LA FUNCIÓN DE CONSUMO DE KEYNES SOBRE FUNDAMENTOS ESRAFIANOS

por

Antonio Mora Plaza

LA FUNCIÓN DE CONSUMO DE KEYNES SOBRE FUNDAMENTOS ESRAFIANOS

Antonio Mora Plaza

Ambas, *razón-patrón* y *propensión al consumo*[1], son sin duda dos conquistas intelectuales dentro del pensamiento económico, aunque de diferente peso y significado. En Sraffa la razón-patrón atañe a unos posibles fundamentos de la economía que tendrían como origen su obra "*Producción de mercancías por medio de mercancías*"; en Keynes es la función de consumo con su *propensión a consumir* y su derivada, *el multiplicador*, lo que ha hecho más fácilmente contrastable su modelo. En Sraffa, lo que el llama razón-patrón, es la relación entre el excedente y los medios de producción del sistema. Esta razón está íntimamente ligada a *la mercancía-patrón*. Esta sería una canasta de mercancías virtual que tuviera una propiedad: que los *excedentes netos relativos* de todas las mercancías fueran iguales. Este concepto de excedente neto relativo no está en Sraffa, pero es simplemente una forma de llamar lo que está en su libro. Este excedente sería el cociente entre la diferencia de lo producido de una mercancía por los medios empleados por el conjunto de esa mercancía (pero no necesariamente como factor de producción de la mercancía medida) y esos mismo medios actuando como denominador. La mercancía-patrón sería esa *cesta* constituida por mercancías tales que esos cocientes fueran iguales para todas las mercancías. Yendo ahora a Keynes, dice el economista inglés que "*definiremos la propensión a consumir como la relación funcional entre un nivel de ingreso dado* (*PY*), *medido en unidades de salario, y el gastos para el consumo* (*C*)"[2]. Vamos a ver como ambos conceptos, ambas ideas nacidas de visiones de la economía tan distintas pueden casar sin que el matrimonio resulte conflictivo. Partimos como siempre de la ecuación que define el sistema de Sraffa:

(1) $$PY = wL + (1+r)PX$$

---

[1] Nada de lo que viene tiene que ver con la idea del supermultiplicador de Sraffa. Para cerciorarse puede verse en Internet en Franklin Serrano: http://www.elgermen.com.ar/wordpress/wp-content/uploads/Serrano-F-Hist%C3%A9resis-Din%C3%A1mica-Inflacionaria-y-el-Supermultiplicador-Sraffiano.pdf

[2] *Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero*, FCE, 1992, pág. 88 [The General Theory of Employment, Interest and Money, 1936]

donde ***P*** es el vector de precios $\mathbf{1}\text{x}\boldsymbol{n}$, ***Y*** la matriz diagonal $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$ de ***n*** productos finales, ***w*** la tasa de salarios, ***L*** el vector horizontal de inputs de trabajo, ***r*** la tasa de ganancia y ***X*** la matriz cuadrada no diagonal de $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$ medios de producción. De Keynes tomamos como nivel de ingreso ***PY***, es decir, toda la producción, sin más distingos, para poder enlazar las ecuaciones que definen un sistema con el que definen el otro:

(2) $$C = bPYI$$

siendo ***C*** el consumo keynesiano, ***b*** la propensión marginal al consumo, y cuyo valor está comprendido entre cero y uno, e **I** el vector vertical de unos. Con ello pasamos del vector de valores de productos final formados por el conjunto de las mercancías a un valor agregado de este producto final susceptible de ser comparado con la idea de consumo de Keynes. La inversión keynesiana $\mathbf{I}_{(K)}$ sería equivalente al conjunto de los medios de producción ***X*** del modelo esrafiano agregado mediante sus precios tal que se cumple:

(3) $$I_{(k)} = PXI$$

La suma del consumo ***C*** y la inversión keynesiana $\mathbf{I}_{(k)}$ sería lo que llama Keynes *el ingreso dado* tal que:

(4) $$C + I_{(k)} = PYI$$

Ahora enlazamos el consumo keynesiano (2) con la ecuación de definición del sistema en Sraffa (1) y sale:

(5) $$C = wLI + rPXI$$

con lo que el sistema está en equilibrio y hechos los enlaces entre las variables esrafianas y keynesianas. En efecto, si ahora sumamos miembro a miembro (3) y (5) obtenemos (1). Sigamos. Ahora nos faltan los habituales numerarios esrafianos:

(6) $$PYI - PXI = 1$$

(7) $$LI = 1$$

A todas estas añadimos una última ecuación más típicamente esrafiana que es aquella que resulta de hacer cero la tasa de salarios en la ecuación de definición de sus sistema (1):

(8) $$PY = (1 + R)PX$$

siendo ***R*** la razón-patrón a la vez que la tasa máxima de ganancia en el modelo de producción simple de Sraffa. Pues bien, de este conjunto ecuaciones surge la siguiente:

(9) $$\boxed{w = \frac{(1+b)R - r}{R}}$$

donde vemos enlazados la razón-patrón de Sraffa ***R*** y la propensión al consumo ***b*** de Keynes. Y aparecen los conceptos keynesianos y esrafianos sin aparentemente violentar los sistemas conceptuales de ambos. La ecuación (9) es una función lineal decreciente entre salarios y ganancias, y con **1**+***b*** como ordenada en el origen cartesiano y **-1**/***R*** como valor de pendiente. Comparado con el modelo de Samuelson de 1962 en su función subrogada, aquí los coeficientes de la ordenada y de la pendiente no tienen elementos comunes, con lo que puede rotarse y trasladarse la función (9) independientemente. En Samuelson ambas, ordenada y pendiente, tenían un factor común que resultaba muy propicio para obtener un conjunto de funciones como (9), de tal manera que su envolvente fuera convexa. Eso facilitaba a Samuelson la trinchera desde donde defender su modelo neoclásico de función de producción.

Si los salarios hubieran sido *pre-factum*, es decir, si la tasa de ganancia ***r*** se extendiera a todos los costes ***wL***+***PX***, entonces la ecuación de definición del sistema estaría representada por:

(10) $$PY = (1 + r)[wL + PX]$$

Y el resultado final hubiera sido:

(11) $$\boxed{w = \frac{(1+b)R - r}{(1+r)R}}$$

Y la relación entre salarios y ganancias en (11) es una función ¡convexa!, porque su primera derivada es negativa y la segunda positiva, lo que configura un decrecimiento creciente, con puntos de corte tales como ***w***(***r***=**0**)=**1**+**b** y ***r***(***w***=**0**)=(**1**+***b***)***R***. Dicho de otra forma, cuando las ganancias son cero, la tasa de salario supera al producto neto. Si en (11) hacemos cero la propensión al consumo, entonces los salarios quedan en la versión *pre-factum*:

(12) $$w(b=0)=\frac{R-r}{(1+r)R}$$

que es la relación puramente esrafiana entre tasa de salarios ***w***, tasa de ganancia ***r*** y razón-patrón ***R***.

Sabemos además que existe la relación esrafiana en la producción simple entre tasa de salarios, de ganancia y razón-patrón tal como:

(13) $$w=\frac{R-r}{R}$$

Si ahora eliminamos los salarios entre (9) y (13) queda la relación entre la propensión del consumo keynesiano ***b*** y la razón-patrón de Sraffa ***R***:

(14) $$\boxed{b=\frac{R}{1+R}}$$

La ecuación (14) sería ¡*la condición de estabilidad del sistema keynesiano-esrafiano*! Hay que recordar que en el caso de la producción simple de Sraffa la razón-patrón es a la vez la tasa máxima de ganancia posible del sistema cuando los salarios son cero. Pero esta condición sólo puede darse por casualidad, porque responde a motivaciones y actores diferentes: la propensión al consumo representa la cantidad destinada al consumo del total de lo producido, mientras que las tasas máximas de ganancia representa las posibilidades máximas de ganancia de los empresarios. Dicho de otra forma, la producción (***PY*I**), sus rentas derivadas (***wL*I** más ***rPX*I**) y el consumo consiguiente de bienes de consumo (***bPY*I**), sólo pueden reproducir el sistema con estabilidad por casualidad. El desequilibrio sería entre producción y consumo lo habitual en un mundo –como el nuestro- representado por el conjunto ecuaciones anteriores. Y eso que de entrada se ha supuesto equilibrio en la renovación de los medios de producción por (3).

Todo se puede generalizar a ***n*** tasas de salario mediante la matriz diagonal ***W***, a ***n*** tasas de ganancia mediante la matriz diagonal ***G*** y a ***n*** tasas de ganancia máximas mediante la matriz también diagonal $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$, $\mathbf{I}_{\mathrm{d}}$ la matriz diagonal de unos, **I** el vector vertical de unos, y todo ello con salarios *pre-factum*. Hecho esto, el sistema de ecuaciones que queda es como sigue:

(15) $$PY = [LW + PX](I_d + G)$$

(16) $$PY = PX(I_d + G_m)$$

(17) $$C = bPYI$$

(18) $$C = LW(I_d + G)I + PXGI$$

(19) $$I_{(k)} = PXI$$

(19) $$PYI = C + I_{(k)}$$

(20) $$PYI - PXI = 1$$

El conjunto de ecuaciones apenas merece comentarios novedosos. La (15) es la que define el sistema de forma generalizada y, tal es así, que casi podemos insertar en la ecuación los datos obtenidos de las tablas *Input-Output*. En (16) ya no tenemos la razón-patrón de la producción simple, pero tenemos lo equivalente en la producción conjunta *esrafiana* o conjunta generalizada: las ***n*** tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$. La (17) es la función keynesiana de consumo. Las ecuaciones (18) y (19) son ecuaciones de comportamiento y permiten al sistema reproducirse en las mismas condiciones, al menos en lo que respecta a los medios de producción (Sraffa) o bienes de inversión (Keynes). La (19) es una identidad, y la (20) es el mismo numerario que utilizábamos antes. De este conjunto de ecuaciones sale la ecuación de equilibrio, es decir, de reproducción del sistema:

(21) $$\boxed{PYI = \frac{1}{b} \times LW(I + G)\left[I_d + (G_m - G)^{-1} G\right] I}$$

En lado izquierdo de la ecuación representa la oferta agregada de la economía y en la derecha están las rentas salariales y las ganancias que van a representar la demanda, tanto de bienes de consumo como de inversión. Que ambos lados de la ecuación coincidan va a depender de la propensión al consumo de Keynes, es decir, de ***b***. Pero este representa los deseos de los consumidores y que se concreta en (17). Al igual que en los casos anteriores de reproducción simple *–pre* y *post-factum*- la igualdad (21) podrá darse por casualidad, porque el nexo de unión –la propensión al consumo keynesiano- debiera servir para caracterizar un comportamiento –el consumo- a la vez que el equilibrio de la economía entre productores y consumidores. La igualdad (21) podrá cumplirse si los precios actúan con flexibilidad, pero aún así eso no garantiza el equilibrio (21) y, roto el equilibrio, sobreviene la crisis. Para que no se vea esto como un ejercicio abstracto, aquí se puede jugar un papel lo público, es decir, utilizando los impuestos y el gasto público para hacer que se cumpla (21). Otra forma de ver esto es como sigue. Del conjunto de ecuaciones anteriores obtenemos la ecuación:

(22) $$b = \frac{LW(I_d + G)\left[I_d + (G_m - G)^{-1} G\right] I}{1 + LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1} I}$$

Ahora se puede ver que la propensión al consumo ***b*** de (22) coincida con la ecuación de comportamiento keynesiana (17) es pura casualidad. Obsérvese que en ambas ecuaciones no tienen ni siquiera variables comunes. En (17), el consumo depende del vector de precios ***P*** y de los productos finales ***Y***; en (22) depende de los *inputs* de trabajo ***L***, de las tasas de salario ***W***, de las tasas de ganancia ***G*** y de las tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$.

En el modelo anterior, a pesar de sus avances en cuanto al realismo por sus ***n*** tasas de salario, ganancias y ganancias máximas, nos faltaban dos sectores: el público y el exterior. Comencemos con el primero. Según eso, el modelo definido por las ecuaciones de (15) a (20), estaría ahora modificado de la siguiente manera:

(23) $$PY = \left[LW + PX\right](I_d + G)$$

(24) $$PY = PX(I_d + G_m)$$

(25) $$C = b\left[PYI - T\right]$$

(26) $$I_{(k)} = PXI$$

(27) $$PYI = C + I_{(k)} + G_P$$

Aquí ha desaparecido la ecuación (20) del numerario con el fin de que los datos reflejados por las variables sean reales. Ahora en la ecuación de consumo de Keynes (25) se han descontado los impuestos **T** de la renta total ***PY*I**, cosa habitual en los modelos macroeconómicos de raíz keynesiana, porque ***PY*I-*T*** refleja mejor la renta disponible para el gasto. Y, lógicamente, el producto total (oferta) en (27) está confrontado con el gasto total (demanda) que representa el Consumo **C**, la Inversión $\mathbf{I}_{(K)}$ y el Gasto Público $\boldsymbol{G}_{P}$. De este conjunto de ecuaciones sale la siguiente:

(28) $$PYI = \frac{1}{1-b} \times \left[PXI + G_P - bT\right]$$

Esta ecuación es de equilibrio y nos dice que si el producto agregado o total de la economía ***PY*I** fuera igual *por casualidad* a la expresión de la derecha donde están una versión nueva del multiplicador keynesiano **1**/(**1**-***b***), el conjunto de los medios de producción empleados, el Gasto Público $\boldsymbol{G}_{P}$ y los impuestos ***T***. Hay que insistir en lo de la casualidad, porque nada hay en el comportamiento de los consumidores que indique que van a consumir a partir de una propensión al consumo ***b*** que haga igual el lado izquierda de (28) con el derecho. En cambio, sí podemos darle la vuelta a (28) y considerarlo como una guía para el gobierno en cuanto a la relación y cantidades entre gastos públicos e impuestos, de tal forma que estos alcancen niveles que hagan posible esa igualación. Dicho de otra manera, la ecuación (28) sólo puede cumplirse si desde lo público se buscan nivel de gasto público e impuestos tales que, dados la propensión al consumo ***b***, los precios ***P***, los productos finales ***Y*** y los medios de producción ***X***, se cumpla (28). Si despejamos los gastos públicos para tener una idea algebraica para tal fin obtenemos:

(29) $$G_P = (1-b)PYI - PXI + bT$$

En (29) tenemos los niveles de gasto público $\boldsymbol{G}_{\mathrm{P}}$ necesarios para mantener la igualdad (el equilibrio) entre producción y gasto de la ecuación (27). En (29) se puede comprobar que si tomamos el producto neto ***PY*I-*PX*I** como numerario y reducimos los salarios ***W***, las ganancias ***G*** y las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$ a un escalar, entonces la ecuación (29), con las sustituciones pertinentes de (23) a (27), se convierte en la ecuación (14), solo que con la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ en lugar de la razón-patrón ***R***. Estamos pues muy lejos del modelo keynesiano, versión Hicks de equilibrio IS-LM, porque aquí nada asegura que sin el concurso de lo público pueda haber equilibrio y, por tanto, reproducción del sistema. Y eso a pesar de que hemos ayudado desde el principio, porque hemos supuesto que la inversión deseada keynesiana $\mathbf{I}_{(\mathrm{K})}$ sea igual al valor de todos los medios de producción esrafiano ***PX*I**. Con la (29) en la mano, un gobierno podría combatir o paliar las crisis debidas a una caída de la demanda –o por cualquier cosa que implique desequilibrio en (28)- subiendo el gasto público, o lo contrario si el hecho fuera una subida de la demanda. También puedo hacerlo con los impuestos ***T***, pero en sentido contrario al gasto público que hemos visto.

Si para hacer más realista el modelo introducimos además el sector exterior, siendo $\boldsymbol{E}_{\mathrm{X}}$ las exportaciones e $\boldsymbol{I}_{\mathrm{M}}$ las importaciones, el modelo quedaría igual que el anterior sólo que con la ecuación (27) convertida en:

(30) $$PYI = C + I_{(k)} + G_P + E_X - I_M$$

Con la anterior y el resto de ecuaciones de la (23) a la (28), obtenemos la ecuación casual –no causal, no hay errata- de equilibrio análoga a la (28):

(31) $$PYI = \frac{1}{1-b} \times \left[PXI + G_P - bT + E_X - I_M \right]$$

Y despejando el Gasto Público que, junto a los impuestos, es un factor autónomo (relativamente al menos) porque dependen de los gobiernos, tenemos:

(32) $$G_P = (1-b)PYI - PXI + bT - E_X + I_M$$

Lo notable del modelo es que nos da un tratamiento a partir de lo público (gasto público e impuestos) apenas con hipótesis condicionantes. Partimos de fundamentos *esrafianos* con ***n*** tasas de salario, ganancia y ganancia máximas, y, en realidad, sólo se han puesto dos hipótesis de comportamiento económico: una relación entre renta disponible y consumo, y una reproducción de las inversiones al permanecer estables, es decir iguales de un año para otro, los medios de producción (Sraffa) o inversión (Keynes). En (29), (30), (31) y (32) no aparecen las variables esrafianas, pero están implícitas, porque para eso hemos conectado a Keynes con Sraffa. En efecto, de (23) y (24) obtenemos el vector de precios de equilibrio:

(33) $$P = LW(I+G)(G_m - G)^{-1} X^{-1}$$

y sustituidos los precios en (32), sale la ecuación de equilibrio –por casualidad- tal como:

(34) $$G_P = LW(I_d+G)(G_m - G)^{-1}\left[(1-b)X^{-1}Y - I_d\right]I + bT - E_X + I_M$$

En esta ecuación como en las anteriores, el equilibrio se da si es buscado, porque en realidad conecta dos aspectos de la realidad que no tienen nada que ver: por un lado, los deseos de los consumidores ***b***, los salarios ***W***, las ganancias deseadas ***G***, las exportadores $\boldsymbol{E}_X$ y las importadores $\boldsymbol{I}_M$; y por otro lado, el nivel de desarrollo de la economía dado por los inputs de trabajo ***L***, los productos finales ***Y***, los medios de producción ***X*** y las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_M$ (que depende a su vez de ***X*** y de ***Y***).

Vamos a dar otro paso más y haremos dos supuestos adicionales: que las importaciones, su demanda, depende de los niveles de renta y que el Estado desea mantener equilibrio los ingresos públicos con los gastos públicos. Hacemos ahora explícitos todas las ecuaciones que definen el sistema:

(35) $$PY = \left[LW + PX\right](I_d + G)$$

(36) $$PY = PX(I_d + G_m)$$

(37) $$PYI = C + I_{(k)} + G_P + E_X - I_M$$

(38) $$C = b\left[PYI - T\right]$$

(39) $$I_{(k)} = PXI$$

(40) $$E_X = cPYI_M$$

(41) $$G_P = T$$

Como puede comprobarse, hemos añadido las ecuaciones (40) y (41) al sistema anterior. La primera (40) indica esa relación de los modelos keynesianos de que las importaciones (su demanda) depende de los niveles de renta del país importador; la (41) es fruto de un deliberado comportamiento de lo público a medio y largo plazo, aunque nada hay en el mundo real que demuestre que eso sea el óptimo. Hemos tenido que acomodar la (37) -que es la ecuación de equilibrio global del sistema- para dar entrada tanto a las exportaciones como a las importaciones. Del conjunto de ecuaciones que van de la (37) a la (41) se obtiene la siguiente ecuación que se corresponde con típico multiplicador keynesiano, aunque rebajado por la relación de proporcionalidad que se ha supuesto entre importaciones y producto agregado:

(42) $$PYI = \frac{1}{1-b+c} \times \left[PXI + (1-b)G_P + E_X\right]$$

Como en los casos anteriores esta igualdad es sólo posible si el gasto público actúa como compensador del sector privado como para evitar caer en desequilibrio. Eso no quita para ver el efecto de *la propensión al consumo* de Keynes ***b*** y la producción agregada ***PY*I**. Ello nos da el multiplicador **1**/(**1**-***b***+***c***). Es útil valorar cómo crece ***PY*I** ante variaciones del resto de las variables.

(43) $$\frac{dPYI}{db} < 0 \quad o \;\; bien \quad \frac{dPYI}{db} > 0 \qquad \frac{dPYI}{dc} < 0 \qquad \frac{dPYI}{dG_P} > 0 \qquad \frac{dPYI}{dE_X} > 0$$

El valor de la derivada del producto agregado respecto a la propensión al consumo de Keynes va a depender de los valores del resto de las variables. Y el resto de las variaciones del producto agregado respecto a las variables explícitas son típicas de los modelos keynesianos. Ahora procedemos, como de costumbre, sustituyendo la ecuación de precios que salen de la ecuación (35) de definición del sistema esrafiano y de la (36) que surge al hacer cero la matriz diagonal de salario ***W***. Es decir, sustituyendo:

(44) $$P = LW(I + G)(G_m - G)^{-1} X^{-1}$$

en (42) y, tras algunas transformaciones algebraicas elementales y trasponiendo términos, queda:

(45) $$G_P = \frac{1}{1-b} \times LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1}\left[(1-b+c)X^{-1}Y - I_d\right]I - E_X$$

Y (45) nos da el nivel de gasto público compensatorio que iguale al lado derecho de la ecuación. Puede observarse que la necesidad de gasto público con el fin de equilibrar el sistema, es proporcional a los salarios ***W***, creciente –aunque no proporcional- con las tasas de ganancia ***G*** de la economía privada, proporcional respecto a la propensión de las importaciones ***c***, creciente respecto a las tasas máximas de ganancia (tasas a su vez proporcionales del excedente, es decir, de $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}$) e inversamente proporcional a las exportaciones, como cabía esperar. Es notable la riqueza de información contenida en (45), lo delicado que es el gasto público equilibrador, y que todo esto se haya conseguido a partir de supuestos tan sencillos como los implicados. Resumiendo, todo surge de las dos propensiones keynesianas (las del consumo y las de las importaciones) y de los dos supuestos de reproducción equilibrada del sistema de las inversiones y la del equilibrio del presupuesto público. Este modelo tan simple requiere un cálculo preciso del gasto público para mantener la economía en equilibrio por los efectos del multiplicador keynesiano **1**/(**1**-***b***+***c***), que actúa como altavoz de los valores del resto del sistema. La excepción son las exportaciones, que es independiente del multiplicador al depender aquellas del desarrollo y crecimiento de los países con los que se comercia. Por otro lado, todo ello implica que no hay fuerza ni comportamientos de los mercados que lleven a la economía al equilibrio. Más bien todo lo contrario, porque los actores del drama tienen intereses propios que no son necesariamente acordes con posibles objetivos de optimización del crecimiento o de reparto de la renta, por ejemplo. Con este modelo representando a la economía de un país, el desequilibrio entre oferta agregada y demanda agregada sería la norma y no la excepción. Y todo ello a pesar del supuesto hecho de la igualdad entre *inversión deseada* keynesiana $\mathbf{I}_{(k)}$ y medios de producción esrafianos $\boldsymbol{PX}\mathbf{I}$. Este maridaje entre Sraffa y Keynes guarda también otros aspectos de interés. La mayor innovación respecto a los puros modelo keynesianos son las inquietantes tasas máximas de ganancia. Aunque no se pueden desligar en este modelo de los precios $\boldsymbol{P}$ –a diferencia que en la producción simple de Sraffa-, aquí podemos considerar la posibilidad de extraerlos de la ecuación (36) si convertimos la matriz diagonal de tasas máximas $\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}$ en un escalar mediante las ecuaciones:

(46) $$PYI - PXI = PXG_m I = g_m PXI$$

Y despejando el escalar (una media) de las tasas máximas $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$. De (46), por definición, se obtiene que esa tasa máxima única de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ es una medida del excedente. En efecto, de (46) sale:

(47) $$g_m = \frac{P(Y-X)I}{PXI}$$

De lo anterior podemos conjeturar que existe una relación entre $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ y la expresión $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}$ que ya ha aparecido en (45). Una forma de calcular mediante el método de prueba y error las tasas máximas de ganancia es con (44). Ahí vemos que podemos aumentar las tasas de ganancia hasta acercarlas a las máximas porque tenemos un criterio para tal acercamiento: los precios. Aquellas serán máximas cuando los precios tiendan a infinito y pasen súbitamente a precios negativos. Aunque Sraffa no aporta casi nunca los aspectos formales de sus deducciones, este método aparece implícito –o se puede deducir de ello- en el apéndice **B** de su libro sobre "*los productos no básicos que se auto-reproducen*", donde, en cambio, sí aparece un gráfico que justifica. (44). La expresión $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}$ es importante por varias cosas: porque aparece (45) para determinar el gasto público de equilibrio; porque es genuino de la aportación de Sraffa en este modelo que en un principio parece sesgado al lado de Keynes; porque es una medida del excedente, porque da la ganancia máxima, y por último, porque es a su vez una medida de la productividad del sistema, aunque no referido directamente a los inputs de trabajo. En efecto, cuanto más altos sean los elementos de la matriz resultante $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}$, más alto serán la productividad del sistema, más amplio el excedente y mayores las tasas máximas posibles del sistema. Y hay que recordar que el Gasto Público en (45) es proporcional a $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}$.

Bibliografía

Afriat, S.: “Sraffa´s Prices”, Universitá degli Studi di Siena, quaderni 474. www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Ahijado, M.: “Distribución, precios de producción y crecimiento”, 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Ahijado, M.: “Piero Sraffa: notas para una biografía intelectual, 1985, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Barceló, A. y Sánchez, J.: “Teoría económica de los bienes auto-reproducibles”, Edit. Oikos-Tau, 1988.

Bour, Enrique A.: “Marx y la teoría económica moderna”, 2007 http://www.aaep.org.ar/anales/works/works2007/bour.pdf

Caballero, A. y Lluch, E.: “Sraffa en España”, Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2), 1986.

Dobb, M.: “Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith, edit. Siglo XXI editores.

Desai, M.: “Marxian Economic Theory”, 1974 [“Lecciones de teoría económica marxista”, 1977, edit. Siglo XXI].

Dobb, M.: “The Sraffa system and the critique of neoclassical theory of distribution”, 1970.

Estrin, S. y Laidler, D: “Introduction microeconomics”.

Fiorito, Alejandro: “La implosión de la economía neoclásica”. Está en la red: www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Foncerrada, Luis Antonio: “Sraffa y Böhm-Bawerk”. Está en la red: http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/FoncerradaPLA/tesis.pdf

Garegnani, P.: “El capital en la teoría de la distribución”, 1982, ed. Oikos-Tau (“Il capitale nelle teorie delladistribuzone”, 1982)

Garegnani, P.: “Heterogeous Capital, The Production Function and the Theory Distribuction”, 1970

Gehrke, Ch.y Kurz, D.: “Sraffa on von Bortkiewicz”. Está en la red: http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Harcourt, G.C.: “Teoría del Capital” (*Some Cambridge controversies in the theory of capital, 1975*), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Heahtfield, D. F.: “Productions funtions”.

Korsch, Karl; “Karl Marx”, 1975, traducción de Manuel Sacristán, edit. Ariel.

Kurz, Pasinetti, Salvador y otros: “Piero Sraffa: The Man and the Scholar”, Routledge, 2008.

Kurz D. Heinz; “Critical Essays on Piero Sraffa´s Legacy in Economics”, 2000, Cambrigde University Press.

Lange, O., Taylor, F. M.: “On tthe Economic Theory of Socialism, 1938 [Sobre la teoría económica del socialismo, 1971, edit. Ariel]

Marsahll, Alfred: “Principios de Economía, Fundación ICO, 2005 [Principles of Economy, 1890]

Marx, Carlos: “El método en la Economía Política”, 1974, Ediciones Grijalbo, S.A.

Marx, Carlos: “El Capital”, en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meade, J.: “A neo Classical Theory of Economic Growth”, 1961.

Meek, R.: “Mr. Sraffa´s Rehabilitationof Classical Economics”, 1961.

Mendoza, Gabriel: “La transformación de valores en precios de producción”, 1997 http://www.izt.uam.mx/economiatyp/numeros/numeros/10/articulos_PDF/10_2_La_transformacion.pdf

Mora Plaza, A.: “Aspectos de la economía de Sraffa”, revista: Nómadas, n. 23, U. Complutense de Madrid, enlace: http://www.ucm.es/info/nomadas/23/antoniomora.pdf

Mora Plaza, A.: “Notas sobre la producción simple y conjunta a consecuencia de Sraffa: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/181/18112179020.pdf;

Mora Plaza, A.: “Sobre la transformación de valores a precios”:
http://www.eumed.net/ce/2009b/amp2.htm
http://revistas.ucm.es/cps/15786730/articulos/NOMA1010140379A.PDF

Mora Plaza, A.: “Notas sobre el teorema fundamental marxiano”
http://www.eumed.net/ce/2009b/amp.htm
http://econpapers.repec.org/article/ervcontri/y_3a2009_3ai_3a2009-10_3a22.htm

Morhisima, M.: “La teoría económica de Marx” (*Marx´s Economics, 1973*), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Moseley, F.: “El método lógico y el problema de la transformación”.
http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm

Murga, Gustavo: “Piero Sraffa”.
http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Neri, Salvador: “Besicovitch, Sraffa and the existence of Standard Commodity”, 2010:
http://host.uniroma3.it/eventi/sraffaconference2010/abstracts/pp_salvadori.pdf

Nuti, D.: “Capitalism, Socialism and Sleady Growth”, 1970.

Okishio, N.: “A mathematical note on marxian theorems”, 1963.

Pasinetti. L.: “Critical of the neoclassical theory of growth and distribution”. Está en la red:
http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Pasinetti, L.: “Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations”, 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.: “Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth”, 1961/2.

Pasinetti, L.: “Switches of technique and the rate of return in Capital Theory”, 1969.

Pasinetti, L.: “Crecimiento económico y distribución de la renta” (“*Growth and Income Distribution*”, 1974), 1978, Alianza Editorial.

Pasinetti, L.: “Lecciones de teoría de la producción” (“Lezioni di teoria della produzioni”, 1975), 1983, FCE.

Peris i Ferrando, J.E: “Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta”, 1987, en internet:
http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf

Potier, J.P.: “Piero Sraffa”, 1994, edicions Alfons Magnànim.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Robinson, J.: “Ensayos críticos”, 1984, Ediciones Orbis.

Roncaglia, Alessandro: “Piero Sraffa”, Edit. Palgrave MacMillan, 2009.

Roncaglia, Alessandro: “La riqueza de las ideas”, Prensas Universitarias de Zaragoza, 2009 (“The Wealth of Ideas. A History of Economic Thought”, Cambridge University Press, 2005).

Roncaglia, Alessandro: “Sraffa and the Theory of Prices”, 1978 [Sraffa e la teoria dei prezzi, 1975]

Samuelson, Paul: “Understanding the Marxian notion of Exploitation”, 1971.

Sánchez Choliz, Julio: “La razón-patrón de Sraffa y el cambio técnico”, 1989, Investigaciones Económicas, 2ª época, Vol. XIII.
ftp://ftp.funep.es/InvEcon/paperArchive/Ene1989/v13i1a7.pdf

Sargent, T.J.: “Teoría macroeconómica” (*Macroeconomic Theory, 1979*), 1988, Antoni Bosch editor.

Schefold, Bertram: “Mr. Sraffa on Joint Production”, 1971

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Serrano, Franklin: “Histérisis, Dinámica inflacionaria y el Supermultiplicador Sraffiano”, 2006: http://www.elgermen.com.ar/wordpress/wp-content/uploads/Serrano-F-Hist%C3%A9resis-Din%C3%A1mica-Inflacionaria-y-el-Supermultiplicador-Sraffiano.pdf

Steedman, I.: “Marx, Sraffa y el problema de la transformación” (*Marx after Sraffa, 1977*), 1985, F.C.E.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Subiza Martínez, B.: “Juegos matriciales y su aplicación a la teoría Perron-Frobenius”, U. de Alicante; http://www.ine.es/revistas/estaespa/112_3.pdf

Solow, R.: “The interest rate and transition between techniques”, 1967.

Sraffa, Piero: “Produción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975, Oikos-Tau.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.: “Economía política y modelos multisectoriales”,1979, edit. Tecnos.

Varios: “Matemáticas avanzadas aplicadas a la Economía”, UNED, 2001.

$$p_j y_j = w\ l_j + (1+r)\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

$$p_j y_j = (1+R)\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} = 1$$

$$\sum_{1}^{n} l_j = 1$$