ANÁLISIS DE SERIES DE TIEMPO

Cesar Humberto Antunez Irgoin [ε]
(Lima, Perú - 2011)

Versión: 30 de Enero del 2011

Resumen

En el presenta artículo trataremos de analizar la riqueza de las series de tiempo, que en los últimos años han generado la necesidad de su uso continuo, frecuentemente para la predicción de las variables y de esta forma poder advertir el comportamiento en su entorno donde actúan, para lo cual se hace uso de la econometría.

Pero muchas veces se comenten errores en los pronósticos, por no corregir los problemas que usualmente ostentan las series de tiempo. En este artículo pretendemos abordar los problemas más usuales de dichas series como son: La no estacionalidad, la presencia de raíz unitaria y cuando es significativa la autocorrelación muestral (PAC), seguidamente haremos una descripción de la seria de tiempo (AR(p), MA(q), ARMA(p,q) ARIMA(p,d,q)) y para pasar a abordar los problemas más cotidianos de los modelos en la econometría, como son: La no normalidad de los residuo, la no estabilidad de los parámetros y la presencia de un coeficiente de desigualdad de Theil cercano a uno, que nos genera predicción erradas.

También debo mencionar que unos de los objetivos principales es acercar al lector al tratamiento de series de tiempo usando el programa informático EViews[Ψ].

[ε] El autor agradecería enviar todos los errores u horrores que encuentres, así como sugerencias para trabajos futuros a: econobitacora@gmail.com; nakatabox@hotmail.com

Abstract

In the one it presents article we will try to frequently analyze the wealth of the series of time that you/they have generated the necessity of their continuous use in the last years, for the prediction of the variables and this way to be able to notice the behavior in their environment where they act, for that which use of the econometrics is made.

But many times errors are commented in the presage, for not correcting the problems that usually show the series of time. In this article we seek to approach the most usual problems in this series like they are: The not seasonal, the presence of unitary root and when it is significant the autocorrelación muestral (PAC), subsequently we will make a description of the serious one of time (AR(p), MA(q), ARMA(p,q) and ARIMA(p,d,q))) and to pass to approach the daily problems in the models in the econometrics, like they are: The non normality of the residual, the non stability of the parameters and the presence of a coefficient of inequality of near Theil to one that generates us missed prediction.

I should also mention that some of the main objectives are to bring near the reader to the treatment of series of time using the computer program EViews.

Key words: Estacionalidad, Unitary Root, Correlograma, Dickey Increased Fuller.

Introducción

Una serie de tiempo es aquel conjunto de observaciones sobre una variable, que generalmente es espaciada en el tiempo.

Un ejemplo son las observaciones anuales del PBI de un país, las ventas mensuales de una compañía, el Índice de Precios al Consumidor mensual, etc. Una serie también puede mostrar irregularidad esta irregularidad espaciada en el tiempo, por lo que los datos son de corte transversal.

El lector se preguntará ¿Por qué usar series de tiempo en Economía?, como nuestro carácter en la economía es explicar la evolución, el comportamiento y el vaticinio de valores futuros, por estas razones es crucial para el análisis el uso de series de tiempo.

Tanto como las empresas y los agentes económicos, se trata de predecir el futuro comportamiento, más en la economía que debe estar un paso adelante en los acontecimiento venideros, para de esta forma tomar las decisiones adecuadas tanto en política monetaria como fiscal.

TIPOS DE SERIE

Estacionaria es una condición (débil) que requiere, que tanto la media y la varianza de los datos analizados sea constantes en el tiempo. Por lo que es importante efectuar un análisis de estacionalidad de la serie por analizar. Adelantándonos a las siguientes líneas diremos que si la serie no es estacionaria (como la gran mayoría en las variables macroeconómicas) es necesario efectuar la diferenciación (Y_t - Y_{t-1}) de dicha serie tantas veces sea necesario para que sea estacionaria. Como analizaremos más adelante solo se llega esta la segunda diferencia.

También hay que mencionar que una muestra adecuada es de por lo menos cuarenta datos ($T \geq 40$), por que los procesos autorregresivo que se analizan es texto documento pierden grados de libertad cuando se autorregresiona la variable objetivo.

ESTACIONALIDAD

La estacionalidad es importante cuando tratamos de explicar un comportamiento de una variable endógena, por que una parte de la fluctuaciones que manifiestas las variables se debe a factores estaciónales como por ejemplo: si analizamos el PBI mensual del PBI de cualquier país veremos se incrementa en gran medida en le mes de diciembre, día de la madre, día del padre, fiestas patrias o otras fechas. Por lo que es necesario estacionalizar la serie para que aquellos períodos que tiene gran fluctuación.

IDENTIFICACIÓN DE LA ESTACIONALIDAD

Una de las formas de identificar la estacionalidad es mediante el gráfico de barras, líneas apiladas, líneas separadas y correlograma que a continuación se pasa a explicar mediante EViews.

a) Gráficos de Barras

En esta parte del análisis nos interesamos en las observaciones picos de la serie, que son descritas por la grafica y si estos picos se repiten en los meses posteriores podemos decir que existen pruebas de estacionalidad.

b) Líneas Apiladas (Seasonal Stacked Line)

Ahora nos interesa examinar el comportamiento trimestral, bimestral, semestral o mensual según sea el caso, para lo cual se hace uso de las líneas apiladas, esta se debe presentar un comportamiento diferente en los siguientes períodos para que se diga que existe estacionalidad en la serie.

c) Líneas Separadas

Ahora nos interesa observa el comportamiento de cada mes trimestre o bimestre según sea el caso. Si dicho comportamiento en la variable es diferente podemos decir que existe estacionalidad en dicha serie.

d) Correlograma

Antes de describir el análisis del correlograma pasaremos a explicar como se obtienen estos resultados.
Comenzaremos mencionando que la función de autocorrelación nos da una medida de la correlación que existe entre las observaciones continuas.

1) Función de Autocorrelación Simple (AC)

Estos coeficientes presentan una medida entre observaciones de series separadas por k períodos en el tiempo.

$$\hat{\rho}_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \qquad -1 < \hat{\rho}_k < 1$$

Donde:

k : Representa el número de rezagos.
γ_k : Representa la covarianza al rezago k.
γ_0 : Representa la varianza.
En la practica solo se tiene muestras por lo que solo se puede calcular la función de autocorrelación muestral ($\hat{\rho}_k$).

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})/n}{\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \bar{Y})^2/n}$$

Donde:
n : Representa el tamaño de a muestra.

También en la practica a demostrado que el número de rezagos van solo hasta la tercera parte de la muestra.

2) Función de Autocorrelación Parcial(PAC)

Esta función mide la correlación que hay entre X_t y X_{t-k} quitando los efectos $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots X_{t-k-1}$ que son las observaciones intermedias entre los períodos de separación.

$$\hat{Y}_{t+k} = \phi_{kk} .Y_t + e_{t+k}$$

Donde:
e_{t+k}: El termino error que representa el efecto sobre $\hat{Y}_{t+k}$.

3) Correlograma

Un correlograma esta formado por dos columna una de ellas esta referida a la autocorrelación simple y la otra a la autocorrelación parcial. El número de rezagos que recomiendan muchos autores se debe considera por lo menos 24 retardos si la serie analizada es mensual ,12 retados si es bimensual, 8 retardos sin la serie es trimestral, etc.[1]

AJUSTE ESTACIONAL

EViews tiene incorporado ratios y factores estaciónales, como pasaremos a explicar.

- **Generate by Equation:** Aun que este no es un filtro de estacionalidad, diremos que esta opción pide una serie para usar en la actualización de las series seleccionadas.

- **Seasonal Adjustment:** Esta opción cera una serie de ajuste estacional. Usa cuatro métodos que son: La razón con el promedio móvil y diferencia del promedio móvil, el método multiplicativo X-11, el método aditivo X-11 y el Census X-12.

- **Exponential Smoothing (Suavización Exponencial):** Este Filtro crea una seria que ha sido suavizada. En EViews se puede encontrar formas simple, dobles y Holt – Winters de suavización exponencial.

- **Ratio de Promedio Móvil**
  El ratio de promedio móvil se calcula sea anual (12 meses), Trimestral (3 meses) o semestral (6 meses).

$$Y_t \begin{cases} \dfrac{0.5Y_{t+6} + Y_{t+5} + \ldots Y_t + \ldots Y_{t-5} + 0.5Y_{t-6}}{6} \Rightarrow Mensual. \\ \dfrac{0.5Y_{t+2} + Y_{t+1} + Y_t + Y_{t-1} + 0.5Y_{t-2}}{4} \Rightarrow Trimestral \qquad ..... \\ \dfrac{0.5Y_{t+2} + Y_t + 0.5Y_{t-1}}{6} \Rightarrow Semestral \end{cases}$$

[1] Se puede deducir que el número de rezagos es el número de veces al año a analizar por dos (rezagos = 2*m). Donde m representa el número de períodos al año (m=4 si es trimestral, m=12 si es mensual, m=12 si es bimestral, ect).

Por lo que el ratio esta representado por: $r_m = \frac{Y_t}{X_t}$

Para el calculo del índice de estacionalidad (i_m), se calcula entre el promedio del ratio móvil para meses, trimestre o semestres.

Por lo que el factor de índice de estacionalidad esta definido por:

$$ST \begin{cases} \dfrac{i_m}{\sqrt[12]{i_1.i_2 \dots i_{12}}} \Rightarrow \; Mensual \\ \dfrac{i_m}{\sqrt[4]{i_1.i_2.i_3.i_4}} \Rightarrow \; Trimestral \\ \dfrac{i_n}{\sqrt[6]{i_1.i_2}} \Rightarrow \; Semestral \end{cases}$$

- **Hodrick-Prescott Filter:** Mediante filtro de Hodrick y Prescott, podremos obtener una primera aproximación al componente de tendencia de la serie, entendido éste no como un componente estrictamente lineal, sino como una tendencia polinómica determinista.[2]

- **Frequency Filter(filtro de frecuencia):** Estos filtros se usan para aislar el componente cíclico de una serie de tiempo especificando un rango para su duración. Hablando aproximadamente, el filtro del banda paso es un filtro lineal que toma un promedio mudanza pesado dos-estado al lado de de los datos dónde ciclos en una venda, dado por un especificó baje y el límite superior, se atraviesa, o extrajo, y los ciclos restantes se filtran fuera. Para emplear un filtro de banda paso, el usuario debe escoger el rango de duraciones primero (las periodicidades) para atravesar. El rango se describe por un par de números, especificado en las unidades de la frecuencia.

DESCOMPOSICIÓN DE UN SERIE DE TIEMPO

Toda serie de tiempo se puede descomponer en al menos 3 elementos:

- Estacionalidad
- Tendencia
- Ciclo

[2] Este método ha cobrado mucha popularidad en la macroeconomía en los últimos años, ya que permite ajustar una curva suave al conjunto de datos.
El procedimiento consiste de manera resumida en desestacionalizar las series, calcular su logaritmo, aplicar el filtro de Holdrick-Prescott y obtener el componente cíclico (es decir, la diferencia entre la serie observada y su .tendencia de largo plazo.). A esta nueva serie le podemos calcular el desvío estándar, la correlación contemporánea y rezagada con respecto al producto, etc. Así, una variable decimos que es procíclica si su componente cíclica esta positivamente correlacionada con la componente cíclica del producto. En el caso contrario decimos que es contracíclica. Si dicha correlación es cero, decimos que la variable es acíclica (Hodrick-Prescott 1980).

Usualmente estos tres componentes es difícil de cambiar, por lo que la estacionalidad es la más exógena, es el más difícil de cambiar, como las costumbres y el clima, pero en el caso de factores institucionales si se puede cambiar

a) Estacionalidad

Es un componente que se repite siempre en intervalos de tiempo similares, como por ejemplo tenemos: la venta de panteones que se incrementa siempre en 2 mese al año, la venta de helados que se incrementa en verano, etc.

Como mencionan muchos autores la estacionalidad se debe a razones estaciónales (invierno, verano, otoño y primavera), factores institucionales o legales (gratificación de julio y diciembre), costumbres (consumo de ceviche en el día).

Por lo general esta estacionalidad no puede ir mas allá de los 12 meses del año, sin embargo hay caso donde el período es mayor.

b) Tendencia

Es un componente que refleja el comportamiento de mediano y largo plazo de la variable. Los factores que explican la tendencia de la serie de tiempo son aquellas variables importantes y relevantes que inciden de manera significativa en la serie de tiempo.[3]

Existen dos tipos de tendencia esta son: Estocástica y determinística.
La tendencia es aleatoria o estocástica cuando la pendiente de la misma cambia en el tiempo. Y será determinística cuando la pendiente de la serie no varía

c) Ciclo

El ciclo nos muestra el comportamiento de corto plazo de la serie de tiempo, lo que dependerá de los factores no estructurales que se pueden presentar en el mercado.[4]

En la economía existen dos tipos de ciclo:

- Regular cuyo comportamiento es uniforme y moderado, por lo que se puede predecir.
- Irregular cuyo comportamiento es totalmente errático e impredecible, por lo que es difícil de estimarlo.

FILTROS DE EVIEWS

EViews 7 tiene unos filtros que nos permiten eliminar algunos movimientos o quitar la tendencia. A continuación los pasaremos a describirlos:

- **Hodrick - Prescott**
  Este filtro nos permite quitar la tendencia de la serie estudiada, pero sin embargo puede tener deficiencias cuando analizamos los últimos valores de la serie. Cuando esto ocurre es preferible utilizar otros filtros como el Fixed

[3] Una forma gráfica de identificar la estacionalidad es visualizar los picos repetidos que presenta en el tiempo la serie.
[4] Hay que mencionar que el ciclo es un componente que se puede moldear o mejor dicho es modelable.

- **Filtro de Baxter – King**
  Es un filtro lineal que elimina los movimientos muy lentos o de baja frecuencia (tendencia) y los comportamientos de alta frecuencia (irregulares), mientras que retiene los comportamientos intermedios (ciclo).

  Este filtro nos permite extraer exactamente aquellas frecuencias que nos interesa analizar, para lo cual es necesario establecer la peridiocidad mínima y máxima del componente a extraer.

- **Filtro de Cristiano - Fitzgerald**
  Este filtro deriva una aproximación óptima cuando la representación de los datos tiene raíz unitaria o es estacionario alrededor de una tendencia.

  Este filtro está basado en el proceso de generación de daos, el cual suponen que siguen un paseo aleatorio.

PROCESOS ESTOCASTICOS ESTACIONARIOS

Se define un proceso estocástico a una sucesión de variables que se encuentran representadas por $\{Y_t\}$ donde $t \in \langle -\infty;\infty \rangle$. Un ejemplo de esto puede ser la sucesión de las variables aleatorias que puede ser un proceso estocástico.

$$Y_{-3}, Y_{-2}, Y_{-1}, \ldots, Y_2, Y_3, Y_4$$

Donde cada Y_t configura un proceso estocástico que tendrá su función de distribución con junta, su función de distribución marginal y su con sus correspondiente momento. Para caracterizar un proceso estocástico solo basta especificar la media y la varianza, para cada Y_t y la covarianza para variables referidas al paso del tiempo (t).

$$E[Y_t] = \mu_t$$

$$Var(Y_t) = E[Y_t - \mu_t]^2 = \sigma_t^2$$

$$Cov(Y_t, Y_m) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_m - \mu_m)] = \gamma_t$$

En todos los tipos de procesos estocásticos posibles, nos interesan necesariamente dos que son el ruido blanco Gaussiano, el primer y segundo momento, a los cuales la estadística tiene reservado los siguientes nombres:

RUIDO BLANCO GAUSSIANO $\{\varepsilon_t\}$

Es una sucesión de variables aleatoria (procesos estocástico) con una esperanza (media) cero y una varianza constante e independientes de cualquier valor de t (Covarianza nula).

En forma más precisa definiremos que la serie y_t, que generada por un ruido blanco Gaussiano si la serie es igual error.

$y_t = \varepsilon_t$ Donde: $\varepsilon_t \sim N(0;\sigma^2)$ independientes

Si y_t esta formada por observaciones independientes de la esperanza (momento uno) común 0 y varianza (momento dos) común σ^2 con distribución Normal. Para un entendimiento mas preciso generemos una serie de 100 observaciones de un proceso de ruido blanco Gaussiano con una esperanza 0 y una varianza 1.

ESTACIONALIDAD ESTRICTA

Decimos que un proceso estocástico discreto es **estacionario** en el **sentido estricto o fuerte** si toda *m* $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ y todo *k* vector de variables $(Y_{t1}, Y_{t2}, \ldots, Y_{tm})$ tienen la misma distribución de probabilidad conjunta que el vector $(Y_{t1+k}, Y_{t2+k}, Y_{t3+k}, \ldots, Y_{tm+k})$. Un ejemplo de esto es:

Donde: *tm=1, k=5 y m=9*

$$F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_6) = F(Y_{10}, Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{15})$$

$$F(Y_3, Y_4, Y_5) = F(Y_7, Y_8, Y_9)$$

Donde: t_m*=3, k=2 y m=4*

ESTACIONALIDAD DEBIL

Decimos que un proceso estocástico es estacionario en el **sentido débil o amplio** si se cumple la estacionalidad estricta sólo en el caso del primer y segundo momento. Entonces decimos que el proceso estocástico es estacionario.
Las esperanzas matemáticas (primer momento) de las variables aleatorias no dependen del tiempo, por lo que son constante:

$$E[Y_t] = E[Y_{t+m}] \qquad \forall\ m$$

La varianza de la variable no depende del tiempo y son finitas:

$$Var(Y_t) = Var(Y_{t+m}) \neq \infty \quad \forall\ m$$

Las covarianzas entre dos variables aleatorias del proceso con distintos períodos solamente dependen del lapso del tiempo transcurrido entre ellas[5]:

$$Cov[Y_t, Y_s] = Cov[Y_{t+m}, Y_{t+s}] \quad \forall\ m$$

ANALISIS DEL TIPO BOX - JENKINS

Para explicar la raíz unitaria que a continuación expondremos necesitamos de la metodología de Box – Jenkins (1970, 1976). La descripción de los paso de esta metodología no se hará mediante el esquema de etapas tan conocido, solo

[5] Este fenómeno estacionario ocurre si sus variables pueden estar relacionadas linealmente entre si, pero si esta relación entre las dos variables sólo depende de la distancia temporal de *k* transcurrida entre las variables.

enunciaremos los pasos y esto por que más adelante en las siguientes hojas no encargaremos de exponer dicha metodología de forma más concisa.

Paso 1º: Un examen visual a la trayectoria de la series estudiada, para identificar si es o no estacionaria en media. Si es existe un valor en torno al cual la seria va oscilando sin alejarse de forma permanece de dicho valor se puede decir que dicha serie presenta estacionalidad en media.

Paso 2º: Si los coeficientes de la Autocorrelación Simple (AC) no decaen o decrecen rápidamente entonces hay indicios que la serie es no estacionaria.

Paso 3º: Si el primer valor de la función de Autocorrelación Parcial Muestra (PAC) es significativo entonces existe indicios de no estacionalidad de la serie.[6]

Todos estos paso nos ayudan ha saber si la serie es estacionaria. Si no lo fuera será es necesario aplicar la diferenciación (general mente solo la d =1 y d =2) de la seria para hacerla estacionaria en media.

PRUEBA DE RAÍZ UNITARIA

Como la mayoría de series económicas presentan un componente irregular por lo que se analiza la raíz unitaria, en esta parte presentaremos la raíz unitaria que es un indicador de series no son estacionarias .En los últimos años se han realizado varios trabajo para el diseños de series con raíz unitaria, en este trabajo presentaremos la prueba de Dickey – Fuller GLS (ERS) – Fuller Aumentado (ADF), la Prueba Phillps – Perron (PP)[7], la Prueba Kwiatkowski, Phillips, Smichdt y Shin (KPSS) y el contraste de Eliott, Rothenberg y Stock Point Optimal (ERS) que es alternativo a la prueba de Ng Perron.[8]
Si consideramos el siguiente modelo:

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donde ε representa un término de error estocástico que presenta los supuestos clásicos, esto quiere decir que tiene una media cero, varianza constante y no esta correlacionada (esto quiere decir que el termino error en “ruido blanco”).

Como el coeficiente de Y_{t-1} es 1, nace la raíz unitaria que presenta un escenario de no estacionalidad. En la Econometría se denomina a una serie que presenta una raíz unitaria como un camino o paseo aleatorio “Random Walks”.

[6] Algunos autores en los que yo me incluyo consideran que si el primer coeficiente de Autocorrelación parcial es mayor o igual a 0.9 nos da indicios claro de no estacionalidad de la serie.
[7] Una diferencia entre la prueba de Dickey – Fuller y la prueba de Phillips – Perron es que esta última realiza una corrección no paramétrica, por la presencia de la autocorrelación mayor a uno de la serie.
[8] En estos años se viene aplicando cada vez con más frecuenta la Prueba de Ng Perron solo describiremos el marco teórico pero no se hará la aplicación en EViews 7, pero que es opcional para cualquier trabajo de series de tiempo, pero una de las más aplicadas últimamente que también es opcional es la prueba de Eliott – Rothenberg y Stock Point Optimal que se desarrollará en el presente trabajo.

Si establecemos un parámetro para el coeficiente de Y_{t-1} la regresión estaría representada como:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \ldots (I)$$

Donde $\rho = 1$, entonces la variables estocástica Y_t presentara una raíz unitaria, por no que será necesario diferenciarla una vez. Para esto restaremos Y_{t-1} ha ambos miembros de la ecuación anterior:

$$Y_t - Y_{t-1} = \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Si factorizamos Y_{t-1} en el lado derecho de la ecuación y definimos $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$, como el operado de primera diferencia:

$$\Delta Y_t = (\rho - 1) Y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta Y_t = \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Ahora establecemos la hipótesis nula que sería $\gamma = 0$, donde la serie estocástica Y_t presenta una raíz unitaria.

Después se estima la ecuación (I), se divide el ρ entre el error estándar apara calcular el estadístico τ (tau) de Dickey – Fuller, luego se consulta en la tabla de Dickey Fuller para ver si la probabilidad de rechazar la hipótesis nula $\rho = 1$ (la no presencia de raíz unitaria en la serie).

Si la serie no es estacional hay que diferenciarla que regularmente es hasta dos veces. Si la serie es diferenciada una vez y esta es estacional entonces se dice que la serie es integrada de orden uno y se representa por I(1), de igual manera si la serie original (que representa un "Random Walks") es diferenciada dos vez y esta es estacionaria se dice que es integrada de orden dos I(2).

LA PRUEBA DE DICKEY – FULLER GLS (ERS)

Después de la publicación de Nelson y Plosser (1982), que trata sobre las propiedades dinámicas de determinadas series temporales macroeconómicas y financieras, se comienza a desarrollar innumerables publicaciones como: El enfoque clásico considera que los shocks corrientes como efectos temporales, en las series de tiempo y no inciden en el comportamiento a largo plazo de las mismas.

Nelson y Plosser (1982) cambian este punto de vista, al argumentar que si se utilizan las técnicas estadísticas desarrolladas por Dickey y Fuller (1979, 1981) (DF), se puede concluir que los shocks corrientes tienen efectos en el comportamiento a largo plazo de la mayor parte de las series macroeconómicas y financieras.[9]

[9] Badillo Amador-Rosa, Belaire Franch-Jorge y Contreras Bayarri-Dulce. "Contrastes de Raíz Unitaria para Series Temporales en Presencia de Cambios Estructurales", Dirección del Departamento de Análisis Económico. Archivo Acrobat, DT 00-06. Pág.:1

Para saber como los shock tiene efectos de largo plazo en las series, debemos plantear la hipótesis nula, que seria el coeficiente de Y_{t-1}, que sigue un estadístico τ (tau), que cuyos valores han sido trabajados por Dickey – Fuller, pero que son limitados, por eso MacKinnon desarrollo tablas más extensas que son incorporadas en EViews.

La pruebas de Dickey – Fuller puede ser estimada de tres distintas formas, bajo tres hipótesis nulas distintas.

- Si Y_t es un camino aleatorio (Random Walks).

  $\Delta Y_t = \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$, en este modelo no sea incorporado ni la tendencia ni el intercepto.

- Si Y_t es un camino aleatorio (Random Walks) con intercepto (drift)

  $\Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$, en este modelo se incorpora el intercepto.

- Si Y_t es un camino aleatorio (Random Walks) con intercepto (drift) y con tendencia.

  $\Delta Y_t = \alpha + \beta .t + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$, este es un modelo mas completo.

En cada uno de los casos la hipótesis nula es que existe una raíz unitaria (serie no estacionaria) y la hipótesis alternativa es $\gamma < 0$, que representa la estacionalidad de la serie Y_t, con media distinta de cero y con una tendencia determinística.

H_0 : La serie de tiempo no es estacionaria (γ=0) y presenta raíz unitaria.
Por lo que γ=0, α=0 y β=0

H_1 : La serie de tiempo es estacionaria (γ<0) y no presenta raíz unitaria.
Por lo que γ<0, $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$.

El procedimiento a seguir es para calcular el Dickey – Fuller es: Primero calcular el modelo por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO), después se divide el coeficiente de Y_{t-1} entre su error estándar, para de esta manera calcular el estadístico de tau (τ) y después consultando la tabla de MacKinnon nos dirá si existe o no la raíz unitaria.

*I **t-calculado** (t-estadístico o tau) I > I **t-crítico de la tabla de MacKinnon** I*

Esto quiere decir que si el t - calculado en valor absoluto es mayor que el t – critico de la tabla de MacKinnon o de DF en valor absoluto, entonces diremos que a series es estacionaria y no existe raíz unitaria.

*I **t-calculado** (t-estadístico o tau) I < I **t-crítico de la tabla de MacKinnon** I*

Esto quiere decir que el valor absoluto de tau no excede el t – crítico al 1%, 5% o 10% de la tabal de DF o MacKinnon, diremos que la serie es estacionaria y que presenta raíz unitaria.

- Hasta ahora hemos explicado la prueba de Dickey – Fuller (DF) que explica todos los manuales de econometría, pero incorporamos los trabajos de Elliott -

Rothenberg y Stock (1996) o más conocido como (ERS), para obtener la prueba de GLS (ERS), esta es una de las novedades de EViews 7.

En forma resumida mencionare que esta prueba DFGLS consiste extraer primero la tendencia de la serie original, pero se trata de una casi diferencia (cuasidiferencia) dada por $Y_t - aY_{t-1}$, donde a toma el valor de uno en el caso de Dickey Fuller Aumentado. Por lo que el valor de a representará un punto especifico contra el cual se contrastará la hipótesis nula de un valor menor que uno.

H_0 : a = 1, la serie presenta raíz unitaria (la serie no es estacionaria)
H_1 : a < 1, la serie no presenta raíz unitaria (la serie es estacionaria)

Después el procedimiento es el mismo que hemos mencionado líneas arriba, pero esta vez consultaremos la tabla de Elliott - Rothenberg y Stock (1996).

A continuación expondremos la prueba con más detalle:

TEST DICKEY-FULLER CON GLS TENDENCIALMENTE (DFGLS)

Usted habrá notado anteriormente, que puede incluir una constante, o una constante y una tendencia de tiempo lineal, en su ADF prueba regresión. Para estos dos casos, ERS (1996) propone una modificación simple del ADF prueba la tendencia determinística para que las variables explicativas.
ERS definen una cuasi-diferencia donde "a" toma el valor de uno para ADF. Aquí el valor de "a" representa el punto específico contra el cual contrastamos la hipótesis nula (valor menor de uno).[10]

$$d(y_t / a) = \begin{cases} y_t & si \quad t = 1 \\ y_t - ay_{t-1} & si \quad t > 1 \end{cases}$$

H_0 : La serie es estacional en tendencia.
H_1 : La serie es no presenta estacionalidad en tendencia.

Luego, considere una regresión de OLS (MCO) de los datos cuasi-diferenciado $d(y_t / a)$ en los cuasi-diferenciamos $d(x_t / a)$

$$d(y_t / a) = d(x_t / a)'\delta(a) + \eta_t$$

Donde x_t contiene una constante, una constante y tendencia, y permitió $\hat{\delta}(a)$ sea las estimaciones de OLS (MCO) de esta regresión.

Todos que nosotros necesitamos ahora son un valor para "a". ERS recomiendan el uso de $a = \bar{a}$, dónde:

[10] Hay que mencionar que en comparación con DF y ADF esta prueba es la más potente que las dos anteriores.

$$\bar{a} = \begin{cases} 1 - 7/T & si \quad x_t = \{1\} \\ 1 - 13.5/T & si \quad x_t = \{1, t\} \end{cases}$$

Nosotros definimos los GLS de datos de tendencias, ahora y_t^d mientras usando las estimaciones asociadas con el $\bar{a}$:

$$y_t^d \equiv y_t - x_t' \hat{\delta}(\bar{a})$$

Entonces la prueba de DFGLS involucra estimando el ADF normal pruebe la ecuación, $\Delta y_t = \alpha y_{t-1} + x_t'\delta + \beta_1 \Delta y_{t-1} + \beta_2 \Delta y_{t-2} + \ldots + \beta_p \Delta y_{t-p} + \upsilon_t$, después de sustituir el y_t^d dentencial de GLS para el original y_t:

$$\Delta y_t^d = \alpha y_{t-1}^d + \beta_1 \Delta y_{t-1}^d + \ldots + \beta_p \Delta y_{t-p}^d + \upsilon_t$$

Note que en la ecuación anterior nosotros no incluimos x_t el en la DFGLS prueba ecuación. Como con la prueba de ADF, nosotros consideramos el t - ratio para proporción para $\hat{\alpha}$ de esta ecuación de la prueba.

PRUEBA DE DICKEY – FULLER AUMENTADO (ADF)

En la prueba original de Dickey – Fuller (DF) se supone que el término error (ε_t) no esta correlacionado. Por lo que Dickey – Fuller, Said y Dickey (1984), Phillips (1987) y Phillips- Perron (1988) modificaron la prueba original, con el fin de que ε_t no es ruido blanco.[11]

Para esto consideraron que la serie de tiempo puede se representa como un proceso autoregresivo de orden p.

$$Y_t = \alpha + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \ldots + \beta_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Cuando se extrae el término de $\beta_p Y_{t-p+1}$ nos da:

$$\Delta Y_t = \alpha + \phi Y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \psi_i \Delta Y_{t-i+1} + \varepsilon_t \ldots (II)$$

Donde:

$$\phi = -\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \beta_i\right) \qquad \wedge \qquad \beta_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_j$$

El número de rezagos óptimo para el modelo se termina de manera empírica, siendo la idea de incluir los términos suficientes para que el error del modelo no este seriamente relacionado.

[11] He aquí el nombre de de Dickey – Fuller Aumentado, por que a los autores iniciales se incorporaron Said, Phillips y Perron.

De la ecuación II, se despende tres modelos de serie de tiempo que son: El paseo aleatorio (Random Walks) pero, el paseo aleatorio con intercepto (drift) y paseo aleatorio con intercepto y tendencia (componente determinístico).

- Paseo aleatorio puro:

$$\Delta Y_t = \phi Y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \psi_i \Delta Y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

- Paseo aleatorio con drift:

$$\Delta Y_t = \alpha + \phi Y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \psi_i \Delta Y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

- Paseo aleatorio con drift y tendencia:

$$\Delta Y_t = \alpha + \phi Y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \psi_i \Delta Y_{t-i+1} + \delta . t + \varepsilon_t \longrightarrow$$ (Ecuación completa, que se recomienda para realizar el test)

Si observamos la última ecuación incorpora la sumatoria (que estaba presente en la ecuación II) hasta *p* rezagos de la primera diferencia de la variable. Esta está sumatoria establece la representación aumentada de la prueba de ADF, a su vez que corrige la presencia de correlación serial en los residuo de la ecuación, pero si la serie analizada presenta un orden de autorregresión superior a uno.

Entonces el elementó a tomar en cuenta son los valores de MacKinnon (que no evalúa la típica prueba *t*, por que bajo la hipótesis nula, el estadístico $\hat{\phi}/\sigma_{\hat{\phi}}$, no presenta un distribución *t* conocida), que resultan más generales que los valores de la tabla de Dickey – Fuller.

Si usamos el modelo general la hipótesis nula es $\phi = 0$, que nos dice de la presencia de una raíz unitaria en la serie. Si se rechaza la hipótesis nula se concluye que dicha serie no presenta raíz unitaria.[12]

Pero si uno quiere ser más riguroso en la determinación de un componente determinístico tendríamos que basarnos en Walter Enders (1995) que presenta un procedimiento más general que a continuación presentaremos:

Procedimiento de Walter Enders para la Raíz Unitaria (R.U)

- $\tau_t \rightarrow$ Estadístico asociado a la hipótesis $\phi = 0$, en la ecuación completa.
- $\tau_{\phi.t} \rightarrow$ Estadístico asociado a la hipótesis δ=0 dado $\phi = 0$, en la ecuación completa.
- $\tau_{\phi.t}$ *Crit* $\rightarrow$ 2.79 (valor crítico para una confianza del 95%; 100 observaciones).
- $\tau_{\delta} \rightarrow$ Estadístico asociado a la hipótesis nula $\phi = 0$, en la ecuación sin tendencia (sólo intercepto).

---

[12] Una recomendación es utilizar el modelo General que incluye el intercepto y la tendencia, para no cometer el error de no rechazar la hipótesis nula (presencia de una raíz unitaria en la serie), cuando ella realmente no existe una raíz unitaria. Por lo que se estaría cometiendo el Error tipo II, por esto al realizar el test se selecciona el intercepto y la tendencia.
También es importante evaluar la significancia individual de α (Drift) y δ (coeficiente del primer rezago) para establecer si es valido la inclusión de estos dos términos en la ecuación

- $\tau_{\alpha\delta}$ → Estadístico asociado a la hipótesis α= 0 dado $\phi = 0$, en la ecuación sin tendencia (solo intercepto).
- $\tau_{\alpha\delta}$ → 2.54 (valor crítico para una confianza del 95%; 100 observaciones).
- τ → Estadístico asociado a la hipótesis $\phi = 0$, en la ecuación sin componentes determinísticos.
- MacK → Estadístico de MacKinnon (5% de significancia) reportado en EViews en cada ventana del test.

PRUEBA DE PHILLIPS – PERRON (PP)

En esta prueba de raíz unitaria fue desarrollada por Phillips y Perron, que al igual que ADF plantean la hipótesis nula ϕ = 1 en la ecuación.

$$\Delta Y_t = \alpha + \phi Y_{t-1} + \delta.t + \varepsilon_t$$

Pero la diferencia radica que la prueba ADF, no existe termino de diferencia retardada, además PP utilizan métodos estadístico no paramétricos para evitar la correlación serial en los términos del error, sin añadir términos de diferencia rezagada en la ecuación(esta es la principal diferencia).

> "Según Perron (1989), si se prescindiera de aquellos datos que representan un comportamiento anómalo en la evolución de la serie, a través de la inclusión de variables dummy, aquella presentaría un comportamiento estacionario. Así, Perron (1989) propone una modificación del test de DF que permite, bajo la hipótesis nula (H_0) de raíz unitaria, la hipótesis alternativa (H_1) de estacionariedad alrededor de una función de la tendencia determinista que presenta un cambio en su intercepto en 1929 (un crash) y en su pendiente en 1973 (una disminución en su crecimiento)."[13]

Phillips - Perron parte de la estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios y luego el t-estadístico del coeficiente ρ es corregido.

H_0: La trayectoria de la raíz unitaria con tendencia en la serie.

H_1: Estacionalidad con tendencia de la serie.

Si el t-student asociado al coeficiente de Y_{t-1} es mayor en valor absoluto al valor crítico de MacKinnon, entonces se rechaza la hipótesis nula de la existencia de una raíz unitaria con tendencia en la serie.

Primera diferencia de la serie

H_0: ΔPBI presenta una raíz unitaria con tendencia (ΔPBI no es estacionaria)
H_1: ΔPBI no presenta una raíz unitaria (ΔPBI es estacionaria)

[13] Badill mador-Rosa, Belaire Franch-Jorge y Contreras Bayarri-Dulce. "Contrastes de Raíz Unitaria para Series Temporales en Presencia de o A Cambios Estructurales", Dirección del Departamento de Análisis Económico. Archivo Acrobat, DT 00-06.

PRUEBA DE KWIATKOWSKI, PHILLIPS, SMICHDT Y SHIN (KPSS)

Los autores proponen contrastar como hipótesis nula la hipótesis de estacionalidad en tendencias, he aquí la principal diferencia con los anteriores contrastes de raíces unitarias.

La prueba KPSS es tan utilizada como las otras pruebas de raíces unitarias. En la actualidad es muy útil en la investigación, para saber si la serie es fraccionalmente integrada.

H_0 : La serie es estacional en tendencia.

H_1 : La serie es no presenta estacionalidad en tendencia.

A continuación se presenta la traducción de EViews 7 User's Guide II (2010), para mayor información y una mejor traducción dirigirse a la página 387.

El KPSS (1992) a prueba difiere de las otras pruebas de raíz de unidad describió aquí en que se asume que la serie y_t es (la tendencia) estacionario bajo la hipótesis nula. La estadística de KPSS es basado en los residuos de la regresión de OLS (MCO) de y_t en las variables exógenas x_t.

$$y_t = x_t{}'\delta + u_t$$

La estadística de LM es ser definida como:

$$LM = \left(\frac{\sum_t S(t)^2}{T^2} \right) f_0$$

Donde f_0, es un estimador del espectro residual al cero de frecuencia y donde es una función residual acumulativa:

$$S(t) = \sum_{r=1}^{t} \hat{u}_r$$

Basado en los residuos $\hat{u}_t = y_t - x_t'\hat{\delta}(0)$. Nosotros señalamos que el estimador de usó en este cálculo difiere del estimador para usó por el de GLS desde que es basado en una regresión que involucra los datos originales y no en los datos cuasi-diferenciados.

Especificar el KPSS prueba, usted debe especificar el juego de regresibidad exógenas x_t y un método por estimar f_0.

Los valores críticos informados para el LM prueban la estadística es basado en los resultados del asintóticamente presentados en KPSS.

CONTRASTE DE ELLIOT, ROTHENBERG Y STOCK POINT OPTIMAL (ERS)

A continuación se presenta la traducción de EViews 7 User's Guide II (2010), para mayor información y una mejor traducción dirigirse a la página 387.

El ERS señala la prueba Óptima es basado en la regresión cuasi-diferenciando definida en la Ecuación $d(y_t / a) = d(x_t / a)'\delta(a) + \eta_t$. En donde los residuos de $d(y_t / a) = d(x_t / a)'\delta(a) + \eta_t$

Como: $\hat{\eta}_t(a) = d(y_t / a) - d(x_t a)'\hat{\delta}(a)$ y permitió $SSR(a) = \sum \hat{\eta}_t^2(a)$ sea la función de los residuos suma de cuadrada. El ERS (factible) señala el estadístico de la prueba óptima de la hipótesis nula $\alpha = 1$ que contra la alternativa $\alpha = \bar{a}$ que, se define entonces como:

$$P_T = \frac{(SSR(\bar{a}) - \bar{a}SSR(1))}{f_0}$$

H_0 : La serie tiene una raíz unitaria

H_1 : La serie no tiene una raíz unitaria.

Donde es f_0 un estimador del espectro residual al cero de frecuencia y donde es una función residual acumulativa.

Computar el ERS prueba, que usted debe especificar el juego de regresibidades exógenas x_t y un método por estimar f_0.

PRUEBA Ng – PERRON (NP)

A continuación se presenta la traducción de EViews 7 User's Guide II (2010), para mayor información y una mejor traducción dirigirse a la página 388.

Ng Perron (2001) construya cuatro estadísticas de la prueba que están basadas en los GLS de tendencia en los datos y_t^d. Estas estadísticas de la prueba se modifican formularios de Phillips – Perron Z_α y Z_t la estadística de Bhargava (1986) la estadística R1, y el ERS señala la estadística Óptima. Primero, defina el término:

$$k = \frac{\sum_{t=2}^{T} (y_{t-1}^d)^2}{T^2}$$

H_0 : La serie presenta una raíz unitaria.

H_1 : La serie no tiene una raíz unitaria.

Si los valores de Ng – Perron son menores en valor absoluto a los valores críticos al 1%, 5% y 10% de significancia. Se dice que la serie no presenta raíz unitaria.

Las estadísticas modificadas pueden escribirse entonces como:

$$MZ_\alpha^d = (T^{-1}(y_T^d)^2 - f_0)/(2\kappa)$$
$$MZ_t^d = MZ_\alpha \times MSB$$
$$MSB^d = (\kappa/f_0)^{1/2}$$
$$MP_T^d = \begin{cases} (\bar{c}^2\kappa - \bar{c}\,T^{-1}(y_T^d)^2)/f_0 & \text{if } x_t = \{1\} \\ (\bar{c}^2\kappa + (1-\bar{c})\,T^{-1}(y_T^d)^2)/f_0 & \text{if } x_t = \{1, t\} \end{cases}$$

Donde:

$$\bar{c} = \begin{cases} -7 & \text{if } x_t = \{1\} \\ -13.5 & \text{if } x_t = \{1, t\} \end{cases}$$

Las pruebas de Ng Perron requieren una especificación para x_t y una opción de método por estimar f_0.

MODELOS UNIVARIANTES

Modelos Autorregresivos AR(p)

El proceso y_t es una suma ponderada de sus valores pasados o valores rezagados y de un término de error. Este modelo esta representado por la siguiente ecuación:

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Utilizando el operador en rezagos ($y_{t-s} = L^s Y_t$) en la ecuación:

$$y_t = \delta + \phi_1 L y_t + \phi_2 L^2 y_t + \ldots + \phi_p L^p y_t + \varepsilon_t \;\Rightarrow\; y_t - \phi_1 L y_t - \phi_2 L^2 y_t - \ldots - \phi_p L^p y_t = \delta + \varepsilon_t$$

Reemplazando: $\phi_p(L^s) = y_t - \phi_1 L y_t - \phi_2 L^2 y_t - \ldots - \phi_p L^p y_t$ tenemos:

$$\phi_p(L^s) y_t = \delta + \varepsilon_t \ldots (I)$$

La ecuación anterior será siempre invertible y la condición de estacionalidad será, que las raíces unitarias de $\phi_p(L^s) = 0$ caigan fuera del círculo unitario.

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p) y_t = \delta \;\rightarrow\; (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p) y_t = 0$$

$|L_i| > 1 \;\rightarrow$ Donde todas las raíces deben estar fuera del círculo unitario.

La media del proceso es:

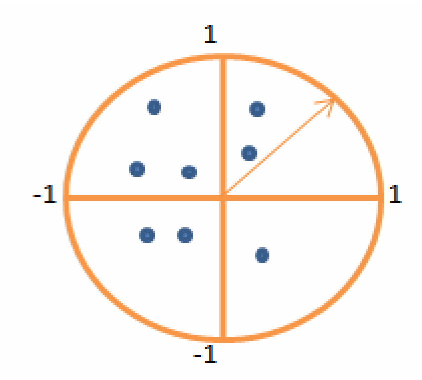
$$E(y_t) = E(\delta) + \phi_1 E(y_{t-s}) + \phi_2 E(y_{t-2s}) + \ldots + \phi_p E(y_{t-ps}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = \delta + \phi_1 E(y_{t-s}) + \phi_2 E(y_{t-2s}) + \ldots + \phi_p E(y_{t-ps}) + 0$$

$$\mu = \delta + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu + \ldots + \phi_p E.\mu \quad \rightarrow \quad \mu = E(y_t) = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_p \mu}$$

Ecuaciones en Diferencia

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-s} + \phi_2 y_{t-2s} + \ldots + \phi_p y_{t-ps}$$
$$y_t - \phi_1 y_{t-s} - \phi_2 y_{t-2s} - \ldots - \phi_p y_{t-ps} = 0$$
$$r^p - \phi_1 r^{p-1} - \phi_2 r^{p-2} - \ldots - \phi_p = 0$$



$|r_i| < 1 \quad \rightarrow$ Todas las raíces deben estar dentro del círculo unitario.

Pero si las raíces son imaginarias, entonces el modulo tienen que ser menor que uno: $r = \alpha \pm \beta.i$

$i = \sqrt{-1} \qquad\qquad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1$

- Debemos decir que el modelo AR(p) puede ser escrito también de forma de desviaciones con respecto a la media.

$$\bar{y}_t = \phi_1 \bar{y}_{t-s} + \phi_2 \bar{y}_{t-2s} + \phi_3 \bar{y}_{t-3s} + \ldots + \phi_p y_{t-ps} + \varepsilon_t$$

Donde:

$\bar{y}_{t-js} = y_{t-js} - \mu$ Para $j = 0,1,2,\ldots,p$

Por estacionalidad débil se sabe que: $\mu = E(y_t) = E(y_{t-s}) = \ldots = E(y_{t-ps})$

Reemplazando la estacionalidad débil en la ecuación (I)

$$\phi_p(L^s)\bar{y}_t = \delta + \varepsilon_t$$

- Podemos pasar también de un $AR(p)$ a un $MA(\infty)$. Por lo que para cualquier proceso autorregresivo estacionario, sea de cualquier orden que sea, existe un proceso de media móvil de orden infinito equivalente.

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Reemplazando el operador de rezagos y agrupando tenemos:

$$y_t = \frac{\delta}{1 - \phi_1 L} = \delta\left(\frac{1}{1 - \phi_1 L}\right) + \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi_1 L}$$

Si |λ| < 1

$$\frac{1}{1-\lambda} = \lambda^0 + \lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 + \ldots$$

$$y_t = \frac{\delta}{1-\phi_1 L} + \varepsilon_t\left[(\phi_1 L)^0 + (\phi_1 L)^1 + (\phi_1 L)^2 + \ldots\right]$$

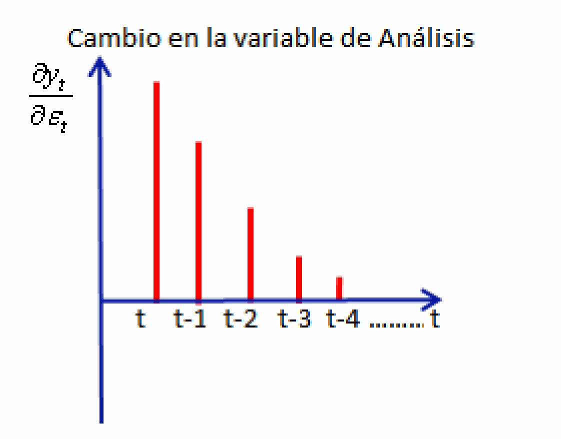
$$y_t = \frac{\delta}{1-\phi_1 L} + \left[\varepsilon_t + (\phi_1)^1 \varepsilon_{t-1} + (\phi_1)^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots\right]$$

$$y_t = \frac{\delta}{1-\phi_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i . \varepsilon_{t-1}$$

La ecuación anterior nos expresa el Teorema de Wold, que nos dice: Toda serie estacionaria puede descomponerse en una parte determinística y una parte estocástica.

Efecto Impulso - Respuesta[14]

$$\text{Impulso Respuesta} \begin{cases} \dfrac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t} = 1 \\ \dfrac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_{t-1}} = \phi_1 \\ \dfrac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_{t-2}} = \phi_2 \\ \dfrac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_{t-3}} = \phi_3 \\ \vdots \end{cases}$$



Modelo AR(1)

Este modelo AR(1) esta definido como:

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \ldots (II)$$

La ecuación nos dice que el valor de la variable en tiempo *t* es ϕ_1 veces el valor en tiempo *t-1*, más el valor de la constante y más un componente aleatorio de ruido blanco.

Reemplazando el operador de rezagos:

$$(1-\phi_1 L)y_t = \delta \quad \rightarrow \quad (1-\phi_1 L)y_t = 0$$

Es estacionaria e invertible

[14] La representa de los efectos ante choques externo.

$$L = \frac{1}{|\phi_1|} > 1 \rightarrow \ |\phi_1| < 1$$

La Esperanza del Proceso es:

$$E(y_t) = E(\delta) + \phi_1 E(y_{t-1}) + E(\varepsilon_t)\ E(y_t) = E(\delta) + \phi_1 E(y_{t-1}) + E(\varepsilon_t) \ \rightarrow \ \mu = \delta + \phi_1 \mu$$

$$\mu = \frac{\delta}{1-\phi_1}$$

La Varianza es:

$$Var(y_t) = Var(\delta) + \phi_1^2 Var(y_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) \ \rightarrow \ \gamma_0 = 0 + \phi_1^2 . \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}$$

Los Correlogramas del proceso AR(1):

$$\gamma_1 = E[(y_t - \varepsilon_t).(y_{t-1} - \varepsilon_t)] \qquad \gamma_2 = E[(y_t - \varepsilon_t).(y_{t-2} - \varepsilon_t)]$$

La función de Autocorrelación Simple (AC)

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}$$

$$\gamma_1 = E[\bar{y}_t.\bar{y}_{t-1}] = E[(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t)\bar{y}_{t-1}]$$

$$\gamma_1 = E[(\phi_1 y_{t-1}.\bar{y}_{t-1} + \varepsilon_t \bar{y}_{t-1})] \quad \rightarrow \quad \gamma_1 = \phi_1 E(y_{t-1}^2) + E(\varepsilon_t) E(\bar{y}_{t-1})$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + 0.E(\bar{y}_{t-1})$$

$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 \rightarrow$ Generalizando el proceso $\gamma_n = \phi_1^n \gamma_0$

Reemplazando en AC

$$\rho_1 = \frac{\phi_1 \gamma_0}{\gamma_0} = \phi_1 \quad \rightarrow \quad \rho_1 = \phi_1$$

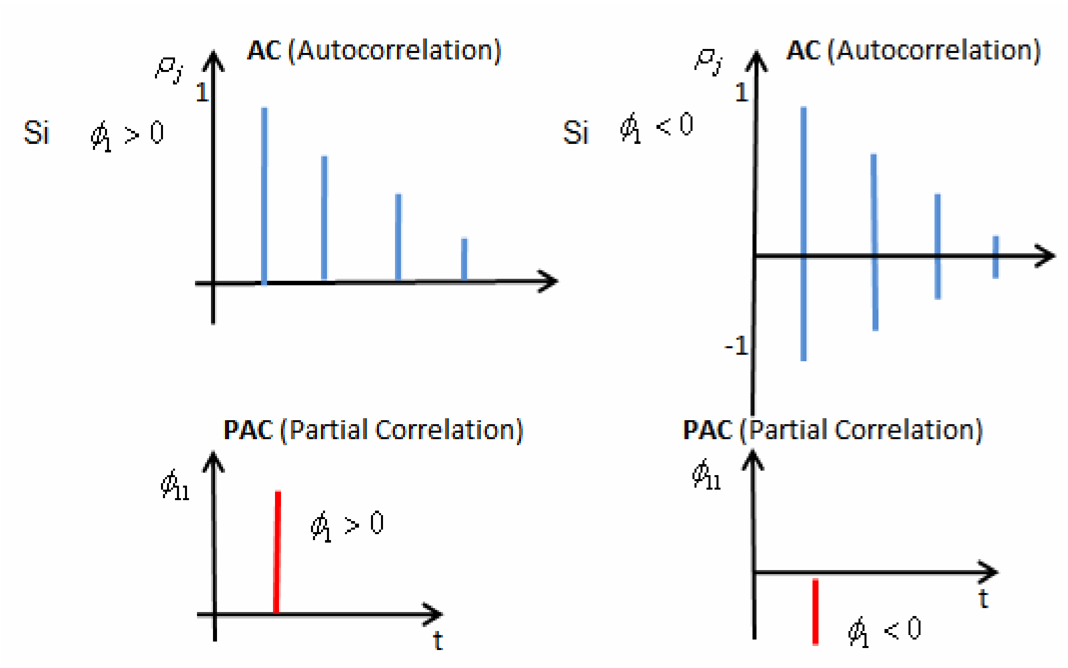
$\rho_j = 0 \quad \forall j = 2,3,...$ Siendo la condición de estacionalidad $|\phi_1| < 1$

Dado que y_t depende únicamente de su primer rezago, ningún otro sería significativo

Generalizando el proceso anterior obtenemos:

La función de Autocorrelación Parcial (PAC)

$$\phi_{ij} = \begin{cases} \rho_1 = \phi_1 & (significativo) \\ 0 & \forall j > 1 \end{cases}$$



Modelo AR(2)

Es el modelo cuyo comportamiento se define a través de dos valores pasados o rezagados.

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \ldots (III)$$

Dicho proceso será estacionario si:

$|\phi_1 + \phi_2| < 1$ $\qquad$ $\phi_2 - \phi_1 < 1$ $\qquad$ $|\phi_2|_1 < 1$

Aplicando esperanza a la ecuación (III)

$$E(y_t) = \delta + \phi_1 E(y_{t-1}) + \phi_2 E(y_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$

De la estacionalidad débil sabemos: $E(y_t) = E(y_{t-1}) = E(y_{t-2}) = \mu$

$$\mu = \delta + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu + 0$$

$$\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2}$$

Aplicando la varianza al proceso de AR(2) tenemos:

$$Var(y_t) = 0 + \phi_1^2 Var(y_{t-1}) + \phi_2^2 Var(y_{t-2}) + Var(\varepsilon_t)$$

Del supuesto de invarianza: $Var(y_t) = Var(y_{t-1}) = Var(y_{t-2}) = \gamma_0$

$$\gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \phi_2^2 \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2}$$

La Función de Autocorrelación Simple (AC):

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

Generalizando el proceso tenemos:

$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} \qquad \forall j > 1$

Esta función presenta un decrecimiento rápido de tipo geométrico puro, con alteración de signos, sinusoidal o una mezcla de varios tipos.

La Función de Autocorrelación Parcial (PAC):

$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$

$\rho_2 = \phi_2$

$\rho_3 = 0$

$\vdots$

Generalizando tenemos $\rho_j = 0 \qquad \forall j > 2$

Esto nos quiere decir que la función de autocorrelación parcial se anula para valores superiores a *p*.

Modelos Estaciónales de Medias Móviles MA(q)

Este proceso esta descrito por la suma ponderada de los errores actuales y pasados. Esto quiere decir que un proceso MA(q) esta formado por una media ponderada de las perturbaciones aleatorias con un q períodos de retardos.

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Utilizando los operadores en rezagos, podemos describir el proceso MA(q) como:

$y_t = \mu - \theta(L)\varepsilon_t$

Donde:
ε_t : Es un proceso ruido blanco
$\theta(L): 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \ldots \theta_q L^q$

- Hay que decir que todos los proceso MA(q) son estacionarios, independientemente del valor que toma θ_i , pero no todo proceso MA(q) son invertible esto es por que puede transformarse en un proceso autorregresivo.

Al igual que los modelos AR la condición de invertibilidad esta relacionada con el valor de las raíces del polinomio de rezagos $\theta(L)$. Por lo que el modelo MA solamente será invertible si las raíces del modelo caen fuera del círculo unitario.

$\varepsilon_t = \frac{y_t}{\theta(L)} = \frac{y_t}{(1-r_1 L)(1-r_2 L)\ldots(1-r_q L)}$

Donde $|r_1| < 1$

- Aplicando la esperanza (primer momento) matemática al modelo:

$$E(y_t) = E(\mu) + E(\varepsilon_t) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) - \theta_2 E(\varepsilon_{t-2}) - \theta_3 E(\varepsilon_{t-3}) \ldots - \theta_q E(\varepsilon_{t-q})$$
$$E(y_t) = \alpha + 0 - \theta_1.0 - \theta_2.0 - \theta_3.0 \ldots - \theta_q.0$$

$$E(y_t) = \mu$$

- Aplicando la varianza (segundo momento) al modelo:

$$E\left[(y_t - \mu)^2\right] = \varepsilon_t^2 \sum_{k=0}^{q} \theta_k^2$$
$$E\left[(y_t - \mu)(y_{t-s} - \mu)\right] = \sigma_t^2 \sum_{k=0}^{q} \theta_k \theta_{k+s}$$
$$Var(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots \theta_q^2)$$

Pero si y_t es la realización de un proceso aleatorio estacionario, es preciso que $\sum_{k=1}^{q} \theta_k^2$ sea convergente a medida que q llega a ser infinitamente grande, por lo que los valores de θ_k son cada vez más pequeños a medida que aumenta *k*. Esta implicancia origina que la función de autocorrelación decrece (memoria corta) a medida que aumenta *k*.

Modelo MA(1)

Este proceso es estacionario, lo que nos interesa saber si son invertibles

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Expresándolo en su operador de rezagos:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 L \varepsilon_t$$
$$y_t = \mu + (1 - \theta_1 L)\varepsilon_t \quad \rightarrow \quad y_t = \mu + \theta_1 L \varepsilon_t$$

La invertibilidad $\theta(L) = 0$, donde la raíz tiene que ser mayor que uno

$$1 - \theta_1 L = 0 \quad \rightarrow \quad |L| = \frac{1}{|\theta_1|} > 1 \quad \rightarrow \quad |\theta_1| < 1$$

La Esperanza del proceso es:
$$E(y_t) = \mu$$

La Varianza del proceso es:
$$Var(y_t) = Var(\mu) + Var(\varepsilon_t) + \theta_1^2 Var(\varepsilon_{t-1})$$
$$Var(y_t) = 0 + Var(\varepsilon_t) + \theta_1^2 Var(\varepsilon_{t-1})$$
$$Var(y_t) = 0 + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2.\sigma_\varepsilon^2$$
$$Var(y_t) = \gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2)$$

La Autocovarianza para el primer rezago es:

$$y_t - E(y_t) = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

$$\tilde{y}_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \qquad \rightarrow \qquad \gamma_1 = E[\tilde{y}_t\tilde{y}_{t-1}]$$

$$\gamma_1 = E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2})]$$

$$\gamma_1 = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}^2)$$

$$\gamma_1 = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2$$

La función de Autocorrelación Simple (AC)

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1\sigma_\varepsilon^2}{(1+\theta_1^2).\sigma_\varepsilon^2} \qquad \rightarrow \qquad \rho_1 = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

$$\rho_2 = 0$$

$$\rho_3 = 0$$

$$\vdots$$

$$\rho_k = 0 \qquad \rho_k = 0 \qquad \forall k = 2,3,...$$

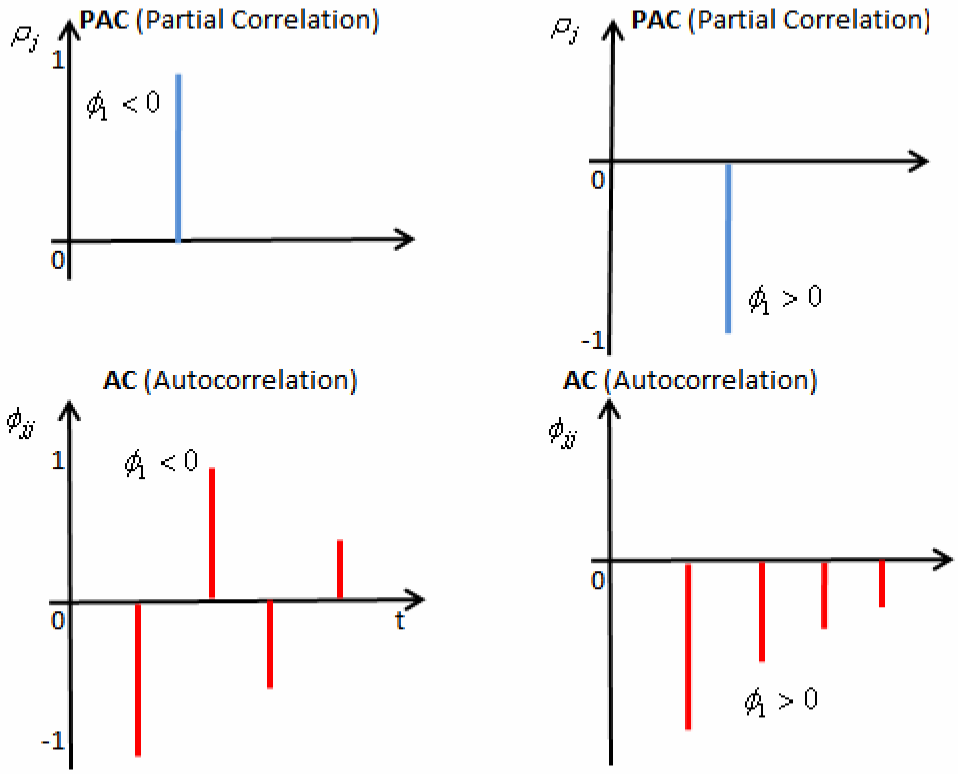
Dado que y_t depende únicamente de su primer rezago, ningún otro sería significativo

La función de Autocorrelación Parcial (PAC)

$$\phi_{jj} = \begin{cases} \rho_1 = \theta_1 & (significativo) \\ 0 & \forall j > 1 \end{cases}$$

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \qquad \cdots \qquad \phi_{jj} = \frac{-\theta_1^j(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(j+1)}}$$



Pulido, A y Pérez García, J (2001), mencionan que un proceso MA(1) presenta las siguientes características:

Características del proceso MA(1)

a) El modelo MA(q) siempre es estacionario.
b) Para que sea invertible dicho proceso debe cumplirse que $|\theta_1| < 1$.
c) La función de autocorrelación muestral se anula para retados superiores a uno. De hay que el proceso MA(1) tenga una memoria de un período.
d) El correlograma es la representación grafica de la función de autocorrelación, tendrá un único valor si $\theta_1 > 0$ el $\rho_1 < 0$, en cambio si $\theta_1 < 0$ el $\rho_1 > 0$ la función no se anula.
e) La función de autocorrelación parcial no se anula si $\theta_1 < 0$ su comportamiento es negativo amortiguándose lentamente hacia cero en lo sucesivos rezagos. Si $\theta_1 > 0$, se altera el signo amortiguándose hacia cero.

Modelo MA(2)

La notación de un MA(2) esta dado por:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

Expresándolo en su operador de rezagos:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 L \varepsilon_t - \theta_2 L^2 \varepsilon_t$$
$$y_t = \mu + (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2)\varepsilon_t \quad \rightarrow \quad y_t = \mu + \theta L \varepsilon_t$$

La invertibilidad $\theta.L = 0$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow \begin{matrix} Si & \Delta = 0 \\ Si & \Delta > 0 \\ Si & \Delta < 0 \rightarrow compleja \end{matrix}$$

$$\theta_2 L^2 + \theta_1 L - 1 = 0$$

$$L = \frac{\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{2\theta_2}$$ → Condiciones de invertibilidad $\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 < 1 \\ \theta_2 - \theta_1 < 1 \\ |\theta_2| < 1 \end{cases}$

La Esperanza del proceso es:

$$E(y_t) = \mu$$

La Varianza del proceso es:

$$Var(y_t) = Var(\mu) + Var(\varepsilon_t) + \theta_1^2 Var(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2^2 Var(\varepsilon_{t-2})$$
$$Var(y_t) = 0 + Var(\varepsilon_t) + \theta_1^2 Var(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2^2 Var(\varepsilon_{t-2})$$
$$Var(y_t) = 0 + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2.\sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2.\sigma_\varepsilon^2$$
$$Var(y_t) = \gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

La Autocovarianza para el primer rezago es:

$$y_t - \mu = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}$$
$$\tilde{y}_t = \varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \theta_2\varepsilon_{t-3} \quad \rightarrow \quad \gamma_1 = E[(\tilde{y}_t - \mu)(\tilde{y}_{t-1} - \mu)]$$
$$\gamma_1 = E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \theta_2\varepsilon_{t-3})]$$
$$\gamma_1 = E[-\theta_1\varepsilon_{t-1}^2 + \theta_2\theta_1\varepsilon_{t-2}^2]$$
$$\gamma_1 = -\theta_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \theta_2\theta_1 E(\varepsilon_{t-2}^2)$$
$$\gamma_1 = -\theta_1.\sigma_\varepsilon^2 + \theta_2\theta_1.\sigma_\varepsilon^2$$
$$\gamma_1 = -\theta_2\sigma_\varepsilon^2$$

La función de Autocorrelación Simple (AC)

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\sigma_\varepsilon^2(-\theta_1 + \theta_1\theta_2)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2).\sigma_\varepsilon^2} = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

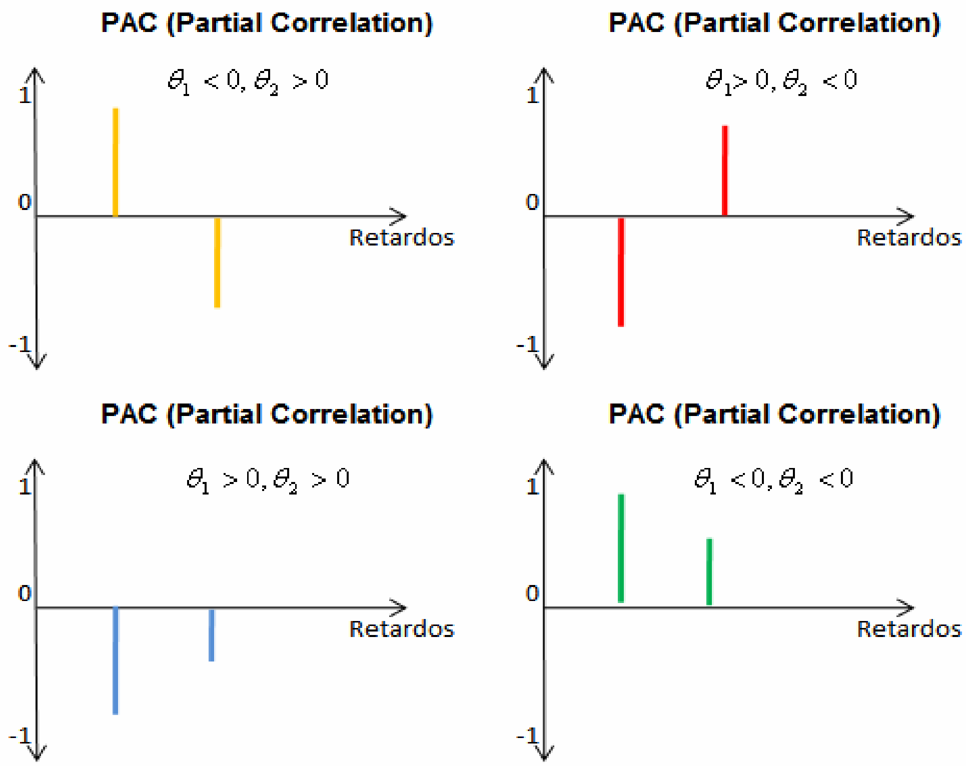
$$\rho_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\sigma_\varepsilon^2\theta_2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2).\sigma_\varepsilon^2} = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \qquad \rho_j = \frac{-\theta_j + \theta_1\theta_{j+1} + \ldots + \theta_{q+j}\theta_q}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_j^2)}$$

$$\rho_3 = 0$$
$$\rho_3 = 0$$
$$\vdots$$
$$\rho_k = 0 \qquad \rho_k = 0 \quad \forall k = 3,4...$$

La función de Autocorrelación Parcial (PAC)

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{-\theta_1^2 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \qquad \phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$



Características del proceso MA(2)

a) Dicho modelo siempre es estacionario.
b) La condición de invertibilidad que debe cumplirse es: $\theta_1 + \theta_2 < 1$, $\theta_2 - \theta_1 < 1$, $|\theta_2! < 1$
c) La función de autocorrelación simple se anula para rezagos superiores a dos, es decir dicho proceso tiene memoria de dos períodos.
d) El correlograma en términos gráficos tendría dos valores distintos de cero, que corresponde a l0os dos primeros rezagos. Si ambos con positivos el ρ para ambos rezagos resulta negativo, en cambio si los θ son negativos el ρ correspondiente tendría valores positivos y si son signo contrario los θ en ρ será positivo el otro negativo.
e) La función de autocorrelación parcial tiene un comportamiento ha amortiguarse hacia cero, en el caso que la ecuación de retardos $(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2)$ tenga raíces reales y tenga un comportamiento sinusoidal en el caso que tengan raíces complejas.

Modelo ARMA(p,q)

El proceso ARMA combina las propiedades de los procesos autorregresivos y los de media móvil, por lo que se espera que este proceso sea muy flexible y que puedan representar un gran número de series temporales. Por lo que se espera que la primera q correlaciones sea cualquiera, mientras que el resto decrecerá de manera simple a lo largo del tiempo.

$$y_t = \delta + \underbrace{\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-q}}_{AR(p)} + \underbrace{\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}}_{MA(q)}$$

De manera simplificada también lo podemos expresar con sus operadores de retardo:

$\phi(L) y_t = \delta + \theta(L)\varepsilon_t$

Donde

$\phi(L)$: Es el operador de rezagos del proceso AR(p).
$\theta(L)$: Es el operador de rezagos del proceso MA(q).

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p) y_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

Condición de Estacionalidad:
$\phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_p < 1$
Condición de Invertibilidad:
$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_p < 1$

La Esperanza del proceso es:

$$E(y_t) = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_p} = \frac{\delta}{\sum_{i=1}^{p} \phi_i}$$

Para que la media del proceso sea finita es necesario que $\sum_{i=1}^{p} \phi_i \neq 1$

Varianza del proceso:

$$\tilde{y}_t = \phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{y}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{y}_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$E(\tilde{y}_t)^2 = E\left[\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{y}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{y}_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}\right]^2$$

$$\gamma_0 = \phi_1^2 E(\tilde{y}_{t-1}^2) + \phi_2^2 E(\tilde{y}_{t-2}^2) + \ldots + \theta_p^2 E(\tilde{y}_{t-p}^2) + E(\varepsilon_t^2) + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \ldots + \theta_q^2 E(\varepsilon_{t-q}^2)$$
$$- 2\theta_1\phi_1 E(y_{t-1}\varepsilon_{t-1}) - 2\theta_2\phi_2 E(y_{t-2}\varepsilon_{t-2}) - \ldots - 2\theta_q\phi_p E(y_{t-p}\varepsilon_{t-q})$$

$$\gamma_0 = \phi_1^2\gamma_0 + \phi_2^2\gamma_0 + \ldots + \theta_p^2\gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 + \ldots + \theta_q^2\sigma_\varepsilon^2 - 2\phi_1\theta_1\sigma_\varepsilon^2 - 2\phi_2\theta_2\sigma_\varepsilon^2 - \ldots - 2\phi_p\theta_q\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2\left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots \theta_q^2 - 2\theta_1\phi_1 - 2\theta_2\phi_2 \ldots - 2\theta_q\phi_p\right)}{1 - \theta_1^2 - \theta_2^2 - \ldots - \theta_p^2}$$

Modelo ARMA(1,1)

Este modelo esta representado por la adición de un AR(1) y un MA(1), como se expresa en la siguiente serie:

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

La condición de invertibilidad: $1 - \theta_1 L = 0 \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{|\theta_1|} \rightarrow |\theta_1| < 1$

La condición de estacionalidad: $1 - \phi_1 L = 0 \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{\theta_1} \rightarrow |\theta_1| < 1$

La Esperanza del proceso es:

$$E(y_t) = \delta + \phi_1 E(y_{t-1}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t)$$
$$\mu = \delta + \phi_1 . \mu + \theta_1 .0 + 0$$
$$E(y_t) = \frac{\delta}{1 - \phi_1}$$

La Varianza del proceso es:

$$E[y_t - \mu]^2 = \gamma_0 = E[\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}]^2$$
$$E[\tilde{y}_t]^2 = \gamma_0 = E[\phi_1 y_{t-1} - \phi_1 \mu - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t]^2$$
$$E[\tilde{y}_t]^2 = \gamma_0 = E[\phi_1 (y_{t-1} - \mu) - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t]^2$$
$$E[\tilde{y}_t]^2 = \gamma_0 = E[(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)\tilde{y}_t]$$
$$E[\tilde{y}_t]^2 = \gamma_0 = E[(\phi_1^2 \tilde{y}_{t-1}^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 + 2\phi_1 \tilde{y}_{t-1}\varepsilon_t - 2\phi_1 \tilde{y}_{t-1}\varepsilon_{t-1} - 2\theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1})]$$
$$\gamma_0 = \phi_1^2 E(\tilde{y}_{t-1}^2) + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + E(\varepsilon_t^2) + 2\phi_1 E(\tilde{y}_{t-1}\varepsilon_t) - 2\phi_1 \theta_1 E(\tilde{y}_{t-1}\varepsilon_{t-1}) - 2\theta_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1})$$
$$\gamma_0 = \phi_1^2 . \gamma_0 + \theta_1^2 . \sigma_\varepsilon^2 + . \sigma_\varepsilon^2 + 2\phi_1 .0 - 2\phi_1 \theta_1 \sigma_\varepsilon^2 - 2\theta_1 .0$$

$$\boxed{\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \theta_1\right)}{1 - \phi_1^2}}$$

La Autocovarianza para el primer rezago es:

$E[\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-1}]$ para j : Rezagos

J=0 $\rightarrow$ $E[\tilde{y}_t^2] = \gamma_0$ (varianza de ARMA(1,1))

J=1 $\rightarrow$ $E[\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-1}] = \gamma_1$

J=2 $\rightarrow$ $E[\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-2}] = \gamma_2$

$\vdots \qquad \vdots$

J=p $\rightarrow$ $E[\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-p}] = \gamma_p$

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$
$$\tilde{y}_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$
$$\tilde{y}_{t-1} = \phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2}$$
$$\tilde{y}_{t-2} = \phi_1 y_{t-3} + \varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3}$$

La función de Autocorrelación Parcial (PAC)

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$$
$$\gamma_1 = E[\tilde{y}_{t-1}(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})] = E[(\phi_1 \tilde{y}_{t-1}^2 + \varepsilon_t \tilde{y}_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \tilde{y}_{t-1})]$$

$$\gamma_1 = \phi_1 E(\tilde{y}_{t-1}^2) + 0 - \theta_1 E\left[\varepsilon_{t-1}(\phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2})\right]$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

Sabemos de la demostración de la varianza que:

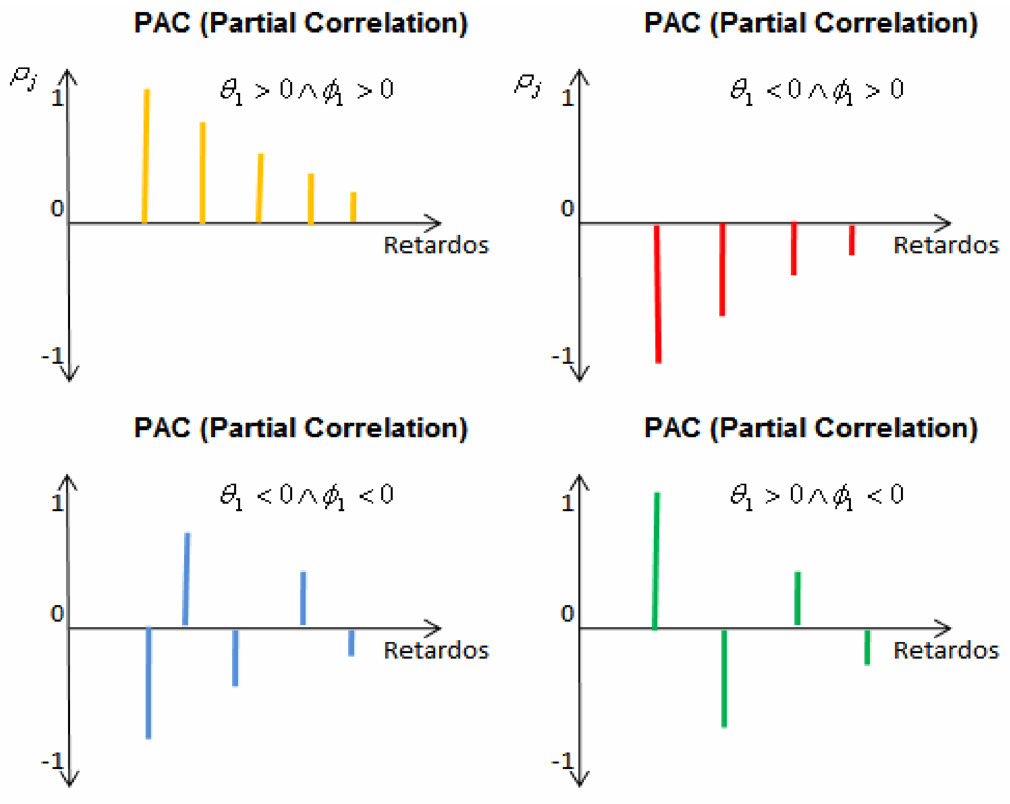
$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1\right)}{1 - \phi_1^2}$$

Reemplazamos γ_0 en γ_1

$$\gamma_1 = \frac{\sigma_\varepsilon^2 (1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2}$$

Reemplazando las expresiones obtenidas:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 (1-\phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)/(1-\phi_1^2)}{\sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1)/(1-\phi_1^2)} \quad \rightarrow \quad \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}$$



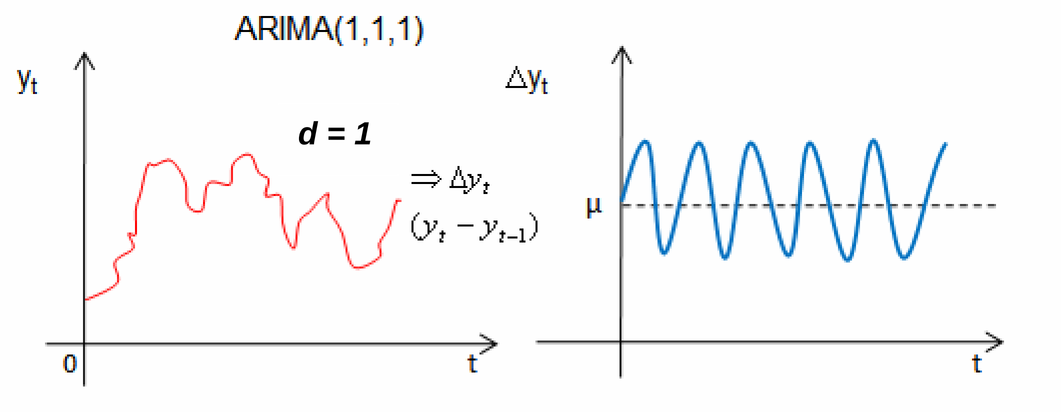
Ejemplo de un ARMA (2,1)

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \varepsilon_t \end{bmatrix}}_{Z_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \varepsilon_{t-1} \end{bmatrix}}_{Z_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{C} .\varepsilon_t$$

Modelo ARIMA(p,d,q)

Son aquello modelos que aplicando "*d*" diferencias a la variable y_t (o integrándole *d* veces a la variable y_t), la variable transformada (Δy_t) se comporta como un modelo ARMA(p,q).[15]



Este modelo tiene un proceso $\Delta^d y_t$ que es una función de valores pasados como del error presente. Por lo que teste proceso genera una media ponderada de observaciones anteriores que remontan *p* períodos en el pasado y una media ponderada de perturbaciones aleatorias con un retardo de *q* períodos, junto con la perturbación aleatoria actual.

El modelo se describe como:

$$\Delta^d y_t = \delta + \phi_1 \Delta^d y_{t-1} + \phi_2 \Delta^d y_{t-2} + \ldots + \phi_p \Delta^d y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p)(1 - L)^p y_t = \delta + (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

De forma simplificada el modelo se puede expresar como:

$$\phi(L)\Delta^d y_t = \delta + \theta(L)\varepsilon_t$$

Donde
L: Representa el operador de cambio hacia atrás.
En modelo con tendencia secular y variaciones cíclicas pueden representarse mediante los modelo ARIMA(*p,d,q*)(*P,D,Q*). Donde el primer paréntesis se refiere a tendencia secular de la serie y el segundo paréntesis se refiere a las variaciones estaciónales o parte cíclica de la tendencia secular de la serie.

Ejemplo de ARIMA:

✐ Un modelo ARIMA(0,1,1)(0,0,1)$_{12}$

$$(1 - L)x_t = (1 - \theta_1 L^{12})(1 - \beta_{12} L^{12})$$

[15] El termino *d* implica cuantas veces debe diferenciarse la serie original para obtener una serie que sea estacionaria.

- Un modelo ARIMA(0,1,1)(0,1,1)$_{12}$

$$(1-L)(-L^{12})x_t = (1-\theta_1 L)(1-\beta_{12}L^{12})\varepsilon_t$$

- Un modelo ARIMA(2,1,0)(1,0,0)$_{12}$

$$(1-\theta_1 L^2 - \theta_2 L^{12} L)(1-\Omega_1 L^{12})(1-L)x_t = \varepsilon_t$$

- Un modelo ARIMA(1,1,1)(2,1,1)$_{12}$

$$(1-\phi_1 L)(1-\Omega_1 L^{12} - \Omega_2 L^{24})(1-L^{12})(1-L)x_t = (1-\theta_1 L)(1-\beta_{12}L^{12})\varepsilon_t$$

Características de las Series de Tiempo Estacionarias

PROCESOS	FAC	FAP
AR(1)	Decrecimiento rápido de tipo geométrico puro y geométrico con signos, sinusoidal o la mezcla de varios.	Se anula para retardos superiores a *p*. $\rho_1 > 0, \rho_k = 0$ $\forall k > 1$
MA(1)	Se anula para retardos superiores a *q*. $\rho_1 > 0, \rho_k = 0$ $\forall k > 1$	Decaimiento rápido de tipo sinusoidal o exponencial.
ARMA(1,1)	Los valores iniciales no tienen un patrón fijo y van seguidos de una mezcla de oscilaciones sinusoidales o exponenciales amortiguadas.	Los valores iniciales son tiene un patrón fijo y van seguidos de una mezcla de oscilaciones sinusoidales o exponenciales amortiguadas.
AR(*p*)	Decrece rápidamente hasta cero, puede oscilar.	Un pico en *k* = *p* $\rho_k = 0 \quad \forall k \neq p$
ARMA(*p,q*)	Decrece rápidamente (puede oscilar) empezando en *k* = *p*	Decrece rápidamente (puede oscilar) empezando en *k* = *p*
ARIMA(*p,d,q*)	Comportamiento irregular en los retardos (1,2,…*q*) con *q* picos. Decrecimiento para retardos superiores a *q*.	Decrece (aproximadamente con exponenciales atenuados y ondas sinusoidales). No cero pronto.

Identificación de los Modelo ARIMA

La metodología Box – Jenkins permite identificar el proceso más apropiado para la serie de tiempo y_t, por lo que este proceso se puede resumir en cuatro pasos:

Paso 1: Transformar la serie hasta que el proceso se convierta en uno estacionario. Si la serie presenta tendencia entonces hay que deponerla (esto se logra diferenciando la serie tantas veces sea necesario para convertirla en estacionaria, depuse se pasa a examinar la FAP y FAS de la serie transformada par ver si alcanzado estacionalidad, en ambas funciones debe decrecer rápidamente hacia cero[16]) o si presenta tendencia determinística esta se remueve si estimamos un polinomio para y_t de la forma:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots + \beta_s t^s + \upsilon_t$$

Entonces con esta transformación, los residuos de la regresión se les considera un proceso estacionario que buscaremos identificar.

Paso 2: Hacer un supuesto inicial que un modelo ARMA(p,q) que describa mejor la serie.

Paso 3: Estimar los parámetros del polinomio de rezagos Φ(L) y Θ(L).

Paso 4: Realizar un diagnostico si el modelo utilizado es el más consistente con los datos. Si nuestro modelo es acertado entonces los residuos no deberían presentar ninguna correlación de ningún tipo, ser homocedástico, presentar normalidad y tener media cero.

Si dicho modelo no presenta esta características deberíamos regresar al paso 2 y repetir el proceso, adicionalmente se puede utilizar criterios de información para elegir el modelo más adecuado.

El modelo que minimice los menores criterios de información será el utilizado. Dichos criterios pasaremos precisar las formulas.

El criterio de información de Akaike (AIC)

$$AIC = -2\frac{L}{T} + 2\frac{k}{T}$$

El criterio de información de Schwarz (SC)

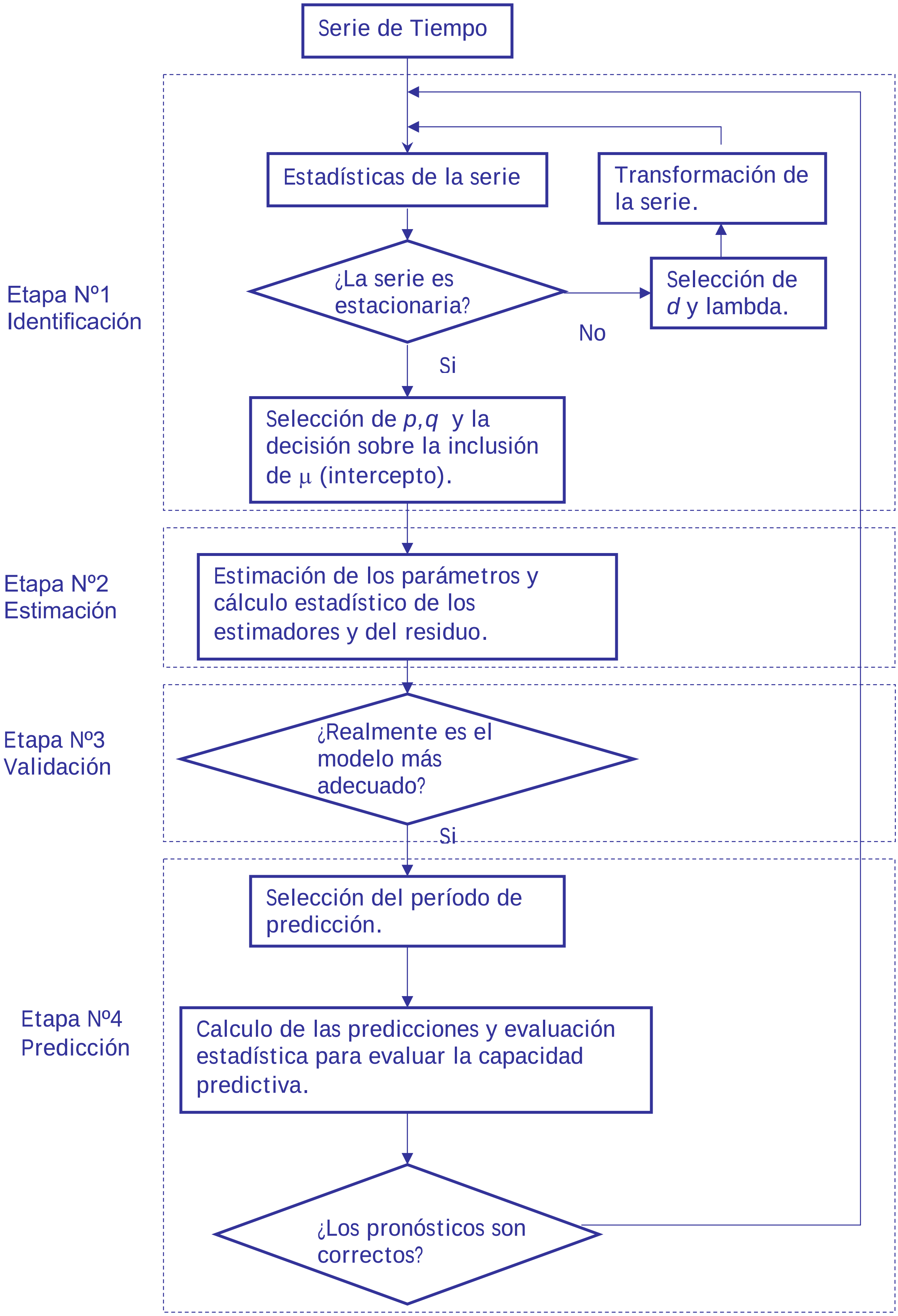
$$AIC = -2\frac{L}{T} + k\frac{Log(T)}{T}$$

Y el criterio de Hannan - Quinn (HC)

$$HQ = -2\frac{L}{T} + 2k\frac{Log(Log(T))}{T}$$

[16] En muchas situaciones de no estacionariedad en media pueden resolverse convenientemente diferenciando la data. Se dice que las presentan esta propiedad si exhiben una no estacionariedad homogénea, de forma que una serie es homogénea de grado *d* si la serie transformada $z_t = (1-A)y_t = \nabla^d y_t$

Diagrama de Flujo del Modelo Box - Jenkins



Transformaciones de Box-Cox

Si la dispersión de los datos varía en función de su esperanza de acuerdo con una relación del tipo:

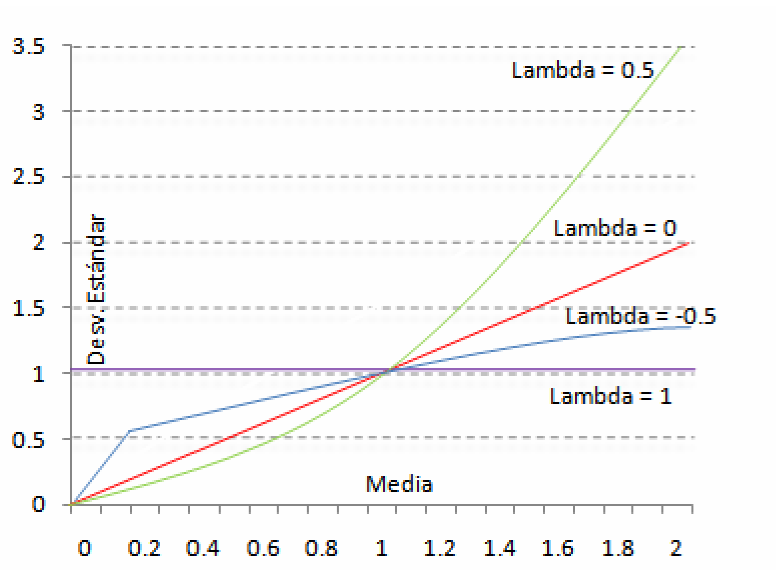
$$\sigma_t = k\mu_t^{(1-\lambda)}$$

La heteroscedasticidad puede eliminarse aplicando una transformación de la familia Box-Cox. En las series económicas de largos períodos, están afectadas por una fuerte tendencia, por lo que es necesario hacer algunas transformaciones rápidas.

$$y_t^\lambda \begin{cases} y_t & \text{para } \lambda = 1 \Rightarrow \text{no se transforma} \\ \dfrac{y_t^\lambda - 1}{\lambda} & \text{para } 0 < \lambda < 1 \Rightarrow \text{se eleva la serie a un exponente neperiano} \\ Ln(y_t) & \text{para } \lambda = 0 \Rightarrow \text{se aplica logaritmo neperiano} \end{cases}$$

> *"En principio, λ puede tomar cualquier valor, y algunos autores, como Ansley, Spivey y Wrobleski (1977), han propuestos procedimiento para estimar conjuntamente el valor deλ. Sin embargo, los dos valores de λ más habituales considerados son λ=0 y λ=1. Esta opción se visto ratificada a partir de trabajos como el de Nelson y Grange (1979), quienes encuentran poca utilidad en el uso de las transformaciones Box-Cox a efectos predicativos de la serie temporal.*
> *Limitándonos, por tanto, a estos dos únicos valores de λ, asignar λ=1 consiste en no modificar la serie temporal original; por el contrario, si se adopta el valor de λ=0, la serie temporal se transforma aplicando logaritmos neperianos a la misma. Estas transformación de la serie original en logaritmos resulta útil cuando la serie no es estacionaria en varianza."*[17]

Gráfico de Media – Desviación Estándar



[17] Aznar, A (2003), "Series de Tiempo" pp.157

En el gráfico podemos notar, que los correspondientes puntos están más o menos alineados en torno a una línea recta con pendiente ascendente, será un indicativo que dicha serie no es estacionaria en varianza.[18]

La interpretación de una serie transformada logarítmica y diferenciada al menos una vez, puede interpretarse como una forma aproximada, como una tasa de variación porcentual ya que si $x_{t+1} = (1+\alpha)x_t$ entonces:

$$Lnx_{t+1} - Lnx_t = Ln(1+\alpha) \approx \alpha$$

Por lo que la tasa logarítmica equivalente, que es una tasa alternativa a la tasa porcentual ordinaria, además las buenas propiedades estadísticas (estacionalidad en media, estacionalidad en varianza y normalidad) tienen la ventaja de ser aditiva.

Determinación del intercepto

Si los datos de la seria analizada proceden de un muestre aleatorio, sobre una población normal, es decir que los datos constituye la realización de un proceso ruido blanco con media de cero entonces el contraste a realizar será:

La hipótesis es:

$H_0 = \mu = 0$ (El modelo no tiene intercepto)
$H_1 : \mu \neq 0$ (El modelo presenta intercepto)

El estadístico de distribución:

$$t = \frac{\bar{y}_t}{\sqrt{\dfrac{S_{\bar{y}}^2}{T-1}}} \approx t_{(1-\alpha/2;T-1)}$$

Si el estadístico obtenido es menor que el de tabla entonces no se rechaza la hipótesis nula.

En los modelo ARIMA dicho estadístico no resultan válido por ser inconsistente. En este caso una buena aproximación es:

$$\frac{S_{\bar{y}}^2}{T}(1+2p_1+2p_2+\ldots+2p_k)$$

Se seleccionar *k* de forma que se incluya los coeficientes significativos. Si se obtiene resultado negativo no es aplicable.

[18] Si la serie analizada es mensual entonces la longitud del intervalo será de doce meses.

Estimación del Modelo

Siguiendo con la metodología Box-Jenkins, no toca ahora estimar el modelo, que tiene como objetivo hallar un vector de parámetros de autoregresivos $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ y el vector de parámetros de media móvil $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$, que minimice la suma de cuadrados de los errores del modelo.

$$S(\phi, \theta) = \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2$$

Los modelo de autoregresivo de orden *p*, modelo integrado autoregresivo, modelos de media móvil de orden *q*, integrados de media móvil de orden (*0,d,q*), y el modelo autoregresivo integrado de media movil de orden *(p,d,q)*.

- Un modelo AR(*p*)

$$\varepsilon_t = \phi(L) y_t - \delta$$

- Un modelo ARI(*p,d,o*)

$$\varepsilon_t = \phi(L) \Delta^d y_t - \delta$$

- Un modelo MA(*q*)

$$\theta(L)\varepsilon_t = (y_t - \delta)$$

- Un modelo IMA(*0,d,q*)

$$\theta(L)\varepsilon_t = (\Delta^d y_t - \delta)$$

- Un modelo ARMA(*p,q*)

$$\theta(L)\varepsilon_t = [\phi(L) y_t - \delta]$$

- Un modelo ARIMA(*p,d,q*)

$$\theta(L)\varepsilon_t = [\phi(L) \Delta^d y_t - \delta]$$

Validación del Modelo

Si el modelo supera las dos primeras etapas, pasaríamos analizar la validación y si esta es superada entonces estaríamos en condiciones de predecir los valores futuros.

1. Prueba de Anderson

Anderson (1942) propone una prueba para analizar los coeficientes de la autocorrrelación muéstrales (PAC) que provienen de un ruido blanco, con muestras grandes tiene una función de distribución:

$$\rho_k \quad \approx \quad N(0,1/T) \qquad \forall k$$

Entonces la hipótesis a plantear es la siguiente:

H_0: ε_t es ruido blanco.
H_1: ε_t no es ruido blanco.

Si tenemos que el coeficiente de autocorrelación muestral en valor absoluto es menor que el valor de 1.96 entre la raíz cuadrada de la muestra, entonces no se rechaza la hipótesis nula.[19]

$|\rho_k| < \dfrac{1.96}{\sqrt{T}} \quad \rightarrow \quad \forall k$ No se rechaza la hipótesis nula

Como se conoce ε_t entonces se utiliza $\hat{\varepsilon}_t$, para comprobar si estos se asemejan a un ruido blanco.

2. Prueba de Pankratz

Panzkratz(1983) analiza las bandas de confianza de los residuos, para esto utiliza la distribución de una variable ruido, donde la varianza se aproxima mediante 1/T.

La hipótesis planteada es:

H_0: ε_t es ruido blanco.
H_1: ε_t no es ruido blanco

Si tenemos que el coeficiente de autocorrelación muestral hasta *k=3* en valor absoluto es menor que el valor de 1.25 entre la raíz cuadrada de la muestra, entonces no se rechaza la hipótesis nula.

$|\rho_k| < \dfrac{1.25}{\sqrt{T}}$ Para $k = 1,2,3 \rightarrow$ No se rechaza la hipótesis nula

$|\rho_k| < \dfrac{1.96}{\sqrt{T}}$ Para $k \geq 4 \rightarrow$ No se rechaza la hipótesis nula

3. Contraste Global

Este Estadístico esta basado en la prueba de Box – Pierce (1970) que se basa en los coeficientes de autocorrelación de los residuos.

H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots \rho_k = 0 \quad \rightarrow$ Residuos independientes
H_1: $\rho_1 \neq \rho_2 \neq \ldots \rho_k \neq 0 \quad \rightarrow$ Residuos no es independientes.

$$Q_{BP} = T\sum_{i=1}^{k} \rho_i^2 \approx \chi^2_{(5\%,\, p-q)}$$

Si $Q_{BP} < \chi^2_{(5\%, p-q)}$ entonces no se rechaza la hipótesis nula y se dice que los residuos están incorrelacionados.

[19] Para que la serie de residuos se asemeje a un ruido blanco los coeficientes AC y PAC no deben ser significativamente de cero.

4. Homoscedasticidad del Modelo

Para analizar la homoscedasticidad primero hay que examinar el gráfico de los residuos. Si esta presenta una tendencia creciente o decreciente será un indicativo de una posible heterocedasticidad.

5. Normalidad de los residuos

Una de las formas más fáciles de examinar la normalidad de los residuos es mediante la aplicación del estadístico Jarque – Bera que plantea la hipótesis:

H_0: ε_t Se aproxima a una distribución normal
H_1: ε_t No se aproxima a una distribución normal.

Estadístico Jarque – Bera se distribuye:

$$JB = \frac{N-k}{6}\left[S^2 + \frac{(k-3)^2}{4}\right] \approx \chi^2_{(5\%,2)}$$

La regla de decisión es si $JB < \chi^2_{(5\%,2)} = 5.99$, entonces no se rechaza la hipótesis nula, se dice que los residuos se aproximan a una distribución normal.

6. Análisis de Estabilidad

Un punto muy importante es el análisis de los coeficientes, para examinar si se cumple las condiciones de estacionalidad e invertibilidad, para esto se tiene dos casos.

a) Si no se cumpliera la condición de estacionalidad es un indicio que el modelo no es estacionario, por lo que se aconseja tomar una diferencia.

b) Si no se cumpliera la condición de invertibilidad, entonces tendríamos indicios que la serie podría estar sobrediferenciada.

Otro punto a tener en cuenta es la significancia de los coeficientes del modelo ARIMA, la matriz de correlaciones para evitar problemas de correlación y el análisis de estabilidad para analizar la estabilidad de los coeficientes.

6.1 Significancia de los coeficientes

En esta sección se analiza los coeficientes del modelo ARIMA para muestra grandes, basándose en la prueba t-student se analiza cada coeficiente para ver si es relevante para el modelo por eso se plante la siguiente hipótesis:

H_0: $\phi_i = 0 \rightarrow$ No es significativo en el modelo

H_1: $\phi_i \neq 0 \rightarrow$ Si es significativo en el modelo
El estadístico:

$$t_{\hat{\phi}_i} = \frac{\hat{\phi}_i}{\hat{S}_{\hat{\phi}_i}} \approx t_{(5\%, T-P-q-\delta)}$$

Si el estadístico es menor al de tabla, entonces no se rechaza la hipótesis nula o si la probabilidad es mayor que el 5%.[20]

6.2 Matriz de correlaciones

Se analiza la matriz de correlaciones, con el objetivo de detectar si existe problema de multicolinealidad.

Si la correlación entre dos coeficientes es muy próxima a 0.9 o mayor al R-cuadrado entonces tenemos indicio que existe un problema multicolinealidad y si esto ocurre, los coeficientes son muy inestables.

Para evitar este problema serie conveniente eliminar algunos coeficientes no significativos, para conseguir estabilidad en los parámetros aun a costa de un grado de ajuste mejor.

6.3 Estabilidad del modelo

Para realizar la prueba de punto de quiebre se necesita aplicar el test de Chow, para esto es aconsejable dividir la muestra en tres partes

Muestra 1:5T/6
Muestra 2: T/2 $\rightarrow$ la mitad seria T/4
Muestra 3: T/3 $\rightarrow$ la mitad seria T/6

El período analizar es: Q > T/4+T/6

Ejemplo si la muestras es de 100 datos entonces:
Q >100/4 + 100/6 $\approx$ 42 $\rightarrow$ el período analizar es el siguiente período que seria el período 43.

✐ Si deseamos evaluar la estacionalidad de una serie existe un elemento adicional, que es la posibilidad de la serie en cuestion exhiba un quiebre estructura en tendencia y o intercepto.

La presencia de una algunos de estos componentes pede concluirse que la serie no es estacionaria, es decir la presencia del quiebres quita potencia a la prueba de raíz unitaria. Por lo tanto es más probable que se acepte la presencia de la raíz unitaria cuando en realidad no existe.

6.4 Test de Zivot y Andrews

Este test trata de verificar la hipótesis nula de presencia de raíz unitaria solamente. Esto contrasta con el test de Perron y Volgensang en que la nula es la presencia de raíz unitaria más un quiebre estructural. Este test es más general, dado que el anterior sólo se refería a la presencia de raíz unitaria o no, pero siempre con la presencia de un quiebre estructural.

[20] Algunos autores mencionan que si el estadístico en valor absoluto es mayor que 2, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que el coeficiente es significativo.

Así estos autores plantean los siguientes modelos a estimar para tres casos distintos de hipótesis alternativas que plantean quiebre en niveles (A), quiebres en tendencia (B) y quiebres en tendencia y niveles (C).

Para cada una de estas alternativas proponen calculas las siguientes regresiones:

Test de Zivot y Andrews[21]: Hipótesis nula : $y_t = \mu + y_{t-1} + e_t$
Modelo (A): Alternativa: quiebre en niveles Ecuación a estimar: $y_t = \mu + \theta DU_t + \beta t + \alpha y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} c_j \Delta y_{t-j} + e_t$
Modelo (B): Alternativa: quiebre en la tendencia Ecuación a estimar : $y_t = \mu + \beta t + \gamma DT_t + \alpha y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} c_j \Delta y_{t-j} + e_t$
Modelo (C): Alternativa: quiebre en tendencia y niveles Ecuación a estimar: $y_t = \mu + \theta DU_t + \beta t + \gamma DT_t + \alpha y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} c_j \Delta y_{t-j} + e_t$
En los tres casos: $DU_t = 1$ si $t > T_b$ y 0 de otro modo $DT_t = t - T_b$ si $t > T_b$ y 0 de otro modo
Para seleccionar T_b se selecciona aquel periodo que da el t de α más bajo. Esto equivale a seleccionar el período que dé el menor t_o lo que es lo mismo el valor t más elevado en valor absoluto. Deberá notarse que en las tablas que presentan estos autores también se consideran valores para T_b seleccionados a priori.
Para la selección de k se utiliza el método 2 de Perron y Volgensang.

En ambos tests se acepta la nula si el t de α del periodo T_b es mayor que el valor de tablas (o menor en valor absoluto). La hipótesis nula se rechaza si es que el t de α del período Tb es menor al de tablas (o mayor en valor absoluto).

Para el test de Zivot y Andrews se presentan los siguientes valores de tablas que se refieren a la selección de k bajo el método 2 de Perron y Volgensang.

Quiebres de significacia:	1%	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97.5%	99%
Niveles	-5.34	-5.02	-4.80	-4.58	-3.75	-2.99	-2.77	-2.56	-2.32
Tendencia	-4.93	-4.67	-4.42	-4.11	-3.23	-2.48	-2.31	-2.17	-1.97
Ambos	-5.57	-5.30	-5.08	-4.82	-3.98	-3.25	-3.06	-2.91	-2.72

Para valores referidos a T_b determinado exógenamente.
Los tests presentados y la discusión precedente son sólo una parte de la discusión. En la actualidad han aparecido otros tests que pretenden ser más exactos. Sin

[21] Casas. C “Econometría Moderna” (versión preliminar)

embargo, estos dos últimos tests resumen el estado del arte en cuanto a la verificación de presencias de raíces unitarias vs. las alternativas de series estacionarias con quiebres en tendencia. La ventaja del Test de Zivot y Andrews es que permite formular una alternativa en donde la serie es simplemente un random walk.

Si bien en la literatura no se han mostrado mucho estos tests, creemos que es relevante su estudio, dado el carácter cambiante de la economía y los mercados financieros durante los últimos años.[22]

Predicción del Modelo

Si el modelo supera las dos primeras etapas, pasaríamos analizar la validación y si esta es superada entonces:

Los pronósticos pueden ser de dos formas; puntuales o por intervalos. Para el primer caso se hace uso de un modelo ajustado en forma explicita, mientras que para el segundo caso se agrega un valor *t* para la significancia estadística (grado de confianza) al cual se quiere trabajar. Y se recomienda graficar los datos reales como los datos proyectados, para de esta manera observar el grado de ajuste de las proyecciones realizadas.

Si el modelo ARIMA explícito es:

(*i*) $Y_t = \hat{\phi}_1 Y_{t-1} + \hat{\phi}_2 Y_{t-2} - \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad \rightarrow$ ARIMA (2,0,1)

(*ii*) Sustituir los subíndices en términos del período para el cual se desea construir el pronóstico.

Ejemplo:

$$Y_{100+1} = \hat{\phi}_1 Y_{100} + \hat{\phi}_2 Y_{99} - \hat{\theta}_1 \varepsilon_{100}$$

$$Y_{100+3} = \hat{\phi}_1 Y_{102} + \hat{\phi}_2 Y_{101} - \hat{\theta}_1 \varepsilon_{102}$$

(*iii*) Para determinar el estimao puntual sustituyendo las observaciones o errores correspondientes. Si estos no corresponden a valores históricos conocidos, sustituir por estimadores.

Para el AR (*p*) esto implica utilizar el pronóstico puntual anterior y para la parte MA (*q*) la esperanza matemática de los errores $E(\varepsilon_t) = 0$.

Para el modelo MA(*q*), eventualmente el pronostico se mantendrá constante.

(*iv*) Bajo el supuesto de $\sim$ *i.i.d*$(0,\sigma^2)$, el intervalo de pronóstico para *k* periodos en el futuro es de la siguiente forma:

$$Y_{t+k} \pm Y_{\alpha/2} E(Y_{t+k})$$

Donde:

$Y_{\alpha/2}$: Representa el percentil 1, para la distribución normal estándar.

[22] Casas. C "Econometría Moderna" (versión preliminar)

La varianza esta representada por:

$$Var(\hat{Y}_{t+k}) = \left[1 + \sum_{j=0}^{l-1} Y_j^2\right] S_\varepsilon^2$$

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = (Y_t - \hat{Y}_t)^2$$

CRITERIS PARA EVALUAR LA PREDICCIÓN

I. Raíz del error cuadrático medio (RECM)

Esta definida como:

$$RECM = \sqrt{\frac{1}{h} \sum_{t=T+1}^{T+h} \hat{\varepsilon}_t^2}$$

La función de perdida implica que RECM es cuadrática, entonces la perdida asociada con un error aumenta en proporción con el cuadrado el error.

II. Error absoluto medio (EMA)

Esta definida como:

$$EMA = \frac{\sum_{t=T+1}^{T+h} |\hat{\varepsilon}_t|}{h}$$

Esta medida es apropiada siempre que la función de pérdida lineal y simétrica. Brown muestra aproximada entre EMA y el RCEM tal como RCEM = 1.25EMA

III. Media del valor absoluto del error porcentual (EPMA)

Esta definida como:

$$EPMA = \frac{1}{h} \sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{|\hat{\varepsilon}_t|}{y_t}$$

Es una medida similar al EMA solo que es una medida relativa. Presenta un sesgo que favorece a los pronósticos que se encuentra por debajo de los valores conseguidos.

IV. Raíz cuadrada relativa del error medio (RCREM)

Esta definida como:

$$RCECM = \sqrt{\frac{1}{h} \sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{y_t}}$$

Es similar a EPMA solo que es un valor adimensional y presenta un sesgo que favorece a los pronósticos que se encuentran por debajo del valor reportado. Se considera un resultado acertado si presenta un valor inferior a tres.

V. Coeficiente de Desigualdad de Theil

Theil (1961) propone un coeficiente que no está influenciado por problemas de escala y lo denomina U. Donde U oscila entre el intervalo de 0 y 1, si U se acerca cada vez más a uno esto significa que el modelo no sirve para predecir sus pronósticos no son reales.

Este coeficiente de U de Theil se puede descomponer como:

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{h}\sum_{t=T+1}^{T+h}(y_t - \hat{y}_t)^2}}{\sqrt{\frac{1}{h}\sum_{t=T+h}^{T+h}\hat{y}^2} + \sqrt{\frac{1}{h}\sum_{t=T+1}^{T+h}y_t^2}}$$

La media del cuadrado del error puede descomponerse:

$$\sum\frac{(y_t - \hat{y}_t)^2}{h} = \left[\left(\sum\frac{\hat{y}_t}{h}\right) - \bar{y}\right]^2 + \left(S_{\hat{y}} - S_y\right)^2 + 2(1-r)S_{\hat{y}}S_y$$

Donde, $\sum(\hat{y}_t / h, \bar{y}, S_y, S_{\hat{y}}$ es la media, sesgo y la desviación estándar entre $\hat{y}_t$ e y, y r es la correlación entre $\hat{y}_t$ e y.

Sesgo + Varianza + Covarianza = 1

Sesgo (Bias Proportion)	$\frac{((\sum \hat{y}_t / h) - \bar{y})^2}{\sum(\hat{y}_t - y_t)^2 / h}$	Indica la presencia de algún error sistemático. El sesgo debería tender a cero para que el pronóstico sea confiable.
Varianza (Variance Proportion)	$\frac{(s_{\hat{y}} - s_y)^2}{\sum(\hat{y}_t - y_t)^2 / h}$	Indica el comportamiento de la variable real. Si la proporción es grande significa que el modelo posee menor capacidad replicar el comportamiento real.
Covarianza (Covariance Proportion)	$\frac{2(1-r)\, s_{\hat{y}} s_y}{\sum(\hat{y}_t - y_t)^2 / h}$	Si este valor es alto significa que el modelo predice bien, pues el error de la predicción se haría pequeño.

REFERENCIAS

📖 *Antunez Irgoin, Cesar. H (2010). "Pruebas de Raíces Unitarias en EViews". Archivo Acrobat en edición gratuita en www.monografias.com*

📖 *Aznar, A (2003). "Series de Tiempo". Editorial MP Prentice pp.157*

📖 *Badillo Amador-Rosa, Belaire Franch-Jorge y Contreras Bayarri-Dulce. "Contrastes de Raíz Unitaria para Series Temporales en Presencia de Cambios Estructurales", Dirección del Departamento de Análisis Económico. Universidad de Valencia. Archivo Acrobat, DT 00-06.*

📖 *Casas. C "Econometría Moderna" (versión preliminar)*

📖 *Hamilton, James (1994) "Time Series Analysis" 'Modelando series de tiempo con cambios en regímenes. Princeton University Press. U.S.A*

📖 *Novales, Alfonso (1993). "Econometría". The Mc. Graw Hill / INTERAMERICA S.A. España. Segunda edición.*

📖 *Pulido, A y Pérez García, J (2001). "Modelos Econométricos". Editorial Pirámide, Madrid.*

📖 *Rafael de Arce y Ramón Mahía (2007). "MODELOS ARIMA" Material del Programa Citius.- Técnicas de Previsión de variables financieras. Archivo Acrobat. Dpto. Economía Aplicada. U.D.I. Econometría e Informática.*

📖 *Rosales García, L (2010). Material de clase de Econometría II. Archivo Acrobat, junio. Piura.*

📖 *Uriel, Ezequiel (1985). "Análisis de series Temporales Modelos ARIMA". Colección Abaco, Parainfo - Madrid.*