

**CURSO DE DOCTORADO EN ECONOMIA CUANTITATIVA**



**INTRODUCCION AL ANÁLISIS DE DATOS DIFUSOS**

**Antonio Morillas Raya**

**Departamento de Estadística y Econometría.  
Universidad de Málaga.**

## PROGRAMA

1. Introducción.
2. Conjuntos difusos.
3. Operaciones básicas con conjuntos difusos.
4. Otras operaciones.
5. El principio de extensión. Aplicaciones.
6. Números difusos.
  - 6.1. Intervalos y números difusos.
  - 6.2. Números difusos triangulares.
  - 6.3. Números difusos trapezoidales.
  - 6.4. Operaciones aritméticas con números difusos.
  - 6.5. Distancia entre dos números difusos.
  - 6.6. Ordenación lineal de números difusos.

#####

---

**Nota:** Estos apuntes han sido confeccionados a partir de las referencias bibliográficas citadas, así como de las notas de clase y documentos de trabajo de un curso impartido por L.A. Zadeh en la Universidad de California en Berkeley, en el año 1.993. En cualquier caso, soy el único responsable del mayor o menor acierto en el contenido del programa, así como de su exposición y de la presentación de algunos ejemplos.

## 1. Introducción.

Cuando se oye hablar por primera vez de la “lógica difusa” (*fuzzy logic*) o, incluso, para quienes han oído hablar algo sobre este tema, pero son profanos en la materia, se produce una inmediata tentación de hacer una pequeña gracia a costa de su propio nombre: debe ser algo “poco claro”, quizás “nada elaborado”; muy “borroso”, en definitiva. Estos son el tipo de comentarios que suelen hacerse. Sin embargo, la aparente contradicción interna de su propio nombre no ha sido un inconveniente para un amplísimo desarrollo teórico y una, más reciente, aplicación de la lógica difusa al campo de la ciencia, la tecnología e, incluso, al análisis empírico en las ciencias sociales. Y es que, como dice su impulsor, el profesor Lotfi A. Zadeh, “*there is nothing fuzzy in fuzzy logic*”. Por el contrario, hay un soporte matemático poderoso detrás de la misma.

Se ha señalado<sup>1</sup> que los antecedentes filosóficos pueden encontrarse en los trabajos de Bertrand Russell, Jan Lukasiewicz y Max Black, que ante las paradojas encontradas en la lógica tradicional, comenzaron a hablar de lógica multivalente y lógica continua, introduciendo, así, en la naturaleza blanco/negro (verdad/falso) de aquélla, las sombras de gris inherentes al mundo real. La idea de que cualquier afirmación lógica debe ser cierta o falsa, y ninguna otra cosa (ley del *medio excluído*), podía producir paradojas como la planteada por Russell<sup>2</sup>, y a pesar del intento de obviarlas introduciendo los “axiomas de la teoría de conjuntos” para generar fórmulas “bien definidas”, choca con la evidencia de que en la vida cotidiana son admisibles *grados* de verdad. Paradojas como la mencionada sólo podían ser resueltas en el contexto de la lógica continua. Posteriormente, Zadeh (1965) desarrolló la teoría de conjuntos multivaluados, ampliándola con el concepto de *cuantificador*, e introdujo el término *fuzzy* para denominar la *vaguedad*<sup>3</sup>, la falta de contornos bien definidos, de estas estructuras lógicas.

---

<sup>1</sup>Véase, Kosko, B.(1992):*Neural networks and fuzzy systems*. Prentice Hall. pp. 2-11.

<sup>2</sup>“El conjunto de todos los conjuntos no miembros de sí mismos es un miembro de sí mismo”. Si esta expresión es cierta, entonces sería falso; si es falsa, entonces sería verdad.

<sup>3</sup>Zadeh(1978;p. 395), distingue entre los términos *vague* y *fuzzy*. Por ejemplo, “Juan regresará en unos pocos minutos” sería *fuzzy* (impreciso, pero informativo), mientras que “Juan regresará alguna vez” sería *vague* (ambiguo, no informativo). En el primer caso hay información que puede servir de soporte para una decisión y en el segundo no. En español se les ha bautizado con el nombre de conjuntos *borrosos* o *difusos*. Algunas asociaciones de estudiosos del tema en nuestro país han preferido no dar ninguna

Por ejemplo, supongamos que hacemos la siguiente sentencia: “El Sahara es un desierto”. Evidentemente, la totalidad de la gente estaría de acuerdo en decir que eso es cierto. Supongamos que quitamos un grano de arena. Si volvemos a preguntar, se continuaría diciendo que es cierto. Si continuamos así, quitando grano a grano, y continuamos preguntando, llegaría un momento en que no habría más arena y el Sahara ya no sería un desierto. Si preguntamos ahora, la respuesta debiera ser que es falso. Pero, ¿en qué momento se produce, exactamente, el cambio del “sí” al “no”? Evidentemente, un desierto no deja de serlo cuando se le quita un particular grano de arena. Es más real afirmar que conforme el Sahara pierde arena, la afirmación de que es un desierto va haciéndose menos verdad y que al quitar el último grano, la verdad desaparece por completo. La lógica continua reconoce el hecho de que la realidad no tiene por qué ser sólo cierta o falsa, sino que puede haber *grados de verdad*. Dicho de otra forma, los elementos de un conjunto no tienen por qué estar completamente dentro o completamente fuera del mismo; es posible la pertenencia parcial, un *grado de pertenencia*, de un elemento a un conjunto dado.

Como se verá más adelante, la lógica tradicional queda incorporada como un caso particular de la lógica continua o difusa. En este sentido, podría decirse que la lógica difusa es una extensión de un sistema preciso de representación para incluir la vaguedad y la incertidumbre. La vaguedad ya no es el límite de la precisión sino, al contrario, ésta es el límite de aquélla<sup>4</sup>. Su aplicación se ha visto que es beneficiosa, e incluso necesaria, en varios campos (fundamentalmente relacionados con la ingeniería y la informática) entre los cuales pueden contemplarse los sistemas en que la vaguedad es bastante común, como podría ser el caso de la economía.

Este curso introductorio pretende hacer una primera aproximación al análisis de datos difusos, que concebido en términos amplios incluiría un conjunto de técnicas estadísticas cuya formulación en términos difusos sobrepasaría con creces los objetivos

---

traducción al término, llamándole lógica *fuzzy*. Probablemente, Zadeh está queriendo señalar una estructura “blanda”, “suave”, “ligera”, no rígida (*crispy*) en su definición, pero no por ello vaga o ambigua. Quizás, menos preocupado del análisis cuantitativo exacto y, por el contrario, más atento a la aceptación de la imprecisión en el mundo real, especialmente, en la percepción y el pensamiento humanos, y al cálculo “blando” (*soft computing*).

<sup>4</sup>Trías, E. (1.995; p.40).

del mismo. De cualquier forma, como nuestro interés se centra muy particularmente en el cálculo difuso, no habrá más que las referencias imprescindibles a la lógica difusa y no iremos mucho más allá de la aritmética difusa elemental y algunas otras cuestiones que nos puedan permitir la realización de algunas aplicaciones con interés para la economía y la empresa, en la línea del libro de Kaufmann y Gupta (1.988). Se trata, por tanto, de un primer paso en un proyecto de difusión de esta metodología entre los estudiosos de dichas materias, que confiamos poder ampliar en un futuro inmediato.

Como se sabe, el análisis de datos consiste en investigar un conjunto dado de datos, con el objeto de extraer conclusiones de la información recogida y evaluarla en forma adecuada. Podríamos decir que el análisis de datos consta de varias etapas de complejidad creciente:

1. En la primera etapa, que sería el **análisis de frecuencias**, se investigan los datos en relación a alguna característica o propiedad común. Es el punto de partida para evaluar la validez y fiabilidad de cada dato, detectar mediciones extrañas (por ejemplo, *outliers*), etc.
2. El segundo paso consiste en el **reconocimiento de formas o patrones** (*pattern cognition*), que consiste en buscar estructuras internas en los datos, con objeto de obtener información sobre las relaciones existentes entre ellos o para detectar posibles modelos matemáticos a los que pudieran obedecer. Estos dos primeros pasos forman lo que suele llamarse el **análisis exploratorio de datos**. Los datos se investigan sin referencia alguna a un modelo matemático predefinido.
3. En un tercer paso, los datos se investigan en relación a algún **modelo matemático** elegido previamente o de algunas hipótesis emitidas sobre la estructura de los datos. Los análisis pueden ser cualitativos o cuantitativos y podrían contemplarse técnicas que van desde el análisis *cluster* (técnicas de clasificación de datos, en general) a los métodos estadísticos de **regresión**.
4. Por último, el análisis de datos se ocupa de extraer conclusiones y de evaluarlas convenientemente. Generalmente, las conclusiones más demandadas toman la forma de una **predicción** acerca de datos perdidos o futuros.

Puede decirse que esta es una clasificación un tanto simplista, pero lo que realmente se persigue es poner de manifiesto que, en cualquiera de esos estadios, es posible encontrarse con *incertidumbres* de diferentes clases. Desde el primer momento de observación o medida de la característica de una variable que deseamos estudiar, hasta la aplicación de los métodos de análisis, podemos detectar fuentes de incertidumbre.

Una primera fuente de incertidumbre surge de la **variabilidad de los datos**. Es la propia naturaleza no determinista de los hechos sociales y naturales la que, afortunadamente, propicia tal variabilidad. Otra clase de incertidumbre es la **imprecisión** que surge al observar o medir los valores de una variable, tanto por parte del instrumento de medida, como por parte del observador que la realiza. Por último, la **vaguedad** aparece cuando se utiliza el lenguaje humano, sea o no profesional, para describir la observación o medida del resultado de un experimento como un dato. Esto es especialmente cierto cuando se trabaja con opiniones de expertos que se traducen en expresiones verbales que, posteriormente, han de ser tratadas como modalidades de una variable (variables lingüísticas).

Evidentemente, de entre las formas más conocidas para hacer frente al tratamiento de la incertidumbre está la teoría de la probabilidad. Hay quién, incluso, defiende que la lógica continua puede ser contemplada dentro de esta teoría. Sin embargo, hay, al menos, dos dificultades para considerar que eso puede ser así. En primer lugar, la probabilidad trata de la incertidumbre en la ocurrencia de sucesos *bien* definidos, mientras que la lógica continua trata del *grado de ocurrencia* de sucesos *mal* definidos. En segundo lugar, es un hecho matemático que la intersección de un conjunto con su complementario es siempre el conjunto vacío; por el contrario, trabajando con conjuntos difusos esto casi nunca sucede, como veremos más adelante<sup>5</sup>.

## 2. Conjuntos difusos.

Sabemos que un conjunto es una colección de objetos (elementos) bien especificados que poseen una propiedad común. Según su número de elementos, un conjunto decimos que es finito o infinito (numerable o no numerable). Un conjunto ordinario, recordemos, se puede definir de diversas formas:

- Por **enumeración** de los elementos que lo componen. Para un conjunto<sup>6</sup>  $E$  finito, de  $n$  elementos, tendríamos, por ejemplo, la siguiente representación:  $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , y para un conjunto infinito numerable, podríamos escribir:  $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ .
- Por descripción analítica de una **propiedad** que caracterice a todos los miembros del conjunto. Por ejemplo,  $A = \{x \mid x \leq 7\}$ .
- Usando la **función característica**, también llamada **función de pertenencia**, para definir sus elementos. Si llamamos  $m_A(x) \mid U \rightarrow \{0,1\}$  a dicha función de pertenencia, siendo  $U$  el conjunto universal, tendremos que,

$$m_A(x) = 1 \quad \text{si } x \in A$$

$$m_A(x) = 0 \quad \text{si } x \notin A$$

Así, un conjunto  $A$  está completamente definido por el conjunto de pares:

$$A = \{ (x, m_A(x)) : x \in U, m_A(x) \in \{0, 1\} \}$$

Es decir, si la función de pertenencia para un valor dado de  $x$  toma el valor 1, ese valor es un elemento del conjunto; si toma el valor cero, por el contrario, no pertenece al conjunto. Por ejemplo, si  $E = \{a, e, i, o, u\}$  es el conjunto de las vocales del alfabeto y  $A = \{a, i, u\}$  un subconjunto del mismo, podríamos representarlos en la siguiente forma:

---

<sup>5</sup>La exposición de una conexión explícita entre la teoría de la probabilidad y la teoría de conjuntos difusos, puede verse en Gil, M.A. (1993).

<sup>6</sup>En adelante, un conjunto clásico se representará mediante una letra mayúscula en negrita:  $\mathbf{A}$ , mientras que para un conjunto difuso emplearemos, simplemente, la correspondiente mayúscula:  $A$ .

$$\mathbf{E} = \{ (a, 1), (e, 1), (i, 1), (o, 1), (u, 1) \}$$

$$\mathbf{A} = \{ (a, 1), (e, 0), (i, 1), (o, 0), (u, 1) \}$$

Para un conjunto difuso, sin embargo, la cuestión de pertenencia de un elemento al conjunto no es cuestión de todo o nada, sino que son posibles diferentes grados de pertenencia. La función de pertenencia puede tomar cualquier valor en el intervalo real  $[0, 1]$ . Es decir,  $m_A|U \rightarrow [0, 1]$  es la función de pertenencia de un conjunto difuso, quedando perfectamente definido un conjunto  $A$  como sigue:

$$A = \{ (x, m_A(x)) : x \in U, m_A(x) \in [0, 1] \}$$

#### Ejemplo 2-1:

Sea  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  el número de habitaciones en una casa y definamos el conjunto “casa confortable para una familia de 4 miembros”. Tal conjunto difuso puede ser descrito como sigue:

$$A = \{ (1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3) \}$$

Como puede observarse todas las casas que tienen entre 1 y 6 habitaciones pertenecen al conjunto, pero no todas lo hacen con el mismo grado. Mientras que las de cuatro habitaciones se contemplan como plenamente satisfactorias, las de una sola habitación tiene un grado de compatibilidad muy bajo, como “casa confortable para una familia de 4 miembros”. Las de más de 6 habitaciones no se consideran confortables. Entre estos dos extremos hay diferentes grados de compatibilidad o pertenencia al conjunto difuso.

El **soporte** del conjunto difuso  $A$  viene dado por el conjunto  $\mathbf{sop(A)} = \{ x \in U : m_A(x) > 0 \}$  y la **altura** de  $A$  se define como  $\mathbf{alt(A)} = \sup_x m_A(x)$ . Un conjunto difuso con  $\mathbf{alt(A)} = 1$  se llama normalizado. Un conjunto no vacío puede ser siempre normalizado dividiendo  $m_A(x)$  por  $\sup_x m_A(x)$ . El conjunto vacío será  $\emptyset = \{x \in U : m_{\emptyset}(x) = 0\}$  y el conjunto universal cumplirá que  $U = \{x \in U : m_U(x) = 1\}$ .



En el Ejemplo 1, el  $\text{sop}(\mathbf{A}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y se trata de un conjunto difuso normalizado (su altura es la unidad).

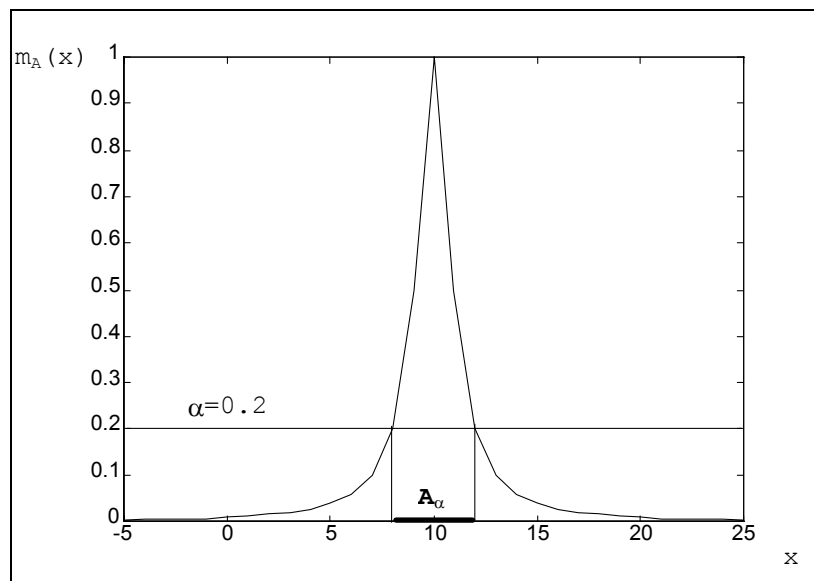
La función de pertenencia, lógicamente, puede ser, también, una función continua (o mixta). Veamos un ejemplo.

### Ejemplo 2-2 :

Consideremos el conjunto difuso  $A = \text{“números reales próximos a 10”}$ . Tal conjunto podría quedar definido como sigue:

$$A = \{ (x, m_A(x)) \mid m_A(x) = (1 + (x-10)^2)^{-1} \}$$

cuya representación gráfica sería la de la Figura 1.



**Figura 1: Números reales próximos a 10**

Un concepto muy útil es el de conjunto de nivel (umbral)  $\alpha$ , grado de presunción, o  $\alpha$ -cut ( $\alpha$ -corte), como se conoce en la bibliografía sobre conjuntos difusos. Este concepto permite un enfoque muy interesante de la teoría de conjuntos difusos, ya que la familia formada por los  $\alpha$ -cortes contiene toda la información sobre el

conjunto difuso. Se llama  $\alpha$ -corte del conjunto difuso A al conjunto común definido como sigue:

$$\mathbf{A}_\alpha = \{ x \in U : m_A(x) \geq \alpha \}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

Se trata, por tanto, del conjunto que contiene todos los valores de x con un valor de pertenencia o compatibilidad (presunción, certeza, son otras expresiones utilizadas) de al menos  $\alpha$ . Si sólo se consideran los valores de x tales que  $m_A(x) > \alpha$ , le llamaremos  $\alpha$ -corte *estricto* o *fuerte*, y le denominaremos  $\mathbf{A}_\alpha^>$ . El conjunto  $\mathbf{A}_{\alpha=1}$ , se suele llamar el *núcleo* de A.

En el caso del ejemplo sobre el conjunto difuso “casa confortable para una familia de 4 miembros”, tendríamos que:

$$\mathbf{A}_{0.5} = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$\mathbf{A}_{0.8} = \{3, 4\}$$

$$\mathbf{A}_1 = \{4\}$$

La Figura 1 muestra la forma que toma un  $\alpha$ -corte para el Ejemplo 2-2 del conjunto “números próximos a 10”. En este caso el conjunto resultante es el representado por el subintervalo en línea gruesa, formado en torno al valor 10, que es el núcleo del conjunto difuso.

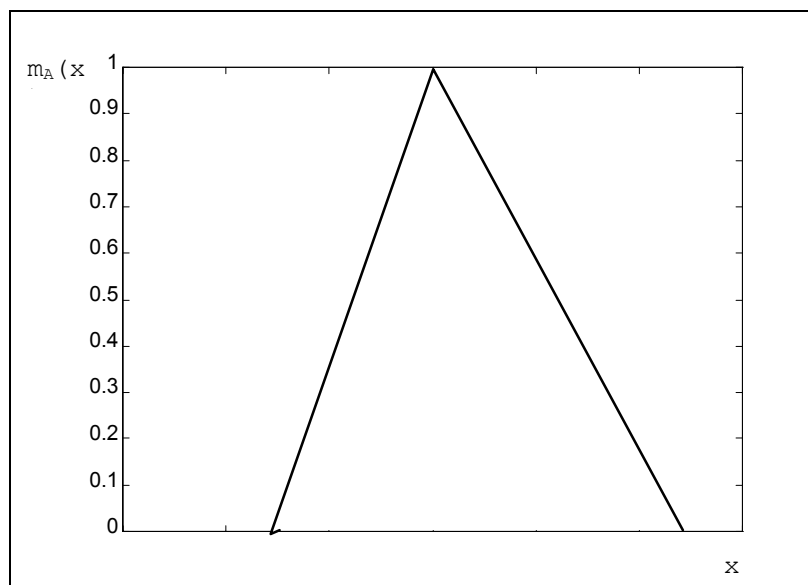
El concepto de **convexidad** también juega un papel importante en la teoría de conjuntos difusos. Las condiciones de convexidad se definen en referencia a la función de pertenencia. Se dice que un conjunto difuso A es convexo si:

$$m_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{m_A(x_1), m_A(x_2)\}, \quad \forall x_1, x_2 \in U \text{ y } \forall \lambda \in [0, 1]$$

Alternativamente, también se puede decir que un conjunto difuso es convexo si todos los  $\alpha$ -corte son convexos. Las Figuras 2 y 3 representan, respectivamente, un posible conjunto convexo y otro no convexo. Como veremos en su momento, este concepto es especialmente relevante para tratar números difusos.

Por último, digamos que el concepto de **cardinalidad** de un número difuso no tiene nada que ver con el similar en el caso de conjuntos comunes (número de elementos), sino que se refiere más bien a su tamaño. Para un conjunto difuso, se define su cardinalidad como sigue:

$$|A| = \sum_{x \in U} m_A(x)$$

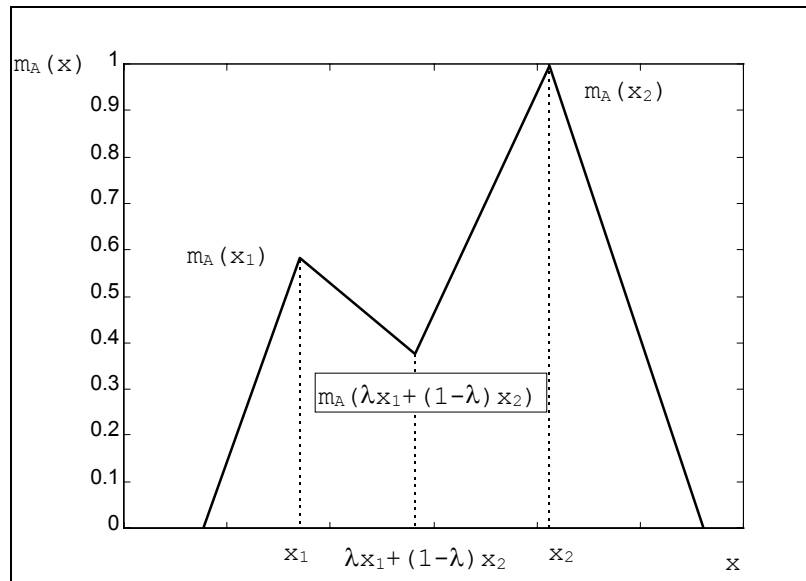


**Figura 2: Conjunto difuso convexo**

Si  $A$  estuviere contenido en un conjunto compacto que satisficiera las condiciones necesarias en cuanto a su mensurabilidad, podríamos escribir que:

$$|A| = \int_U m_A(x) dx$$

expresión, que como acabamos de decir, tiene más que ver con el tamaño (área) que con en número de elementos del conjunto, en sentido clásico.



**Figura 3: Conjunto difuso no convexo**

También, puede definirse el concepto de **cardinalidad relativa** (respecto a un conjunto de referencia dado o universo) en la forma que sigue:

$$\|A\| = \frac{|A|}{|U|}$$

Como es obvio, para comparar la cardinalidad de dos conjuntos difusos habrá que elegir el mismo universo como referencia.

Hemos visto en este apartado los conceptos básicos relacionados con un conjunto difuso, tal como se formuló originalmente. Posteriormente, se han hecho diferentes ampliaciones a la definición de conjunto difuso, suponiendo, por citar sólo los más difundidos, que los grados de pertenencia son también difusos (conjuntos difusos de tipo 2), o que son una variable aleatoria sobre un espacio probabilístico (conjunto probabilístico). Veremos a continuación las operaciones básicas con conjuntos difusos.

### 3. Operaciones básicas con conjuntos difusos.

Como se ha visto, la función de pertenencia es la componente fundamental de un conjunto difuso. De ahí que las operaciones con tales conjuntos se definan a través de dicha función. Veremos, en primer lugar, las operaciones elementales paralelas a las realizadas con conjuntos comunes (Zadeh, 1965).

Diremos que un conjunto A es un subconjunto difuso de B, es decir,  $A \subseteq B$ , si

$$\forall x \in U : m_A(x) \leq m_B(x)$$

y si existe, al menos, un punto  $x \in U$  tal que  $m_A(x) \neq m_B(x)$ , entonces escribiremos que  $A \subset B$ .

#### **Intersección** (min-intersección):

La intersección de dos conjuntos difusos, A y B, viene dada, punto a punto, por:

$$m_{A \cap B}(x) = \min \{m_A(x), m_B(x)\}$$

#### **Unión** (max-intersección):

La unión de dos conjuntos difusos, A y B, viene dada, punto a punto, por:

$$m_{A \cup B}(x) = \max \{m_A(x), m_B(x)\}$$

#### **Complementación**:

El complemento,  $A^c$ , de un conjunto difuso A, viene dado, punto a punto, por:

$$m_{A^c}(x) = 1 - m_A(x)$$

Ejemplo 2-3 :

Continuemos con el ejemplo del conjunto difuso “tipo de casa confortable para una familia de 4 personas”,  $A = \{ (1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3) \}$ , y definamos un nuevo conjunto difuso “tipo de casa grande”,  $B = \{ (3, 0.2), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0.8), (7, 1), (8, 1) \}$ . Tendríamos que,

a) Conjunto de “casas grandes y confortables”:

$$A \cap B = \{ (3, 0.2), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0.3) \},$$

b) Conjunto de “casas grandes o confortables”:

$$A \cup B = \{ (1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.8), (7, 1), (8, 1) \},$$

c) Conjunto de “casas no grandes”:

$$B^c = \{ (1, 1), (2, 1), (3, 0.8), (4, 0.6), (5, 0.4), (6, 0.2), (9, 1), (10, 1) \}.$$

Puede comprobarse fácilmente que la unión y la intersección anteriormente definidas, son compatibles con el concepto de  $\alpha$ -corte. O sea,

$$(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$$

$$(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$$

Ejemplo 2-4 :

Consideremos los conjuntos difusos  $A =$  “números reales próximos a 10” y  $B =$  “números reales próximos a 15” y supongamos que, ahora, los definimos como sigue:

$$A = \{ (x, m_A(x)) \mid x \in X \}$$

siendo,

$$\begin{aligned} m_A(x) &= 0, \quad \text{para } x < 5, \\ &= (x-5)/5, \quad \text{para } 5 \leq x \leq 10, \\ &= (15-x)/5, \quad \text{para } 10 \leq x \leq 15, \\ &= 0, \quad \text{para } x > 15. \end{aligned}$$

y

$$B = \{ (x, m_B(x)) \mid x \in X \}$$

siendo,

$$\begin{aligned}
 m_B(x) &= 0, \text{ para } x < 10, \\
 &= (x-10)/5, \text{ para } 10 \leq x \leq 15, \\
 &= (20-x)/5, \text{ para } 15 \leq x \leq 20, \\
 &= 0, \text{ para } x > 20.
 \end{aligned}$$

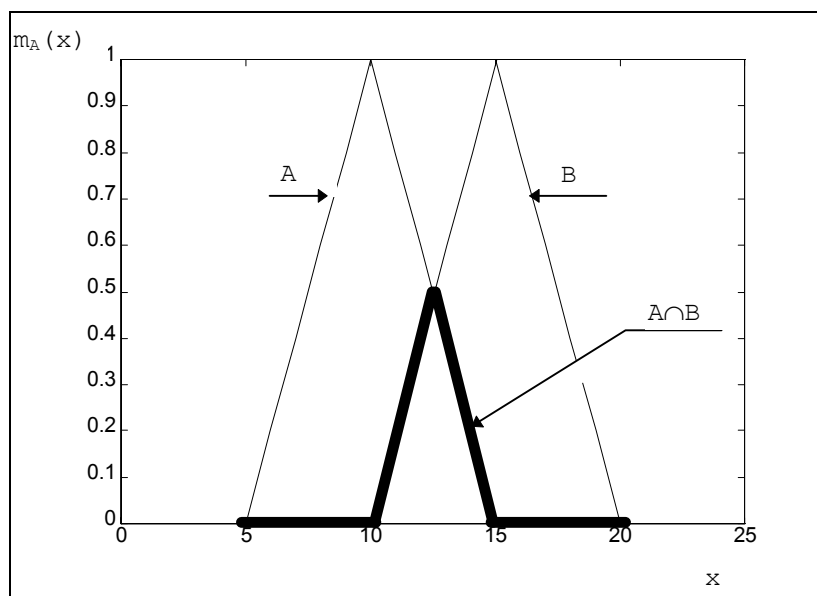
La intersección de estos dos conjuntos sería  $C = \text{“números reales próximos a 10 y a 15”}$  y se obtendría como sigue:

$$\begin{aligned}
 m_C(x) = m_{A \cap B}(x) &= \min[m_A(x), m_B(x)] = \min[(15-x)/5, (x-10)/5], \text{ para } 10 \leq x \leq 15, \\
 &= 0, \text{ en el resto.}
 \end{aligned}$$

La unión, que llamaremos  $D = \text{“números reales próximos a 10 o a 15”}$ , vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 m_D(x) = m_{A \cup B}(x) &= \max[(x-5)/5, (15-x)/5, (x-10)/5, (20-x)/5], \text{ para } 5 \leq x \leq 20, \\
 &= 0, \text{ en el resto.}
 \end{aligned}$$

Podemos definir ambas operaciones gráficamente. La intersección sería el conjunto difuso señalado con línea gruesa en la Figura 4, mientras que la unión sería el conjunto reflejado en la Figura 5.



**Figura 4: Intersección de A y B**

Como es sabido, estas operaciones constituyen un álgebra de Boole para el caso de conjuntos normales. Sin embargo, en el caso de los conjuntos difusos no es así, puesto que no se cumple la ley del *medio excluído*, ya que,

$$A \cap A^c \neq \emptyset \quad \text{y} \quad A \cup A^c \neq U$$

Por tanto, las operaciones que acabamos de ver sólo tienen las propiedades de un álgebra distributiva.

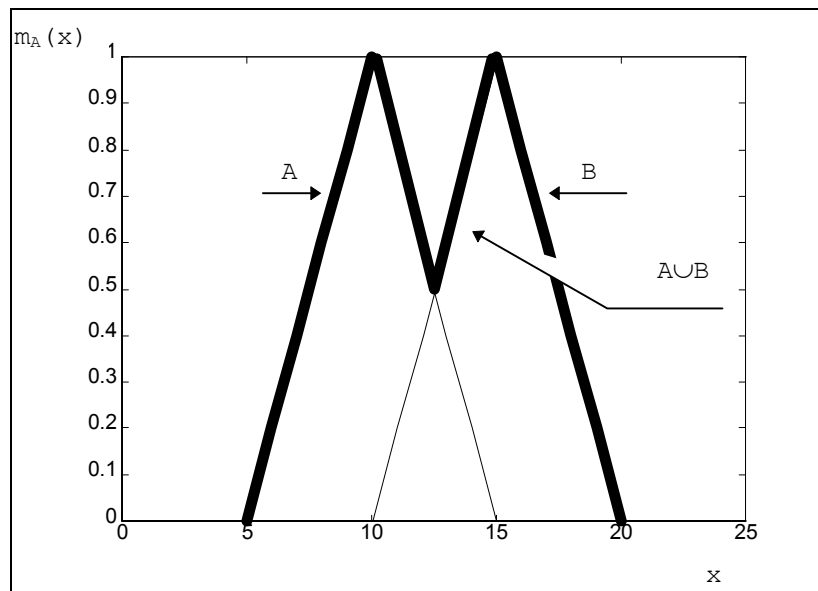


Figura 5: Unión de A con B

#### 4. Otras operaciones.

La min-intersección y la max-uni3n no son las 3nicas posibilidades para una extensi3n de las operaciones cl3sicas con conjuntos. Otros muchos operadores han sido propuestos, bien sea por su generalidad o adaptabilidad, bien justific3ndolos por razones emp3ricas o axiom3ticas. Vamos a ver algunas de estas operaciones y operadores que pueden sernos 3tiles m3s adelante.



Producto cartesiano: Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  conjuntos difusos en  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . El producto cartesiano es un conjunto difuso en el espacio producto  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ , cuya función de pertenencia es:

$$m_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x) = \min_i \{m_{A_i}(x_i) \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in X_i\}$$

Potencia de orden  $m$ : La potencia de orden  $m$  de un conjunto difuso  $A$  es un conjunto difuso cuya función de pertenencia es:

$$m_{A^m}(x) = [m_A(x)]^m, \quad x \in X$$

Suma algebraica: La suma algebraica o suma probabilística,  $C=A+B$ , se define como:

$$C = \{(x, m_{A+B}(x)) \mid x \in X\}$$

donde,

$$m_{A+B}(x) = m_A(x) + m_B(x) - m_A(x).m_B(x)$$

Suma limitada: La suma limitada,  $C=A \oplus B$ , se define como:

$$C = \{(x, m_{A \oplus B}(x)) \mid x \in X\}$$

donde,

$$m_{A \oplus B}(x) = \min \{1, m_A(x) + m_B(x)\}$$

Diferencia limitada: La diferencia limitada,  $C=A \ominus B$ , se define como:

$$C = \{(x, m_{A \ominus B}(x)) \mid x \in X\}$$

donde,

$$m_{A \ominus B}(x) = \max \{0, m_A(x) + m_B(x) - 1\}$$

Producto algebraico: El producto algebraico,  $C=A.B$ , se define como:

$$C = \{(x, m_{A,B}(x)) \mid x \in X\}$$

donde,

$$m_{A,B}(x) = m_A(x) \cdot m_B(x)$$

Ejemplo 4-1:

Supongamos que  $A = \{(3, 0.5), (5, 1), (7, 0.6)\}$  y  $B = \{(3, 1), (5, 0.6)\}$ . Vamos a calcular cada una de las operaciones definidas anteriormente.

$$A \times B = \{(3;3), 0.5\}, \{(5;3), 1\}, \{(7;3), 0.6\}, \{(3;5), 0.5\}, \{(5;5), 0.6\}, \{(7;5), 0.6\}\}$$

Este resultado podría presentarse en forma de tabla de doble entrada o matriz, que define una *relación difusa* entre A y B, en la que las casillas recogen el valor mínimo de las funciones de pertenencia del correspondiente par:

	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	0.5	1	0.6
<b>5</b>	0.5	0.6	0.6

$$A^2 = \{(3, 0.25), (5, 1), (7, 0.36)\}$$

$$A + B = \{(3, 1), (5, 1), (7, 0.6)\}$$

$$A \oplus B = \{(3, 1), (5, 1), (7, 0.6)\}$$

$$A \ominus B = \{(3, 0.5), (5, 0.6)\}$$

$$A \cdot B = \{(3, 0.5), (5, 0.6)\}$$

Algunos de los operadores que acabamos de ver, como la min-intersección, por ejemplo, pertenecen a una clase general de operadores llamados **normas triangulares** (*t-normas*), mientras que otros, como la suma limitada, pertenecen a la clase general de las llamadas **conormas triangulares** (*t-conormas*). Se trata, respectivamente, de operadores para la intersección y la unión de conjuntos difusos. El concepto de norma

triangular se usa en estadística para datos que pertenecen al intervalo  $[0, 1]$ . Este es el motivo de que en el desarrollo de la matemática difusa sea de interés, especialmente en el campo de la lógica difusa y de los sistemas expertos. Hay una segunda clase de operadores, llamados **operadores promedio** (compensadores), que son muy importantes a la hora de agregar conjuntos difusos, por ejemplo en el contexto de la toma de decisiones, y que utilizan criterios frecuentemente usados en la teoría de la utilidad o en los métodos de ayuda a la decisión multicriterio. Tratan de tomar algún tipo de situación intermedia entre los criterios de mínimo (intersección) y máximo (unión) de las funciones de pertenencia. Tanto en uno como en otro caso, los operadores pueden clasificarse en paramétricos y no paramétricos. Nosotros veremos sólo algunos de los más interesantes<sup>7</sup>.

#### **t-normas:**

Son funciones bivalentes del tipo  $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ , que satisfacen las siguientes propiedades:

$$1.- t(0, 0) = 0$$

$$2.- t(m_A(x), 1) = t(1, m_A(x)) = m_A(x), \quad x \in X$$

3.-Es una función *monótona*, o sea, que si  $m_A(x) \leq m_C(x)$  y  $m_B(x) \leq m_D(x)$ , entonces,

$$t(m_A(x), m_B(x)) \leq t(m_C(x), m_D(x))$$

4.-Es *commutativa*; o sea,

$$t(m_A(x), m_B(x)) = t(m_B(x), m_A(x))$$

5.-Es *asociativa*; o sea,

$$t(m_A(x), t(m_B(x), m_C(x))) = t(t(m_A(x), m_B(x)), m_C(x))$$

---

<sup>7</sup>Un resumen y clasificación puede verse en Zimmermann, H.J. (1991; pp. 28-43)

La función  $t$  define una clase general de *operadores intersección* para conjuntos difusos. Los operadores que pertenecen a esta clase son, como se ha dicho, asociativos y, por tanto, es posible calcular los valores de la función de pertenencia para la intersección de más de dos conjuntos difusos, aplicándolos recursivamente.

**t-conormas:**

En correspondencia con los anteriores operadores de intersección, se han definido una clase general de operadores para la agregación, que son las ya mencionadas conormas triangulares, también llamadas *s-normas*. Se trata de una función similar a la anterior,  $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ , que tiene las siguientes propiedades:

$$1.- s(1, 1) = 1$$

$$2.- s(m_A(x), 0) = s(0, m_A(x)) = m_A(x), \quad x \in X$$

3.-Es una función *monótona*, o sea, que si  $m_A(x) \leq m_C(x)$  y  $m_B(x) \leq m_D(x)$ , entonces,

$$s(m_A(x), m_B(x)) \leq s(m_C(x), m_D(x))$$

4.-Es *commutativa*; o sea,

$$s(m_A(x), m_B(x)) = s(m_B(x), m_A(x))$$

5.-Es *asociativa*; o sea,

$$s(m_A(x), s(m_B(x), m_C(x))) = s(s(m_A(x), m_B(x)), m_C(x))$$

Las t-normas y las t-conormas son conceptos “duales”. En este sentido, puede comprobarse que cualquier t-norma puede generarse de una t-conorma, a partir de la siguiente relación:

$$t(m_A(x), m_B(x)) = 1 - s(1 - m_A(x), 1 - m_B(x))$$

Hay muchos operadores funcionales que satisfacen las condiciones para ser t-normas y t-conormas. No hay, por tanto, una única forma de combinar números difusos (intersección “y” y unión “o” tradicionales), sino que hay múltiples formas de hacerlo y, también, procedimientos para ponerlas en relación (operadores compensadores, algunos de los cuales veremos más adelante), que son especialmente útiles en diversas aplicaciones, como el análisis de decisión. Las parejas más usuales de t-normas y t-conormas son las siguientes:

- **Producto drástico:**

$$t_w(m_A(x), m_B(x)) = \min\{m_A(x), m_B(x)\} \text{ si } \max\{m_A(x), m_B(x)\} = 1$$

$$= 0, \text{ en otro caso.}$$

- **Suma drástica:**

$$s_w(m_A(x), m_B(x)) = \max\{m_A(x), m_B(x)\} \text{ si } \min\{m_A(x), m_B(x)\} = 0$$

$$= 1, \text{ en otro caso.}$$

- **Diferencia limitada:**

$$t_1(m_A(x), m_B(x)) = \max\{0, m_A(x) + m_B(x) - 1\}$$

- **Suma limitada:**

$$s_1(m_A(x), m_B(x)) = \min\{1, m_A(x) + m_B(x)\}$$

- **Producto de Einstein:**

$$t_{1.5}(m_A(x), m_B(x)) = (m_A(x) \cdot m_B(x)) / (1 + m_A(x) \cdot m_B(x))$$

- **Suma de Einstein:**

$$s_{1.5}(m_A(x), m_B(x)) = (m_A(x) + m_B(x)) / (1 + m_A(x) \cdot m_B(x))$$

- **Producto algebraico:**

$$t_2(m_A(x), m_B(x)) = m_A(x) \cdot m_B(x)$$

- **Suma algebraica:**

$$s_2(m_A(x), m_B(x)) = m_A(x) + m_B(x) - m_A(x) \cdot m_B(x)$$

- **Producto de Hamacher:**

$$t_{2.5}(m_A(x), m_B(x)) = (m_A(x) \cdot m_B(x)) / (m_A(x) + m_B(x) - m_A(x) \cdot m_B(x))$$

- **Suma de Hamacher:**

$$s_{2.5}(m_A(x), m_B(x)) = (m_A(x) + m_B(x) - 2m_A(x) \cdot m_B(x)) / (1 - m_A(x) \cdot m_B(x))$$

- **Mínimo:**

$$t_3((m_A(x), m_B(x))) = \min \{m_A(x), m_B(x)\}$$

- **Máximo:**

$$s_3((m_A(x), m_B(x))) = \max \{m_A(x), m_B(x)\}$$

Estos operadores están ordenados como sigue:

$$t_w \leq t_1 \leq t_{1.5} \leq t_2 \leq t_{2.5} \leq t_3$$

$$s_3 \leq s_{2.5} \leq s_2 \leq s_{1.5} \leq s_1 \leq s_w$$

Esto supone que para todo par de conjuntos difusos, cualquier operador intersección, que es una t-norma, está limitado por el operador *min* y el operador  $t_w$ . Por otro lado, una t-conorma está limitada por el operador *max* y el operador  $s_w$ <sup>8</sup>.

Para extender el rango de estos operadores de tal forma que puedan adaptarse al contexto en el que van a ser utilizados, diversos autores han propuesto familias parametrizadas de t-normas y t-conormas. No vamos a entrar en este tema, pero digamos que, por ejemplo, Hamacher propone un modelo para el operador “y” definiendo la intersección en forma parametrizada como sigue:

$$m_{A \cap B}(x) = (m_A(x) \cdot m_B(x)) / (\gamma + (1-\gamma)(m_A(x) + m_B(x) - m_A(x) \cdot m_B(x)))$$

Obviamente, cuando  $\gamma=0$  se obtendría el producto de Hamacher definido anteriormente. Para  $\gamma=1$ , tendríamos como resultado el producto algebraico.

### **Operadores promedio o compensatorios:**

Como adelantamos, en muchas ocasiones los procedimientos de agregación deben enfrentarse a la necesidad de encontrar un compromiso entre objetivos en conflicto (teoría del bienestar, análisis multicriterio, por ejemplo). A veces es posible admitir la compensación y permitir un resultado entre el peor y el mejor de todos los posibles, entre el mínimo y el máximo de los grados de pertenencia de los conjuntos

agregados. Operadores tales como la media aritmética, ponderada y no ponderada, o la media geométrica, pueden ser ejemplos de operadores promedio. Vamos a ver algunos de los propuestos.

- Operador “ ‘y’ difuso ” :

$$m_y (m_A(x), m_B(x)) = \gamma \cdot \min \{m_A(x), m_B(x)\} + (1/2)(1-\gamma)(m_A(x)+m_B(x)), \gamma \in [0, 1]$$

- Operador “ ‘o’ difuso “ :

$$m_o (m_A(x), m_B(x)) = \gamma \cdot \max \{m_A(x), m_B(x)\} + (1/2)(1-\gamma)(m_A(x)+m_B(x)), \gamma \in [0, 1]$$

El parámetro  $\gamma$  indica el grado de proximidad al significado lógico estricto de “y” y “o”. Para  $\gamma=1$ , tendríamos el operador *min* y *max* , respectivamente. Para  $\gamma=0$  , ambos serían la media aritmética.

Se han propuesto, también, operadores más generales, en el sentido de que la compensación entre unión e intersección se expresa mediante un parámetro  $\gamma$  (por ejemplo, el  $\gamma$ -operador o “ ‘y’ compensatorio ” de Zimmermann-Zisno, que es una combinación del producto y la suma algebraicos), así como combinaciones convexas de los operadores *min* y *max* (operadores no compensatorios, en general) para obtener algún criterio de compensación a la hora de agregar conjuntos difusos.

Por todo lo dicho hasta aquí, puede verse que hay múltiples propuestas para la agregación de conjuntos difusos, lo que, quizás, contribuye a hacer bastante confuso este aspecto de la teoría, por introducir cierta dosis de subjetividad. No parece fácil decidir qué regla debe usarse en una u otra aplicación. Los criterios de selección dados por Zimmermann (1991; pp. 39-43) pueden servirnos de ayuda. En resumen, son los siguientes:

1. Fuerza axiomática: un operador es mejor cuanto menos limitativos son los axiomas en que se basa.

2. Ajuste empírico: el operador debe dar buenos resultados en la práctica. No sólo es importante que cumpla ciertos axiomas teóricos.

---

<sup>8</sup>Véase, Zimmermann (1991; p.32)

3. Adaptabilidad: el operador debe ser adaptable a cualquier contexto específico; debe ser bueno para modelar gran diversidad de situaciones. Normalmente, esta cualidad puede alcanzarse mediante la parametrización.

4. Eficiencia numérica: hay operadores que requieren mucha más potencia de cálculo que otros. Esto es particularmente importante cuando el problema a tratar es de gran escala.

5. Compensación: debe permitirse que pueda haber cierta compensación entre un bajo grado de pertenencia de un elemento a un conjunto y un elevado grado de pertenencia a otro. Obviamente, el operador *min*, por ejemplo, no lo hace posible.

6. Rango de compensación: en general, cuanto mayor es el rango de compensación mejor es el operador compensatorio.

7. Buen comportamiento en la agregación: el grado de pertenencia del conjunto agregado depende frecuentemente del número de conjuntos combinados. Por ejemplo, si utilizamos el operador producto, cada conjunto difuso adicional disminuirá el grado de pertenencia del agregado resultante. Esto podría ser deseable o no. Hay opiniones que, por razones formales, el grado de pertenencia resultante nunca debería de incrementarse.

8. Ser elegidos en función del nivel de escala permisible: si trabajamos con una escala ordinal, nunca deberíamos utilizar el operador producto, por ejemplo. En general, en caso de igualdad en los demás criterios, será preferible el operador que requiera el nivel de escala más bajo desde el punto de vista de la recogida de información.

## 5. El principio de extensión. Aplicaciones.

El principio de extensión es una de las ideas fundamentales de la teoría de conjuntos difusos. Fue propuesta por Zadeh (1965) y da un método general para extender, o hacer posible, la aplicación de conceptos matemáticos no difusos al tratamiento de cantidades difusas. Es especialmente útil para los propósitos del cálculo difuso, por cuanto en muchas ocasiones es oportuna su aplicación al álgebra real con números difusos.



Sea  $y=f(x)$ , con  $x \in X$  e  $y \in Y$ , una aplicación de  $X$  en  $Y$ . Supongamos, ahora, que en vez de  $x \in X$  sólo tenemos una cantidad difusa  $A$  sobre  $X$ ; por ejemplo, “Aproximadamente  $x$ ”. La pregunta es: ¿Cuál es la imagen difusa de  $A$  por medio de  $f$ ? Si llamamos  $B$  a esa imagen, parece claro que el soporte de  $B$  debería ser la imagen del soporte de  $A$  y que los valores de la función de pertenencia deben venir determinados por los correspondientes de  $A$ . En caso de que la aplicación fuese biunívoca, la solución sería inmediata, ya que:  $m_B(y) = m_A(f^{-1}(y)) = m_A(x)$ . Sin embargo, no siempre será así y es posible que  $y \in Y$  tenga más de un original. Para este caso, Zadeh propuso el siguiente valor para la función de pertenencia de  $B$  :

$$m_B(y) = \sup_{x \in X: f^{-1}(y)=x} m_A(x), \text{ si } f^{-1}(y) \neq \emptyset$$

$$= 0, \text{ en otro caso}$$

que puede interpretarse como la unión a través del supremo de todos los  $x$  *singletons* (conjunto difuso cuyo soporte está formado por un único punto) difusos con  $f(x)=y$ , que tienen el grado  $m_A(x)$ .

Pensemos en un caso más genérico, en que  $X$  es el producto cartesiano de  $n$  universos,  $X=X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ , y  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son  $n$  conjuntos difusos en  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , respectivamente. Entonces, si  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , el principio de extensión nos permite definir un conjunto difuso  $B$  en  $Y$ , en la forma:

$$B = \{(y, m_B(y)) \mid y=f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in X\}$$

donde,

$$m_B(y) = \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X \\ (x_1, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)}} \min\{m_{A_1}(x_1), \dots, m_{A_n}(x_n)\}, \text{ si } f^{-1}(y) \neq \emptyset$$

$$= 0, \text{ en otro caso}$$

El principio de extensión ha sido reelaborado utilizando la suma algebraica en vez del supremo y el producto en vez del mínimo. Sin embargo, la definición más utilizada continúa siendo la original de Zadeh, que acabamos de exponer. Veamos, seguidamente, un ejemplo.

Ejemplo 5-1:

Sea  $A = \{(-1, 0.5), (0, 0.8), (1, 1), (2, 0.4)\}$ . Vamos a calcular  $y = f(x) = x^2$ .

Si aplicamos el principio de extensión, obtendríamos:

<b>x</b>	<b><math>m_A(x)</math></b>	<b><math>y = x^2</math></b>	<b><math>m_B(y)</math></b>
-1	0.5	1	1.0
0	0.8	0	0.8
1	1.0	1	1.0
2	0.4	4	0.4

Luego, el conjunto difuso resultante sería:

$$B = f(A) = \{(0, 0.8), (1, 1), (4, 0.4)\}$$

En la Figura 6, puede contemplarse la interpretación gráfica de la aplicación de este principio para el caso de la función  $y = x^2 + 2$ , considerando que el conjunto A tiene la siguiente función de pertenencia:

$$m_A = (x+1)/2, \text{ para } -1 \leq x \leq 1$$

$$= (2-x), \text{ para } 1 \leq x \leq 2$$

$$= 0, \text{ en otro caso}$$

El procedimiento de obtención del conjunto imagen, para algunos valores concretos del conjunto difuso A, se presenta en la siguiente tabla:

<b>x</b>	<b><math>m_A(x)</math></b>	<b>y</b>	<b><math>m_B(y)</math></b>
-1	0	3	1
-0.5	0.25	2.25	0.75
-0.75	0.125	2.5625	0.875

0	0.5	0	0.5
0.5	0.75	2.25	0.75
0.75	0.875	2.5625	0.875
1	1	1	1

Como puede comprobarse, el conjunto imagen,  $B = f(A)$ , podría definirse como sigue:

$$\begin{aligned}
 m_B(y) &= 0.5, & \text{para } y = 0 \\
 &= 0.5 + 0.5(y-2)^{1/2}, & \text{para } 2 < y \leq 3 \\
 &= 2 - (y-2)^{1/2}, & \text{para } 3 \leq y \leq 6 \\
 &= 0, & \text{en el resto}
 \end{aligned}$$

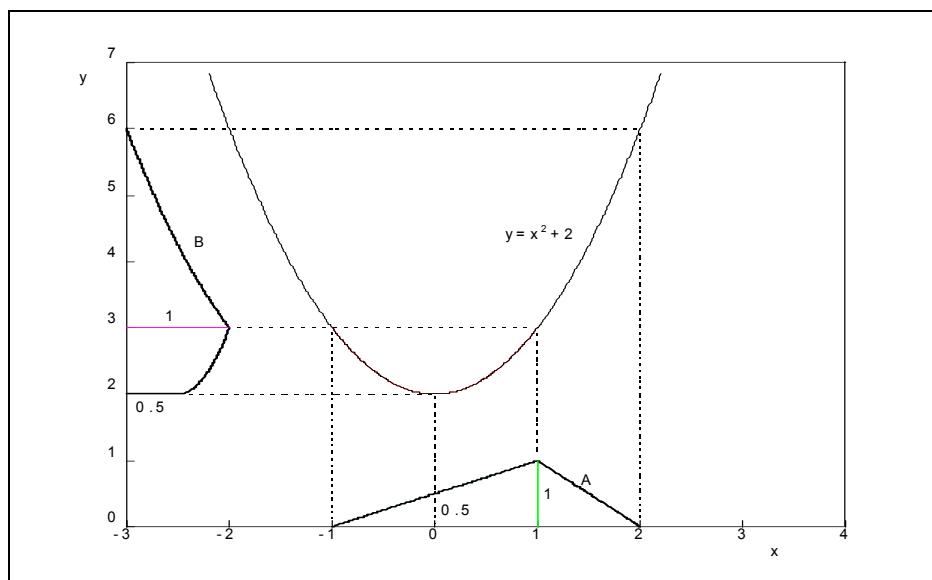


Figura 6: Aplicación del principio de extensión

Ejemplo 5-2:

Definamos  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  en la forma  $y = f(x_1, x_2)$ , con  $x_1 \in A_1$  y  $x_2 \in A_2$ , siendo  $A_1 = \{(1, 0.6), (2, 0.8), (3, 1), (4, 0.6)\}$  y  $A_2 = \{(0, 0.5), (1, 0.7), (2, 0.9), (3, 1), (4, 0.4)\}$ , dos conjuntos difusos. Vamos a obtener, mediante el principio de extensión, el conjunto difuso  $B = f(A_1 \times A_2)$ , es decir, el producto cartesiano de estos dos subconjuntos de números naturales.

Elaboremos una tabla para mayor claridad del procedimiento:

	0	1	2	3	4
1	<b>(0, 0.5)</b>	<b>(1, 0.6)</b>	(2, 0.6)	(3, 0.6)	(4, 0.4)
2	(0, 0.5)	<b>(2, 0.7)</b>	<b>(4, 0.8)</b>	(6, 0.8)	(8, 0.4)
3	(0, 0.5)	<b>(3, 0.7)</b>	<b>(6, 0.9)</b>	<b>(9, 1.0)</b>	(12, 0.4)
4	(0, 0.5)	(4, 0.6)	<b>(8, 0.6)</b>	<b>(12, 0.6)</b>	<b>(16, 0.4)</b>

El conjunto resultante de establecer, primero, los mínimos de la función de pertenencia en la tabla y, posteriormente, seleccionar los supremos de esos mínimos (en letra tipo negrita), sería el siguiente:

$$B = \{(0, 0.5), (1, 0.6), (2, 0.7), (3, 0.7), (4, 0.8), (6, 0.9), (8, 0.6), (9, 1), (12, 0.6), (16, 0.4)\}.$$

Puede comprobarse que el principio de extensión es compatible con la aplicación de los  $\alpha$ -cortes estrictos; es decir,

$$\mathbf{B}^>_{\alpha} = f(\mathbf{A}^>_{\alpha}) = f(\mathbf{A}^>_{1\alpha}, \mathbf{A}^>_{2\alpha}, \dots, \mathbf{A}^>_{n\alpha})$$

Veamos, a continuación, alguna aplicación del principio de extensión.

**Distancia difusa entre conjuntos difusos :**

Sea  $U$  un espacio métrico, con la pseudo-métrica  $d \mid U \times U \rightarrow \mathbb{R}^+$ . La distancia difusa,  $d$ , entre dos conjuntos difusos  $A$  y  $B$ , puede definirse como sigue:

$$m_{d(A,B)}(y) = \sup_{\substack{(x_1, x_2) \in U \times U \\ d(x_1, x_2) = y}} \min\{m_A(x_1), m_B(x_2)\}$$

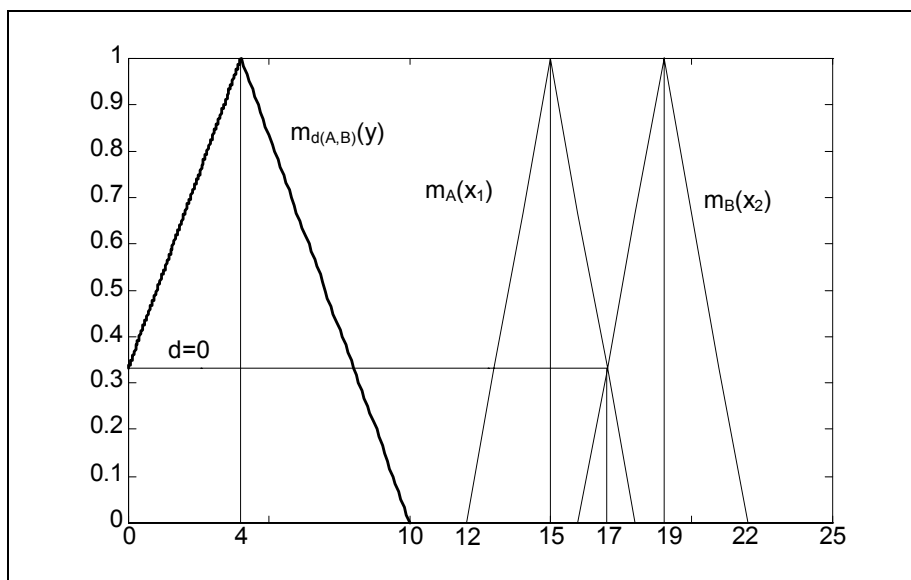
En la Figura 7, puede verse el caso en que  $U = \mathbb{R}^1$  y  $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ , para el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 5-3:

Obtener la distancia difusa entre los siguientes conjunto difusos:

$$\begin{aligned} m_A(x_1) &= 0, \text{ para } 18 < x_1 < 12 \\ &= (x_1 - 12) / 3, \text{ para } 12 \leq x_1 \leq 15 \\ &= (18 - x_1) / 3, \text{ para } 15 \leq x_1 \leq 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_B(x_2) &= 0, \text{ para } 22 < x_2 < 16 \\ &= (x_2 - 16) / 3, \text{ para } 16 \leq x_2 \leq 19 \\ &= (22 - x_2) / 3, \text{ para } 19 \leq x_2 \leq 22 \end{aligned}$$



**Figura 7: Distancia difusa entre conjuntos difusos**

Puede comprobarse que la solución viene dada por el conjunto difuso, representado en la Figura 7, dado por la siguiente función de pertenencia:

$$\begin{aligned} m_{d(A,B)}(y) &= 0, \text{ para } 10 < y < 0 \\ &= (1/3) + (1/3)(y/2), \text{ para } 0 \leq y \leq 4 \\ &= (10-y)/6, \text{ para } 4 \leq y \leq 10 \end{aligned}$$

La distancia máxima sería  $|22-12|=10$ , con valor cero para ambas funciones de pertenencia. Como no hay otra combinación posible de valores de A y B que de esta cifra, el supremo tomará, también, valor cero. Continuando los dos puntos extremos hacia arriba, tendríamos distancias decrecientes con funciones de pertenencia crecientes, hasta tomar el valor 1 en  $|19-15|=4$ . Descendiendo, ahora, en ambos conjuntos, la distancia sigue decreciendo hasta la intersección de ambos, con  $d=0$ , y también lo hace la función de pertenencia, hasta llegar al punto  $x_1=x_2=17$  ( $d=0$ ), en que toma valor  $1/3$ . A partir de este punto, tendríamos distancias ya calculadas, pero con nivel de pertenencia siempre menor que las anteriores.

### Operaciones reales extendidas:

Un campo importante de aplicación del principio de extensión es el de las operaciones algebraicas, tales como la suma (resta), multiplicación (división), mínimo y máximo. Vamos a limitarnos a operaciones binarias sobre  $U = \mathbb{R}^1$ , aunque la generalización puede hacerse de forma inmediata.

Una operación binaria,  $*$ , en  $\mathbb{R}^1$  se llama creciente (decreciente) si

$$x_1 > y_1, x_2 > y_2 \Rightarrow x_1 * x_2 > y_1 * y_2 \quad (x_1 * x_2 < y_1 * y_2)$$

La suma, multiplicación, máximo y mínimo de dos números reales son operaciones crecientes. Si llamamos  $(*)$  a la operación extendida entre dos conjuntos difusos A y B, su resultado puede expresarse en la forma:

$$m_{A(*)B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in R \\ x_1 * x_2 = y}} \min\{m_A(x_1), m_B(x_2)\}$$

Hay algoritmos para el cálculo exacto de operaciones binarias entre conjuntos difusos continuamente crecientes (decrecientes). Se basan en la propiedad de que todo conjunto difuso continuo puede ser descompuesto en la unión de conjuntos difusos conexos cuyas funciones de pertenencia son estrictamente crecientes, estrictamente decrecientes o constantes, y que la operación extendida es distributiva respecto a la unión. Por consiguiente, la operación puede llevarse a cabo sobre cada parte monótona<sup>9</sup>.

Sin embargo, la aplicación de este principio supone una gran cantidad de cálculo, si no se imponen restricciones a la forma de la función de pertenencia. Por eso, como veremos en el siguiente epígrafe, se han hecho propuestas, respecto a dicha forma, más apropiadas desde el punto de vista práctico. Por otra parte, la extensión de las operaciones algebraicas mediante este principio no puede ser aplicada siempre a números difusos con soporte discreto, ya que es posible que el conjunto resultante no sea convexo y, por tanto, no pueda ser considerado como un número difuso. Veamos un ejemplo, con una aplicación a la multiplicación de números difusos.

#### Ejemplo 5-4:

Sean  $M = \{(1, 0.3), (2, 1), (3, 0.4)\}$  y  $N = \{(2, 0.7), (3, 1), (4, 0.2)\}$  dos números difusos, que de alguna forma pretenden representar valores próximos a 2 y a 3, respectivamente. Calculemos su producto,  $M(\cdot)N$ , mediante el principio de extensión:

$$m_{A(\cdot)B}(z) = \sup_{z=x \cdot y} \{ \min(m_A(x), m_A(y)) \}$$

	2	3	4
1	(2, 0.3)	(3, 0.3)	(4, 0.2)
2	(4, 0.7)	(6, 1.0)	(8, 0.2)
3	(6, 0.4)	(9, 0.4)	(12, 0.2)

Luego el número difuso resultante será:

$$Z = \{(2, 0.3), (3, 0.3), (4, 0.7), (6, 1.0), (8, 0.2), \mathbf{(9, 0.4)}, (12, 0.2)\}$$

<sup>9</sup>Véase, Dubois y Prade (1979 y 1980).

Puede comprobarse que este conjunto no es convexo. Esta operación podríamos hacerla para cualquier otra operación algebraica.

En resumen, el principio de extensión puede ser una de las posibilidades para extender las operaciones algebraicas entre números convencionales a los números difusos. Sin embargo, en la práctica, se han revelado como más manejables otras alternativas de cálculo algebraico, basadas en números difusos de características especiales. Es momento, por tanto, de hablar del concepto general de *número difuso* y sus clases.

## 6. Números difusos.

Un conjunto difuso  $A$  en  $\mathbb{R}^1$  se llama un número difuso si  $A$  es convexo y existe exactamente un punto,  $M \in \mathbb{R}^1$ , con  $m_A(M) = 1$  ( $A_{\alpha=1} = M$ ).

La expresión lingüística de tal número difuso sería: “Aproximadamente  $M$ ”. Para una mejor manipulación, suelen definirse los números difusos tipo L-R (left-right) como sigue:

$$\begin{aligned} m_A(x) &= L((M - x)/l), \text{ si } x \leq M; \quad l > 0 \\ &= R((x - M)/r), \text{ si } x \geq M; \quad r > 0 \end{aligned}$$

donde  $L$  y  $R$  son funciones fuertemente decrecientes en  $\mathbb{R}^+$ , con  $L(0) = R(0) = 1$ .  $M$  es llamado el *valor central* del número difuso.  $L$  y  $R$  son, respectivamente, las *funciones de forma* a izquierda y derecha, mientras que  $l$  y  $r$  son, respectivamente, la *extensión, amplitud* o *dispersión* a izquierda y derecha.

Un intervalo difuso de tipo L-R es una generalización del concepto de número difuso que acabamos de ver:

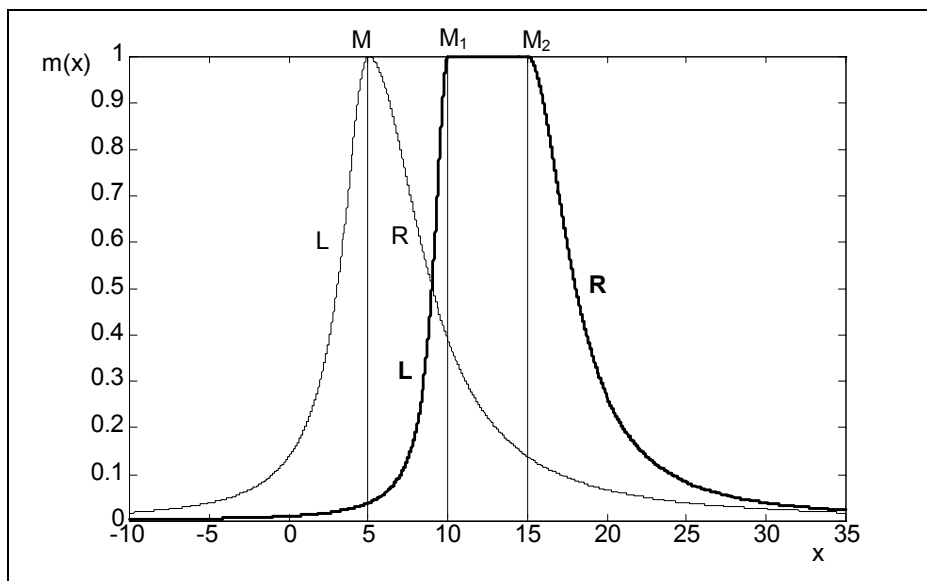
$$\begin{aligned} m_A(x) &= L((M_1 - x)/l), \text{ si } x \leq M_1; \quad l > 0 \\ &= 1 \quad \quad \quad \text{si } x \in [M_1, M_2] \end{aligned}$$



$$= R((x - M_2)/r), \text{ si } x \geq M_2; r > 0$$

En la Figura 8 puede contemplarse una interpretación gráfica de los conceptos de número difuso del tipo L-R, para  $L(x)=R(x)=1/(1+x^2)$ , con  $l=2$ ,  $r=4$  y  $m=5$ , y de intervalo difuso, para  $L(x)=R(x)=1/(1+x^2)$ , con  $l=1$ ,  $r=3$ ,  $M_1=10$  y  $M_2=15$ . Los respectivos conjuntos quedan definidos como sigue:

- Número difuso:  $m(x) = L((5-x)/2) = 1/(1+((5-x)/2)^2)$ , para  $x \leq 5$   
 $= R((x-5)/4) = 1/(1+((x-5)/4)^2)$ , para  $x \geq 5$
- Intervalo difuso:  $m(x) = L(10-x) = 1/(1+(10-x)^2)$ , para  $x \leq 10$   
 $= 1$ , para  $10 \leq x \leq 15$   
 $= L((x-15)/3) = 1/(1+((x-15)/3)^2)$ , para  $x \geq 15$



**Figura 8 : Número e intervalo difusos del tipo L-R.**

Antes de introducir los conceptos de números difusos triangulares, dado el enfoque que vamos a adoptar para implementar las operaciones aritméticas con ellos, conviene hablar de la noción de intervalo de confianza.

### 6.1. Intervalos de confianza y números difusos.

Un número ordinario,  $a \in \mathbb{R}$ , puede interpretarse utilizando el concepto de función de pertenencia como sigue:

$$\begin{aligned} m_a(x) &= 1, & \text{para } x = a \\ &= 0, & \text{para } x \neq a \end{aligned}$$

De forma parecida, podemos definir un intervalo de confianza en  $\mathbb{R}$  para un número ordinario (véase Figura 9). Tal intervalo será un conjunto binario clásico,  $\mathbf{A}$ , que representa cierto tipo de incertidumbre acerca del valor auténtico de dicho número. Así, si suponemos que  $\mathbf{A} = [a_1, a_3]$  quiere decir que el número en cuestión no puede ser menor que  $a_1$  ni mayor que  $a_3$ , podemos expresarlo por medio de la función de pertenencia en la forma:

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{A}}(x) &= 0, & x < a_1 \\ &= 1, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ &= 0, & x > a_3 \end{aligned}$$

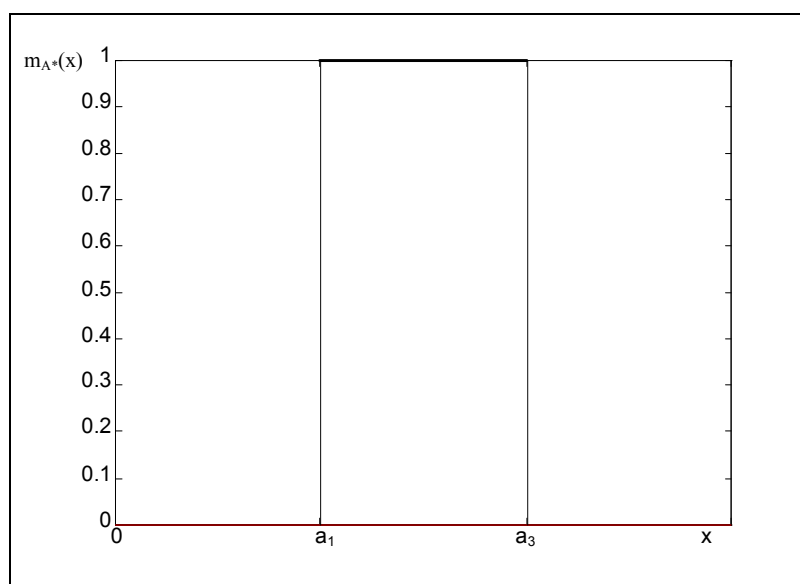


Figura 9 : Número ordinario  $\mathbf{A}$  dado por un intervalo de confianza

Consideremos, ahora, un número difuso como un subconjunto difuso *normal* y *convexo* en  $\mathbb{R}$ . La condición de normalidad implica que,

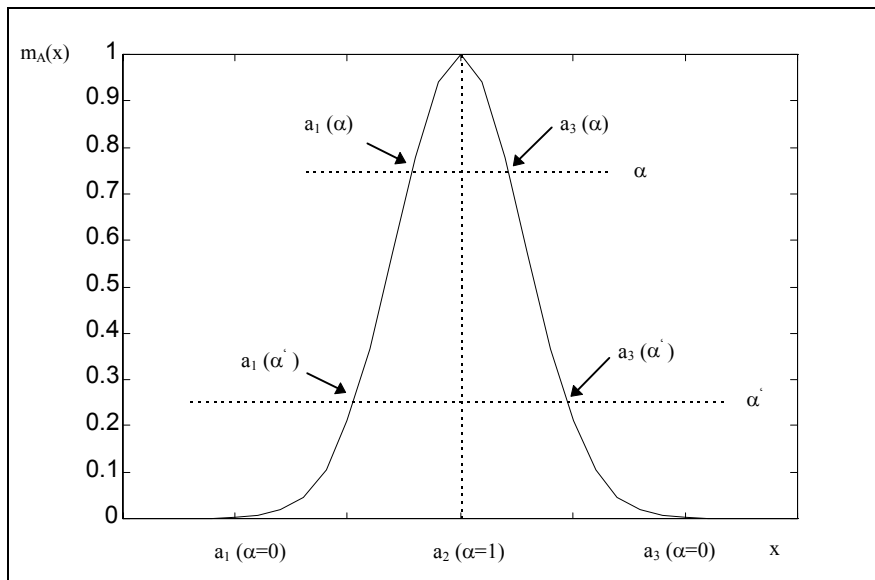
$$\exists x \in \mathbb{R} : m_A(x) = 1$$

mientras que la convexidad puede, también, expresarse con la condición de que los  $\alpha$ -cortes  $\mathbf{A}_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}]$  están *anidados*. Es decir,

$$(\alpha' < \alpha) \Rightarrow (a_1^{(\alpha')} \leq a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha')} \geq a_3^{(\alpha)})$$

y si representamos el  $\alpha$ -corte por  $\mathbf{A}_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}]$ , la condición de convexidad implica, como puede observarse en la Figura 10, que

$$(\alpha' < \alpha) \Rightarrow (\mathbf{A}_\alpha \subset \mathbf{A}_{\alpha'})$$



**Figura 10: Número difuso normal y convexo con  $\alpha$ -cortes**

La realización de operaciones aritméticas con números difusos puede establecerse en función de la aritmética de intervalos de confianza. Supongamos que tenemos dos intervalos de confianza cualesquiera, tales como,

$$\mathbf{A} = [a_1, a_3] \text{ y } \mathbf{B} = [b_1, b_3], \text{ con } a_1, a_3, b_1, b_3 \in \mathbb{R}$$

Vamos a realizar algunas operaciones con este tipo de intervalos, ilustrándolas con ejemplos. Como veremos, en general, cuando aplicamos una función a un conjunto de intervalos, el límite inferior (superior) del intervalo resultante será el valor mínimo (máximo) calculado aplicando esa función a todas las posibles combinaciones de

valores pertenecientes a los intervalos considerados. Los símbolos  $\wedge$  y  $\vee$  significarán, en adelante, mínimo y máximo, respectivamente.

- **Suma:**

$$[a_1, a_3] (+) [b_1, b_3] = [a_1+b_1, a_3+b_3]$$

Ejemplo 6.1-1:

$$\mathbf{A} = [3, 5], \quad \mathbf{B} = [-2, 7]$$

$$\mathbf{A} (+) \mathbf{B} = [1, 12]$$

- **Resta:**

$$[a_1, a_3] (-) [b_1, b_3] = [a_1-b_3, a_3-b_1]$$

Ejemplo 6.1-2:

$$\mathbf{A} = [3, 5], \quad \mathbf{B} = [-2, 7]$$

$$\mathbf{A} (-) \mathbf{B}^* = [-4, 7]$$

- **Multiplicación:**

$$[a_1, a_3] (\cdot) [b_1, b_3] = [a_1 \cdot b_1 \wedge a_1 \cdot b_3 \wedge a_3 \cdot b_1 \wedge a_3 \cdot b_3, a_1 \cdot b_1 \vee a_1 \cdot b_3 \vee a_3 \cdot b_1 \vee a_3 \cdot b_3]$$

Si el conjunto difuso está definido sobre  $\mathbb{R}^+$ , sería  $[a_1, a_3] (\cdot) [b_1, b_3] = [a_1 b_1, a_3 b_3]$

Ejemplo 6.1-3:

$$\mathbf{A} = [3, 5], \quad \mathbf{B} = [-2, 7]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} (\cdot) \mathbf{B} &= [3, 5] (\cdot) [-2, 7] = [\min\{-6, 21, -10, 35\}, \max\{-6, 21, -10, 35\}] = \\ &= [-10, 35] \end{aligned}$$

- **Inverso:**

$$[a_1, a_3]^{-1} = [1/a_1 \wedge 1/a_3, 1/a_1 \vee 1/a_3], \text{ excepto para } a_1 \leq 0 \leq a_3$$

Si el conjunto difuso está definido sobre  $\mathbb{R}^+$ , sería  $[a_1, a_3]^{-1} = [1/a_3, 1/a_1]$

Ejemplo 6.1-3:

$$\mathbf{A} = [3, 5], \quad \mathbf{A}^{-1} = [\min\{1/3, 1/5\}, \max\{1/3, 1/5\}] = [1/5, 1/3]$$

- **División:**

$[a_1, a_3] (\cdot) [b_1, b_3] = [a_1/b_1 \wedge a_1/b_3 \wedge a_3/b_1 \wedge a_3/b_3, a_1/b_1 \vee a_1/b_3 \vee a_3/b_1 \vee a_3/b_3]$ ,  
excepto para  $a_1 \leq 0 \leq a_3$ .

Si el conjunto difuso está definido sobre  $\mathbb{R}^+$ , sería:

$$[a_1, a_3] (\cdot) [b_1, b_3] = [a_1/b_3, a_3/b_1].$$

Ejemplo 6.1-4:

$$\mathbf{A} = [4, 8], \quad \mathbf{B} = [2, 4]$$

$$\mathbf{A} (\cdot) \mathbf{B} = [\min\{4/2, 4/4, 8/2, 8/4\}, \max\{4/2, 4/4, 8/2, 8/4\}] = [1, 4]$$

- **Mínimo:**

$$[a_1, a_3] (\wedge) [b_1, b_3] = [a_1 \wedge b_1, a_3 \wedge b_3]$$

Ejemplo 6.1-5:

$$\mathbf{A} = [4, 8], \quad \mathbf{B} = [-2, 4]$$

$$\mathbf{A} (\wedge) \mathbf{B} = [\min\{4, -2\}, \min\{8, 4\}] = [-2, 4]$$

- **Máximo:**

$$[a_1, a_3] (\vee) [b_1, b_3] = [a_1 \vee b_1, a_3 \vee b_3]$$

Ejemplo 6.1-6:

$$\mathbf{A} = [4, 8], \quad \mathbf{B} = [-2, 4]$$

$$\mathbf{A} (\vee) \mathbf{B} = [\max\{4, -2\}, \max\{8, 4\}] = [4, 8]$$

- **Multiplicación por un número real:**

Un número real puede interpretarse como  $a = [a, a]$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , por tanto,

$$a[b_1, b_3] = [a \cdot b_1 \wedge a \cdot b_3, a \cdot b_1 \vee a \cdot b_3]$$

Ejemplo 6.1-7:

$$a = 4, \quad \mathbf{B} = [2, 5]$$

$$a\mathbf{B} = 4[2, 5] = [\min\{8, 20\}, \max\{8, 20\}] = [8, 20]$$

Todo estos resultados pueden aplicarse a números difusos, expresándolos en función de cada uno de sus  $\alpha$ -cortes. Por ejemplo, en el caso de la suma,

$$[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] (+) [b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}] = [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)} + b_3^{(\alpha)}],$$

$$\forall \alpha \in [0, 1], a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)} \in \mathbb{R}$$

Estos resultados son válidos tanto para números difusos en  $\mathbb{N}$  (naturales) como en  $\mathbb{Z}$  (enteros).

## 6.2. Números difusos triangulares.

Los números difusos triangulares son, por su relativamente cómoda manipulación los más usados en la práctica, si bien diversos autores han cuestionado la utilización de los mismos como panacea general. Como es evidente, son la versión más simple del concepto general de número difuso L-R expuesto anteriormente. Las funciones L y R son lineales. Un número difuso triangular (NDT) tiene, como su nombre indica la forma triangular recogida en la Figura 11, y puede ser definido mediante la terna  $(a_1, a_2, a_3)$ .

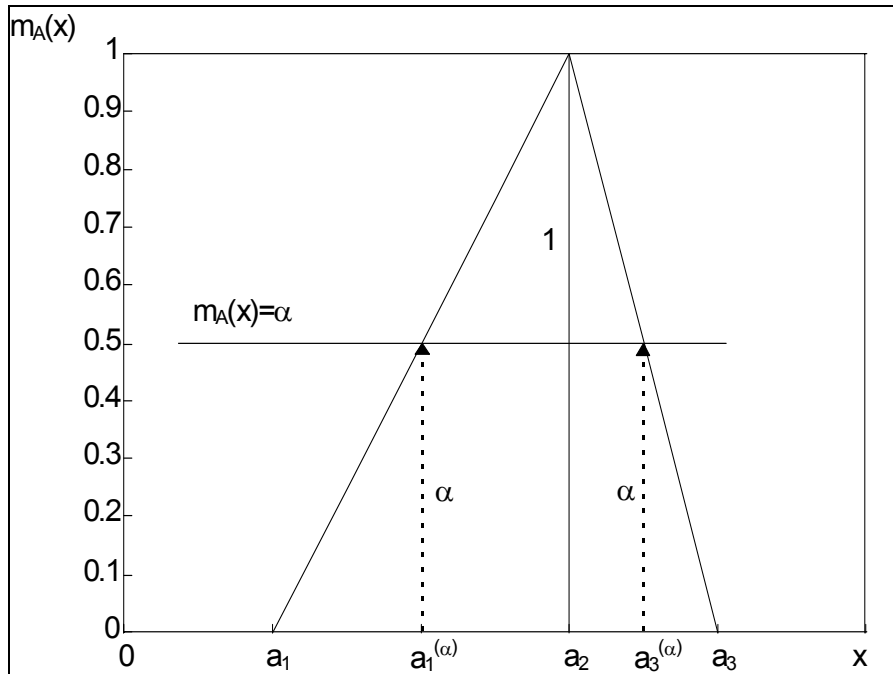


Figura 11: Número difuso triangular  $A=(a_1, a_2, a_3)$ .

La función de pertenencia para este número difuso triangular viene dada por:

$$\begin{aligned}
 m_A(x) &= 0, & x < a_1 \\
 &= (x-a_1) / (a_2-a_1), & a_1 \leq x \leq a_2 \\
 &= (a_3-x) / (a_3-a_2), & a_2 \leq x \leq a_3 \\
 &= 0, & x > a_3
 \end{aligned}$$

Alternativamente, se puede definir un número difuso triangular definiendo el intervalo de confianza de nivel  $\alpha$  como sigue:

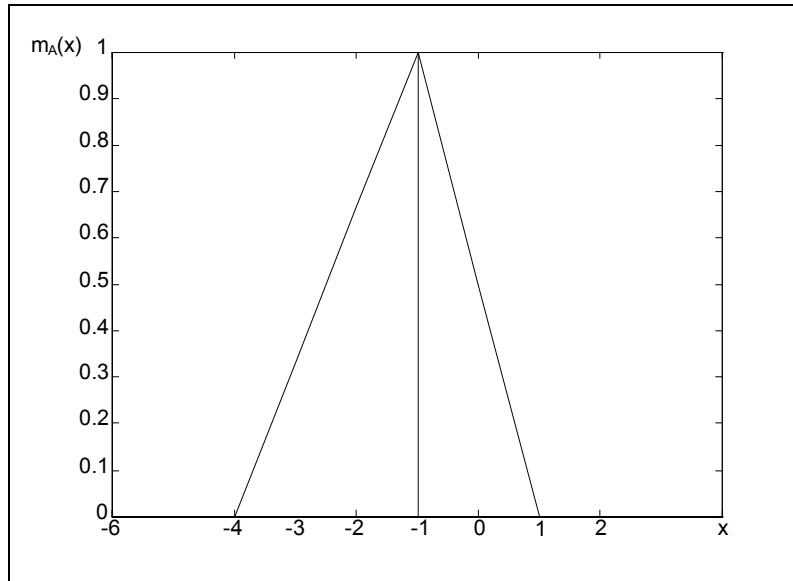
$$\mathbf{A}_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] = [a_1 + (a_2-a_1)\alpha, a_3 - (a_3-a_2)\alpha], \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

Ejemplo 6.2-1:

El número difuso triangular  $(-4, -1, 1)$ , tiene como función de pertenencia:

$$\begin{aligned}
 m_A(x) &= 0, \quad x < -4 \\
 &= (x + 4) / 3, \quad -4 \leq x \leq -1 \\
 &= (1-x) / 2, \quad -1 \leq x \leq 1 \\
 &= 0, \quad x > 1
 \end{aligned}$$

y su representación gráfica es la de la Figura 12.



**Figura 12: Número difuso triangular A=(-4, -1, 1)**

Como se ha dicho anteriormente, también podemos definir este número difuso utilizando intervalos de confianza de nivel  $\alpha$ , como sigue:

$$[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] = [-4 + (-1 - (-4))\alpha, 1 - (1 - (-1))\alpha] = [3\alpha - 4, 1 - 2\alpha]$$

Obsérvese que para  $\alpha=0$ , se obtiene como intervalo la base del triángulo  $[-4, 1]$ , y para  $\alpha=1$ , se tiene el punto de máximo nivel de presunción  $[1, 1]$ . Puede comprobarse fácilmente que se cumple la expresión formulada para cualquier valor intermedio de  $\alpha$ .

### 6.3. Números difusos trapezoidales.



Son la versión más sencilla del concepto de intervalo difuso L-R que ya hemos visto. En este caso, las funciones L y R son, también, lineales y no se obtiene un punto cuando  $\alpha = 1$ , sino una línea horizontal sobre un intervalo,  $(a_2, a_3)$ , tal como muestra la Figura 13.

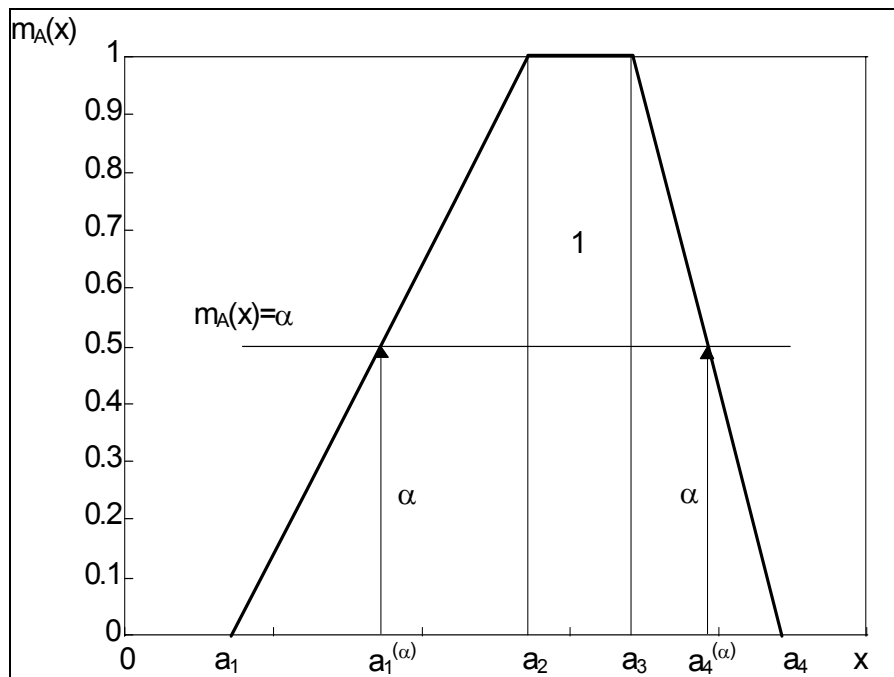


Figura 13: Número difuso trapezoidal  $A=(a_1, a_2, a_3, a_4)$

Los números difusos trapezoidales, siguiendo el criterio expuesto para los triangulares, pueden ser representados por el siguiente cuádruple:  $A=(a_1, a_2, a_3, a_4)$ . También puede interpretarse en términos de intervalos de confianza de nivel  $\alpha$ , como sigue:

$$A_\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_4 - (a_4 - a_3)\alpha], \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

La función de pertenencia de un número difuso triangular vendría dada por,

$$\begin{aligned} m_A(x) &= 0, & x < a_1 \\ &= (x - a_1) / (a_2 - a_1), & a_1 \leq x \leq a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1, \quad a_2 \leq x \leq a_3 \\
 &= (a_4 - x) / (a_4 - a_3), \quad a_3 \leq x \leq a_4 \\
 &= 0, \quad x > a_4.
 \end{aligned}$$

Puede observarse que un número difuso triangular puede interpretarse como un caso especial de un número difuso trapezoidal con  $a_2 = a_3$ . Nosotros vamos a prestar atención al caso de los números difusos triangulares, generalmente los más aplicados por su sencillez y flexibilidad.

#### 6.4. Operaciones aritméticas con números difusos.

Antes que nada, conviene adelantar que si bien la suma, la resta y la multiplicación por un número real de números difusos triangulares, da como resultado un número difuso triangular, operaciones como la multiplicación, inverso, división, máximo y mínimo, entre otras, no arrojan necesariamente como resultado un número difuso triangular. Sin embargo, como veremos, se han propuesto algunas aproximaciones al respecto. Definiremos un número difuso triangular mediante la terna ya conocida y aplicaremos los conceptos vistos para los intervalos de confianza. Veamos seguidamente las principales operaciones.

- **Suma:**

Sean  $A=(a_1, a_2, a_3)$  y  $B=(b_1, b_2, b_3)$  dos números difusos triangulares. Su suma vendría dada por:

$$A (+) B = (a_1, a_2, a_3) (+) (b_1, b_2, b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$

También podríamos usar el concepto de intervalo de confianza de nivel  $\alpha$ :

$$\mathbf{A}_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 - (a_3 - a_2)\alpha].$$

$$\mathbf{B}_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}] = [b_1 + (b_2 - b_1)\alpha, b_3 - (b_3 - b_2)\alpha].$$

Ejemplo 6.4-1:

$$A=(-3, 2, 4) \text{ y } B=(-1, 0, 5)$$

$$A (+) B = (-4, 2, 9)$$

De otra forma,

$$\mathbf{A}_\alpha = [-3+(2+3)\alpha, 4-(4-2)\alpha] = [5\alpha-3, 4-2\alpha]$$

$$\mathbf{B}_\alpha = [-1+(0+1)\alpha, 5-(5-0)\alpha] = [\alpha-1, 5-5\alpha]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha (+) \mathbf{B}_\alpha &= [(5\alpha-3)+(\alpha-1), (4-2\alpha)+(5-5\alpha)] = \\ &= [6\alpha-4, 9-7\alpha] \end{aligned}$$

Como puede comprobarse, para  $\alpha = 0$ , tenemos que  $\mathbf{A}_0 (+) \mathbf{B}_0 = [-4, 9]$ , y, para  $\alpha = 1$ , resulta que  $\mathbf{A}_1 (+) \mathbf{B}_1 = [2, 2] = 2$ . El número es el  $[-4, 2, 9]$ .

Los cálculos efectuados mediante intervalos resultan, obviamente, mucho menos complicados que los efectuados mediante la función de pertenencia.

- **Resta:**

$$A (-) B = (a_1, a_2, a_3) (-) (b_1, b_2, b_3) = (a_1-b_3, a_2-b_2, a_3-b_1)$$

Ejercicio 6.4-2:

$$A=(-3, 2, 4) \text{ y } B=(-1, 0, 5)$$

$$A (-) B = (-8, 2, 5).$$

Utilizando niveles de presunción tendríamos,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha (-) \mathbf{B}_\alpha &= [(5\alpha-3)-(5-5\alpha), (4-2\alpha)-(\alpha-1)] = \\ &= [10\alpha-8, 5-3\alpha]. \end{aligned}$$

Puede comprobarse que para  $\alpha=0$  se tiene que  $\mathbf{A}_0 (-) \mathbf{B}_0 = [-8, 5]$  y, para  $\alpha=1$  resulta que  $\mathbf{A}_1 (-) \mathbf{B}_1 = [2, 2] = 2$ .

- **Multiplicación por  $k \in \mathbb{R}$ :**

Si  $A=(a_1, a_2, a_3)$ , tendremos que  $k \cdot A = (ka_1, ka_2, ka_3)$ , para  $k$  positivo.

De igual forma, para el caso de trabajar con niveles de confianza, tendríamos que,

$$k \cdot \mathbf{A}_\alpha = [k\{a_1+(a_2-a_1)\alpha\}, k\{a_3-(a_3-a_2)\alpha\}]$$

Ejemplo 6.4-3:

Sea  $A = (-3, 2, 4)$  y multipliquemos por  $k=2$ . La respuesta será:

$$k \cdot A = (-6, 4, 8)$$

Si lo hacemos con niveles de confianza, la solución vendría dada en la forma,

$$k \cdot \mathbf{A}_\alpha = (2\{-3+(2+3)\alpha\}, 2\{4-(4-2)\alpha\}) = (10\alpha-6, 8-4\alpha)$$

que cumple las condiciones requeridas para  $\alpha=0$  y para  $\alpha=1$ .

- **Simétrico (imagen):**

El simétrico de A, que llamaremos  $-(A)$ , se define como  $-(A) = (-a_1, -a_2, -a_3)$

Todas estas operaciones dan como resultado números difusos triangulares. No ocurre así con operaciones aritméticas de más alto nivel, en las que, además, no es posible utilizar las ternas oportunas sino que hay que echar mano de los intervalos de confianza para cada nivel  $\alpha$ . Para el cálculo en R hay que descomponer los niveles de tal forma que sea posible comprobar el efecto de posibles valores positivos y negativos sobre el máximo y el mínimo cuando  $\alpha$  aumenta de 0 a 1. Sin embargo, los cálculos en  $R^+$  son muy sencillos. Veamos un ejemplo para aclarar un poco este tema.

Ejemplo 6.4-4:

Sean  $A=(2, 3, 5)$  y  $B=(1, 4, 8)$  dos números triangulares difusos. Veamos cuál es el producto de ambos,  $A \cdot B$ .

Obtenemos, en primer lugar, los intervalos de confianza:

$$\mathbf{A}_\alpha = [2+(3-2)\alpha, 5-(5-3)\alpha] = [2+\alpha, 5-2\alpha]$$

$$\mathbf{B}_\alpha = [1+(4-1)\alpha, 8-(8-4)\alpha] = [1+3\alpha, 8-4\alpha]$$

La multiplicación, para cada nivel  $\alpha$ , viene dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha &= [2+\alpha, 5-2\alpha] \cdot [1+3\alpha, 8-4\alpha] = \\ &= [(2+\alpha)(1+3\alpha), (5-2\alpha)(8-4\alpha)] = \\ &= [3\alpha^2 + 7\alpha + 2, 8\alpha^2 - 36\alpha + 40]. \end{aligned}$$

Nótese que para  $\alpha=0$ , se tiene que  $\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = [2, 40]$  y que para  $\alpha=1$ , el punto con mayor presunción sería el dado por  $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 = [12, 12]$ , como se esperaba. Sin embargo, las funciones de pertenencia han dejado de ser lineales y su forma es parabólica (obsérvese la Figura 14). El resultado obtenido no es un número difuso triangular, sino que forma parte del conjunto, más general, de números difusos que ya vimos: los llamados de tipo L-R. Veremos, a continuación, como podemos aproximarnos a este resultado mediante un número difuso triangular (P en la figura).

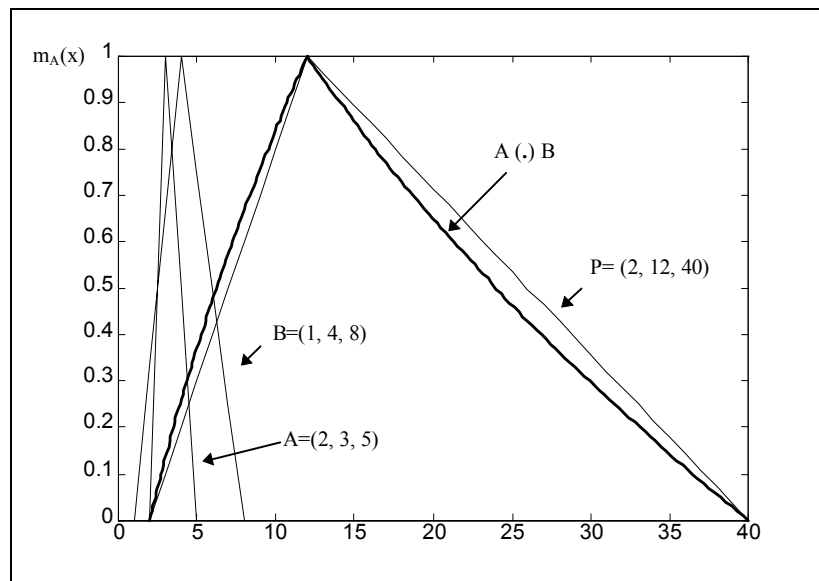


Figura 14: Multiplicación de números difusos triangulares.

### Aproximaciones triangulares para diversas operaciones con NDT:

Operaciones matemáticas no lineales pueden dificultar enormemente los cálculos con números difusos. Por eso se han propuesto algunas aproximaciones en términos de números difusos triangulares, que vamos a ver seguidamente.

#### • Producto en $\mathbf{R}^+$ :

El producto de dos números difusos triangulares,  $A \cdot B$ , puede definirse por medio de sus  $\alpha$ -cortes como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha &= [a_1+(a_2-a_1)\alpha, a_3-(a_3-a_2)\alpha] \cdot [b_1+(b_2-b_1)\alpha, b_3-(b_3-b_2)\alpha] = \\ &= [(a_1+(a_2-a_1)\alpha)(b_1+(b_2-b_1)\alpha), (a_3-(a_3-a_2)\alpha)(b_3-(b_3-b_2)\alpha)] = \\ &= [a_1b_1+(a_1(b_2-b_1)+b_1(a_2-a_1))\alpha+(a_2-a_1)(b_2-b_1)\alpha^2, \\ &\quad a_3b_3-(a_3(b_3-b_2)+b_3(a_3-a_2))\alpha+(a_3-a_2)(b_3-b_2)\alpha^2] \end{aligned}$$

Como puede comprobarse,

$$\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = [a_1b_1, a_3b_3] \quad , \quad \text{para } \alpha=0$$

$$\mathbf{A}_1 (\cdot) \mathbf{B}_1 = [a_2b_2, a_2b_2] = a_2b_2 \quad , \quad \text{para } \alpha=1$$

La aproximación propuesta para  $C = A (\cdot) B$  es un número difuso triangular P, definido de la siguiente forma:

$$P = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3)$$

Los  $\alpha$ -cortes de P vendrían dados por:

$$P_\alpha = [a_1b_1+(a_2b_2-a_1b_1)\alpha, a_3b_3+(a_3b_3-a_2b_2)\alpha]$$

Para evaluar la aproximación de A mediante P, podemos estudiar la *divergencia* a la izquierda (función L del número difuso) y a la derecha (función R) entre ambos. La divergencia a la izquierda se define en términos de  $\alpha$ -cortes, como la diferencia entre las correspondientes funciones L de los números difusos y la divergencia a la derecha como la diferencia entre las respectivas funciones R. En la Figura 14, para cada nivel de presunción dado por  $\alpha$ , vendrían representadas por la diferencia entre la línea discontinua delgada (número difuso triangular por aproximación) y la continua gruesa del número difuso L-R, realmente resultante del producto A ( $\cdot$ ) B.

Así, pues, la divergencia a la izquierda, para cada nivel de presunción  $\alpha$ , sería:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha^{(l)} &= (a_1b_1+(a_1(b_2-b_1)+b_1(a_2-a_1))\alpha+(a_2-a_1)(b_2-b_1)\alpha^2) - (a_1b_1+(a_2b_2- \\ & a_1b_1)\alpha) = \\ &= (a_2-a_1)(b_2-b_1)(\alpha^2 - \alpha), \quad \text{para } \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

Su valor máximo depende solo de  $\alpha$  y se produce, como puede verse, en  $\alpha=0.5$ . Por consiguiente, la divergencia máxima a la izquierda, que nos puede servir como una medida de la aproximación triangular (P) al número difuso L-R que hemos llamado C, vendría dada por:

$$\varepsilon_{\max}^{(l)} = -0.25(a_2-a_1)(b_2-b_1)$$

De igual forma, la divergencia a la derecha entre C y su aproximación triangular P, sería la siguiente:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha}^{(r)} &= (a_3b_3 - (a_3(b_3 - b_2) + b_3(a_3 - a_2))\alpha + (a_3 - a_2)(b_3 - b_2)\alpha^2) - (a_3b_3 + (a_3b_3 - \\ &a_2b_2)\alpha) = \\ &= (a_3 - a_2)(b_3 - b_2)(\alpha^2 - \alpha).\end{aligned}$$

La divergencia máxima a la derecha será, por tanto,

$$\varepsilon_{\max}^{(r)} = -0.25(a_3 - a_2)(b_3 - b_2)$$

Continuando con el Ejemplo 6.4-4, tendríamos el siguiente resultado sobre las divergencias a izquierda y derecha:

$$\varepsilon_{\alpha}^{(l)} = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(\alpha^2 - \alpha) = 3(\alpha^2 - \alpha), \text{ para } \alpha \in [0, 1]$$

con un valor máximo de  $\varepsilon_{\max}^{(l)} = -0.25(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) = (-0.25)(3) = -0.75$ .

Para la divergencia derecha tendríamos que,

$$\varepsilon_{\alpha}^{(r)} = (a_3 - a_2)(b_3 - b_2)(\alpha^2 - \alpha) = 8(\alpha^2 - \alpha), \text{ para } \alpha \in [0, 1]$$

con una divergencia máxima a la derecha de  $\varepsilon_{\max}^{(r)} = -0.25(a_3 - a_2)(b_3 - b_2) = (-0.25)(8) = -2$ .

La Figura 14 ilustra los resultados obtenidos.

- **Inverso en  $\mathbf{R}_0^+$ :**

Si  $A \in \mathbf{R}_0^+$  es un número difuso triangular definido mediante sus  $\alpha$ -cortes como sigue:

$$\mathbf{A}_{\alpha} = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 - (a_3 - a_2)\alpha]$$

su inverso vendrá dado por,

$$\mathbf{A}_\alpha^{-1} = [1 / (a_3 - (a_3 - a_2)\alpha), 1 / (a_1 + (a_2 - a_1)\alpha)], \text{ para } \alpha \in [0, 1]$$

Si hacemos la aproximación triangular mediante  $P = (1/a_3, 1/a_2, 1/a_1)$ , los  $\alpha$ -cortes de  $P$  serían:

$$\mathbf{P}_\alpha = [(1/a_3) + ((1/a_2) - (1/a_3))\alpha, (1/a_1) - ((1/a_1) - (1/a_2))\alpha]$$

y las divergencias vendrían dadas por las expresiones,

$$\varepsilon_\alpha^{(l)} = (1 / (a_3 - (a_3 - a_2)\alpha)) - ((1/a_3) + ((1/a_2) - (1/a_3))\alpha)$$

$$\varepsilon_\alpha^{(r)} = (1 / (a_1 + (a_2 - a_1)\alpha)) - ((1/a_1) - ((1/a_1) - (1/a_2))\alpha)$$

que tienen su máximo en  $\alpha_l = (a_3 - (a_2 a_3)^{1/2}) / (a_3 - a_2)$  y  $\alpha_r = ((a_1 a_2)^{1/2} - a_1) / (a_2 - a_1)$ , respectivamente. Esto hace que las divergencias máximas vengan dadas por las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_{\max}^{(l)} = -(1/a_2^{1/2} - 1/a_3^{1/2})^2 \text{ y } \varepsilon_{\max}^{(r)} = -(1/a_1^{1/2} - 1/a_2^{1/2})^2$$

#### Ejemplo 6.4-5:

Sea  $A = (1.2, 1.8, 3)$  un NDT. Vamos a obtener su inverso y las discrepancias máximas a izquierda y derecha.

Tendríamos que  $\mathbf{A}_\alpha = [1.2 + 0.6\alpha, 3 - 1.2\alpha]$  y, por consiguiente, el NDT exacto sería:

$$\mathbf{A}_\alpha^{-1} = [1/(3 - 1.2\alpha), 1/(1.2 + 0.6\alpha)]$$

mientras que la aproximación triangular vendría dada por,

$$P = (1/3, 1/1.8, 1/1.2) = (0.333, 0.555, 0.833)$$

que expresándolo en función de sus  $\alpha$ -cortes sería:



$$\mathbf{P}_\alpha = [0.333+0.222\alpha, 0.833-0.278\alpha]$$

Los valores máximos son, por tanto,  $\varepsilon_{\max}^{(l)} = -(1/a_2^{1/2} - 1/a_3^{1/2})^2 = -0.0282$ , para la divergencia del lado izquierdo, y  $\varepsilon_{\max}^{(r)} = -(1/a_1^{1/2} - 1/a_2^{1/2})^2 = -0.0281$ , para la del lado derecho. La Figura 15 ilustra los resultados de este ejemplo numérico.

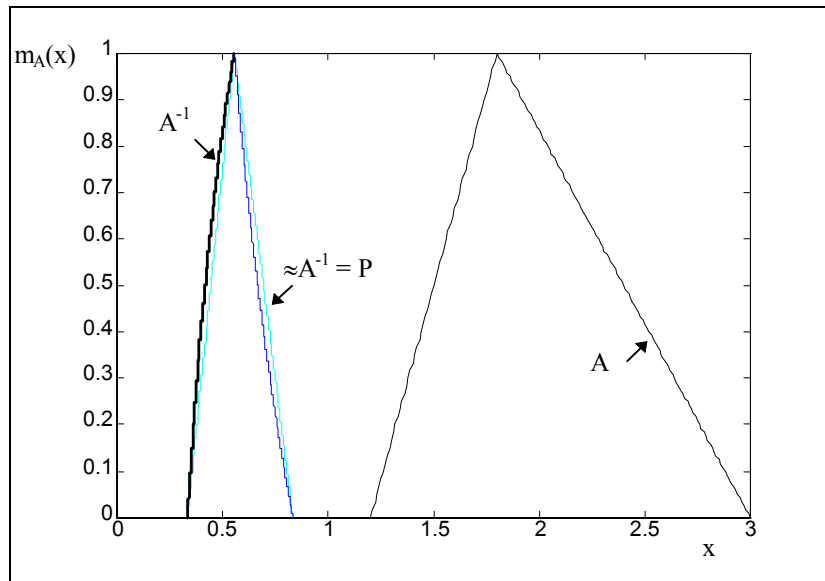


Figura 15: Inverso de A y su aproximación triangular.

- **Division:**

Si  $A \in \mathbb{R}^+$  y  $B \in \mathbb{R}_0^+$  (números reales excluido el cero) son dos números difusos triangulares, la división de A por B mediante sus correspondientes  $\alpha$ -cortes vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha (\cdot) \mathbf{B}_\alpha &= [a_1+(a_2-a_1)\alpha, a_3-(a_3-a_2)\alpha] (\cdot) [b_1+(b_2-b_1)\alpha, b_3-(b_3-b_2)\alpha] = \\ &= [(a_1+(a_2-a_1)\alpha) / (b_3-(b_3-b_2)\alpha), (a_3-(a_3-a_2)\alpha) / (b_1+(b_2-b_1)\alpha)]. \end{aligned}$$

La aproximación triangular correspondiente sería:

$$\mathbf{P} = [a_1/b_3, a_2/b_2, a_3/b_1]$$

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, puede demostrarse que las divergencias máximas a izquierda y derecha vienen dadas en los valores:

$$\alpha_l = (b_3 - (b_2 b_3)^{1/2}) / (b_3 - b_2), \text{ para } (a_1 / b_3) < (a_2 / b_2)$$

$$\alpha_r = ((b_1 b_2)^{1/2} - b_1) / (b_2 - b_1), \text{ para } (a_3 / b_1) > (a_2 / b_2)$$

Ejemplo 6.4-6:

Calcular  $A \text{ (:) } B$ , siendo  $A = (2, 7, 13)$  y  $B = (4, 8, 11)$ .

Definamos, en primer lugar, los  $\alpha$ -cortes:

$$A_\alpha = [2 + 5\alpha, 13 - 6\alpha], \quad B_\alpha = [4 + 4\alpha, 11 - 3\alpha]$$

por lo que el resultado exacto sería:

$$A_\alpha \text{ (:) } B_\alpha = [(2 + 5\alpha) / (11 - 3\alpha), (13 - 6\alpha) / (4 + 4\alpha)]$$

La aproximación mediante un número difuso triangular será:

$$P = (2/11, 7/8, 13/4),$$

con

$$\begin{aligned} P_\alpha &= [2/11 + (7/8 - 2/11)\alpha, 13/4 - (13/4 - 7/8)\alpha] = \\ &= [0.1818 + 0.6931\alpha, 3.25 - 2.375\alpha]. \end{aligned}$$

Los máximos, a izquierda y derecha, se producen, respectivamente, en

$$\alpha_l = 0.5397 \text{ y } \alpha_r = 0.4142$$

siendo, por tanto, las divergencias máximas las que siguen:

$$\varepsilon_{\max}^{(l)} = ((2+5\alpha) / (11-3\alpha)) - ((0.1818+0.6931\alpha)) \big|_{\alpha=0.5397} = - 0.0549$$

$$\varepsilon_{\max}^{(r)} = ((13-6\alpha) / (4+4\alpha)) - ((3.25 - 2.375\alpha)) \big|_{\alpha=0.4142} = - 0.4075$$

- **Logaritmo:**

Definiremos el logaritmo de un número difuso  $A \in [1, \infty)$  como,

$$\begin{aligned} (\ln A)_\alpha &= \ln[a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 + (a_3 - a_2)\alpha] = \\ &= [\ln(a_1 + (a_2 - a_1)\alpha), \ln(a_3 + (a_3 - a_2)\alpha)]. \end{aligned}$$

La correspondiente aproximación triangular para esta operación sería:

$$P = (\ln a_1, \ln a_2, \ln a_3)$$

cuyo  $\alpha$ -corte será:

$$P_\alpha = [\ln a_1 + (\ln a_2 - \ln a_1)\alpha, \ln a_3 - (\ln a_3 - \ln a_2)\alpha].$$

Puede demostrarse que la máxima divergencia ocurre para los valores:

$$\begin{aligned} \alpha_l &= (1 / (\ln a_2 - \ln a_1)) - (a_1 / a_2 - a_1) \\ \alpha_r &= (a_3 / (a_3 - a_2)) - (1 / (\ln a_3 - \ln a_2)) \end{aligned}$$

Ejemplo 6.4-7:

Obtener el logaritmo del número difuso triangular  $A = (2, 4, 7)$ .

Su valor exacto, mediante los  $\alpha$ -cortes, vendría dado por la expresión:

$$(\ln A)_\alpha = [\ln(2+2\alpha), \ln(7-3\alpha)]$$

mientras que la aproximación triangular correspondiente es:

$$P = (\ln 2, \ln 4, \ln 7)$$

cuyo  $\alpha$ -corte sería,

$$P_\alpha = [\ln 2 + (\ln 4 - \ln 2)\alpha, \ln 7 - (\ln 7 - \ln 4)\alpha]$$

Para calcular las divergencias, puede comprobarse que los máximos se dan para los valores de  $\alpha$  siguientes:

$$\alpha_l = (1 / (\ln 4 - \ln 2)) - (2 / (4 - 2)) = 0.4426$$

$$\alpha_r = (7 / (7 - 4)) - (1 / (\ln 7 - \ln 3)) = 0.5463$$

Por tanto, las divergencias máximas serán:

$$\varepsilon_{\max}^{(l)} = \ln(2 + 2\alpha) - (\ln 2 + (\ln 2)\alpha) |_{\alpha=0.4426} = 0.0597$$

$$\varepsilon_{\max}^{(r)} = \ln(7 - 3\alpha) - (\ln 7 - (\ln 7/4)\alpha) |_{\alpha=0.5463} = 0.0389$$

Puede observarse, una vez más, que las diferencias son realmente pequeñas y que la aproximación triangular funciona bastante bien.

- **Operación exponencial:**

La exponenciación de un número difuso  $A \subset \mathbb{R}^+$ , vendría dado por los  $\alpha$ -cortes,

$$(\mathbf{exp}(A))_\alpha = \exp[a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 - (a_3 - a_2)\alpha] = [\exp(a_1 + (a_2 - a_1)\alpha), \exp(a_3 - (a_3 - a_2)\alpha)]$$

Se define la aproximación triangular correspondiente como,

$$P = (\exp(a_1), \exp(a_2), \exp(a_3))$$

cuyo  $\alpha$ -corte vendrá dado por la expresión:

$$P_\alpha = [\exp(a_1) + (\exp(a_2) - \exp(a_1))\alpha, \exp(a_3) - (\exp(a_3) - \exp(a_2))\alpha]$$

Las correspondientes divergencias a izquierda y derecha serían, por lo tanto,

$$\varepsilon_\alpha^{(l)} = \exp(a_1 + (a_2 - a_1)\alpha) - (\exp(a_1) + (\exp(a_2) - \exp(a_1))\alpha)$$

$$\varepsilon_\alpha^{(r)} = \exp(a_3 - (a_3 - a_2)\alpha) - (\exp(a_3) - (\exp(a_3) - \exp(a_2))\alpha)$$

Puede comprobarse que los máximos se dan para los valores siguientes valores de  $\alpha$ :

$$\alpha_l = (-a_1 / (a_2 - a_1)) + (1 / (a_2 - a_1)) \ln ((\exp(a_2) - \exp(a_1)) / (a_2 - a_1))$$

$$\alpha_r = (a_3 / (a_3 - a_2)) - (1 / (a_3 - a_2)) \ln ((\exp(a_3) - \exp(a_2)) / (a_3 - a_2))$$

Veamos un ejemplo.

#### Ejemplo 6.4-8:

Calcular el valor de  $\exp(A)$ , siendo  $A=(0.5, 1, 2)$ .

Como hemos dicho anteriormente, el valor de la aproximación triangular  $P$  y del valor correcto, expresado por el  $\alpha$ -corte, serán:

$$P=(\exp(0.5), \exp(1), \exp(2))$$

$$(\mathbf{exp(A)})_\alpha = [\exp(0.5+0.5\alpha), \exp(2-\alpha)]$$

El  $\alpha$ -corte de la aproximación triangular es:

$$P_\alpha = [\exp(0.5) + (\exp(1) - \exp(0.5))\alpha, \exp(2) - (\exp(2) - \exp(1))\alpha]$$

Los valores en que se alcanzan la divergencia máxima son:

$$\alpha_l = 0.52079 \quad \text{y} \quad \alpha_r = 0.54603$$

por lo que las divergencias máximas a izquierda y derecha serían:

$$\varepsilon_{\max}^{(l)} = \exp(0.5+0.5\alpha) - (\exp(0.5) + (\exp(1) - \exp(0.5))\alpha) |_{\alpha=0.5279} = 0.0666$$

$$\varepsilon_{\max}^{(r)} = \exp(2-\alpha) - (\exp(2) - (\exp(2) - \exp(1))\alpha) |_{\alpha=0.54132} = -0.5603$$

En este caso, la aproximación a la izquierda es muy buena, pero a la derecha arroja un divergencia claramente relevante.

- **Potenciación:**

Vamos a ver, ahora, la potencia de orden  $n \in \mathbb{N}_0$  (números naturales, excepto el cero) de un número difuso triangular  $A \subset \mathbb{R}^+$ .

La solución exacta, representada por sus  $\alpha$ -cortes sería la siguiente:

$$(\mathbf{A}^n)_\alpha = [(a_1 + (a_2 - a_1)\alpha)^n, (a_3 - (a_3 - a_2)\alpha)^n]$$

Si aproximamos mediante  $P = (a_1^n, a_2^n, a_3^n)$ , el  $\alpha$ -corte correspondiente sería:

$$P_\alpha = (a_1^n + (a_2^n - a_1^n)\alpha, a_3^n - (a_3^n - a_2^n)\alpha)$$

Las divergencias vendrían dadas, para la izquierda, por la expresiones siguientes:

$$\varepsilon_\alpha^{(l)} = (a_1 + (a_2 - a_1)\alpha)^n - (a_1^n + (a_2^n - a_1^n)\alpha)$$

con un máximo en

$$\alpha_l = (-a_1 / (a_2 - a_1)) + ((a_2^n - a_1^n) / n(a_2 - a_1)^n)^{1/(n-1)}, \text{ para } n \geq 2$$

y, para el caso de la divergencia a la derecha, por esta otra expresión:

$$\varepsilon_\alpha^{(r)} = (a_3 - (a_3 - a_2)\alpha)^n - (a_3^n - (a_3^n - a_2^n)\alpha)$$

que tiene su máximo en

$$\alpha_r = (a_3 / (a_3 - a_2)) - ((a_3^n - a_2^n) / n(a_3 - a_2)^n)^{1/(n-1)}, \text{ para } n \geq 2.$$

#### Ejemplo 6.4-9:

Calculemos el cuadrado del siguiente número difuso  $A = (0.4, 0.7, 1.2)$ .

La aproximación triangular será:

$$P=(0.4^2, 0.7^2, 1.2^2)=(0.16, 0.49, 1.44)$$

y su correspondiente  $\alpha$ -corte sería, por consiguiente,

$$P_\alpha = (0.16+0.33\alpha, 1.44-0.95\alpha)$$

La solución correcta sería, sin embargo,

$$(A^n)_\alpha = ((0.4+0.3\alpha)^2, (1.2-0.5\alpha)^2)$$

por lo que las divergencias a izquierda y derecha vendrán dadas por:

$$\varepsilon_\alpha^{(l)} = (0.4+0.3\alpha)^2 - (0.16+0.33\alpha) = -0.09\alpha + 0.09\alpha^2$$

$$\varepsilon_\alpha^{(r)} = (1.2-0.5\alpha)^2 - (1.44-0.95\alpha) = -0.25\alpha + 0.25\alpha^2$$

Los valores en que se hacen máximas serían:

$$\alpha_1 = (-0.4 / (0.7-0.4)) + ((0.7^2 - 0.4^2) / 2(0.7 - 0.4)^2) = 0.5$$

$$\alpha_2 = (1.2 / (1.2-0.7)) - ((1.2^2 - 0.7^2) / 2(1.2 - 0.7)^2) = 0.5$$

Por lo que, finalmente, se obtiene que

$$\varepsilon_{\max}^{(l)} = -0.0225 \quad \text{y} \quad \varepsilon_{\max}^{(r)} = -0.0625$$

Como puede comprobarse por estos datos y su expresión gráfica, recogida en la Figura 16, la aproximación es bastante buena en este caso, con mejores resultados a izquierda que a derecha. Sin embargo, obsérvese que empeora conforme  $n$  aumenta. También, hay que decir que, ciertamente, depende de la posición de  $a_2$  en  $R^+$ .

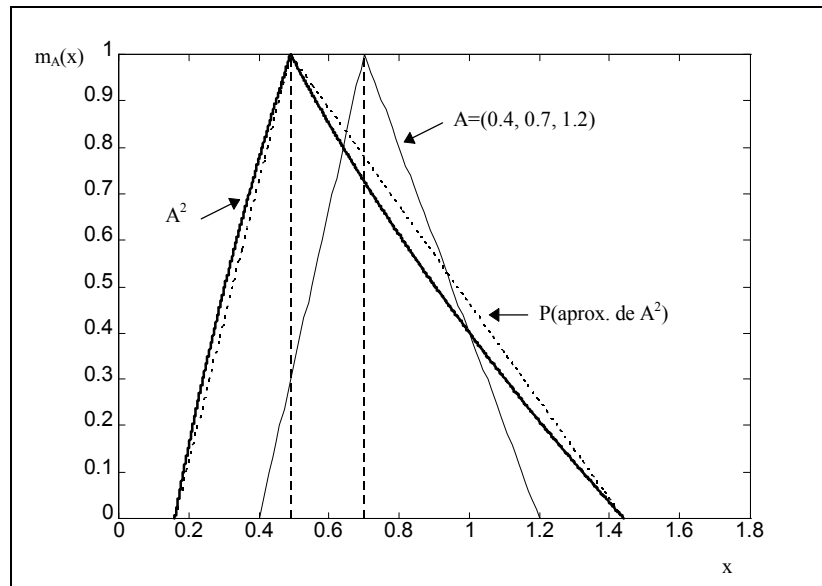


Figura 16: Cuadrado de A y su aproximación triangular P.

Sin embargo, es importante subrayar que la aproximación nunca afecta a los valores de  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ . Por tanto, en situaciones reales, puede resultar conveniente aproximar una función,  $f(A)$ , de un número difuso triangular por otro número difuso triangular. De esta forma, los cálculos se facilitan enormemente.

### 6.5 Distancia entre dos números difusos triangulares.

Consideremos tres intervalos de confianza en  $\mathbb{R}$ :

$$\mathbf{A} = [a_1, a_2] \quad , \quad \mathbf{B} = [b_1, b_2] \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = [c_1, c_2]$$

Una función numérica,  $d(X, Y) \in \mathbb{R}$ , con  $(X, Y) \in E \times E$ , es una distancia si y solo si,  $\forall X, Y, Z \in E$ , se cumple que:

$$d(X, Y) \geq 0$$

$$(X=Y) \Rightarrow (d(X, Y)=0)$$

$$d(X, Y) = d(Y, X)$$

$$d(X, Z) \leq d(X, Y) \oplus d(Y, Z)$$

donde  $\oplus$  representa un operador asociado con el concepto de distancia.



Definamos los conceptos de distancia a la izquierda,  $\Delta_l$ , y distancia a la derecha,  $\Delta_r$ , como sigue:

$$\Delta_l(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = |a_1 - b_1| \quad \text{y} \quad \Delta_r(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = |a_2 - b_2|$$

y comprobemos que cumplen las condiciones anteriores, para  $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \subset \mathbb{R}$ :

1.  $\Delta_l(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \geq 0$ , ya que  $|a_1 - b_1| \geq 0$
2.  $(\mathbf{A} = \mathbf{B}) \Rightarrow (\Delta_l(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0)$ , ya que  $(a_1 = b_1) \Rightarrow (|a_1 - b_1| = 0)$
3.  $\Delta_l(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \Delta_l(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ , ya que  $|a_1 - b_1| = |b_1 - a_1|$
4.  $\Delta_l(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \leq \Delta_l(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + \Delta_l(\mathbf{B}, \mathbf{C})$ , ya que  $|a_1 - c_1| \leq |a_1 - b_1| + |b_1 - c_1|$

De forma similar, podría comprobarse que  $\Delta_r$  cumple estas condiciones.

La distancia entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ ,  $\Delta(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , es definida por Kaufmann y Gupta (1.985; p.101), como sigue:

$$\Delta(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \Delta_l(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + \Delta_r(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

y se puede comprobar fácilmente que también cumple las condiciones anteriores.

Si se supone que los tres intervalos considerados son subconjuntos del intervalo  $[\beta_1, \beta_2] \subset \mathbb{R}$ , puede definirse una *distancia normalizada* como sigue:

$$\delta(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) / 2(\beta_2 - \beta_1), \quad \text{con} \quad 0 \leq \delta(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq 1$$

ya que si  $a_1=b_1$  y  $a_2=b_2$ , su valor será cero y si  $a_1-b_1=a_2-b_2=\beta_2-\beta_1$ , que es el valor máximo que puede tomar el numerador, entonces su valor sería 1.

Por otro lado, para cada  $\alpha$ -corte, podemos escribir que,

$$\delta(\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha) = d(\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha) / 2(\beta_2 - \beta_1)$$

donde  $\beta_1$  y  $\beta_2$  vienen dados de forma conveniente para que contengan a  $\mathbf{A}_{\alpha=0}$  y  $\mathbf{B}_{\alpha=0}$ .

Si integramos desde  $\alpha=0$  hasta  $\alpha=1$ , obtenemos una distancia mediante la suma de distancias que satisface la condición de estar comprendida entre 0 y 1 y que será:

$$\begin{aligned} \delta((A, B) &= \int_{\alpha=0}^1 \delta(A_\alpha, B_\alpha) d\alpha = 1/2(\beta_2 - \beta_1) \int_{\alpha=0}^1 \Delta(A_\alpha, B_\alpha) d\alpha = \\ &= 1/2(\beta_2 - \beta_1) \int_{\alpha=0}^1 (|a_1^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}| + |a_2^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}|) d\alpha \end{aligned}$$

Esta ecuación da la distancia entre dos números difusos y es también llamada *índice de desemejanza (disimilitud)* entre A y B<sup>10</sup>.

#### Ejemplo 6.5-1:

Vamos a calcular la distancia entre los siguientes números difusos en R:

$$\begin{aligned} m_A(x) &= 0, & 13 < x < 2 \\ &= (x-2)/8, & 2 \leq x \leq 10 \\ &= (x+13)/3, & 10 \leq x \leq 13 \\ m_B(x) &= 0, & 15 < x < 5 \\ &= (x-5)/2, & 5 \leq x \leq 7 \\ &= (15-x)/8, & 7 \leq x \leq 15 \end{aligned}$$

<sup>10</sup>Véase, Kaufmann y Gupta (1985; p.102).

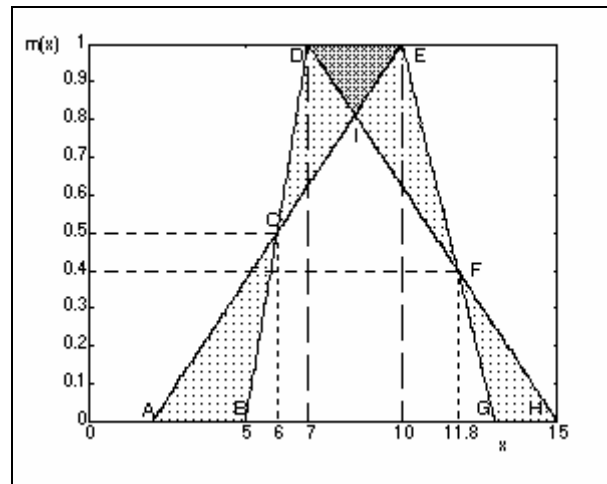


Figura 17: Distancia entre dos números difusos.

Como puede observarse en la Figura 17, la integración para  $\alpha \in [0, 1]$  precisa del conocimiento previo de los puntos de intersección de las funciones L y R de ambos números difusos. Los  $\alpha$ -cortes de  $A=(2, 10, 13)$  y de  $B=(5, 7, 15)$  son:

$$\mathbf{A}_\alpha = [2 + 8\alpha, 13 - 3\alpha]$$

$$\mathbf{B}_\alpha = [5 + 2\alpha, 15 - 8\alpha]$$

y las intersecciones, por tanto, serán:

$$\text{L: } 2 + 8\alpha = 5 + 2\alpha, \text{ cuya solución es } \alpha = 0.5 \text{ y } x = 6.$$

$$\text{R: } 13 - 3\alpha = 15 - 8\alpha, \text{ cuya solución es } \alpha = 0.4 \text{ y } x = 11.8.$$

Tenemos, por tanto, que:

$$a_1^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)} = 2 + 8\alpha - 5 - 2\alpha$$

$$a_2^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)} = 13 - 3\alpha - 15 + 8\alpha$$

y la integración a realizar sería:

$$\int_0^{0.5} (-3 + 6\alpha) d\alpha + \int_{0.5}^1 (6\alpha - 3) d\alpha + \int_0^{0.4} (-2 + 5\alpha) d\alpha + \int_{0.4}^1 (5\alpha - 2) d\alpha = 2.8$$

Si hacemos  $\beta_1 = 2$  y  $\beta_2 = 15$ , tendremos que:

$$\delta(A,B) = [1 / 2(15-2)](2.8) = 0.1$$

Cuando se trabaja con números difusos triangulares, es, generalmente más cómodo obtener la distancia sumando las áreas de los triángulos siguientes:

$$ABC + CDE + DEF + FGH = (3)(0.5)/2 + (3)(0.5)/2 + (3)(0.6)/2 + (2)(0.4)/2 = 2.8$$

Obsérvese en la Figura 17 que el triángulo DEI se computa dos veces, una en  $\Delta_1$  y otra en  $\Delta_2$ . De hecho, esta duplicación solo desaparece si  $[a_1^{(1)}, a_2^{(1)}] = [b_1^{(1)}, b_2^{(2)}]$ . Por otro lado,  $\delta(A,B) = 1$ , su valor máximo, cuando:

$$A_\alpha = [\beta_1, \beta_1] \text{ y } B_\alpha = [\beta_2, \beta_2], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

#### Ejercicio 6.5-2:

Obtener las distancias entre los seis números difusos siguientes y construir la relación de desemejanza difusa correspondiente.

$$\begin{aligned} A &= (2, 5, 13) & B &= (4, 6, 11) & C &= (3, 11, 11) \\ D &= (5, 6, 14) & E &= (6, 6, 12) & F &= (3, 6, 12) \end{aligned}$$

Puede comprobarse que la relación de desemejanza viene dada por la siguiente matriz, cuyas casillas dan la distancia entre los correspondientes números difusos:

$\delta(X,Y)$	A	B	C	D	E	F
A	0	0.09	0.24	0.08	0.13	0.06
B	0.09	0	0.19	0.08	0.08	0.08
C	0.24	0.19	0	0.17	0.17	0.19
D	0.08	0.08	0.17	0	0.06	0.08
E	0.13	0.08	0.17	0.06	0	0.06
F	0.06	0.08	0.19	0.08	0.06	0

A partir de esta matriz de distancias, se podrían realizar, entre otros, análisis de similitud, jerarquización y clasificación. De cualquier forma, hay que dejar claro que la relación de similitud no es necesariamente transitiva y que los números difusos no están ordenados linealmente. No obstante, en el epígrafe siguiente, vamos a ver una propuesta de aproximación a la ordenación lineal de números difusos<sup>11</sup>.

## 6.6 Ordenación lineal de números difusos.

La propuesta de ordenación lineal de números difusos hecha por dichos autores se basa en la aplicación de tres criterios sucesivos, de tal forma que si con el primero no se consigue un orden único, se aplicaría el segundo, y si con este tampoco se consiguiera se aplicaría un tercer criterio. Veamos cuáles son dichos criterios.

### (I) Primer criterio: el desplazamiento (*the removal*).

Sea  $k \in \mathbb{R}$  un número ordinario y  $A$  un número difuso. El desplazamiento del lado izquierdo de  $A$  respecto a  $k$ ,  $R_l(A, k)$ , se define como el área comprendida entre  $k$  y el lado izquierdo del número difuso  $A$ . De forma similar, se define el desplazamiento del lado derecho,  $R_r(A, k)$ . Finalmente, el desplazamiento de  $A$  con respecto a  $k$  se define como la media de ambos:

$$R(A, k) = 1/2 (R_l(A, k) + (R_r(A, k))$$

La Figura 18 muestra los desplazamientos respecto a los lados izquierdo y derecho, respecto a  $k=0$  (si es necesario, conviene hacer una traslación del origen a una posición tal que las áreas, a efectos de los cálculos, sean siempre positivas).

---

<sup>11</sup>Véase, Kaufmann y Gupta (1985; pp.37-44).

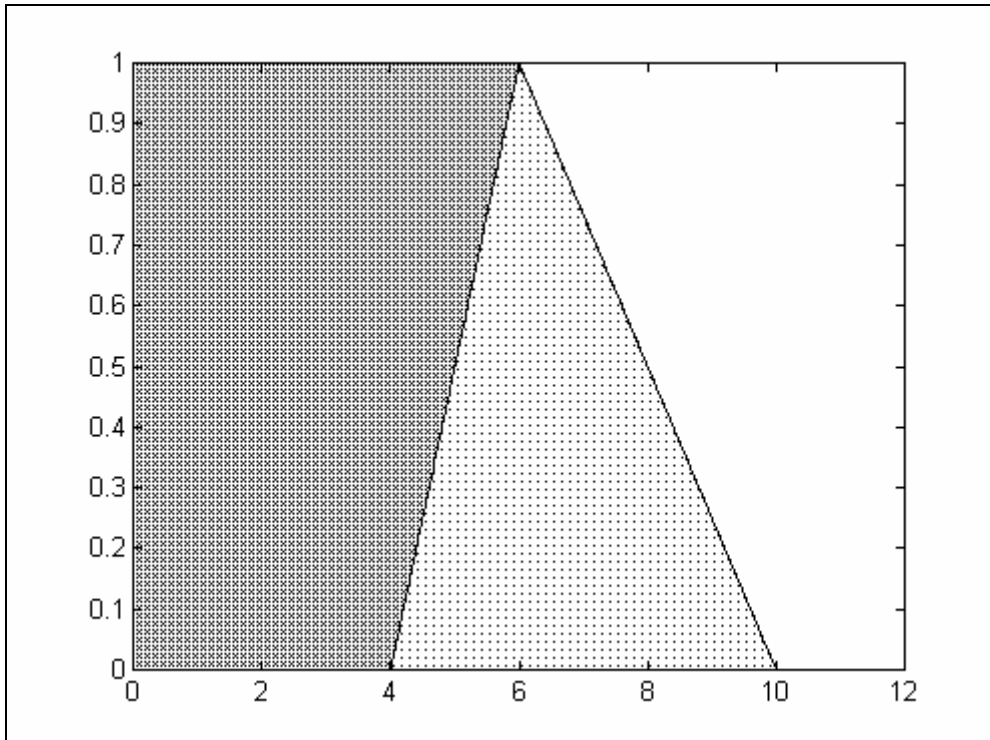


Figura 18: Desplazamientos respecto a  $k=0$ .

El desplazamiento respecto al lado izquierdo sería el área del trapecio delimitada por el eje de ordenadas, el eje de abscisas,  $m_A(x) = 1$  y el lado izquierdo del triángulo. Por tanto, tendríamos que:

$$R_l(A, k=0) = [(a_1 + a_2) / 2] \cdot 1 = (a_1 + a_2) / 2$$

El desplazamiento respecto al lado derecho sería la suma de esta área más la encerrada por el triángulo; es decir:

$$R_r(A, k=0) = [(a_2 + a_3) / 2] \cdot 1 = (a_3 + a_2) / 2$$

Luego el resultado del desplazamiento de  $A$  será un número ordinario, representante del número difuso, dado por la expresión:

$$\hat{A} = (a_1 + 2a_2 + a_3) / 4, \text{ siendo } A = (a_1, a_2, a_3)$$

Este primer criterio descompone un conjunto de números difusos en clases con el mismo desplazamiento.

### (II) Segundo criterio: la moda.

Dentro de cada clase se buscará la moda o valor central del número difuso. Si no tiene una moda única (cosa que no ocurriría si fuese un número difuso triangular), se toma la media de los valores modales. Es posible que las modas generen subclases de equivalencia que hagan, todavía, necesario un tercer criterio:

### (III) Tercer criterio: la divergencia.

Dentro de cada subclase tomaremos la divergencia,  $(a_3 - a_1)$ , como criterio para la ordenación final de los números difusos. Veamos un ejemplo,

#### Ejemplo 6.6-1:

Ordenar los siguientes números difusos:

$$\begin{array}{llll} A_1=(-3, 5, 11) & A_2=(-5, 10, 11) & A_3=(-3, 5, 6) & A_4=(-2, 6, 8) \\ A_5=(0, 7, 12) & A_6=(-1, 6, 7) & A_7=(0, 6, 7) & A_8=(-5, -2, 16) \end{array}$$

Criterio I (desplazamiento):

$$\begin{array}{ll} \hat{A}_1 = (-3+10+11) / 4 = 4.5 & \hat{A}_2 = (-5+20+11) / 4 = 6.5 \\ \hat{A}_3 = (-3+ 10+ 6) / 4 = 3.25 & \hat{A}_4 = (-2+12+8) / 4 = 4.5 \\ \hat{A}_5 = (0+14+12) / 4 = 6.5 & \hat{A}_6 = (-1+12+7) / 4 = 4.5 \\ \hat{A}_7 = (0+12+7) / 4 = 4.75 & \hat{A}_8 = (-5-4+16) = 1.75 \end{array}$$

Con este criterio se obtienen las siguientes clases:

Clase 1:  $(A_8)$ , cuyo representante es 1.75.

Clase 2:  $(A_3)$ , cuyo representante es 3.25.

Clase 3:  $(A_1, A_4, A_6)$ , cuyo representante es 4.5.

Clase 4:  $(A_7)$ , cuyo representante es 4.75.

Clase 5:  $(A_2, A_5)$ , cuyo representante es 6.5.

Criterio II (moda): aplicable a las clases 3 y 5.

Para la clase 3, tenemos las siguientes modas:

$$A_1 : 5 ; \quad A_4 : 6 ; \quad A_6 : 6 ;$$

Para la clase 5, las modas serían:

$$A_2 : 10 ; \quad A_5 : 7 ;$$

La ordenación queda ahora como sigue:

Sub-clase 1.1: ( $A_8$ ), cuyo representante es 1.75 y de moda -2.

Sub-clase 2.1: ( $A_3$ ), cuyo representante es 3.25 y de moda 5.

Sub-clase 3.1: ( $A_1$ ), cuyo representante es 4.5 y de moda 5.

Sub-clase 3.2: ( $A_4, A_6$ ), cuyo representante es 4.5 y de moda 6.

Sub-clase 4.1: ( $A_7$ ), cuyo representante es 4.75 y de moda 6.

Sub-clase 5.1: ( $A_5$ ), cuyo representante es 6.5 y de moda 7.

Sub-clase 5.2: ( $A_2$ ), cuyo representante es 6.5 y de moda 10.

Criterio III (divergencia): aplicable a la subclase 3.2.

$$\text{div}(A_4) = 8+2 = 10 ; \quad \text{div}(A_6) = 7+1 = 8 ;$$

Ahora, en cada subclase hay sólo un único número difuso, por lo que la ordenación lineal quedaría como sigue:

$$A_8 < A_3 < A_1 < A_6 < A_4 < A_7 < A_5 < A_2$$

Digamos, finalmente, que si se trabaja con cantidades difusas no normalizadas, se multiplicarían tanto los desplazamientos como las modas por la altura del correspondiente número difuso.