L} = \frac{s}{c} = n + \lambda \quad (21)$$

En la ecuación (21) todos los parámetros son constantes. Si la tasa natural es superior a la tasa de crecimiento garantizada, observaremos un aumento en el desempleo de la mano de obra; si es al revés, se observará un exceso de capital y por lo tanto su productividad marginal tenderá hacia cero.

La igualdad que se plantea entre la tasa de crecimiento natural y la tasa de crecimiento garantizada se puede dar sólo por mera coincidencia. La constancia de la tasa de ahorro (s), de (c) y de la tasa natural no permite alcanzar el equilibrio planteado en la ecuación (21), por lo tanto, concluimos que el modelo es sobredeterminado<sup>4</sup>. Es decir, no puede haber crecimiento equilibrado de pleno empleo. Según Harrod, de la diferencia entre la tasa de crecimiento garantizada “necesaria” y la tasa natural van a surgir los desequilibrios de largo plazo<sup>5</sup>.

A manera de conclusión, podemos mencionar los grandes rasgos del modelo Harrod-Domar:

- ❖ Rechazo de la teoría neoclásica del ajuste de las combinaciones de los factores.
- ❖ Su método es similar al de otros autores, en el sentido de que empieza analizando las condiciones que hacen posible el estado estacionario de las tasas de crecimiento.
- ❖ Se muestra cómo y cuándo las condiciones mencionadas entran en contradicción con el mundo real.
- ❖ La regularidad del ritmo de crecimiento se basa sobre la reinversión de los beneficios que se dan cuando las inversiones recientes han dado resultados satisfactorios.
- ❖ Los movimientos alrededor de la ecuación (21) o de este sendero de crecimiento garantizado constituye el ciclo económico.
- ❖ Este modelo es de demanda.
- ❖ Los comportamientos del consumo y de la inversión determinan el crecimiento económico.
- ❖ La demanda es la variable matriz.
- ❖ El crecimiento equilibrado aparece simplemente como un estado de referencia; el desequilibrio es la regla.

---

<sup>4</sup> Un modelo es sobredeterminado si el número de variables exógenas (3) es mayor al número de variables endógenas menos uno.

<sup>5</sup> Cabe añadir, que para Harrod los desequilibrios de corto plazo se originan a partir de la diferencia entre la tasa de crecimiento efectiva u observada y la tasa de crecimiento garantizada



### 1.3 MODELO DE KALDOR<sup>6</sup>

En 1956, Kaldor, en un trabajo titulado "Alternative Theories of Distribution", propone la manera de enfrentar la inestabilidad del crecimiento, es decir, el crecimiento económico sería estable en la medida que la propensión a ahorrar varía en función de la distribución de los ingresos. Así, Kaldor supone que la propensión a ahorrar de los trabajadores es inferior a la propensión a ahorrar de los capitalistas.

A continuación desarrollaremos formalmente el modelo de Kaldor (1956).

El ingreso global  $Y$  está dada por:

$$Y = w + \pi \quad (1)$$

$$I = S \quad (2)$$

$$S = S_w + S_\pi \quad (3)$$

Donde  $w$  es el salario,  $\pi$  los beneficios,  $I$  la inversión,  $S$  el ahorro,  $S_w$  ahorro de los trabajadores y  $S_\pi$  ahorro de los capitalistas.

El ahorro total está dado por la ecuación (3) y se puede reescribir de la siguiente manera:

$$S = s_w \cdot w + s_\pi \cdot \pi \quad (3.1)$$

Donde  $s_w$  y  $s_\pi$  son respectivamente la propensión a ahorrar de los trabajadores y de los capitalistas.

Reemplazando la ecuación (3.1) en (2) tenemos:

$$I = s_w \cdot w + s_\pi \cdot \pi \quad (4)$$

Ahora sacando  $w$  de la ecuación (1) y reemplazándola en la ecuación (4) tenemos:

$$I = s_\pi \cdot \pi + s_w(Y - \pi)$$

$$I = s_\pi \cdot \pi + s_w Y - s_w \pi$$

$$I = \pi(s_\pi - s_w) + s_w Y \quad (4.1)$$

Dividiendo la ecuación (4.1) entre la renta tenemos:

---

<sup>6</sup> En cuanto a la teoría del crecimiento, la posición de Kaldor es doble: 1) en sus trabajos de 1957, 1961 establece una relación funcional entre la tasa de crecimiento de la productividad del trabajo y la tasa de variación del ratio capital-empleo. 2) en sus últimos trabajos 1972, 1975 y 1985 pone en el corazón del análisis del movimiento económico el carácter creciente de los rendimientos de escala, que constituye una característica normal de las economías industriales. De allí, Kaldor derivó la relación empírica mencionada por Verdoorn, entre tasa de variación de la productividad y tasa de crecimiento.

$$\frac{I}{Y} = \frac{\pi}{Y}(s_{\pi} - s_w) + s_w \frac{Y}{Y} \Rightarrow \frac{I}{Y} = \frac{\pi}{Y}(s_{\pi} - s_w) + s_w \quad (4.2)$$

Ahora despejamos  $\frac{\pi}{Y}$  obtenemos:

$$\frac{\pi}{Y} = \frac{\frac{I}{Y}}{s_{\pi} - s_w} \Rightarrow \frac{\pi}{Y} = \frac{I}{Y} \cdot \frac{1}{s_{\pi} - s_w} - s_w \cdot \frac{1}{s_{\pi} - s_w} \quad (5)$$

La ecuación (5) puede interpretarse de la siguiente: dados  $s_w$  y  $s_{\pi}$  la participación de los beneficios en el ingreso global dependen de la parte del ingreso global dedicado a la inversión  $\left(\frac{I}{Y}\right)$ .

Para Kaldor el modelo funciona sí  $s_{\pi} \neq s_w$  y  $s_{\pi} > s_w$ .

$s_{\pi} > s_w$  es la condición de estabilidad. Con esta aportación Kaldor intenta atenuar el pesimismo del modelo de Harrod-Domar que pone en evidencia la inestabilidad del crecimiento.

Aquí, en este modelo la propensión al ahorro deja de ser una constante. De manera que la tasa de ahorro es una función creciente de la razón de los beneficios en el ingreso  $\left(\frac{\pi}{Y}\right)$ .

$$I = S$$

$$I = s_{\pi} \cdot \pi + s_w \cdot w$$

$$\frac{I}{Y} = \frac{S}{Y} = s$$

$$S = \frac{(s_{\pi} - s_w)\pi}{Y + s_w} \quad (6)$$

Este modelo de Kaldor que pretende ser una enmienda (corregir) al modelo de Harrod-Domar ha sido criticado por Pasinetti. En el sentido de que en la postura de Kaldor hay un "desliz lógico", porque al analizar el comportamiento del ahorro y del ingreso, para

Kaldor, los trabajadores no son propietarios del capital que poseen. Para Pasinetti este planteamiento en una economía de mercado no es adecuado.

## 1.4 MODELO NEOCLÁSICO<sup>7</sup> DE CRECIMIENTO: MODELO DE SOLOW

### *EL MODELO DE SOLOW (1956)<sup>8</sup>*

*“La théorie néoclassique de la croissance dérive du modèle de Harrod, ne serait-ce que dans un esprit de négation dialectique. Elle n’existait pas Aupara Vant”. Josef Steindl.*

En su modelo, Solow trata de demostrar que si se descarta la hipótesis según la cual la producción se da en condiciones de proporciones fijas que Harrod plantea en su modelo, el crecimiento regular no sería inestable sino estable. Para llegar a la conclusión de un crecimiento regular estable Solow formuló un modelo de equilibrio general en el cual modificó un aspecto del modelo de Harrod, admitió una función de producción que permite la sustitución de factores (es decir, capital y trabajo).

En dicho modelo, Solow incorpora el equilibrio macroeconómico entre ahorro e inversión; incluye: al capital físico como un activo acumulable; a la mano de obra como reproducible;

---

<sup>7</sup> Cabe señalar que la teoría neoclásica de crecimiento se origina en los trabajos publicados por Swan en 1956 ("Economic Growth and Capital Accumulation", The Economic Record, pp. 334-361) y por Solow en 1956. Éste último trabajo será desarrollado a continuación. Además de estos trabajos mencionados, encontramos otros valiosos trabajos, por ejemplo: uno que podemos identificar bajo un solo nombre: El "Modelo de Crecimiento Óptimo de Ramsey (1928)- Cass (1965)- Koopman (1965)" y otra que podemos identificar como el "Modelo de Generaciones Traslapadas" de Diamond (1965).

El modelo de Ramsey-Cass-Koopman también es conocido como el modelo de horizonte infinito y para los economistas, este modelo es la continuación del modelo de Solow, pero desarrollado en un contexto de optimización de los agentes económicos (firmas, familias). Algunas características de este modelo son: \*las firmas competitivas rentan capital y contratan trabajo para producir, \*un número fijo de familias que viven por siempre, ofrecen la fuerza laboral, consumen y ahorran, \*excluye todas las imperfecciones de los mercados.

La diferencia entre el modelo Ramsey-Cass-Koopman y el modelo de Diamond, es que esta parte del supuesto de que existe entrada continua de familias nuevas en el proceso económico pero con importantes consecuencias. De manera general podemos decir que esos dos modelos se caracterizan por lo siguiente:

\*El comportamiento dinámico de los agregados económicos se determina a nivel microeconómico.

\*Las tasas de crecimiento del trabajo y del conocimiento son tratados exógenamente.

\*Deducen la evolución del capital de la interacción de familias maximizadoras y firmas en mercados competitivos.

\*La tasa de ahorro deja de ser exógena y no necesita ser constante.

En rigor, esos modelos que están detrás del modelo de Solow llegan a las mismas conclusiones que éste pero con la diferencia de que son más generales.

Para un mayor desarrollo del modelo de Ramsey-Cass-Koopman ver:

Barro, R.J y Sala-I-Martin (1995), "Economic Growth", Mc. Graw Hill, Capítulo 2.

Blanchard, O. J Fischer (1989), "Lectures on Macroeconomics", cambridge: MIT Press, Capítulo 2.

Romer D. (1996), "Advanced Macroeconomics, Nueva York: Mc. Graw Hill, Capítulo 2.

Sala-I-Martin, X (1994), "Apuntes de crecimiento económico", Barcelona: Antoni Bosch, Capítulo 3.

Argandoña A, Gamez C, Mochón F (1997), "Macroeconomía Avanzada II", Mc Graw Hill.

<sup>8</sup> El modelo de Solow ha sido considerado como de inspiración neoclásica, ello por oposición al modelo de tipo Keynesiano de Harrod y Domar. Basta una lectura de los comentarios de Solow respecto de los nuevos economistas clásicos para que uno se de cuenta que en muchos aspectos solo es Keynesiano. Algunos economistas consideran que el modelo de Solow, típicamente pertenece a la síntesis clásico-keynesiano.

al ahorro real como función del ingreso; la tasa de depreciación y el crecimiento poblacional.

De manera general podemos decir que, en rigor, el modelo de Solow es un modelo de la síntesis clásico-keynesiana y parte de las siguientes hipótesis:

- 1) Del Keynesianismo retomó las siguientes hipótesis:
  - En el mercado de bienes: El ahorro es función del ingreso. La relación entre ahorro y la tasa de interés del enfoque neoclásico no ha sido considerada; conservo la ley psicológica fundamental de Keynes.
  - En el mercado de trabajo: rechazó la teoría neoclásica, en el sentido de que la oferta de trabajo es independiente del salario real.
- 2) De la óptica clásica o neoclásica retomó:
  - La función de producción con factores sustitutivos.
  - Todo el ahorro es invertido, por consiguiente necesariamente hay equilibrio en el mercado de los productos y por lo tanto no existe problema de salida o de demanda.

### ***Supuestos del Modelo de Solow (Versión Simple).***

I Función de Producción. Una vez descartada la hipótesis de un coeficiente de capital constante, Solow plantea una función de producción que permite sustitución entre los factores de manera que dicha función puede ser expresada de la siguiente manera:

$$Y = F(K, L) \tag{1}$$

Donde: K corresponde al capital, L al trabajo e Y al producto.

Esta ecuación (1) representa el lado de la oferta de una economía simplificada y señala que el producto producido está en función del acervo de capital y del monto de mano de obra.

La función de producción describe rendimientos constantes a escala, es decir, si se aumentan (o disminuyen) los factores de producción en determinada proporción, por ejemplo (A), el producto aumentaría (o disminuiría) en la misma proporción, o sea, (A). De ahí que la función de producción pueda ser reescrita de la siguiente manera:

$$F(AK, AL) = AF(K, L) \quad \forall A \geq 0 \tag{2}$$

El supuesto de rendimientos constantes a escala permite trabajar con la función de producción en su forma intensiva, o, dicho de otra manera nos permite escribir la función de producción en términos per capita. Si  $A = \frac{1}{L}$ , la función descrita sería:

$$y = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = \frac{1}{L} F(K, L) = f(k) \quad (3)$$

Donde:  $k = \frac{K}{L}$ , cantidad de capital por unidad de trabajo.

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K, L)}{L} \quad \text{producción por unidad de trabajo.}$$

La ecuación (3) expresa el producto por unidad de trabajo como una función del capital por unidad de trabajo solamente. Para entender la intuición de esta ecuación, supongamos un aumento en la escala de operaciones mediante un aumento proporcional en L y K; el producto por trabajador no cambiaría, es decir, mientras que la razón  $\frac{K}{L} = k$  permanezca igual, la ecuación (3) seguirá siendo la misma, dado que la función de producción tiene rendimientos constantes a escala.

De manera que la producción por trabajador no depende del tamaño total de la economía sino como ya planteamos, de la cantidad de capital por trabajador o de capital por persona activa.

Como es sabido, la teoría de la producción se centra en los niveles de empleo de cualquier factor de producción para los que el producto marginal es positivo pero decreciente, de manera que para nuestra función de producción representada en la ecuación (3) tenemos:

$$f(0) = 0$$

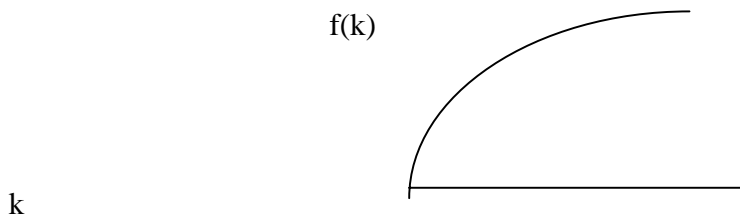
$$PM_k = \frac{dy}{dk} = f'(k) > 0$$

$$\frac{dPM_k}{dk} = \frac{d^2y}{dk^2} = f''(k) < 0$$

Donde:  $PM_k$  es el producto marginal del capital. La segunda derivada nos indica que  $f(k)$  es cóncava y tiene un máximo.

Gráficamente:





Otras condiciones que debe satisfacer la función de producción [ecuación (3)] son las condiciones de INADA, es decir:

$$\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$$

Esas condiciones (rendimientos constantes, producto marginal positivo pero decreciente y las condiciones de INADA) que cumple la función de producción (ecuación 3) garantizan la no-divergencia de la economía, de manera que se llega a un equilibrio estacionario único.

### I FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN Cobb-Douglas

Generalmente se considera a la función Cobb-Douglas como un ejemplo específico de una función de producción neoclásica, es decir, que es homogénea de grado uno o linealmente homogénea, con rendimientos constantes a escala y, además, con rendimientos marginales (productividades marginales), de cada uno de los factores, positivos y decrecientes, de manera que la ecuación (1) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha} \quad \text{con } 0 < \alpha < 1 \quad (4)$$

Esta función es homogénea de grado uno si para cualquier número positivo arbitrario A, tenemos:

$$\begin{aligned} AF(K, L) &= F[A^\alpha K^\alpha, A^{1-\alpha} L^{1-\alpha}] \\ &= A^{\alpha+1-\alpha} F(K, L)^{\alpha+1-\alpha} \\ &= AF(K, L) \end{aligned}$$

Para encontrar la forma intensiva hacemos  $d = \frac{1}{L}$ , así tenemos:

$$\frac{1}{L} F(K, L) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

$$F\left(\frac{k}{L}, 1\right) = \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha$$

$$F(k, 1) = k^\alpha$$

$$f(k) = k^\alpha \quad (5)$$

La productividad marginal del capital (k) es positiva;

$$f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}, \quad f'(k) > 0$$

La segunda derivada es negativa:

$$f''(k) = \alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2} \Rightarrow f''(k) = -\alpha(1-\alpha)k^{\alpha-2}, \quad f''(k) < 0$$

Las condiciones de INADA correspondientes son:

$$\lim_{k \Rightarrow 0} f'(k) \Rightarrow \infty, \text{ es decir, } \lim_{k \Rightarrow 0} \frac{\alpha}{k^{1-\alpha}} \Rightarrow \infty$$

$$\lim_{k \Rightarrow \infty} f'(k) \Rightarrow 0, \text{ es decir, } \lim_{k \Rightarrow \infty} \frac{\alpha}{k^{-(1-\alpha)}} \Rightarrow 0$$

## **II. Crecimiento de la Población**

Para evitar las cuestiones relativas al desempleo, Solow considera que toda la población está empleada y, además, crece a una tasa constante determinada exógenamente. Su forma funcional es:

$$\frac{L^0}{L} = \eta \quad (6)$$

## **III. Evolución del Capital (K) y Tasa de Ahorro.**

En este modelo simple, Solow asume que la tasa de ahorro ( $s$ ) está dada y es una parte constante de la renta.

$$S = sY \quad , \quad 0 < s < 1 \quad (7)$$

Esta parte preestablecida y constante de la tasa de ahorro, viola el supuesto de maximización (optimización) de los agentes económicos, además determina el nivel de consumo:

$$C = (1 - s)Y \quad (8)$$

donde  $C$  es el consumo.

A pesar de lo anterior, Solow (1956) en su modelo utilizó este supuesto para simplificar el análisis.

Además, añade una ecuación, para representar la evolución del proceso de acumulación de capital (stock de  $k$ ):

$$\text{Sin depreciación} \quad K^0 = \frac{\partial K}{\partial t} = I = F(K, L) - C \quad \text{ó} \quad sF(k, L) \quad (9)$$

$$\text{Con depreciación} \quad K^0 = \frac{\partial K}{\partial t} = I = F(K, L) - C - \varepsilon K \quad \text{ó} \quad K^0 = \frac{\partial K}{\partial t} = I = sF(K, L) - \varepsilon K$$

El capital,  $K$ , no está ajustado.  $K$  es la cantidad de capital por trabajador o relación capital-trabajo.  $\varepsilon$  es la depreciación que es constante.  $F(K, L) = Y$ .

Con esa descripción de los supuestos del modelo simple de Solow, ya podemos pasar al estudio de la dinámica de este modelo. Recuérdese, que visto que la población o la fuerza de trabajo crece a una tasa constante  $\eta$  determinada exógenamente, el insumo que se analizará es la cantidad de capital por trabajo ( $k$ ):



$$k = \frac{K}{L}$$

$$k^0 = \left[ \frac{K^0}{L^0} \right]$$

$$k^0 = \left[ \frac{LK^0 - KL^0}{L^2} \right]$$

$$k^0 = \left[ \frac{LK^0}{LL} \right] - \left[ \frac{KL^0}{LL} \right]$$

$$k^0 = \frac{K^0}{L} - k\eta$$

Sin depreciación:

$$k^0 = \left[ \frac{sF(K, L)}{L} \right] - \eta k$$

$$k^0 = s \left[ \frac{F(k, L)}{L} \right] - \eta k$$

$$k^0 = s \left( \frac{Y}{L} \right) - \eta k$$

$$k^0 = sf(k) - \eta k \tag{10}$$

Con depreciación:

$$k^0 = \left[ \frac{sF(K, L) - \varepsilon k}{L} \right] - \eta k$$

$$k^0 = s \left( \frac{Y}{L} \right) - \varepsilon k - \eta k$$

$$k^0 = sf(k) - (\eta + \varepsilon)k \tag{11}$$

Podemos expresar las ecuaciones (31) y (32) al especificar la función de producción Cobb-Douglas de rendimientos constantes a escala:

$$k^0 = sf(k) - \eta k \quad (10')$$

$$k^0 = sk^\alpha - \eta k$$

Ahora dividiendo entre k:

$$\frac{k^0}{k} = s \frac{k^\alpha}{k} - \eta \frac{k}{k}$$

$$\frac{k^0}{k} = sk^{\alpha-1} - \eta \quad (10'')$$

$$k^0 = sf(k) - (\eta + \varepsilon)k \quad (11')$$

Ahora dividiendo entre k:

$$\frac{k^0}{k} = s \frac{k^\alpha}{k} - (\eta + \varepsilon) \frac{k}{k}$$

$$\frac{k^0}{k} = sk^{\alpha-1} - (\eta + \varepsilon) \quad (11'')$$

El miembro izquierdo de la ecuación 11'' representa la tasa de crecimiento del capital per capita y es igual a la diferencia entre  $sk^{\alpha-1}$  (curva de ahorro) y  $\eta + \varepsilon$  (curva de depreciación).

La curva de ahorro es decreciente, tiende a cero cuando k se aproxima a infinito y se aproxima a infinito cuando k se acerca a cero (CONDICIONES INADA).

En cuanto a la curva de depreciación es horizontal, es decir, es independiente de k. Considerando que ésta es estrictamente positiva y la curva  $sk^{\alpha-1}$  toma valores entre cero e infinito, las dos funciones (curvas) se cruzan una sola vez en la gráfica (punto P) y la  $k^*$  correspondiente que representa a este punto es el capital per capita que existe en el estado estacionario.

En ausencia de tecnología, cuando la economía empieza muy por debajo del estado estacionario ( $k^*$ ), es decir en  $k_0$ , se dice que la economía parte de una reducida razón capital-trabajo y los ahorros sirven para pagar el nuevo capital (después de la

amortización). En razón de la disminución del rendimiento del capital marginal, el producto marginal del capital baja a medida que la razón capital-trabajo aumenta. Además, en este modelo de Solow la tasa de ahorro es exógena y representa una fracción constante del ingreso. Por consiguiente, cada nueva unidad de capital produce menor ingreso y menos ahorro, lo que deja menos ingreso para la acumulación de capital. A largo plazo (en  $k^*$ ) la razón capital-trabajo alcanza un nivel de rendimiento de capital que corresponde a su amortización, es decir, los ahorros nada más alcanzan para pagar la amortización del capital físico. No hay incentivo para invertir en el nuevo capital. Por lo tanto, la acumulación del capital y el crecimiento se detienen, la economía alcanza un estado estacionario (un estado de equilibrio a largo plazo).

Si la economía se encuentra en  $k_1$ , su comportamiento es simétrico, es decir la economía termina por alcanzar el estado estacionario. De manera resumida, podemos decir, que cualesquiera que sean las rutas iniciales de la economía, ésta terminará en el estado estacionario. Por lo tanto, el sistema es estable y allí  $Y$ ,  $K$ ,  $L$  crecen a la tasa  $n$ , es decir,

$$\frac{Y^o}{Y} = \frac{K^o}{K} = \frac{L^o}{L} = n.$$

Estos resultados que observamos en el estado estacionario -que es una construcción teórica- no concuerdan con los hechos estilizados del crecimiento. En un estado de la vida real, tanto el capital como el producto tienden a crecer a la misma tasa, pero con mayor

velocidad que  $L$ , es decir,  $\frac{Y^o}{Y} = \frac{K^o}{K} > \frac{L^o}{L} = n$

Para paliar esta diferencia, el modelo neoclásico (versión Solow) introduce el progreso técnico ( $A$ ). Éste constituye un factor exógeno que crece a un ritmo constante ( $\lambda$ ) y es esencial para el crecimiento económico a largo plazo. El progreso tecnológico mejora la productividad del trabajo, impidiendo la baja del producto marginal del capital cuando la razón capital-trabajo aumenta.

A largo plazo, el capital, el producto y  $AL$  crecen a la tasa  $n + \lambda$ , donde  $AL$  es la fuerza de trabajo eficiente. Este progreso técnico es exógeno, es decir, no se sabe nada acerca de sus características, no ha sido sujeto a ningún análisis económico.

El modelo de Solow (ampliado) puede ser representado a través de la siguiente función de producción:

$$Y = F(K, AL)$$

El mismo análisis que hemos hecho para el caso del modelo simple es también válido aquí, pero como ya dijimos en el párrafo anterior:

$$\frac{Y^o}{Y} = \frac{K^o}{K} = \frac{AL^o}{AL} = n + \lambda$$

Este caso está más de acuerdo con los hechos estilizados de la realidad económica.

El progreso técnico constituye un factor exógeno que crece a un ritmo constante y es esencial para el crecimiento económico a largo plazo. El progreso técnico mejora la productividad del trabajo, impidiendo la baja del producto marginal del capital cuando la razón  $\frac{K}{L}$  aumenta. Considerando que a largo plazo el crecimiento de la tecnología nunca llega al límite, a un tope, como tampoco la productividad del trabajo, por consiguiente, la tasa de crecimiento del ingreso real per capita no puede ser reducida a cero.

Para el contexto de este modelo, el crecimiento económico es durable, pero los factores que explican la tasa de crecimiento de largo plazo son analizados y tomados exógenamente (tasa de crecimiento de la población, tasa de crecimiento del progreso técnico).

Esta concepción del progreso técnico es relativamente débil, dado que su naturaleza no es especificada, y su ritmo determinado fuera de la esfera económica.

Para contrarrestar la inestabilidad del crecimiento observado en el modelo de Harrod-Domar, originado a raíz de una función de producción que no permite sustitución entre los factores, Solow en su modelo incluye la posibilidad de sustituir los factores de producción, además incluyó de manera exógena al progreso técnico. De tal manera que existen fuerzas capaces de llevar a la economía al estado estacionario.

En efecto, como hemos podido observar, este equilibrio en el estado estacionario es único y estable. A pesar de esta aportación de Solow, su modelo no respondía a algunas preguntas relevantes de la teoría del crecimiento. A saber:

- 1) ¿De dónde se origina la tecnología?
- 2) Las razones económicas que explican que las familias ahorran una parte constante de su renta
- 3) La no convergencia

## **1.5 RECOPIACIÓN DE ALGUNAS CRÍTICAS A LOS MODELOS DE CRECIMIENTO EXÓGENO**

Al hablar del análisis del crecimiento tradicional nos referimos tanto al análisis de los post-keynesianos, como al de los neoclásicos. Parten principalmente del postulado de que el crecimiento es el resultado de la acción de fuerzas que afectan desde el exterior, es decir, que las variables explicativas del crecimiento son exógenas, sobre todo el progreso técnico que es integrado, sea:

- Al conjunto de la función de producción (neutralidad del progreso técnico en el sentido de Hicks).
- Al factor trabajo (neutralidad del progreso técnico en el sentido de Harrod).
- Al factor capital (neutralidad del progreso técnico en el sentido de Solow).

Esta externalidad de "factores de producción" reduce el poder explicativo de esos modelos de crecimiento, es en este sentido que Denison no pudo explicar una parte del crecimiento de los Estados Unidos durante el periodo (1950-1962): (ingreso nacional = 2.15, total de los inputs = 0.75 y residuo = 1.36); al igual, Dubois tampoco pudo explicar la mitad del crecimiento de la economía francesa (de 1949 a 1965).

En cuanto al modelo neoclásico de crecimiento, en lo particular, ha recibido un sin fin de críticas por su versión habitual, en el sentido de que la tasa de crecimiento de largo plazo depende de la tasa de la población activa y de los beneficios exógenos de productividad. A continuación presentaremos algunas críticas de algunas autoridades en el tema de crecimiento económico refiriéndose a esa versión habitual.

***Paul Romer (1987).***

La tasa de crecimiento es exógena y no depende ni de los comportamientos de los agentes (inversión, investigación, ahorro, ...) ni del fisco, lo que no es convincente.

***Barro, Sala-I-Martin (1990).***

Esa especificación del crecimiento no permite dar cuenta de las diferencias entre países o entre regiones.

***Quah D. (1990).***

Aún cuando que hay reducción de las diferencias entre tasa de crecimiento, las diferencias entre niveles se agravan (empeoran).

***Lucas (1990).***

Esa manera de definir el crecimiento por parte del modelo neoclásico del crecimiento no explica lo siguiente: que el capital no se desplaza de los países ricos hacia los países pobres, en donde la productividad marginal del capital, más reducida, debería ser superior.

***Christiano (1989) y Barro (1987).***

Algunos neoclásicos creyeron resolver el problema de la no convergencia, al decir que se ha observado una dinámica de transición hacia el crecimiento equilibrado y que las diferencias entre países eran debido a las diferencias entre los puntos de arranque del crecimiento. Esta tesis no es satisfactoria: las tasas de interés reales no tienen el nivel coherente con la recuperación; los países con bajos ingresos no alcanzan a los otros países (King-Rebelo [1989], Summers, Heston [1984]).

Aquí, parece importante detenernos y recalcar que en el seno de los países de la OCDE, algunos fenómenos de convergencia han sido observados desde la segunda guerra mundial.

Según Madisson (1991), la productividad del trabajo de la media de los 15 países más desarrollados (excluyendo Estados Unidos) era en 1990 la mitad de la productividad del trabajo en Estados Unidos; en 1973 dicha productividad representaba 2/3 partes de la de Estados Unidos y en 1980 representaba 4/5 partes de la de Estados Unidos. Aparte de esos países, parece que también los países del sudeste asiático son también ejemplos de convergencia. Sin embargo, hay numerosos países que son prisioneros de trampas de pobreza, es decir, situaciones estructurales que impiden a esas economías salir del letargo en el que se encuentran y desarrollarse con un crecimiento positivo permanente.

Para Jorgenson-Gollos-Fraumeni (1987), Baumol (1986), De Long (1988) y Baumol -Wolf (1988), la introducción de generaciones de capital o la incorporación del progreso técnico al capital, no permite un mejor entendimiento de las diferencias de crecimiento entre los países.

En efecto, como ya lo hemos mencionado, el progreso técnico es, en el modelo neoclásico (Solow), exógeno. Su tasa de crecimiento es también considerada como constante a lo largo del tiempo. Desde la mitad de los años 1970 se ha observado una reducción de la productividad a nivel mundial, lo que deja entender que el progreso técnico depende de valores económicos, es decir, que no es exógeno.

Para obtener un explicación empírica convincente del crecimiento real, hay que introducir (además de la progresión del capital y del trabajo que aparece en el modelo neoclásico usual):

- El nivel del capital humano (Barro [1989], Becker, Murphy [1988]).
- La existencia de rendimientos crecientes que resultan de la difusión del conocimiento (Romer [1986], Adams [1990]).
- El hecho de que hay aprendizaje (*learning by doing*) y que la eficacia crece con la experiencia (Stockey, 1988).
- La endogeneidad del progreso técnico que crece con la investigación, el capital humano, los gastos públicos (Barro, 1988).

Grosso modo, según la teoría del crecimiento endógeno, la productividad marginal del capital no decrece cuando el stock de capital aumenta.

En suma, a pesar de sus aportes importantes, la óptica neoclásica del crecimiento o “la síntesis Keynesiano-clásica”, presentan grandes límites: Uno de esos límites es presentado bajo los tintes de Paul Romer, en el sentido de que no convence el modelo de Solow. El tema del ahorro merece una atención especial. Juega un papel clave en la teoría neoclásica dado que para alcanzar la “edad de oro” es inevitable tener cierta tasa de ahorro. Pero una vez alcanzado la “edad de oro”, cualquier aumento del ahorro es inútil, es nocivo en la medida que reduce el consumo per capita. Un aumento del ahorro puede aumentar el nivel

de ahorro per capita y por lo tanto el consumo per capita, pero no puede contribuir de manera duradera al ahorro de la tasa de crecimiento.

## **CAPÍTULO II**

### **CONCEPTOS Y MÉTODOS DE LA TEORÍA DEL CRECIMIENTO ENDÓGENO**

#### **2.1 ALGUNOS CONCEPTOS RELEVANTES**

##### **2.1.1 Información Asimétrica**

Hay asimetría en el plano de la información cuando las afirmaciones (informaciones) de una de las partes que intervienen en una transacción no pueden ser obtenidas con facilidad por la otra parte, o se obtienen a un alto precio. Por ejemplo, un prestatario puede tener informaciones que no tiene un prestamista en cuanto a sus posibilidades de no devolver sus préstamos<sup>9</sup>. Otro ejemplo, sería el caso de los diferentes riesgos que se presentan con los clientes de un vendedor de seguros para automóviles. Algunos de los clientes no tomarán medidas para reducir la probabilidad de tener un accidente, otros sí. En tal caso, lo más posible, es que no se concretizará una actividad de mercado por el sólo hecho de que clientes y vendedores no pueden ponerse de acuerdo sobre un precio y una cantidad a raíz de la insuficiencia de información, es también posible, que se dé un mercado incompleto. En este mercado la cantidad en el equilibrio es menor a la cantidad que se observaría si el equilibrio fuera de competencia. La información asimétrica en el ámbito de la información, también puede poner un candado a la difusión de las nuevas tecnologías en la medida que los compradores subevalúan una innovación a menos o hasta que sean plenamente informados sobre sus particularidades.

De manera general, la información asimétrica puede llevar al racionamiento de crédito y a la sub-inversión en I-D<sup>10</sup> o al abandono de inversiones de I-D en proyectos con alta probabilidad de logro y con el seguimiento de inversiones en proyectos con muy baja probabilidad de éxito. A raíz de que la información asimétrica restringe el financiamiento externo, Himmelberg y Peterson (1994) demostraron que el financiamiento interno es la principal fuente de financiamiento de la I-D.

##### **2.1.2 Patente<sup>11</sup>**

Es un derecho de exclusividad otorgado por un gobierno a una innovación. Este derecho de propiedad le permite al propietario impedir a los otros vender, fabricar, utilizar, la innovación patentada en el país que se le otorgó esta patente.

Los patentes se aplican a las (nuevas tecnologías) innovaciones. Para satisfacer el criterio de novedad, el solicitante (demandante) debe ser el primero en presentar una solicitud. Para ser patentada, una innovación debe ser útil y funcional, además la innovación no debe ser evidente.

---

<sup>9</sup> La información asimétrica genera los problemas de selección adversa y de daño moral (ver Bierman Scott y Luis Fernández (1993); "Game theory with Economic Applications"; capítulo 19, Adverse selection and credit rationing, Addison wesley) para mayor profundización.

<sup>10</sup> Mc Fetridge Donald Ct (1995) "Sciences et Technologie: Perspectives sur les politiques publiques", Troisieme, pp. 49-51, Université Carletow. En ese trabajo el autor revisa la literatura sobre los diversos tipos de límites de mercado y su incidencia sobre la inversión en I-D.

<sup>11</sup> Ibid.



¿A qué tipo de objeto se puede aplicar una patente? A un nuevo producto, un nuevo aparato, una nueva composición química o un nuevo procedimiento. El derecho de obtener una patente ha sido interpretada como un monopolio, o dicho de otra manera, el innovador espera cierta protección frente a la competencia o algún grado de monopolio. Este sistema de patente da un derecho de propiedad que el innovador puede adoptar a su beneficio o revender, parcialmente o en su totalidad.

Este derecho de exclusividad que es el patente le permite a los innovadores el cobrar una parte social de su innovación, además, puede exigir un pago a los utilizadores de su innovación y así puede recuperar sus costos en R - D. Este costo es recuperable únicamente si es posible imponer a algunos utilizadores un precio que es superior al costo marginal.

Si se le impone un precio que excede al costo marginal a todos los utilizadores, el uso de la patente puede ser restringido. Se puede observar una ambigüedad entre dos objetivos de la sociedad. Con el fin de incentivar la innovación, se puede restringir la difusión de una innovación al fijar el precio por encima del costo marginal para cierto periodo. Pero la sociedad en su conjunto rechaza esa idea de limitar el uso de una innovación, una vez que ha sido divulgada más allá del periodo necesario. El objetivo es reducir al mínimo la restricción al uso que es requerida para ofrecer un estimulante a la innovación. Eso es un problema de optimización.

Además, es importante recalcar que las patentes pueden incentivar la difusión del conocimiento: primero, la innovación es divulgada después de la solicitud de la demanda de patente. Los conocimientos divulgados son libremente accesibles a todos los utilizadores que no violan los derechos de aquel que tiene la patente; segundo, éste (aquel que tiene la patente) es incitado para dar a conocer su innovación y así, estimular la demanda para aquella. Eso puede favorecer una mayor difusión de la innovación, una vez expirada la patente, en comparación de lo que se produciría si el (que detiene la patente) hubiese recurrido al secreto como medio de apropiarse de los frutos de su innovación.

### **2.1.3 Saber o Conocimiento**

El saber es el resultado del proceso de investigación. Los agentes del sector privado lo producirán en cantidades limitadas en el contexto del mercado. Un rasgo característico del saber o conocimiento que lleva a su producción limitada es que su autor mantiene medios muy limitados para conservar la propiedad exclusiva.

De acuerdo a Grossman: “Puede que las personas o las empresas, que han asignado recursos, a la creación de nuevos conocimientos no estén en medida de impedir su utilización por parte de otros” (Grossman, 1992: 106). En otros términos, puede ser difícil para el creador de una innovación tecnológica proteger sus derechos de propiedad, aún cuando la legislación sobre las patentes y los derechos de autor han sido reglamentados por esta razón.

Otra característica que tiene el saber es que no está sujeto a un fenómeno de agotamiento o de congestión, “su uso a un fin dado por alguien no impide a otros el hacer uso al

mismo tiempo”. Su uso a un fin dado no reduce su disponibilidad, la posibilidad de utilizarlo para otros fines. Esto es el aspecto de bien público que se relaciona con el conocimiento (saber).

#### **2.1.4 Bienes**

##### ***Bien Público***

Los bienes públicos son de acceso universal, propiedad que puede tomar dos formas. Primero, no suscitan rivalidades, es decir, el hecho de que una persona o empresa utilice un bien público no impide su uso, en parte o total, al mismo tiempo por otros. Segundo, son de uso no competitivo, es decir, es imposible, sin imputar costos prohibitivos, impedir su uso por parte de los individuos. Ejemplos claros de bienes públicos serían: las ondas de radio y la defensa nacional.

##### ***Bien Exclusivo***

Un bien es exclusivo en cuanto su propietario está en medida de impedir su uso por terceros, es decir, si es posible de alejar a los usuarios. A este bien, se le puede hacer parcial o totalmente exclusivo por protecciones jurídicas, sobre todo por las leyes sobre los derechos de propiedad intelectual y las patentes.

##### ***Bien Rival***

Un bien es rival si tiene por propiedad que su demanda por parte de un agente impide su demanda por parte de otro agente, es decir, si el uso que hace un agente del bien impide que sea utilizado por otro.

#### **2.1.5 Efectos Externos (Externalidades).**

Las externalidades se dan cuando las medidas tomadas por un individuo o una empresa afectan de manera positiva o negativa sobre el bienestar de otros individuos. Típicamente, no se consideran los efectos externos en el establecimiento de los precios de las mercancías, visto que no influyen sobre la estructura de costos o de recetas del productor puesto que es la sociedad en su conjunto que padece las consecuencias. La contaminación del aire y del agua, por ejemplo, representan efectos externos negativos en razón de los gastos que atribuye a la sociedad, mientras que las externalidades en Investigación y Desarrollo I-D constituyen efectos externos positivos.

#### **2.1.6 Inversión En I-D.**

Las inversiones en I-D contribuyen directamente a la acumulación del saber, dan lugar a nuevos productos o proceso de producción y también contribuyen al mejoramiento de la productividad. Un rasgo distributivo de las inversiones en I-D es que, las ventajas que se derivan se difunden entre las empresas. El crecimiento de la productividad en una industria depende, pues, de sus propias actividades de I-D más los esfuerzos de I-D de los

otros sectores generadores de conocimientos, es decir, el crecimiento de la productividad es determinada por el total acumulado de las actividades de I-D. La importancia de esas externalidades de la I-D (diferencia entre los rendimientos privados y sociales de las inversiones en I-D) como motor del crecimiento de la productividad generó un interés creciente con respecto a las fuentes de esas externalidades. Por ello, hemos encontrado, desde la década de los 80's, numerosos estudios empíricos, que tratan principalmente de las industrias de fabricación y de tecnología de punta, en los cuales se comprueban la presencia de externalidades entre proyectos de I-D en el seno de una empresa, entre empresas del mismo sector, entre diferentes sectores y aún entre países<sup>12</sup> (Coe, Helpman y Hoffmaier, 1997) afirman que un aumento de 100 dólares americanos al stock nacional de capital en I-D de Japón o de Estados Unidos tiene por efecto hacer aumentar el PIB de los países en desarrollo (como grupo), alrededor de 25 dólares [ver Surendra, G. y A. L. (1998)].

Citando a Bernstein (1994): "El capital de I-D no es rival porque su empleo por su propietario no limita la capacidad de otros agentes económicos de utilizarlo, y es también no exclusivo (al menos en parte), puesto que su propietario no puede impedir a los otros de beneficiarse, también presenta un problema inherente de apropiación: sus rendimientos regresan de manera incompleta a la empresa que hace la inversión en I-D, eso denota que una forma de externalidad o de desbordamiento acompaña la acumulación de capital de I-D. de hecho, el costo de exclusividad contribuye a la existencia de desbordamientos. Así, una sociedad puede tratar de tener en secreto sus invenciones hasta haber recuperado todos los beneficios, pero a un costo habitualmente demasiado elevado para permitirle prohibir realmente todo uso...".

Los desbordamientos son conocimientos procedentes (resultantes) de las inversiones en I-D a medida que hay acumulación de capital de I-D, de las ideas prestadas saber-hacer de otro. Las empresas, por ejemplo, se compran mutuamente máquinas y herramientas, y es inevitable que esas transferencias o intercambios de bienes materiales se acompañen de una transferencia de conocimientos que han permitido fabricar esas máquinas y esas herramientas. El traspaso de conocimientos toma también otras vías, como el uso de invenciones patentadas, la contratación de personas que trabajaban para otras sociedades, o las asociaciones de empresas sobre un proyecto común. Sin duda alguna, los usuarios aprovechan del capital de I-D por esas transferencias y esos desbordamientos: la I-D desemboca sobre la introducción de nuevos productos o procedimientos o sobre el mejoramiento de productos existentes y los usuarios que sean del interior o del exterior de la empresa que hace la inversión pueden beneficiarse de las externalidades futuras de la innovación".

### ***Medición de las Externalidades de I-D.***

De manera general existen dos tipos de modelos econométricos que sirven para examinar las externalidades en I-D. El primero, prevé la estimación de los parámetros de

---

<sup>12</sup> Hay diferentes trabajos que se pueden revisar sobre la I-D y sus externalidades (ver, por ejemplo, Griliches [1994] y Mairesse y Mohnen [1994] y Surendra G., Wulong G., Lee C. F. [1998] "Technologie de L'Information Et Croissance de la Productivite Du Travail, Analyse Empirique De La Situation Au Canada Et Aux Etars Unis", Industrie CANADA.

las funciones de producción en donde los inputs abarcan no solamente el trabajo y el capital, sino también el capital de I-D, mientras que el segundo modelo, incluye la estimación de las funciones de costo en las cuales la estructura de costos se basa sobre variables como: la producción, los precios de los factores y el capital de I-D. A reserva de la existencia y de la calidad de los datos, es posible estimar los parámetros de esas funciones por medio de datos sobre el proyecto, sobre la empresa, sobre el sector o sobre el conjunto de la economía.

Una vez que los parámetros han sido estimados, los rendimientos sociales pueden ser calculados. Por ejemplo, al tomar datos al nivel de empresa, basta añadir el rendimiento privado de un sector las externalidades marginales que corresponden a todos los demás sectores<sup>13</sup>.

## **2.2 RESULTADOS DE LOS ANÁLISIS ECONÓMICOS DEL RENDIMIENTO SOCIAL VS EL RENDIMIENTO PRIVADO DE LAS INVERSIONES EN LA I-D Y DE LAS EXTERNALIDADES DE LA I-D EN LOS SECTORES DE FABRICACIÓN Y DE TECNOLOGÍA DE PUNTA<sup>14</sup>.**

- El rendimiento social de las inversiones en I-D puede ser hasta cinco veces superior al rendimiento privado. La importancia de las externalidades varían considerablemente.
- El rendimiento de la I-D pública es inferior al de la I-D privada, pero superior a el de los capitales asignados a la infraestructura pública.
- Las externalidades reducen los costos variables y aumentan la productividad, la importancia de los resultados obtenidos siendo función del hecho que la muestra examinada ha sido tomada a nivel de empresa o a nivel de sector. Resultados cualitativos similares han sido observados en muestras tomadas a nivel de proyectos al interior de empresas.
- Las externalidades de I-D contribuyen a la expansión de la producción y a la reducción del precio de producción.
- Las externalidades de I-D, habitualmente constituyen sustitutos parciales de la mano de obra y del material. Pero complementarios de los capitales (excluyendo al capital de I-D). Por consiguiente, las externalidades reducen la demanda de mano de obra y el material, pero aumentan la demanda de capitales. Considerando que la principal componente de la I-D es la mano de obra especializada, el efecto de sustitución

---

<sup>13</sup> Para el cálculo de las tasas de rendimiento social y privado del capital de I-D ver: Berstein I. Jeffrey (1994), "Debordements Transfrontaliers de R-D entre Les Industries Du Canada Et Des Etats-Unis", Université Carleton Et Du National Bureau Of Economic Research, á Contrat Pour Industrie CANADA, pp. 39-43. También del mismo autor (1996) "R-D Et Croissance De La Productivité Dans Le Secteur Manufacturier Et L'industrie Du Matériel De Communications Au CANADA", The National Bureau Of Economic Research, pp. 21-25.

<sup>14</sup> Estos resultados son basados sobre los estudios llevados a cabo por Mc Fretridge (1995), Bernstein (1994,1996).

actuando sobre la demanda de mano de obra debería, por lo menos en parte, reducir la demanda de mano de obra no especializada en favor de la demanda de mano de obra especializada.

- Las externalidades de I-D alienta la inversión de capital de I-D en las empresas de I-D "capitalistas", pero se sustituyen al capital de I-D en las empresas en donde el capital de I-D que se invierte representa una fracción mínima de la inversión total. Sin embargo, a nivel de industria, las externalidades se sustituyen habitualmente a las inversiones en la I-D del sector beneficiario.
- Las externalidades de la I-D en un país contribuyen en las ganancias de productividad en otros países. Esas externalidades internacionales dependen del comercio y de las otras relaciones (por ejemplo, a nivel de educación y de la cultura) que los países tienen entre ellos. Además, las ganancias de productividad que se derivan de las externalidades internacionales de la I-D pasan de las economías con una alta concentración de I-D a las pequeñas economías abiertas con menos concentración de I-D, es decir, los países que dedican a la I-D una proporción relativamente más reducida de los costos y al aumento de la productividad) de las externalidades internacionales que aquellos que asignan una proporción relativamente más grande.

## **CAPÍTULO III**

### **MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO**

Al hablar de la teoría de crecimiento endógeno, generalmente se está tratando de explicar, analizar y presentar los factores que pueden acumularse para permitir un proceso de acumulación autosostenido, es decir, un crecimiento sostenido o una elasticidad de la producción respecto al capital total igual a uno.

Generalmente para poder llevar a cabo lo expuesto arriba, en la literatura económica se reconocen dos grandes tipos de modelos:

- 1) El Modelo AK.
- 2) El Modelo BH.

#### ***MODELO AK.***

En este modelo el factor que explica el crecimiento es homogéneo al bien final producido.

Generalmente los factores homogéneos al bien son:

- A) El Capital Físico Privado.
- B) El Capital Público de Infraestructura.

El primer factor A se trabaja a partir del primer modelo de Romer (1986) y otros modelos. El factor B se trabaja a partir de Barro (1990); De Long y Summer (1991) y otros.

#### ***MODELO BH.***

El factor que explica el crecimiento no es homogéneo al bien. Esos factores son:

- C) El capital humano.
- D) El capital inmaterial de conocimientos tecnológicos.

Generalmente el factor capital humano, se trabaja a partir del Modelo de Lucas (1988).

En lo que concierne al factor D este se trabaja a partir de Romer (1990), Aghion y Howitt (1990), Guellec y Ralle (1991).

### **3.1 MODELO DE REBELO (1990)**

Rebelo propone un modelo simple de crecimiento endógeno. En este modelo, los rendimientos de escala crecientes no son necesarios para generar un proceso de crecimiento endógeno. En comparación al modelo de crecimiento exógeno en donde la productividad

marginal del factor acumulable se anula, aquí en Rebelo no existe tal anulación, además, la elasticidad de la producción con respecto al factor acumulable es igual a 1.

Este supuesto hace posible obtener un crecimiento de largo plazo y permite definir una función de producción de la siguiente forma:

$$Y = AK \quad (1)$$

Esta función de producción es conocida como la tecnología AK y es una solución al problema del crecimiento bajo restricción de rendimientos constantes y de productividad marginal del capital que no se anula.

En la ecuación (1), A define el nivel de la tecnología o productividad aparente del capital, K es el stock de capital. Cabe mencionar que ésta función de producción de Rebelo es muy cercana al modelo de Harrod y Domar.

Además, en este modelo no existe factor no acumulable cuya introducción en la función de producción más el factor K, causaría el problema de rendimientos crecientes y aquellos relacionados con la competencia imperfecta. Hay diferentes formas de interpretar esta tecnología, Rebelo define el acervo de capital incorporado a la calidad de la mano de obra, o dicho de otra manera, el trabajo es asimilado al capital humano, es acumulable y se añade al capital físico.

En cuanto a la acumulación de capital, éste es igual a la diferencia entre el producto y el consumo (C), formalmente tenemos:

$$K^0 = Y - C \quad (2)$$

Aquí se supone que no hay depreciación del capital.

En cuanto al ahorro que se utiliza para financiar a la inversión, lo podemos derivar a partir de la función de utilidad de los consumidores. En esta función suponemos elasticidad de sustitución intertemporal constante:

$$U = \int_{t=0}^{\alpha} (e^{-\rho\tau}) u(c) d\tau \quad (3)$$

En donde:  $u(\cdot)$  es la función de utilidad instantánea y es igual a  $\frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}$ .

$\rho$  es la tasa de descuento o tasa preferencial temporal, un valor positivo de éste significa que el consumidor valora menos el consumo futuro con respecto al consumo presente, es decir, valora más el consumo presente que el futuro.  $\theta$  es la elasticidad de sustitución intertemporal o mide la concavidad de la función de utilidad y determina la disponibilidad de las familias de sustituir el consumo en periodos diferentes.

Ahora supongamos que el producto se distribuye una parte a la acumulación de capital y otra parte al consumo, el tamaño de la población es fija, de manera que no hay ninguna fuente exógena de crecimiento. Además, suponemos que la población es normalizada a 1.

La ecuación (3) es la función objetivo del agente representativo (consumidor). Para este agente su problema de optimización consiste en maximizar la ecuación sujeta a la restricción (ecuación 2).

La solución a este problema consiste en escribir el valor presente del hamiltoniano y encontrar las condiciones de primer orden (C.P.O) para maximizar:

$$Y = AK$$

$$(4) \quad H : \frac{e^{-\rho\tau} C^{1-\theta}}{1-\theta + \lambda(Y-C)} \Rightarrow e^{-\rho\tau} \cdot \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda(AK - C)$$

$$H_K = \lambda^0 = \lambda A \Rightarrow H_K = \frac{\lambda^0}{\lambda} = A$$

$$H_C = 0 \Rightarrow e^{-\rho\tau} C^{-\theta} - \lambda = 0 \quad (5)$$

ó,

$$e^{-\rho\tau} C^{-\theta} = \lambda \quad (5.1)$$

tomando logaritmos en los dos miembros de las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$-\rho\tau - \theta \log C = \log \lambda \quad (6)$$

y derivando respecto al tiempo:

$$-\rho - \theta \frac{C^0}{C} = \frac{\lambda^0}{\lambda} \Rightarrow -\theta \frac{C^0}{C} = A + \rho \quad (6.1)$$

de manera que la condición que debe cumplir el crecimiento del consumo está dada por la ecuación de Euler:

$$\frac{C^0}{C} = \frac{1}{\theta} (A - \rho) \quad (7)$$

Si buscamos un equilibrio de crecimiento regular en donde el producto, el consumo y el capital crecen a la misma tasa. La tasa de crecimiento  $g$  de la economía es:



$$g = \theta^{-1}(A - \rho)$$

De acuerdo a esa ecuación podemos decir que la economía tiene una tasa de crecimiento tanto más elevado cuanto que el valor de la productividad marginal aparente del capital  $A$ , que se supone constante, es elevado y además, que los agentes tengan una débil preferencia para el presente (es decir un  $\rho$  muy bajo), lo que les impulsa a ahorrar más.

A manera de resumen, podemos decir que a través de este modelo de Rebelo, es posible obtener un crecimiento en el largo plazo o un crecimiento sostenido al conservar la hipótesis de competencia perfecta y al tener la igualdad entre la tasa de crecimiento óptimo y la tasa de crecimiento del equilibrio competitivo. Para ello basta eliminar el factor trabajo de la función de producción o considerar el trabajo como un tipo de capital acumulable que se puede añadir al capital físico para formar el concepto de capital global y de tener una elasticidad del producto respecto a  $K$  igual a 1. En este modelo de Rebelo (y en todos sus demás modelos) los rendimientos de escala creciente no son necesarios para generar un proceso de crecimiento endógeno., por ello, los modelos de Rebelo no pueden responder a los cuestionamientos que generalmente se hacen a los modelos de crecimiento endógeno;

- Cómo justificar los rendimientos de escala (aún cuando se encuentran en la producción de capital).
- Cuál proceso competitivo puede sostener un equilibrio en este marco.
- Cuáles son las verdaderas fuentes del crecimiento endógeno.

### 3.2 MODELO DE ROMER (1986)

En su primer modelo, Romer (1986) considera que las externalidades tecnológicas positivas están estrechamente ligadas a la acumulación de un factor  $K$ , o dicho de otra forma, son el producto de un factor  $K$ .

Cabe mencionar que en este modelo de Romer,  $K$ , no es necesariamente el capital físico, más bien utiliza la expresión de “conocimiento”, pero implícitamente se está refiriendo al capital físico, admite que el stock de capital puede servir como indicador del stock de conocimiento.

Además, cabe señalar que Romer no rompe completamente con la hipótesis de rendimientos constantes, considera que es así para cada empresa, pero estos rendimientos constantes son relacionados con las externalidades positivas de la inversión. Esta visión de Romer, de conciliar rendimientos crecientes y competencia ha sido retomada de la tradición marshaliana, es decir, los rendimientos de escala son no crecientes para cada agente, pero a un nivel agregado son crecientes. A partir de este nivel de agregación se genera un premio que ninguna firma individual pueda apoderar y controlar. La consecuencia de lo anterior es que el equilibrio descentralizado y el óptimo social no coincidan –más adelante regresaremos sobre este punto-. Esas ideas de Romer, descritas arriba, en el sentido de que el aumento del tamaño del mercado permite que cada agente (firma) saque provecho

(beneficio) de las externalidades positivas, pueden acercarse a la idea del aumento de la división social del trabajo descrita por Adam Smith, pero extendida al conjunto de la economía.

Para fundar las externalidades sobre el capital físico, se puede hacer uso de dos formas diferentes, la primera se refiere al mismo capital físico (Explícitamente ese mecanismo se refiere a la existencia de complementariedad entre industria y actividades). A manera de ilustración podemos, de manera breve, decir que la construcción de redes ferrocarriles requiere de una industria siderúrgica y éste, por su parte, requiere de medios de transporte eficaces. Esa idea de un desarrollo simultáneo de diferentes actividades necesarias al desarrollo económico se puede entender mejor si se revisa el modelo de Murphy-Shleifer y Vishny (1989) y no al conocimiento que se deriva, la segunda es la descrita en Romer, es decir, el *learning by doing*: al acumular capital las empresas (firmas) acumulan al mismo tiempo conocimientos (aprendizaje en la práctica)<sup>15</sup>, es decir, el stock de capital es una medida aproximativa del “aprendizaje adquirido o experiencia adquirida durante el proceso de producción pasado, así, gracias a la circulación de la información las otras empresas sacan beneficio de dichos conocimientos.

De manera sucinta, para Romer, la existencia de rendimientos crecientes que son productos de la difusión del conocimiento, es lo que permite dar una explicación empírica satisfactoria del crecimiento real.

A continuación, presentaremos una formalización simple del modelo de Romer (1986).

Supongamos la siguiente función de producción:

$$Y_j = F(k_j, K) \quad (1)$$

$$K = \sum_j k_j \quad (2)$$

La externalidad relacionada al capital produce rendimientos crecientes en la producción del output.  $k_j$  es el nivel de capital per cápita de cada empresa  $j$ . Además, supongamos que  $N$ , que es el número de empresas, es fijo.

---

<sup>15</sup> El fenómeno del aprendizaje que mejora la productividad de los nuevos equipos fue introducido en el análisis económico por K. Arrow (1962), inspirándose en un artículo publicado por N. Kaldor (1957) en donde éste propone una función del progreso técnico. En efecto, Arrow propone una teoría endógena del cambio en los conocimientos con el fin de dar contenido preciso al factor residual, cuya identificación obliga la reconsideración de la hipótesis neoclásica que afirma la igualdad entre el producto y la suma de los ingresos de los factores de producción ( $Y=wL+rK$ ). Tomando como punto de partida la hipótesis de que el cambio técnico es el producto de la experiencia acumulada, Arrow se dio a la tarea de captar y formalizar la relación entre el mejoramiento de la eficacia productiva (productividad) y el aprendizaje, pero llegó a las mismas conclusiones del modelo neoclásico, la tasa de crecimiento de la economía es nula si la población no crece. Así pues, el crecimiento queda aún exógeno por el hecho de que hay rendimientos decrecientes en la acumulación de conocimientos y eso aún cuando el progreso técnico ya no lo es. Algunos años más tarde, Sheshinski en 1967 intentó rectificar la aportación de Harrod, sin embargo llegó a las mismas conclusiones de éste. Fue hasta la llegada de Romer que pudo proponerse un modelo de crecimiento endógeno formalizado.

Con esa descripción nos encontramos en el marco de una estructura de mercados en competencia perfecta.

La resolución de este modelo se puede hacer de una manera sencilla, es decir, dando una forma particular a las funciones de producción y de utilidad.

Supongamos que C es el consumo y U la utilidad; tenemos:

$$U(C) = \ln(C) \quad (3)$$

La función de producción puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$F(k, K) = k^\alpha, K^\eta$$

Una vez resuelto este modelo, se observan tres casos.

CASO 1:  $\alpha + \eta < 1$

Éste se refiere a una función de producción con rendimientos de escala decrecientes sobre los factores acumulables; esos factores son: el conocimiento privado y el conocimiento global. Este caso es idéntico al modelo de Solow. El crecimiento se frena cuando la productividad marginal (privada) del capital iguala la tasa de actualización (descuento).

Este caso también es similar al Modelo de Arrow-Sheshinski. La externalidad positiva sobre el capital no es lo suficientemente fuerte para compensar el efecto de los rendimientos marginales decrecientes.

CASO 2:  $\alpha + \eta = 1$

Este caso corresponde a rendimientos de escala constantes sobre los factores acumulables. Ese modelo se caracteriza por la ausencia de una dinámica transitoria. Cualquiera que fuese la condición inicial, cualquier trayectoria se da a la tasa constante g:

$$g = \alpha N^\eta - \rho \quad (5)$$

La función de producción se puede escribir como:

$$F(K, L) = T_0 e^{gt} K^\alpha L^{1-\alpha} \quad (6)$$

Desde el punto de vista de la observación y de las pruebas empíricas este modelo es equivalente a un modelo con un progreso técnico exógeno igual a (g). Con progreso técnico

endógeno, las propiedades de este modelo son diferentes. Por ejemplo, al poner un impuesto sobre un factor acumulable (el conocimiento en el modelo de Romer y el capital en el modelo de Solow) se está penalizando a la tasa de crecimiento, mientras que este impuesto -en el modelo neoclásico de crecimiento exógeno- no genera ningún efecto sobre el equilibrio, lo único que se altera es la dinámica transitoria.

CASO 3:  $\alpha + \eta > 1$

Este caso se refiere al de una función de producción con rendimientos crecientes sobre los factores acumulables. En este modelo, la tasa de crecimiento aumenta constantemente,  $g$  tiende hacia el infinito, el modelo diverge.

El crecimiento que se da en los casos 2 y 3 se manifiesta por un aumento del stock de capital y, por lo tanto, por un aumento de la razón capital/trabajo, puesto que hemos venido razonando en un modelo con una población constante.

Como ya lo habíamos mencionado, las externalidades positivas que se relacionan con la acumulación de conocimiento propicia la sub-optimalidad del equilibrio competitivo. Cada firma proyecta su plan de producción al tomar en cuenta la productividad marginal privada del conocimiento, es decir, igual a  $f'_K$  si nos encontramos en el marco de una función de producción como la ecuación (1), mientras que es igual a  $f'_k + Nf'_k$  en el caso de un cálculo de óptimo social. El equilibrio de mercado conduce pues a un nivel de inversión inferior al nivel de inversión del óptimo social.

Al considerar el modelo general, se puede argüir que, salvo caso particular, no hay ruta (sendero) de crecimiento estable y sostenido en el largo plazo con el primer modelo de crecimiento endógeno propuesto por Paul Romer. El primer caso, descrito aquí es idéntico al modelo neoclásico de Solow sin progreso técnico y que corresponde como ya lo hemos demostrado a la extinción del crecimiento. El tercer caso que corresponde al caso de un crecimiento explosivo es aquel que Romer trata de justificar al utilizar series estadísticas que parecen indicar una tendencia a la alza del ritmo del crecimiento económico en el transcurso de los últimos tres siglos.

### 3.3 MODELO DE BARRO (1990)

Desde hace tiempo, la tradición neoclásica -en lo que concierne al análisis de la pareja Gastos Públicos/Crecimiento- únicamente toma en cuenta las deducciones que hace el Estado. Si el Estado financia el gasto público por la vía del préstamo, lleva a las tasas de interés a la alza y por consiguiente, deprime la inversión privada productiva “efecto de expulsión o desplazamiento”; si por el contrario el financiamiento se opera por la vía de los impuestos sobre la producción se observa una disminución del rendimiento privado del capital. En estos dos casos, la intervención del Estado tiene una influencia negativa sobre la inversión privada, la producción y el crecimiento.

En una perspectiva de crecimiento endógeno, esa manera de considerar la intervención del Estado es sin lugar a duda dudosa, si es cierto que una parte de los gastos públicos pueden

ser considerados como suntuarios o improductivos o rinden servicios de tipo de “consumo final”: museos, bibliotecas, parques, subvenciones a los desayunos escolares o de transporte público. Sin embargo, grandes cantidades de gastos públicos rinden servicios de tipo de “consumo intermediario” que contribuyen directamente o indirectamente a mejorar la productividad del sector privado: infraestructuras (carreteras, comunicaciones, redes urbanas,...), contribución a la formación o al mantenimiento del capital humano (educación, salud), garantía de los derechos de propiedad (seguridad interior y exterior, defensa nacional, policía,...).

Gran parte de esos servicios, solamente pueden ser proporcionados por los poderes públicos: porque no existe medio alguno para impedir la utilización por otros agentes privados (bienes exclusivos: defensa nacional, carreteras), porque el rendimiento privado que ofrecen es inferior al rendimiento social (educación, investigación) porque existe indivisibilidad (justicia...).

Es en este marco de crecimiento endógeno que Barro en 1990 en un artículo “Government Spending in a Simple Model of Economic Growth”, propone su modelo.

Empieza haciendo la distinción entre capital privado y capital público. El rendimiento marginal del capital privado es decreciente, por su parte el rendimiento marginal del capital total (capital privado y capital público) es constante lo que permite el desarrollo de un proceso de crecimiento endógeno.

R. Barro, supone que hay rendimientos constantes a escala, que la producción por trabajador ( $y$ ) es función de ( $\phi$ ), del capital privado per capita ( $k$ ) y del capital público per capita ( $k_G$ ):

$$y = k\phi\left(\frac{k_G}{k}\right)$$

Retomando la hipótesis habitual destaca: que los rendimientos marginales son positivos y decrecientes, o sea:

$$\phi' > 0 \quad \text{y} \quad \phi'' < 0$$

Además, supone que  $\phi$  es del tipo Cobb-Douglas, o sea:

$$y = kA\left(\frac{k_G}{k}\right)^\alpha$$

Haciendo algunas manipulaciones algebraicas tenemos:

$$y = k A k^{\alpha} k_G^{-\alpha}$$

$$y = k k^{-\alpha} A k^{\alpha} k_G$$

$$y = k^{1-\alpha} A k^{\alpha} k_G$$

$$y = A k^{1-\alpha} k^{\alpha} k_G \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

Cabe añadir que este modelo se aproxima bastante al modelo Ak de Rebelo.

*Análisis de la ecuación anterior:*

- Los servicios públicos aparecen como un input de la producción privada.
- Hay rendimientos decrecientes a escala respecto al capital privado.
- Hay rendimientos constantes con respecto al conjunto: capital privado-capital público.
- Se observarán rendimientos decrecientes si el capital público no evoluciona paralelamente al capital privado.

*Soluciones exploradas:*

Supongamos que el presupuesto está equilibrado, los gastos públicos son financiados por un impuesto proporcional al ingreso.

- La posibilidad de un régimen de crecimiento endógeno, autosostenido es inmediato, pues la productividad marginal del capital privado es decreciente pero la productividad marginal del capital total (privado más público) puede ser mantenida constante, basta para ello que el input crezca al mismo ritmo que el capital privado.
- El “tamaño óptimo” del sector público puede ser estudiado al suponer que el gasto público es financiado por un impuesto proporcional al ingreso de tasa ( $\tau$ ) y al asimilar (igualar) gastos públicos ( $g$ ) y capital público ( $k_G$ ) la función de producción por trabajador queda:

$$y = A k^{1-\alpha} g^{\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

Dada que la restricción presupuestaria del Estado es:

$$g = \tau y \quad (2)$$

Podemos expresar  $\tau$  como una función de  $\frac{g}{k}$  :

$$\tau = \frac{g}{k}$$

$$\tau = \frac{g}{Ak^{1-\alpha}g^\alpha} \Rightarrow \tau = gA^{-1}k^{-1+\alpha}g^{-\alpha} \Rightarrow \tau = g^{1-\alpha}A^{-1}k^{-1+\alpha}$$

$$\tau = \frac{g^{1-\alpha}}{k^{1-\alpha}}A^{-1} \Rightarrow \tau = \left(\frac{g}{k}\right)^{1-\alpha}A^{-1}$$

$$\tau A = \left(\frac{g}{k}\right)^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{g}{k} = \sqrt[1-\alpha]{\tau A} \Rightarrow \frac{g}{k} = (\tau A)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\frac{g}{k} = (\tau A)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3)$$

De manera grosso modo podemos decir que los valores  $\tau$  y de  $\frac{g}{k}$  tienen influencia sobre la tasa de crecimiento  $g_c$ , es decir, la tasa de crecimiento es función de  $[\tau, A, (1-\alpha), \sigma, \delta, \rho]$ . Donde:  $\delta$  es la tasa de depreciación del capital;  $\rho$  es la tasa de descuento y  $\sigma$  mide el grado de concavidad de la función de utilidad.

Podemos derivar lo dicho arriba al dar la siguiente forma a la función de utilidad y como es habitual partimos del supuesto de que las familias tienen como objetivo maximizar la función de utilidad, pero sujeta a una restricción:

$$\text{Max } U(0) = \int_0^\alpha e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} dt \quad (4)$$

$$\text{Sujeto a: } k^0 = (1-\tau)Ak^{1-\alpha}g^\alpha - c - (\delta+n)k \quad (5)$$

Para resolver este problema utilizaremos la técnica habitual de optimización. El valor presente del hamiltoniano es:

$$H = e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \mu [(1-\tau)Ak^{1-\alpha}g^\alpha - c - (\delta+n)k]$$

$$H = \frac{e^{-(\rho-n)t} c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{e^{-(\rho-n)t}}{1-\sigma} + \mu Ak^{1-\alpha}g^\alpha - \mu \tau Ak^{1-\alpha}g^\alpha - \mu c - \mu \delta k - \mu n k$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = H_c = \frac{1 - \sigma e^{-(\rho-n)t} c^{-\sigma}}{1 - \sigma} - \mu \Rightarrow H_c = e^{-(\rho-n)t} c^{-\sigma} - \mu \Rightarrow$$

$$e^{-(\rho-n)t} c^{-\sigma} = \mu \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = H_k = 1 - \alpha \mu A k^{-\alpha} g^\alpha - (1 - \alpha) \mu \tau A k^{-\alpha} g^\alpha - \mu \delta - \mu n$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = -\mu \left[ (1 - \alpha) (A k^{-\alpha} g^\alpha - \tau A k^{-\alpha} g^\alpha) - \delta - n \right]$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = -\mu \left[ (1 - \alpha) \left\{ A \left( \frac{g}{k} \right)^\alpha - \tau A \left( \frac{g}{k} \right)^\alpha \right\} - \delta - n \right]$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = -\mu \left[ \left\{ (1 - \alpha) A \left( \frac{g}{k} \right)^\alpha - (1 - \alpha) A \left( \frac{g}{k} \right)^\alpha \tau \right\} - (\delta + n) \right]$$

$$\mu^0 = -\mu \left[ (1 - \tau) (1 - \alpha) A \left( \frac{g}{k} \right)^\alpha - (\delta + n) \right] \quad (7)$$

La ecuación (6) se interpreta de la siguiente manera: el valor marginal del consumo debe ser igual al valor marginal de la inversión.

Ahora, si tomamos el logaritmo de (6) y además derivamos respecto al tiempo tendremos:

$$-(\rho - n)t \log e - \sigma \log c_t = \log \mu$$

$$-(\rho - n)t - \sigma \log c_t = \log \mu$$

Derivando respecto del tiempo tenemos:

$$-(\rho - n)t - \sigma \frac{c^0}{c} = \frac{\mu^0}{\mu} \quad (8)$$

Sustituyendo (8) en (7) tenemos:

La ecuación de (7) es:



$$\begin{aligned}
\frac{\mu^0}{\mu} &= \left[ -(1-\tau) \left\{ A \left( \frac{g}{k} \right)^\alpha (1-\alpha) \right\} \right] + \delta + n \\
-\rho + n - \sigma \left( \frac{c^0}{c} \right) &= \left[ -(1-\tau) \left\{ A \left( \frac{g}{k} \right)^\alpha (1-\alpha) \right\} \right] + \delta + n \\
-\sigma \frac{c^0}{c} &= \left[ -(1-\tau) \left\{ A \left( \frac{g}{k} \right)^\alpha (1-\alpha) \right\} \right] + \delta + n + \rho - n \\
\frac{c^0}{c} &= \frac{\left[ -(1-\tau) \left\{ A \left( \frac{g}{k} \right)^\alpha (1-\alpha) \right\} \right] + \delta + n}{\sigma} \\
g_c = \frac{c^0}{c} &= \sigma^{-1} \left[ -(1-\tau) \left\{ A \left( \frac{g}{k} \right)^\alpha (1-\alpha) \right\} \right] - \delta - \rho \tag{9}
\end{aligned}$$

Esta ecuación (9) es la condición que debe cumplir el crecimiento del consumo, es decir, éste debe ser proporcional a la diferencia que existe entre la tasa de rendimiento (productividad marginal neta del capital después de impuestos) y el término  $\rho$ .

Ahora, reemplazamos la ecuación (3) en la ecuación (9) y obtenemos:

$$\frac{g}{k} = (\tau A)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
g_c &= \frac{c^0}{c} = \sigma^{-1} \left[ (1-\tau)A \left( \frac{g}{k} \right)^\alpha (1-\alpha) - \delta - \rho \right] \\
&= \left[ (1-\tau)A(zA)^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-\alpha) - \delta - \rho \right] \sigma^{-1} \\
&= \sigma^{-1} \left[ (1-\tau)A(zA)^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-\alpha) - \delta - \rho \right] \\
&= \sigma^{-1} \left[ (1-\tau)AA^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tau^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-\alpha) - \delta - \rho \right] \\
&= \sigma^{-1} \left[ (1-\tau)A^{\frac{1}{1-\alpha}} \tau^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-\alpha) - \delta - \rho \right] \\
\frac{c^0}{c} &= \sigma^{-1} \left[ (1-\alpha)A^{\frac{1}{1-\alpha}} \tau^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta - \rho \right] \tag{10}
\end{aligned}$$

Esta ecuación expresa la tasa de crecimiento del consumo en función de  $\tau$ ,  $\sigma$ ,  $A$ ,  $\delta$ ,  $\rho$  y  $(1-\alpha)$ .

Ahora, si tomamos la ecuación dinámica (5) y la dividimos entre  $k$ , tendremos la siguiente ecuación:

$$\frac{k}{k} = (1-\tau)Ak^{-\alpha}g^\alpha - \frac{c}{k} - (\delta + n) \tag{11}$$

En efecto, si tomamos logaritmos y derivamos respecto al tiempo, terminamos por concluir que:

$$g_k = \frac{k^0}{k} = g_c = \frac{c^0}{c} = g_y = \sigma^{-1} \left[ (1-\alpha)A^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-\tau)\tau^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta - \rho \right] \tag{12}$$

Es decir, que la tasa de crecimiento del consumo per capita es igual a la tasa de crecimiento del producto per capita.

De la ecuación (12), podemos apreciar la relación entre el impuesto ( $\tau$ ) que cobra el gobierno y la tasa de crecimiento de la economía. Si  $\tau = 0$ , la productividad marginal del

capital después de impuesto  $\left[ (1 - \alpha)A^{\frac{1}{1-\alpha}}(1 - \tau)\tau^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right]$  es igual a 0, por lo consiguiente, la tasa de crecimiento del producto per capita es negativa:  $g_y = \frac{1}{\sigma}(-\rho - \delta)$ , es decir, el beneficio o rendimiento neto obtenido de la inversión es negativo.

Dada:

$$g_y = \frac{c^0}{c} = \left[ (1 - \alpha)A^{\frac{1}{1-\alpha}}(1 - \tau)\tau^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta - \rho \right] \sigma^{-1}$$

$$\rho + \sigma \left( \frac{c^0}{c} \right) = \left[ (1 - \alpha)A^{\frac{1}{1-\alpha}}(1 - \tau)\tau^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta \right] \quad (13)$$

Beneficio obtenido  
del consumo

Beneficio o rendimiento neto  
de la inversión

En este caso el gobierno no provee bienes públicos.

Ahora, con un  $\tau$  igual a 1, el rendimiento neto después de impuestos vuelve a ser negativo. Aquí, el Estado provee grandes cantidades de bienes públicos, la producción total es producida por él y se da gracias al tipo impositivo de 100 por ciento, por lo consiguiente, la tasa de crecimiento es negativa.

Cuando  $\tau$  se encuentre entre 0 y 1, es decir,  $0 < \tau < 1$ , la relación entre la tasa de crecimiento y el tamaño del sector público  $\left( \frac{G}{Y} \right)$ , toma la forma de u invertida; hay pues un

“tamaño óptimo”. Aquí, este tamaño es alcanzado cuando  $\frac{g}{y} = \tau = \alpha$ .

$\alpha$  es el exponente del factor de producción público en la función de producción, es decir, el nivel óptimo del gasto público es alcanzado cuando la proporción de la producción que le es asignado es igual a su contribución relativa a esta producción.

Además, hay que mencionar que el rendimiento privado del capital es inferior al rendimiento social del capital:

Dado  $y = Ak^{1-\alpha}g^\alpha$ , el rendimiento privado del capital ( $R_p$ ) es:

$$R_p = \frac{\partial y}{\partial k} \Rightarrow R_p = (1 - \alpha)Ak^{1-\alpha}g^\alpha \quad (14)$$

Dado  $Y = Ny = NAK^{1-\alpha}g^\alpha$ , el rendimiento social del capital ( $R_s$ ) es:

$$R_s = \frac{\partial Y}{\partial k} \Rightarrow R_s = N(1 - \alpha)Ak^{1-\alpha}g^\alpha \Rightarrow R_s = NR_p \quad (15)$$

$$\therefore R_p < R_s$$

A manera de conclusión, podemos afirmar que en este modelo de Romer, el crecimiento autosostenido es pues posible. La tasa de crecimiento depende de la porción de recursos nacionales que el Estado deduce para asignar a gastos productivos.

En su segundo modelo, Robert Barro supone la disponibilidad de congestiónamiento del sector público. Para tal fin, propone una función de producción que toma la siguiente forma:

$$y = Ak \left( \frac{k_G}{y} \right)^\alpha \quad (16)$$

Si el servicio público o las infraestructuras son sub-dimensionadas, su productividad propia disminuye. Una hipótesis plausible es que el congestiónamiento crece con el nivel de riqueza de la sociedad.

El supuesto fundamental en este modelo es que los rendimientos de escala son constantes tanto a nivel privado como a nivel social:

$$Y = Ny = Ak^{\frac{1}{1+\alpha}} k_G^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (17)$$

Dada la ecuación (1): el rendimiento privado del capital es igual a 1.

Dada la ecuación (2): el rendimiento social del capital es igual a  $\frac{1}{1+\alpha}$ .

De allí derivamos que  $1 > \frac{1}{1+\alpha}$ , es decir, la tasa de crecimiento del equilibrio competitivo es mayor que la tasa de crecimiento óptimo<sup>16</sup>.

La conclusión central de esos modelos es que las inversiones y servicios públicos contribuyen en mucho al crecimiento económico.

---

<sup>16</sup> Éste caso también se presenta en el modelo de Aghion y Howitt.

A continuación presentaremos algunos resultados de investigaciones económicas sobre este punto:

- Aschauer (1989) en trabajos sobre series cronológicas para los Estados Unidos concluye que una alza de 1% de los gastos públicos aumenta la productividad total de los factores (trabajo y capital privado) en 0.34%. Además, la elasticidad de la producción con respecto al capital público de la producción con respecto al capital privado es de 0.27.
- Ford y Poret (1991) en un estudio sobre la OCDE confirma en parte lo expresado en el trabajo de Aschauer (1989).
- Robert Barro (1989) en un estudio para 98 países examina la relación entre la parte de gastos públicos de diferentes tipos en el PIB y la tasa de crecimiento del PIB. Como resultado: el coeficiente obtenido es significativamente negativo en lo que corresponde a los gastos de consumo mientras que el coeficiente no es significativo en cuanto a los gastos de inversión.
- Ashan, Kwan y Sahni (1992) en un modelo trabajado en términos de causalidad del gasto público sobre los 7 más grandes países de la OCDE destacó lo siguiente:
  - Para Reino Unido hay una causalidad de gasto público hacia el ingreso.
  - Para Francia e Italia hay una causalidad bidireccional entre gasto público e ingreso.
  - Para EUA y Canadá hay una causalidad del ingreso hacia el gasto público

Demostración matemática y gráfica:

$$g_c = \sigma^{-1} \left[ A(1 - \tau) \left\{ (zA)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\}^\alpha (1 - \alpha) - \delta - \rho \right]$$

$$g_c = \sigma^{-1} \left[ A(1 - \tau) (zA)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1 - \alpha) - \delta - \rho \right]$$

$$\frac{\partial g_c}{\partial \tau} = 0$$

Tenemos que:

$$\sigma^{-1} A(1-\alpha) \left[ (1-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\tau A)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (\tau A)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\partial}{\partial \tau} (1-\tau) \right] = 0$$

$$\sigma^{-1} A(1-\alpha) \left[ (1-\tau)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (\tau A)^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} A + (\tau A)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (-1) \right] = 0$$

$$\sigma^{-1} A(1-\alpha) A(1-\tau)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (\tau A)^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} - \sigma^{-1} A(1-\alpha) (\tau A)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0$$

Dividir entre  $(\tau A)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$  :

$$A(1-\tau)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (\tau A)^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} = 1$$

$$A(1-\tau)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (\tau A)^{-1} = 1$$

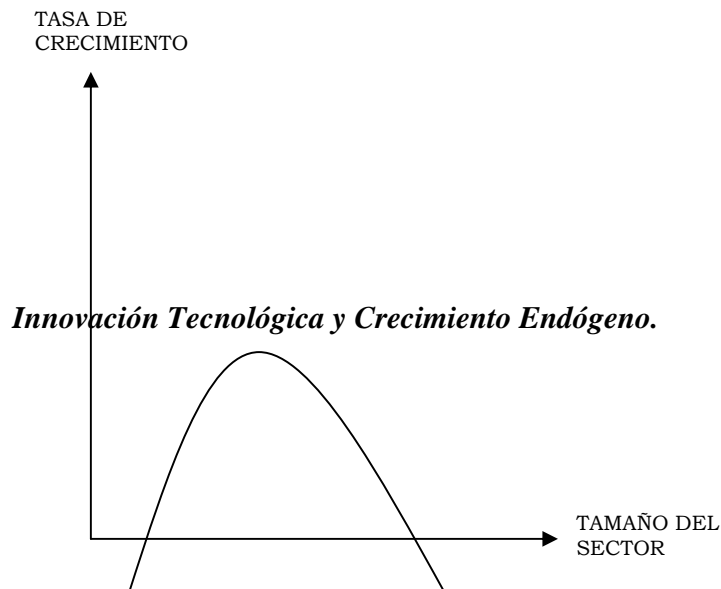
$$(1-\tau) \frac{1}{\tau} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$\frac{1}{\tau} - 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1-\alpha}{\alpha} + 1$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1-\alpha + \alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\tau = \alpha$$



Los modelos anteriores atribuyen el crecimiento endógeno a una externalidad que es debida al capital físico, éste se deriva de la inversión. La presencia de rendimientos de escala es subyacente a las externalidades. Una visión alternativa y complementaria ha sido propuesta y atribuye al crecimiento de la productividad a una actividad específica: la investigación y el desarrollo (I-D).

Los gastos en investigación y desarrollo permiten obtener nuevos bienes de equipo más productivos que los anteriores. El progreso técnico se incorpora principalmente en el capital físico pero éste no resulta de la inversión en este capital físico.

Los modelos que cuentan con este mecanismo, lo hacen en un sector separado que produce la innovación. Los nuevos inputs (factores de producción o insumos) pueden añadirse a los viejos inputs (Modelo de Romer, 1990), o los nuevos inputs pueden sustituir a los viejos (Modelo de Aghion y Howitt).

En el modelo de Romer, el crecimiento es debido al aumento del número de inputs diferentes disponibles. Este modelo se acerca a una problemática smithiana.

En el modelo de Aghion y Howitt, el crecimiento es debido al aumento de la calidad de los inputs efectivamente utilizados. Ésta se basa sobre el enfoque schumpeteriano de la destrucción-creación.

En un caso como en el otro el equilibrio de mercado no corresponde al óptimo social.

### **3.4 MODELO DE ROMER (1990)**

Este modelo es el que más Romer ha venido desarrollando. Al igual que su modelo de 1986, Romer enfoca la fuente del crecimiento en un aumento de la división social del trabajo. Esta división social del trabajo, es, sin embargo, explícita en este modelo de Romer bajo la forma de un número creciente de inputs de producción diferentes y especializados.

Mientras que en el primer modelo de Romer (1986), el aumento de la especialización de los inputs era un subproducto de la inversión de las firmas en el conocimiento, aquí ese aumento de la especialización es el resultado de una actividad específica y remunerada: la I-D. La innovación tecnológica, fenómeno central para explicar el crecimiento resulta de una elección de los agentes. Además, esta innovación proporciona a los agentes un poder de monopolio que es una incitación para generar nuevos procedimientos.

La economía tiene tres sectores:

- 1) El sector de la investigación.
- 2) El sector de los bienes intermedios.
- 3) El sector del bien final.

Hay 4 insumos de producción:

- 1) El capital físico (K).
- 2) El trabajo no calificado (L).
- 3) El capital humano (H). Este es fijo.
- 4) La tecnología (A)

La tecnología (A) representa el número de bienes utilizados, como factores intermedios en la producción del bien de consumo. El nivel tecnológico de A puede crecer sin límite.

El capital humano puede ser utilizado en la producción de nuevo conocimiento en el sector de la investigación y en el sector en donde se producen bienes finales.

La principal originalidad del modelo radica en la forma que toma el capital físico. No se trata de un bien homogéneo, sino de un conjunto de inputs diferentes representados sobre un continuum.

$$K = \int_0^A X(i)di \quad (1)$$

En donde: X(i) representa la cantidad del input i utilizado en la producción. El crecimiento del stock de capital se manifiesta por un aumento del número de input (aumento de A) y no por un crecimiento de la cantidad de cada uno de ellos. Así, en el equilibrio se tendrá:

$$\frac{K^0}{K} = \frac{A^0}{A} \quad (2)$$

Aquí, crecimiento del capital y progreso técnico se hacen al mismo ritmo. Este último consiste en una producción de inputs cada vez más especializados traduciendo el crecimiento de la división social del trabajo. La idea entonces, es la misma que aquella idea del modelo de Romer de 1986, pero aquí esta idea está explícita directamente en la formalización.

La función de producción para el bien final es de tipo Cobb-Douglas e incluye: el capital humano (H), el trabajo (L) y el capital físico (K), según:

$$Y(H_1, L, X_i) = H^\alpha L^\beta \int_0^A X^{1-\alpha-\beta}(i)di$$

Donde H<sub>1</sub> es el capital humano asignado a la actividad productiva, es decir, a la producción del bien final. Esta función de producción, presentada en Ethier (1982), tiene rendimientos constantes. Sin embargo, un aumento del número de inputs utilizados en la producción, es decir, un aumento de A aumenta la producción del bien final. Los inputs X(i) que constituyen al capital (K) que no son consumidos en la producción sino solamente utilizados en la producción (sus servicios son consumidos).



Esa función de producción puede ser entendida de la siguiente manera: supongamos que solamente hay un bien de producción, sea  $A = 1$ , la función de producción es:  $Y = H_1^\alpha L^\beta X^{1-\alpha-\beta} (i)$ . El capital es representado por el bien de producción (único) utilizado en cantidad  $X(1)$ .

Ahora con dos bienes de producción, es decir,  $A = 2$ , la función de producción será:  $Y = H_1^\alpha L^\beta X^{1-\alpha-\beta} (1) + X^{1-\alpha-\beta} (2)$ .

La generalización a un número cualquiera  $A$  de input es inmediata, se trata de una función aditiva y separable de diferentes bienes de equipo.

Los nuevos bienes intermedios son producidos: por una parte con un plan (design) comprado al sector de la investigación, y por otra parte, con  $\eta$  unidades de bienes intermedios. Este sector tiene rendimientos crecientes en razón del costo fijo que representa la compra de patentes al sector de la investigación necesaria para producir una cantidad cualquiera de un nuevo bien intermedio:

$$C(x) = P_A + \eta r x$$

De hecho, todos los bienes intermedios son producidos en las mismas condiciones, esos bienes no se diferencian entre ellos. Todos los bienes son utilizados en la misma proporción y tienen todos el mismo precio, es decir, por razones de simetría la cantidad producida de cada bien de equipo es la misma. Sea  $X(i) = \text{constante} = \bar{X}$ . Todo sucede como si tuviéramos una cantidad de capital  $K = A\bar{X}$ . La función de producción se escribe:

$$Y = H_1^\alpha L^\beta \bar{X}^{1-\alpha-\beta} \Rightarrow Y = H_1^\alpha L^\beta A \left( \frac{K}{A} \right)^{1-\alpha-\beta} \Rightarrow Y = H_1^\alpha L^\beta A^{\alpha+\beta} K^{1-\alpha-\beta}$$

Hay que recalcar, sin embargo, que el término  $\bar{X}$  no es un factor sino una constante, mientras que  $A$  no es una constante, ya que constituye el verdadero motor del crecimiento endógeno.

En razón de las condiciones de producción, cada productor de inputs de producción posee un monopolio sobre la producción del bien, del cual compró el plan de fabricación. De acuerdo a lo anterior, se observa la idea Shumpeteriana: la innovación garantiza un cierto grado de monopolio y, por lo tanto, un beneficio suplementario. En razón de las mejoras que se dan, gracias a la innovación y a la exclusividad que posee el innovador (que no es el inventor), éste puede pedir un precio superior al costo marginal.

El sector de investigación permite encontrar nuevos bienes intermedios. Las firmas que se ocupan de la investigación encuentran nuevas ideas de bienes intermedios y aumentan el número de esos bienes disponibles para la producción del bien final. La tecnología crece de la siguiente manera:

$$A^0 = \delta H_2 A$$

Donde  $H_2$  es el capital humano asignado a la investigación, es decir al mejoramiento de la tecnología.  $H$  entonces es igual a  $H_1$  más  $H_2$ .

Esta función tiene rendimientos dinámicos crecientes. A mayores recursos dedicados a la investigación, más crece la productividad de este sector. Solamente tal hipótesis permite asegurar un crecimiento sostenido de la tecnología:  $\frac{A^0}{A}$  no se anula cuando  $A$  es grande.

Encontramos así también, el mismo tipo de formulación que en los modelos precedentes: un crecimiento sostenido en la actividad de acumulación, basado sobre rendimientos de escala crecientes es necesario para un crecimiento sostenido del producto final.

Para justificar esos rendimientos crecientes, Romer invoca la naturaleza particular del conocimiento como un bien económico. El conocimiento es un bien no-rival, la utilización de un conocimiento por un individuo no excluye su utilización simultánea por otro individuo. Cada investigador tiene acceso a los descubrimientos del conjunto de sus colegas presentes y pasados para efectuar sus propios trabajos. El stock de conocimiento interviene directamente en la producción de los nuevos conocimientos. El costo económico para tener acceso a la utilización de este stock es mínimo (fotocopias, suscripción). Conforme a la tradición neoclásica, Romer considera pues el conocimiento como un bien público.

Sin embargo, las firmas deben a veces pagar para adquirir el derecho de producir los bienes de producción recientemente producidos. Mediante la existencia de un sistema de patentes, es posible impedir ciertas formas de uso del conocimiento. En este sentido, el conocimiento es un “bien exclusivo”, es decir, hay la posibilidad jurídica de impedir algunas formas de su uso.

La producción de conocimientos presenta pues un rendimiento privado (venta de patentes) y, además, un rendimiento social ligado con la externalidad positiva. El conocimiento producido es no solamente utilizado para aumentar la productividad del sector del bien final, sino también (y eso gratuitamente) para acrecentar la productividad del sector de la investigación.

El mercado del bien final es competitivo, coincide con la hipótesis de rendimientos constantes mientras que los bienes intermedios son vendidos a precio de monopolio.

La función de felicidad del consumidor representativo, como de costumbre tiene elasticidad de sustitución constante, como en la siguiente ecuación:

$$U(C) = \int_0^{\alpha} e^{-\rho\tau} \left( \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} \right) d\tau$$

El equilibrio es definido como un sendero para los precios y las cantidades de manera que:

- Los consumidores ahorran y consumen al tomar la tasa de interés ( $r$ ) como dado.
- Los que poseen el capital humano deciden de la asignación de sus recursos (hacia el sector de la investigación o el sector de la producción) al tomar el stock de conocimiento  $A$ , el precio de los nuevos planes de fabricación  $P_A$  y la tasa salarial  $W_A$  como dados.
- Los productores del bien final escogen sus inputs al tomar todos los precios como dados.
- Los productores de bienes intermedios maximizan el beneficio al tomar la tasa de interés y la curva de demanda de bienes durables como dados.
- Las firmas que quieren producir nuevos bienes intermedios toman el precio de los planes de fabricación como dado.
- Los mercados están en equilibrio.

Se trata pues, de la resolución del equilibrio descentralizado y no del planificador social. La solución de un sendero de equilibrio es tal que  $A$ ,  $K$  (es decir, el conjunto de los bienes intermedios) y  $Y$  crecen a una tasa constante,  $H_1$  y  $H_2$  son constantes.

La expresión de la tasa de crecimiento es entonces la siguiente:

$$g = \delta H - \frac{\Lambda \rho}{\Lambda \sigma + 1}$$

con:

$$\Lambda = \frac{\alpha}{(1 - \alpha - \beta)(\alpha + \beta)}$$

La expresión de la tasa de crecimiento implica (exige) cierta observación. Contrariamente a algunos modelos estudiados anteriormente,  $g$  aquí no depende del tamaño de la población activa ( $L$ ), al considerar evidentemente que ( $H$ ) no depende de ( $L$ ), se observa que en la ecuación la tasa de crecimiento que  $g$  no depende de la oferta de trabajo. Para Romer, ese resultado se deriva de la elección de la función de producción de tipo Cobb-Douglas que relaciona el capital humano y el trabajo. Si por ejemplo, utilizamos una función de producción de tipo C.E.S. (Constant Elasticity of substitution) de la siguiente forma:

$$Y = \left[ \alpha H_1^\beta + (1 - \alpha) L^\beta \right]^{\frac{1-y}{\beta}} \int_0^A X^y(i) di \Rightarrow$$

$$Y = \left[ \alpha H_1^\beta + (1 - \alpha) L^\beta \right]^{\frac{1-y}{\beta}} A^{1-y} \left( \frac{K}{\eta} \right)^y$$

Si la elasticidad de sustitución entre trabajo (L) y capital humano (H) es más baja que aquella entre el capital (K) y la pareja (L-H), entonces, un alza en el trabajo (L) disponible, aumenta mucho más a la productividad marginal de  $H_1$  que la productividad marginal de K. Esa alza de (L) conduce, pues, a la alza de  $H_1$  y, por consiguiente, a una reducción del capital humano asignado a la producción de tecnología: una mayor oferta del trabajo puede reducir la tasa de crecimiento. Ese resultado es completamente contrario al resultado del modelo neoclásico.

Tampoco  $g$  depende de  $n$ , es decir de la tecnología necesaria a la producción de los bienes intermedios. En cambio, la tasa de crecimiento es tanto más grande en cuanto que  $H_2$ , el capital humano asignado a la investigación es importante. Es pues, la asignación de capital humano entre los sectores de la producción del bien final y la investigación-desarrollo que determinará el valor de la tasa de crecimiento de equilibrio. Los parámetros de la función de utilidad del consumidor representativo entran en la determinación de la tasa de crecimiento de la manera habitual.

$H_2$ , como  $g$ , es creciente con  $H$ :

$$H_2 = \frac{H - \rho \left( \frac{\Lambda}{\sigma} \right)}{\Lambda \sigma + 1}$$

Una economía fuertemente dotada de capital humano crecerá más rápido, ya que dedicará más, en parte y en nivel, a la acumulación del saber.

Inversamente, un nivel demasiado reducido de  $H$  llevará  $H_2=0$ , la totalidad del capital humano es entonces asignado a la producción. La tasa de crecimiento  $g$  para este caso es nula. En efecto, hay un aislamiento con respecto al modelo neoclásico que predecía una convergencia internacional de las tasas de crecimiento de las economías. La posibilidad de un no-desarrollo está presente en el modelo de Romer.

Se muestra, por otro lado, que la tasa de crecimiento óptimo es superior a la tasa de crecimiento de equilibrio: la fracción del capital humano asignado a la investigación es más elevado en el óptimo que en el equilibrio. La razón, es que los agentes aislados no toman en cuenta la externalidad generada por los productos de su investigación, contrariamente a lo que haría un planificador: el rendimiento privado de la investigación es inferior a su rendimiento social, un resultado tradicional.

Las conclusiones concernientes a la política económica son múltiples:

- Una política de sostén a la educación (alza de  $H$ ) será eficaz.
- Una política de subvención a la investigación (incrementar  $\delta$ ) será eficaz también.
- En cambio, una política de ayuda a la inversión (reducir  $\eta$ ) no tendrá un efecto sobre la tasa de crecimiento de largo plazo visto que  $\eta$  no interviene en la expresión de  $g$ .

Eso viene del hecho de que en el equilibrio,  $X$  es fijo, el crecimiento del output no viene de un alza de la cantidad utilizada de cada input sino de un aumento del número de inputs. La baja del costo de un input dado no tiene efecto dinámico. Eso es diferente del resultado del primer modelo de Romer, en el cual una subvención a la inversión permitía acercar la tasa de crecimiento de equilibrio con la del óptimo social.

Se pueden hacer dos críticas a este modelo de Romer:

- 1) La dependencia directa de la tasa de crecimiento de la producción con respecto a la cantidad de capital humano hace que el tamaño del país (medido por el número de trabajadores calificados y no por la mano de obra total) influye fuertemente sobre su crecimiento. Se puede entonces sacar un mensaje optimista sobre los efectos de la unificación económica de Europa en 1993. Pero, se explica bastante mal el repliegue de los Estados Unidos frente a competidores más débiles, Japón y Alemania, por ejemplo.

Romer considera que el stock global de capital humano es fijo, porque este stock de capital humano está encarnado en la población, cuyo tamaño es constante. Sin embargo, su modelo se acomodaría bastante mal con un crecimiento del capital humano, que, (sin otra modificación) generaría un crecimiento explosivo. En este caso, el crecimiento observado del capital humano en el transcurso del tiempo en los países del norte del planeta debería llevar a una aceleración tendenciosa del crecimiento económico. Parece que no se observó en el siglo XX tal fenómeno. Algunos mecanismos fundamentales del crecimiento están, pues, ausentes en este modelo de Romer.

- 2) Es tan acumulativo el cambio técnico que los bienes intermediarios quedan en actividad aun después del descubrimiento de nuevos bienes. El número de bienes aumenta sin cesar y la parte de cada uno en el capital tiende hacia 0. Lo anterior constituye una diferencia notable entre los dos modelos de Romer, visto que en el primero una subvención a la inversión permitía aumentar la tasa de crecimiento en actividad aún después del descubrimiento de nuevos bienes. El aspecto schumpeteriano de “destrucción y creación” no está presente en el modelo; ahora bien, la innovación es destructiva, en el sentido que causa la caducidad de las técnicas de producción, los procedimientos y los productos previamente producidos.

En cambio, ese aspecto será retomado en el modelo de Aghion y Howitt que analizaremos a continuación.

### **3.5 MODELO DE AGHION Y HOWITT (1990)**

Aghion y Howitt proponen un modelo de crecimiento y de innovación que tiene tres sectores: investigación, bien intermedio y bien de consumo. En este modelo, el número de bienes intermediarios es fijo, el progreso técnico consiste en inventar un nuevo bien intermedio para remplazar al viejo bien intermedio. La innovación pone en tela de juicio la renta de monopolio del productor del viejo bien intermedio, pero esa misma innovación da

pauta a un alza de productividad para el conjunto de la economía y para los periodos futuros. La externalidad tecnológica es pues, esencialmente intertemporal.

Esta pérdida que sufre el productor del bien intermedio viejo en este modelo, cuando un innovador toma su lugar, constituye una externalidad negativa de la innovación. Esta innovación presenta pues un aspecto destructor.

El crecimiento proviene de la innovación. La innovación es permitida por la acumulación del conocimiento. La función de producción del bien final es extremadamente simple:

$$Y = AF(X) \quad F' > 0 \quad F'' < 0$$

Donde:

X es el monto de bienes de producción utilizado en el sector del bien de consumo.

Cada innovación en el sector de los bienes de producción mejora la productividad en el sector del bien de consumo de un factor  $\gamma$ . Así, al cabo de t innovaciones:

$$A_t = A_0 \gamma^t$$

El bien de producción (que aquí es único pero es posible pasar a una configuración multisectorial) es producido por un monopolio que enfrenta una curva de demanda que es de la forma:

$$P_t = AF'(X_t)$$

Maximizando entonces su beneficio:

$$[A_t F'(X_t) - W_t] X_t$$

Con W que representa la tasa salarial. Al poner  $w_t = \frac{W_t}{A_t}$ , la condición de maximización se escribe:

$$\tilde{w}_t = F'(X_t) + X_t F''(X_t)$$

En donde, se puede sacar el monto del bien intermedio que corresponde a la i-ésima innovación que entrará en la producción del bien final:

$$X_t = \tilde{w}^{-1}(w_t)$$

El beneficio del monopolio se escribe de la siguiente manera:

$$\Pi_t = A_t \tilde{\Pi}(w_t)$$

Las innovaciones se dan en un momento preciso del tiempo, y su ocurrencia está en función de una ley de poisson con una tasa  $\lambda\phi(z, s)$ , en la que  $z$  representa el monto de trabajo calificado y dedicado a la investigación y  $s$  es el monto de trabajo especializado. El tiempo que pasa entre dos innovaciones es, pues una variable aleatoria.

El objetivo de la firma es de maximizar:

$$\lambda\phi(z, s)v_{t+1} - w_t z - w_t^s s$$

$v_{t+1}$  es el valor de la  $t+1$  i-ésima innovación,  $R$  es el trabajo especializado disponible en la economía que es dedicado a la investigación.

Al poner:

$$\phi(n_t) \equiv \phi(n_t R) [\phi(0) = 0, \phi' > 0, \phi'' < 0]$$

La condición de maximización para  $n_t \neq 0$  se puede escribir:

$$\lambda\phi'(n_t)v_{t+1} - W_t = 0$$

El valor de la  $t+1$  iésima innovación depende del beneficio que realizará la firma monopolista que comercializará el bien intermediario correspondiente y de la duración probable del intervalo de tiempo en donde se podrá ejercer el monopolio:

$$v_{t+1} = \frac{\Pi_{t+1}}{\Gamma + \lambda\phi(n_{t+1})}$$

Se puede, entonces, deducir una relación que iguala el costo marginal de la investigación ( $I$ , que es el miembro izquierdo de la ecuación) a su beneficio marginal (parte derecha de la ecuación):

$$\frac{\tilde{w}(N - n_t)}{\lambda\phi'(n_t)} = \frac{\lambda\tilde{\Pi}(N - n_{t+1})}{\Gamma} + \lambda\phi(n_{t+1})$$

Esta relación hace que el monto de recursos dedicados al descubrimiento de la  $t$ -ésima innovación,  $n_t$ , dependiese del monto de recursos que será dedicado a la  $t+1$  iésima innovación,  $n_{t+1}$ . La relación dinámica debe, pues, leerse como:

$$n_t = \psi(n_{t+1})$$

El productor de los bienes intermedios que comercializa la t-ésima innovación toma en cuenta, mediante  $\eta_{t+1}$ , la probable innovación que se va a dar y que significará para él, el fin de su monopolio y la desaparición de sus beneficios. El beneficio marginal de la investigación para la t-ésima innovación depende negativamente de  $n_{t+1}$ , el monto de investigación que se dedicará a la t+1-ésima innovación implicará un incremento en los recursos dedicados a este rubro y, causará al mismo tiempo que aumenten los salarios y disminuya la esperanza de vida de t-ésima innovación.

### *SOLUCIÓN*

El modelo de Aghion y de Howitt puede admitir tres tipos de solución:

- 1) Existe un punto fijo:

$$\hat{n} = \psi(\hat{n})$$

Donde un monto constante de recursos es asignado a la investigación. En este contexto, considerando la naturaleza estocástica de la innovación, el Producto Interno Bruto sigue una marcha aleatoria alrededor de una tendencia.

- 2) Como el monto de investigación asignado para una innovación depende negativamente del monto que será destinado para la innovación siguiente, el efecto desalentador de una  $n$  elevada para el periodo siguiente puede, en algunas configuraciones, desalentar completamente las investigaciones. En tal caso la economía conoce un crecimiento nulo, lo que Aghion y Howitt llaman un "no growth trap".
- 3) En un caso frontera entre los dos precedentes, la economía puede también conocer un ciclo con dos periodos, alternando un fuerte monto de recursos dedicado a la investigación con un monto más débil. En este último caso, es la perspectiva de una  $n$  elevada en el periodo siguiente que desalienta la asignación a investigaciones importantes, mientras que el efecto inverso juega para el periodo precedente.

En este modelo, el monto de recursos dedicados a la investigación depende negativamente de la tasa de interés, positivamente del tamaño  $\gamma$  de las innovaciones y del parámetro  $\lambda$  de llegada de las tecnologías, y, al igual que en el segundo modelo de Romer, positivamente del número de trabajadores calificados que pueden ser empleados en el sector de la investigación. Tanto en este modelo como en el segundo de Romer, la eventualidad de un aumento de la población de los trabajadores calificados no es contemplada. En efecto, se puede esperar que un aumento regular del tamaño del capital humano conduzca a un crecimiento explosivo.

Al igual que en los otros modelos de crecimiento endógeno, la presencia de externalidades no son de la misma naturaleza que en el segundo modelo de Romer. Sobre todo, no hay externalidades positivas instantánea de la investigación, es decir, no hay spillovers de la investigación en un periodo dado, la llegada de las innovaciones siguen una ley de Poisson.



Las consideraciones de Romer sobre el carácter exclusivo o no de la investigación, están pues, ausentes en este modelo. En cambio, la externalidad intertemporal subsiste, pues cada innovador mejora el nivel de productividad para siempre.

La diferencia, la más importante con respecto al segundo modelo de Romer, es que los mecanismos descentralizados pueden también conducir a un ritmo de innovación inferior de óptimo social (igual como se vio con Romer).

La tasa de crecimiento de la economía será inferior o superior al óptimo social según los casos. En cambio, los modelos en donde la innovación aumenta (o hace que aumente) la gama de los productos disponibles, con la presencia de externalidades positivas instantáneas de la investigación, conducen siempre a un ritmo de innovación inferior en el óptimo en el caso del equilibrio de mercado.

### 3.6 MODELO DE GUELLEC Y RALLE (1991)

En los modelos precedentes la innovación se presentaba en el sector de los bienes de producción, resultando en un aumento de la productividad. En el modelo que a continuación analizaremos la innovación del producto se da en el sector de los bienes de consumo. La idea inicial es que los consumidores tienen un gusto por la diversidad, es decir, su felicidad aumenta más con el número de productos diferentes que consumen que con la cantidad de cada uno. Para cada uno de los individuos, su función de utilidad se puede escribir:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \left( \sum_{i=0}^m c_{it}^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right]$$

Los parámetros  $\theta$  representan la inversa del gasto para la diversificación, y,  $\rho$  es la preferencia por el presente.

Este modelo está representado en tiempo discreto, mientras los modelos anteriores eran presentados en tiempo continuo. Esta nueva forma de presentar este modelo no cambia su funcionamiento ni tampoco el sentido de sus resultados.

Los bienes son producidos según una tecnología idéntica y con una productividad que se supone por cuestión de simplicidad constante en el transcurso del tiempo. El único factor de producción considerado es el trabajo. La invención de nuevos bienes requiere un costo de I-D, es decir, una cierta cantidad de trabajo, y eso se hace según una especificación idéntica a la que hizo Romer en 1990:

$$n_t - n_{t+1} = \left( \frac{\tilde{I}_t}{\gamma} \right) n_{t-1}$$

En donde:  $\tilde{I}_t$  representa el número de trabajadores incorporados a la investigación.

El proceso de crecimiento en tal contexto consiste en un aumento del número de bienes diferentes disponibles,  $n$ , que es la variable tecnológica acumulada.

El financiamiento de los gastos de I-D es asegurado por el ahorro de los individuos, que es prestado a las empresas innovadoras. Esas empresas innovadoras venden sus descubrimientos a las empresas que producen bienes. Es de esta manera que las empresas innovadoras pagan su deuda a los ahorradores. Una hipótesis esencial del modelo es que las empresas tienen la exclusividad sobre el patente que compraron, por un sólo periodo, después de ese periodo, el descubrimiento pasa al dominio común. Como consecuencia, a cada instante coexisten en el mercado 2 tipos de bienes: por un lado, están los nuevos bienes que son monopolizados cada uno por una empresa que puede fijar un precio que le asegura una renta y el reembolso del costo de la invención, de otra parte, los viejos bienes que son competitivos y cuyo precio es igual al costo marginal. La renta relacionada con la innovación es temporaria, lo que acerca a éste modelo a la visión schumpeteriana y lo aleja del modelo de Romer (1990).

Y esa característica temporaria no se deriva del reemplazo del bien por otro bien mejor perfeccionado, como sucede en el modelo de Aghion y Howitt (1990), sino más bien, viene del mecanismo de imitación, que también invocó Schumpeter.

La tasa de crecimiento del número de bienes se encuentra en equilibrio competitivo:

$$\frac{n_t - n_{t+1}}{n_t} = \frac{1 - \rho}{1 + \rho\theta} \left[ \frac{L}{\gamma} - \frac{(1 + \rho)\theta^{-\theta}}{1 - \theta} \right]$$

La tasa de crecimiento es tanto más elevada en cuanto que la preferencia de los consumidores por la diversidad ( $1-\theta$ ) es grande, son tanto más dispuestos para pagar un precio alto en cambio de un número mayor de bienes. La tasa de crecimiento varía inversamente respecto a su preferencia por el presente: pues, la preferencia supedita a la tasa de ahorro, el cual determina los recursos que se invierten en la investigación.

En fin, la tasa de crecimiento depende también del tamaño de la economía, representada por la población  $L$ . Al igual que la mayoría de los modelos de crecimiento endógeno, aquí, son las economías de escala (la I-D es un costo fijo) las importantes. En caso de un  $L$  demasiado pequeño puede existir un equilibrio con crecimiento nulo.

En este modelo, al igual que el modelo de Romer (1990), se observa que la tasa de crecimiento en equilibrio es inferior a la tasa de crecimiento óptimo. Una razón es por la externalidad intertemporal sobre el conocimiento (los bienes inventados hoy aumentan el número de invenciones en el futuro) que no está tomado en cuenta por las empresas; otra

razón, tiene que ver con el sistema de propiedad intelectual. El tiempo limitado a un solo periodo para las patentes, implica que los consumidores deben pagar hoy un descubrimiento que los beneficiará en diferentes periodos futuros (el uso de antiguas técnicas es gratuito tanto en la actividad de producción, como en la actividad científica).

### **3.7 MODELO DE LUCAS (1988)**

Un individuo dedica muchos años de su vida a la escuela, con el fin de obtener capacidades que le permitan mejorar su capacidad productiva. La decisión de invertir en la educación se basa sobre una comparación entre los costos de la enseñanza (ingresos sacrificados, gastos de escolaridad, etc.) y las ventajas futuras de una escolaridad más avanzada. Por consiguiente, se puede considerar la escolaridad como una decisión de inversión que tiene como fin aumentar el capital humano de una persona.

Los diversos programas de formación tienen un fin similar. Las empresas invierten de manera directa e indirecta en los recursos en mano de obra. Este tipo de inversión tiene como fin ofrecer a los trabajadores capacidades que son particularmente útiles a la empresa, también cabe recalcar que algunas de esas capacidades pueden ser útiles para otros empleadores.

De manera global, el capital humano puede ser definido como la suma de las capacidades habiendo una eficiencia productiva incorporada a los individuos o a las colectividades. Esas capacidades pueden ser diversas: salud, fuerza física, conocimientos generales o técnicos. El capital humano tiene una doble característica: de un lado, de ser de información, del saber (como la tecnología) y del otro lado, de ser apropiable por los individuos (como el capital físico). Siendo del saber, es producido esencialmente consigo mismo, los alumnos son formados por los profesores y aquellos utilizan sus conocimientos presentes para adquirir nuevos conocimientos. Esto hace que el capital humano se aparenta al conocimiento técnico y las reglas de acumulación con rendimientos de escala dinámicas le pueden ser aplicadas, además genera un proceso de crecimiento endógeno.

En 1988, Lucas privilegió al capital humano sobre la tecnología como factor de crecimiento. Según Lucas, la tecnología es un bien público accesible de manera idéntica a todas las naciones, además, no puede explicar las diferencias internacionales de nivel y de la tasa de crecimiento del ingreso. En cambio, el capital humano es incorporado a los individuos y por su naturaleza es apropiable.

Esa característica del capital humano de ser la propiedad del individuo que le posee permite un acercamiento a la problemática neoclásica, es decir, los procedimientos estándares del cálculo individual se pueden aplicar sin restricción (el factor acumulado no es un bien público).

A continuación presentaremos de manera formal el Modelo de Lucas (1988).

## PRESENTACIÓN FORMAL

La acumulación de capital humano per capita (por individuo) obedece a la siguiente ley:

$$h^0 = \sigma(1 - \nu)h \quad (1)$$

$\nu$  es el tiempo que el individuo dedica a la producción del bien final;  $(1-\nu)$  es el tiempo que el individuo dedica a estudiar la acumulación de capacidades;  $h$  es el capital humano del individuo.

La ecuación (1) supone que en la producción de capital humano se emplea el capital humano como único factor acumulado, además, existen rendimientos constantes a escala.

La elección de la variable acumulada tiene consecuencias importantes sobre los comportamientos de los agentes. Por ejemplo cuando la tecnología es el factor acumulado, la externalidad es tanto intertemporal como interindividual, mientras que cuando es el capital humano, la externalidad es puramente intertemporal y, por lo tanto, es tomada en cuenta por el individuo en su comportamiento de acumulación.

En cuanto a la función de producción, Lucas (1988) parte de una función de producción Cobb-Douglas del siguiente tipo:

$$Q = AK^\beta (uh)^{1-\beta} h_a^\gamma \quad (2)$$

Donde:  $K$  es el capital físico;  $h_a$  es el nivel promedio de capital humano del conjunto de los individuos.

En esta ecuación (2) lo que hace Lucas es recoger una externalidad del nivel promedio de capital humano ( $h_a$ ). Está claro de que la presencia de  $h_a$  presenta rendimientos crecientes. Cabe recalcar que la presencia de  $h_a$  no es necesaria para generar crecimiento endógeno.

En cuanto a la acumulación del capital físico Lucas supone que todo que no ha sido consumido es ahorrado y dedicado a la inversión, es decir:

$$K^0 = Q - C \quad (3)$$

Donde:  $C$  es el consumo.

La función de utilidad intertemporal es:

$$u(c) = e^{-\rho\tau} \left( \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta} \right) d\tau \quad (4)$$

La función (4) tiene elasticidad de sustitución intertemporal constante.

Una ruta óptima es definida por los valores de  $K$ ,  $h$ ,  $C$  y  $u$  que son soluciones del programa de maximización. Esas variables son del dominio de los agentes y los escogen en función de una ruta dada de  $h_a$ . Cuando  $h$  coincide con  $h_a$ , el sistema está en equilibrio, es decir, cuando el comportamiento anticipado y el comportamiento real son idénticos.

La resolución del modelo nos proporciona la tasa de crecimiento del capital humano de equilibrio ( $V$ ) y la tasa de crecimiento del capital humano óptimo ( $V^*$ ).

$$V = \frac{(1-\beta)(\delta-\rho)}{\sigma(1-\beta+\gamma)-\gamma} \quad (5)$$

$$V^* = \frac{(1-\beta)(\delta-\rho)+\delta\gamma}{\sigma(1-\beta+\gamma)} \quad (6)$$

Y las tasas de crecimiento del producto, del capital físico y del consumo per capita son iguales.

$$g = \left( \frac{1+\gamma}{1-\beta} \right) V \quad (7)$$

$$g^* = \left( \frac{1+\gamma}{1-\beta} \right) V^* \quad (8)$$

A medida que  $\delta$  (la eficiencia de la inversión en capital humano) es elevada, el crecimiento se dará más rápidamente. La tasa de crecimiento óptimo es más grande que la tasa de crecimiento de equilibrio. Dicha diferencia aumenta con la externalidad ( $\gamma$ ). La presencia de dicha externalidad implica una progresión más rápida del capital frente a la progresión del capital humano.

### 3.8 REPOPOLIACIÓN DE ALGUNAS CRÍTICAS A LOS MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO

- En cuanto que se modifiquen algunas hipótesis, los modelos de crecimiento generan un crecimiento “explosivo”. Este es particularmente claro en el modelo de Romer(1986), que proporciona un crecimiento a tasa constante bajo hipótesis muy restrictiva. Grosso modo, la robustez de los modelos de crecimiento endógeno deja mucho que desear. Esa explosión es una manifestación de una inestabilidad estructural inherente a los modelos.
- La hipótesis del modelo de crecimiento endógeno son muy rígidas. En primer lugar, hay una ausencia de los mecanismos amortiguadores de los efectos econométricos de los rendimientos crecientes de escala; además falta considerar la calidad de las innovaciones y los diferentes nexos que existen entre ellas, es decir, los modelos no han tomado en cuenta la dinámica tecnológica.

- De manera general, la formalización del proceso de acumulación tal como se genera en los modelos de crecimiento endógeno se basa sobre una idea simple: los nuevos conocimientos nacen de los antiguos conocimientos, a una tasa que depende únicamente de los recursos asignados a la investigación. Por lo más fundamentada que pueda ser esa idea, es muy limitada y necesitaría ser complementada por algunos trabajos llevados a cabo por los historiadores de la técnica.
- El análisis de las fuentes del crecimiento choca con grandes dificultades metodológicas y estadísticas temibles. Por ejemplo, el progreso técnico y el capital humano encuentran grandes problemas de medición, lo que hace difícil comprobar los resultados teóricos de las teorías de crecimiento endógeno. Además, hasta donde sabemos la contabilidad nacional no toma en cuenta (salvo para algunos países desarrollados y eso a partir de años recientes) esas inversiones en I-D. Todo lo anterior nos lleva a pensar sobre lo difícil que es pronunciarse sobre la pertenencia de las nuevas teorías de crecimiento, y eso a pesar de lo atractivo que es en un término intelectual.
- Frente a esos grandes problemas, la falta de trabajos empíricos rigurosos capaces de permitir analizar los modelos de la teoría del crecimiento económico endógeno: ¿Es válido decir que hay un aumento de la productividad de la I-D cuando se asignaron mayores gastos a esas inversiones?. Existe también la posibilidad de un umbral, por arriba del cual la productividad de la I-D puede estancarse e incluso decrecer.
- ¿Es válido afirmar –como lo hace Howitt- que el uso de conocimientos supone necesariamente rendimientos crecientes de escala? En efecto, para comercializar nuevas gamas de productos fabricados gracias a la inversión en I-D que hace una empresa, éste, sin lugar a dudas debe dotar su planta de equipos con nueva concepción o reciclar a su mano de obra, porque los nuevos productos van a estar asociados a nuevas técnicas y esas asociadas a equipos físicos diferentes y una mano de obra con nuevas calificaciones. Aún cuando esos gastos de lanzamientos no se repiten cuando la empresa contempla seguir fabricando los nuevos productos, no logramos observar en donde aparecen los rendimientos crecientes de escala. Hasta donde entendemos, según Kaldor, la medida en la cual la tecnología es fuente de rendimientos crecientes de escala en el sentido que lo analizan Smith y Young depende de la tasa de expansión de la demanda global.

Una crítica valiosa en este sentido es la del Prof. Thomas K. Reynes de la Universidad de Carleton hacia el Prof. Peter Howitt de la Universidad Western Ontario.

“...Considerando que existe un teoría del ritmo de expansión de la demanda global, el fantasma de Keynes vuela ciertamente por encima de los modelos neoclásicos de crecimiento endógeno del profesor Howitt. La tasa de expansión de la demanda global será determinante en lo que concierne el ritmo al cual se producirán los rendimientos crecientes o el ritmo que aparecerán los progresos técnicos. Se trata de una teoría del crecimiento endógeno en la cual el profesor Howitt no

profundiza, visto que elige ver las cosas únicamente del lado de la oferta.”

En términos de consejos para la política podemos decir que:

- En lo que atañe a la política fiscal: un agravamiento de la contribución del capital, al reducir el rendimiento del capital. Si se considera que los gastos públicos tienen una estabilidad más baja que los gastos privados (consumo, inversión), la tributación que financia esos gastos públicos conduce a una baja del poder de compra y a pérdidas de bienestar. Sin embargo, si el nivel de capital per capita es bajo, la tasa de crecimiento de la economía no está afectada.

A falta de coincidencia entre el óptimo social y el equilibrio competitivo en los modelos de crecimiento endógeno, se legitima una intervención del Estado. Los gastos públicos podrían ser, en materia de infraestructuras, en educación, en bienes públicos y en investigación, etc., es decir, cualquier medida que pueda contribuir a mantener el ritmo de crecimiento en el largo plazo. Cabe aclarar que esos modelos no justifican toda clase de intervención política, pues consideran que algunas intervenciones públicas pueden conducir a una “trampa de pobreza”.

En efecto, si como lo acabamos de mencionar arriba, que algunos gastos públicos pueden tener un efecto positivo sobre el crecimiento para la teoría de crecimiento endógeno, eso no resuelve la cuestión relativa en cuanto al nivel óptimo de esos gastos. Recuérdese que Barro(1989) en su modelo contraste en corte transversal sobre 98 países la relación entre la participación de los gastos públicos de diferentes tipos en el PIB y tasa de crecimiento del PIB. En lo que concierne a los gastos de consumo, el coeficiente es significativamente negativo, es decir, hay una relación negativa entre gasto público de consumo y crecimiento y es imposible pronosticar sobre el impacto de los gastos públicos de inversión sobre el crecimiento.

Otro modelo de crecimiento endógeno que menciona el efecto negativo de la fiscalidad sobre el crecimiento es el de King y Rebelo(1990). Al estudiar para el caso de USA los efectos de pasar de un nivel de imposición del 20% al 30% del PIB sobre el crecimiento al tomar como referencia tanto el modelo neoclásico como el modelo endógeno: concluye diciendo que en el marco neoclásico las pérdidas de bienestar aparecen relativamente limitadas y solamente el nivel de capital pro capital esta afectado y no la tasa de crecimiento. En cambio, en el modelo de crecimiento endógeno la tasa de crecimiento pasa de 2% a 0.4%, es decir las pérdidas de bienestar son considerables.

Grosso modo, podemos decir que en términos de gastos públicos, las teorías de crecimiento endógeno: 1) legitiman el principio de una intervención pública limitada y 2) nos hacen ver que esa intervención: ya sea que sea excesiva o sea que ha sido financiada de manera inadecuada lleva inevitablemente a la reducción del crecimiento.

- En lo que concierne a las políticas de estabilización (por ejemplo de acción por la demanda):

La teoría de crecimiento endógena no constituye un marco apropiado para recomendar medidas a seguir, pues su formulación privilegia por una parte el largo plazo y por otra parte los factores de oferta, tradicionales o nuevos. Sin embargo, cabe mencionar que algunos estudios recientes pusieron en evidencia diversas interacciones entre las fluctuaciones coyunturales y el crecimiento<sup>17</sup>.

➤ En lo que atañe a políticas sobre empleo:

Al igual que la mayoría de las teorías sobre el crecimiento, la teoría de crecimiento endógeno se basa esencialmente sobre modelos en donde por hipótesis hay pleno empleo. Por lo consiguiente, de manera general, no puede contribuir a reflexionar sobre el desempleo.

Solamente algunos modelos integran una visión del desempleo. Por ejemplo, Aghion y Howitt mencionan un conjunto de condiciones sobre los parámetros del modelo bajo las cuales el crecimiento tiene un efecto negativo sobre la tasa de desempleo. Sin embargo, es difícil resolver ese problema empíricamente.

➤ En lo que atañe a la relación entre el comercio internacional y el crecimiento económico, la teoría de crecimiento endógena creó algunos modelos que explican el nexo que se observa.

Los principales estudios que sustentan esos modelos son<sup>18</sup>:

- 1) Los estudios que ilustran la existencia de una correlación entre las exportaciones y el crecimiento económico. Esos estudios se basan en Michaely (1997) y Balassa (1982) y Feder (1983).
- 2) Los estudios que relacionan la liberalización de los intercambios y el crecimiento económico. Esos estudios se llevan a cabo bajo la influencia del Banco Mundial. El trabajo más importante es el de Choski, Michaely y Papageorgiou (1991).
- 3) Los estudios que relacionan el comercio Internacional, la apertura de los mercados con el crecimiento económico. El estudio más importante es el de Levine y Renelt (1992).

---

<sup>17</sup> Ver por ejemplo los análisis sobre “ciclos reales” : Hairault J.O.,(1992) “Presentation et evaluation du courant des cycles reels”, Economie et prevision, 106, p.1-22. Y los análisis sobre “tendencias comunes”: Bec F., Hairault J.O.(1993), “Une etude empirique des sources de fluctuations economiques danole cadre d’un modele a tendances communes”, annales d’economie y de estadistica

<sup>18</sup> Esa parte se basa fundamentalmente en Harris Richard (1995) es “Preuve Empirique Et Debat sur l’Integration Economique Et la Croissance Economique.” In Peter Howitt “La Croissance Fondee Sur Le Savoir Et Son Incidence Sur Les Politiques Microeconomiques”.

Michaely, M., “Exports and Growth: an empirical investigation”, journal of Development Economics, 1, (1993), p. 49-53.

Feder, G., “On esports and economic Growth”, gournal of Development Economics, (1989), pag. 59-73.

Choski, A., Michaely, M., y Papageorgiou, Trade Liberalization episo des, Oxford: Brasil Blackwell, 1991.

Levine, Ross y David Renelt, “ A Sensitivity Analysis of Cross-Country Growth Regressions”, American Economic Review, 82, (1992) p. 942-963.



Una de las principales dificultades con que chocan esos modelos en sus análisis econométricos es que hay pocas incitaciones sobre la causalidad que existe entre la liberalización del comercio y el crecimiento económico.

➤ En lo que atañe a políticas financieras.

La teoría de crecimiento endógena ha permitido estudiar a través de sus modelos las dos relaciones causales entre el desarrollo financiero y el crecimiento económico. Por un lado, algunos modelos estudian como el crecimiento económico conduce a la sofisticación de los mercados financieros; por otro lado, otros modelos, partiendo de un sistema financiero dado tratan de entender como las mejoras en este sistema conducen al crecimiento.

Los modelos que ilustran los canales mediante los cuales el desarrollo financiero conduce al crecimiento económico se pueden esbozar de la siguiente manera:

1) Aquellos modelos que permiten una canalización de ahorros a las empresas (inversión productiva).

El modelo de Roubini y Sala-I-Martin (1992) estudia ese tipo de efectos; el desarrollo del sector financiero se entiende como una disminución en los gastos de transacción, lo que conduce a reducir el monto de ahorros que se asignan a actividades de intermediación.

2) Aquellos modelos que permiten modificaciones en la productividad marginal social del capital.

En esos modelos se estudia como los intermediarios financieros pueden de manera eficiente asignar los recursos. La recolección de información por parte de los intermediarios les permite evaluar con mejores criterios los proyectos. Además, el proceso de diversificación llevado a cabo por estos intermediarios incita a los agentes a invertir más en proyectos rentables aunque estos proyectos sean muy riesgosos.

Algunos de los modelos que estudian estos tipos de efectos son:

- El modelo de Bencivenga y Smith (1991), en el cual se analiza como el banco es un canal que permite la asignación de mayores ahorros a inversiones productivas.
- El modelo de Saint-Paul (1992) que explica el mecanismo por el cual los mercados mejoran la eficiencia en la asignación de recursos.
- El modelo de Levine (1991), en el cual se analiza como la diversificación accionaria genera efectos positivos, en el sentido de que permite eliminar riesgos de liquidez y diversificar los riesgos de perturbaciones a la productividad específica de las empresas.

- 3) Aquellos modelos que permiten cambios en la tasa de ahorro.(Ver el modelo de Japelli y Pagano,1992).

A pesar del gran número de escritos que encontramos sobre este tema, aún no hay indicaciones muy claras sobre cómo el desarrollo financiero afecta el crecimiento económico. Además, cabe recalcar que en los diversos modelos mencionados arriba, aún no hay un entendimiento más o menos común entre los economistas, en cuanto a la definición del desarrollo financiero. Por ello, en términos de política financiera, la teoría de crecimiento endógeno aún no puede aportar mucho.

### **CONSIDERACIONES FINALES**

A manera de presentar las consideraciones correspondientes, se exponen algunas ventajas de la teoría del crecimiento endógeno sobre la teoría del crecimiento exógeno:

- 1) En los modelos exógenos, el progreso técnico exógeno constituye en el estado estacionario el único factor que en última instancia determina el crecimiento económico. A esa visión que focaliza la fuente del crecimiento fuera del campo económico, las nuevas teorías colocan sus modelos en un marco más amplio, más rico, y más realista al concentrarse sobre las fuentes (factores) económicas efectivas del crecimiento. Esas fuentes son, como ya los hemos visto en este libro:
  - Rendimientos de escala constantes o crecientes en la inversión que se derivan de externalidades o de complementariedad entre firmas.
  - El saber técnico o científico derivado de la I-D.
  - El capital humano.
  - Las infraestructuras públicas, redes, etc.
- 2) La segunda ventaja se deriva de la primera. Son subóptimos los mecanismos de mercado, eso a raíz del papel clave de las externalidades y de los bienes públicos. La suboptimalidad justifica la intervención de instituciones que se encuentran fuera del mercado, tales instituciones permite acercar el equilibrio competitivo al óptimo social.
- 3) La tercera ventaja tiene que ver con la dinámica del crecimiento. Los modelos de crecimiento neoclásico se concentran sobre el estudio del crecimiento equilibrado, al suponer fijas las relaciones entre ciertas variables. Ese marco es muy restringido y genera problemas de robustez; por su parte los modelos de crecimiento endógeno, al considerar la existencia de rendimientos de escala creciente y de externalidades, permiten por un lado considerar casos de equilibrios múltiples<sup>19</sup> y en algunas medidas reconsiderar un hecho importante, a saber que “cuenta la historia” y, por otro lado, considerar los trabajos llevado a cabo alrededor de la *path dependence* de algunos

---

<sup>19</sup> Ver: Murphy K., Shleifer A., Vishny R. (1989) “Industrialization and The Big Push”, *Journal of Political Economy*, 97(5), 1003-1026; King M. Et Robson (1989), “Endogenous Growth and the role of History “ Trabajo presentado en la conferencia sobre “Inestabilite el Persistence”, Paris, 4-6 Enero de 1990 y que citamos aparte del trabajo de Patrick Artus(IBID).

autores<sup>20</sup>. En esos trabajos, el equilibrio de un sistema depende del camino recorrido en el pasado.

- 4) La cuarta y última ventaja es que dicha dinámica, mucho más rica en comparación a los modelos de crecimiento exógenos, permite reconsiderar en el análisis económico campos que habían sido olvidados por la teoría de crecimiento exógeno. Esos campos son: la demografía, el comercio internacional, las políticas públicas de oferta, la geografía económica, las finanzas y la teoría de los ciclos.

## BIBLIOGRAFÍA

- Abraham-Frois, G. (1995), "Dynamique Economique" 8 Ed. Editions Dalloz.
- Adelman, I. (1965), "Teorías del Desarrollo Económico", Fondo de Cultura Económica, México.
- Aghion, P., Howitt, P. (1998), "Endogenous Growth Theory", MIT.
- Amable, B. (1991), "Economies d'échelles dynamiques, effet d'apprentissage et progrès technique endogène", Revue l'IRES no 1, pp. 31-51.
- Amable B., Guellec, D. (1992), "Les Théories de la Croissance Endogène", Revue Economie Politique. 102, pp.312-377
- Argandoña, A. Gamez C. Mochon F. (1997), "Macroeconomía Avanzada II", Mc-Graw Hill.
- Artus Patrick et Moncef, Kaabi, "Dépenses publiques, Progrès Technique et Croissance", Revue Economique, Vol 44 no 1.3 Janvier-Mai 1993.
- Artus Patrick, "Croissance Endogène . Revue de Modèles Tentatives de Synthèse", Revue Economique, Vol 44 no 1.3 Janvier-Mai 1993
- Azariadis, Costas (1993), "Intertemporal macroeconomics", Blackwell.
- Azariadis, Costas y A. Drazen (1990), "Threshold externalities in economic development", Quarterly Journal of Economics, pp. 501-526.
- Barro, Roberto (1990), "Government Spending Simple Model of Endogenous Growth", Journal of Political Economy.
- Barro, Roberto y Sala-I-Martin, Xavier (1995), "Economy Growth", Mc-Graw Hill, Madrid.
- Bernstein, Jeffrey I. (1994), "Débordements transfrontaliers de R-D entre les industries du Canada et des États-Unis", Université Carleton et National Bureau of Economic Research, dans le cadre d'un contrat avec Industrie Canada.
- Bernstein, Jeffrey I. (1998), "Retombées de la R-D entre industries et en provenance des États-Unis, production industrielle et croissance de la productivité au Canada", Université de Carleton et National Bureau of Economic Research, dans le cadre d'un contrat avec Industrie Canada.

---

<sup>20</sup> Ver: Arthur B., Ermoliev Y.M Et Kaniovski.Y.M (1987), "Path dependence processes and the emergence of macro-structure", European Journal of operational Research, 30, 294-303. Citado por Patrick Artus (IBID).

Bernstein, Jeffrey I. (1996), "R-D et croissance de la productivité dans le secteur manufacturier et l'industrie du matériel de communications au Canada", Université de Carleton et National Bureau of Economic Research, dans le cadre d'un contrat avec Industrie Canada.

Bruno

Coe, David y Elhanan Helpman (1995), "International R&D Spillovers", *European Economic Review*, Vol. 39, pp. 859-887.

D'Autume, A. Philippe M. "Hystérésis et Piège du sous-développement dans un modèle de croissance endogène"

Ferreira, Jaime P. (1995), "Modelos Macroeconómicos de Crecimiento", Universidad Autónoma Metropolitana, México.

Fortin, Pierre (1995), "Innovation endogène et croissance: conséquences du point de vue canadien", Université du Québec à Montréal et Institut canadien de recherches avancées, et Elhanan Helpman. Université de Tel-Aviv et Institut canadien de recherches avancées, dans le cadre d'un contrat avec Industrie Canada.

G. Donald, McFetridge (1995), "Sciences et Technologie: perspectives sur le politiques publiques", Département d'économique, Université Carleton, dans le cadre d'un contrat avec Industrie Canada.

Galindo, Miguel Angel y Malgesini, Graciela (1994), "Crecimiento económico. Principales teorías desde Keynes, Ed. Mc-Graw Hill.

Gandolfo, Giancarlo (1991), "Economic Dynamics: Methods And Models", North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Gibbons, Michael (1995), "Technologie et économie: examen de certaines relations critiques", Université d'Sussex, dans le cadre d'un contrat avec Industrie Canada.

Grossman, Gene M. y Elhanan Helpman. (1994). "Endogenous Innovation in the Theory of Growth". *Journal of Economic Perspectives*. Vol. 8, p. 23-44.

Jones, Hywell (1988), "Introducción a las teorías modernas del crecimiento económico", Ed. Antoni Bosch.

Kumar, Vinod (1995), "Le role des consortiums de R-D dans le développement de la technologie". Research Centre for Technology Management, Université Carleton, et Sunder Magun, Centre de droit et de politique commerciale, Université d'Ottawa et Université Carleton, dans le cadre d'un contrat avec Industrie Canada.

Henin, P-Y. (1993). "Les Nouvelles Théories de la Croissance: quelques Apports pour la politique économique", *Revue Economique* vol.44.

Howitt, P. (1996) "La croissance fondée sur le savoir et son incidence sur les politiques économiques" University of Calgary Press.

Laos, E. E. (1985), "La Productividad y el Desarrollo Industrial en México", Fondo de Cultura Económica, México

Lordon, F. (1991). "Théories de la Croissance, Quelques développements récents, Observations et diagnostics économiques", no. 36, pp.159-211

Malinvaud, E. (1991) "Voies de la recherche macroéconomique" Ed. Odile Jacob, Février 1991.

R. Bencivenga, B. O. Smith, "Financial Intermediation and Endogenous Growth review of Economic Studies", *Review of Economic Studies*

Romer, David. (1996), "Advanced Macroeconomics", Mc-Graw Hill.

Romer, Paul (1986), "Increasing Returns and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, pp. 1002-1037.

Romer, Paul (1990), "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy*, 98, 5 parte II, pp. 571-5102.

Sala-I-Martin (1994), "Apuntes de Crecimiento Económico", Antoni Bosch.

Sen, Amartya K. (1979), "Economía del crecimiento", Fondo de Cultura Económica, 525 pp. (El Trimestre Económico. Lecturas, 28), México.

Solow, R. (1976), "La Teoría del Crecimiento", Fondo de Cultura Económica, México.

Surendra, Gera Industrie Canada y Mang, Kurt ministère des Finances (1997), "l'économie du savoir et l'évolution de la production industrielle".

Surendra, Gera; Wulong, Gu y Lee. Frank, C. (1998), "Progrès technique incorporé au capital et ralentissement de la croissance de la productivité au Canada", Direction de l'analyse de la politique micro-économique, Industrie Canada.