DISCUSIÓN SOBRE EL USO TÉCNICO DE LA METODOLOGÍA DE CÁLCULO DE TIR POR CAPITALIZACIÓN A PERÍODOS DIFERENCIALES O INSTANTÁNEA EN FLUJOS NO SIMPLES

Prof. Mg. Ing. José Luis Infante
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina
jinfante@ing.unlp.edu.ar

Resumen

Los flujos de saldos no simples en proyectos de inversión generan problemas técnicos a la hora de establecer una medida de Tasa Interna de Retorno habida cuenta de la existencia de múltiples raíces con cuantificación distinta en el polinomio de base.

Diferentes técnicas se han desarrollado para su resolución pero las mismas requieren factores exógenos que le imprimen vulnerabilidad a las conclusiones que se alcancen.

El método de capitalización instantánea introduce una herramienta sencilla, ágil, que resuelve en forma endógena el problema pero que cuenta con inconvenientes de relajación matemática que pueden ser relevantes. Se establece entonces su discusión y se ejemplifica con casos particulares.

Palabras Clave: TIR, capitalización, Fourier, raíces.

Abstract

Balances flows simple investment projects generate technical problems in establishing a measure of internal rate of return given the existence of multiple roots with different measurement basis in the polynomial.

Different techniques have been developed for the same resolution but require exogenous factors which printed vulnerability to reach conclusions.

The instant capitalization method introduces a simple, flexible, and solved endogenously in the problem but has drawbacks of mathematical relaxation that may be relevant. Discussion is then established and exemplified with particular cases.

Key Words: IRR, capitalization, Fourier, roots.

Clasificación JEL: C65

1-Introducción

Los flujos de caja refieren a la medida cuantitativa esperada del saldo final entre ingresos y egresos de un proyecto de inversión. Su intención es, entre otras, permitir la medición del excedente de producción o ganancia de una empresa que pretenda ejecutar dicho proyecto.

Se encuentra compuesto por una sucesión ordenada en el tiempo de montantes siendo que cada montante refiere al saldo antedicho como acumulación de resultados en un período de tiempo cuya dimensión es consistente con la utilizada para indexar la sucesión.

Dicha sucesión refleja un flujo no simple cuando los montantes presentan más de un cambio de signo. En estos casos pierde capacidad informativa el indicador Tasa Interna de Retorno, de ahora en más TIR, ya que su medida cuantitativa, bajo condición necesaria, no es única. Tal cuestión deriva en la imposibilidad de establecer por dicho indicador la medida del tipo de rentabilidad, siendo que tal cuantía es requerida en casos de arbitrajes y para protocolizar métodos de aceptación de inversiones. En los casos de arbitraje, siguiendo a Modigliani (1958), Ross (1976) y Bebczuk (2000) el elector compara competitivamente proyectos de inversión, es decir, los compara con exclusión, siendo exigible que sea elegido aquel más rentable. Esto último a los efectos de canalizar los fondos disponibles y escasos a las alternativas más convenientes. En los casos de protocolizar un método de elección, y en acuerdo a la Teoría Principal Agente tratado en múltiples trabajos como ser Gorbaneff (2003), ésta resulta ser una clara medida de conocimiento corporativo que permite indicar a los “agentes” en las empresas subordinadas la forma de seleccionar proyectos que privilegia el “principal”, o dentro de una misma empresa con sucursales o subsidiarias, determinar el mecanismo trazable que facilite la toma de decisión, cuestión que puede ampliarse en Infante (2001), Park (2009) y Sapag Chaín (2007) entre otros tantos textos. Pues bien, una medida comparable en estos casos es la TIR.

Frente al problema de múltiples TIR, se ha ensayado otras tantas técnicas paliativas que excluyen dicho indicador como medida de rentabilidad, en otros casos se introduce cambios metodológicos con influencia exógena, como ser el cálculo de TIR modificada, de ahora en más TIRm, la separación de flujos no simples en múltiples flujos simples, y la elección subjetiva o estimativa de una TIR entre todas las posibles. Estas discusiones pueden ser analizadas y/o ampliadas en Infante (2001, 2010b), Park (2009) y Sapag Chaín (2007). Surge en estos casos una alternativa metodológica que selecciona endógenamente una medida de TIR suponiendo posible la capitalización por períodos diferenciales o instantánea del flujo. De ser esto posible, la elección tendrá menos componentes subjetivas ya que se podrá contar con un instrumento que permite resolver, cuanto menos, uno de los problemas comentados sin necesidad de establecer o forzar restricciones exógenas.

1. **Razones Intuitivas para la Búsqueda de Otro Método para el Cálculo de TIR**

Como se ha expresado, y como mínimo en casos de arbitrajes o de protocolos para la selección de alternativas de inversión por medidas de rentabilidad, es necesario estimar en los flujos no simples una medida de TIR. En todo proyecto de inversión rentable bajo flujo no simple, puede presentarse más de una medida de dicha TIR con valores positivos. Siendo así las cosas, el arbitraje no podrá realizarse sin que exista una medida adicional, entonces, exógena, que seleccione. Igual circunstancia sucede con el uso de protocolos los cuáles no podrá cumplirse por ausencia de una medida que puede elegir algunos proyectos y descartar otros. Podría en estos casos presentarse errores tipo II toda vez que se aceptarían proyectos de baja calidad[1]. Complementando el escenario de análisis que, como se demostrará en ejemplos, la TIRm requiere una medida adicional de cálculo que influye sobre la cuantía de la TIR, tanto la TIR bajo método tradicional y la TIRm no son suficientemente competentes para dar respuesta al planteo debiéndose explorar otros caminos matemáticos que permitan una medida de TIR en flujos no simples.

Según sigue se formaliza el problema del cálculo de TIR y el efecto de su multiplicidad, luego se describe el método de capitalización instantánea con inclusión de las hipótesis que se requieren para su aplicación y finalmente se ejercita su cálculo en diferentes flujos no simples a los efectos de observar soluciones y problemas técnicos que presenta.

2-Formalización del Cálculo de TIR y Flujos No Simples

Sea $\{S_j\}$ con j=0..n una sucesión indexada temporalmente de montantes reales cuantitativos que informan sobre los resultados en un flujo de caja de un proyecto de inversión. Sea VA(x)[2] un polinomio cuyos coeficientes son tomados de la sucesión antedicha de tal suerte que permita expresarse $VA(x)=\sum S_j\, x^j$ con j=0..n. Sean r_k raíces del polinomio tal que se cumpla que $VA(r_k)=\sum S_j\, r_k^j =0$ con j=0..n y $k= k_1,k_2\ldots,k_m$.

Siendo que de acuerdo al Teorema Fundamental del Álgebra la cantidad de raíces de un polinomio real es igual al grado de éste, y siendo que el grado del polinomio se define

1

 A los efectos de decisión, es estratégico no cometer errores tipo II. El error tipo I, en el peor de los casos, implica dejar de ganar.

2

VA por el sentido del cálculo según matemática financiera normalmente conocido por Valor Actual.

como el mayor exponente de la variable del polinomio, se observa que el polinomio VA(x) tendrá "n" raíces[3]. Ahora bien, considerando $\{r_k\}$ donde k=1..s, s+1..m, tal que $r_k \leq 0$ para k=1..s y $r_k \geq 0$ para k=s+1..m, siguiendo a Descartes se sabe que la cantidad de raíces positivas resultan de la cantidad de cambios de signo. Luego, si se restringe el análisis de raíces a solo aquellas que cuentan con valor positivo, resulta que n>m-s y $r=r_{s+1}=\ldots=r_m$ cuando exista sólo un cambio de signo. En consecuencia, será mas que común encontrar en estos casos raíces múltiples. De ser necesario, el lector podrá encontrar precisiones en Reyes Guerrero (2005), Sydsaeter (209) y, seguramente, otros tantos textos que desarrollen las matemáticas de los polinomios.

Puede definirse entonces a un flujo simple como aquel donde $r_k=r_1=\ldots=r_n$. Mayores precisiones sobre las condiciones matemáticas de los flujos simples podrá encontrarse en Infante (2010,b).

Sea TIR, medida en tanto por uno, el valor que cumple la condición TIR=(1/r)-1, luego, existiendo r_k con k= $k_1,k_2\ldots,k_m$ existirá TIR_k con k= $k_1,k_2\ldots,k_m$ condicionado a que $r_k \neq 0$. Para los casos donde $r_k = 0$ deberá tratarse el valor de TIR_k en su límite.

La TIR resulta entonces una transformación de la raíz de un polinomio, por tanto, toda la información que a la fecha se cuenta en relación a los comportamientos de las raíces de los polinomios son perfectamente aplicables a los valores de TIR.

2-1-Restricción de Resultados en Función Económica

A los efectos de seleccionar las TIR con sentido económico, se deberá evaluar el comportamiento acumulado de los saldos del flujo de caja. Siendo que dichos saldos son medidos por $\{S_j\}$ con j=0..n, montantes que cuantifican la diferencia entre ingresos y egresos, toda vez que los ingresos acumulados a los largo del proyecto supere a los egresos acumulados también a lo largo del proyecto, será condición suficiente[4] para que la TIR de un proyecto sea positiva que $\sum S_j x^j > 0$ con j=0..n. Esto sucede porque, en su definición, la TIR mide el tipo de tasa endógena de un proyecto por la que retornan a un inversor los fondos dispuestos. Luego, si en un proyecto de inversión se ha dispuesto o

---

3

Obsérvese que el polinomio X^2-2X+1 tiene dos raíces pues el máximo exponente de x es 2 pero valen lo mismo ya que sólo para x=1 el polinomio adopta valor 0. En otras palabras, pueden existir raíces múltiples.

4

Suficiente y no necesaria dada la influencia matemática, aunque no económica, de las posibles distribuciones de signos en los términos de la sucesión.

invertido 100 unidades monetarias y, al cabo de un plazo de tiempo la ejecución del proyecto entrega 110 unidades monetarias, el inversor ha logrado una ganancia de 10 sobre 100, es decir, un tipo de 10% que los obtiene cuando retornaron los 100 invertidos. Mayores aclaraciones podrán encontrarse en Infante (2001).

Con lo expuesto, si en un proyecto los ingresos acumulados superan los egresos acumulados entonces existe un retorno y, por tanto, económicamente solo tiene sentido considerar aquellas TIR>0.

2-2-Multiplicidad de Raíces, Multiplicidad de TIR y Flujos No Simples

Existe una sutil pero sustancial diferencia en el adjetivo múltiple cuando acompaña a una raíz de un polinomio y cuando acompaña a una TIR.

La multiplicidad de una raíz hace referencia a las veces que se repite un valor como raíz. Por ejemplo, si las raíces de un polinomio de tercer grado son 1, 1 y 2, la raíz 1 es múltiple porque se activa dos veces. En el caso de las TIR, la multiplicidad hace referencia a los valores distintos que puede ofrecer un flujo de caja. Por ejemplo, en la sucesión $\{S_j\}$ con j=0..n es de esperar "n" raíces, pero, si se cumple las siguientes condiciones: $VA(r_k)=\sum S_j\, r_k^{\,j} =0$ con j=0..n y $k= k_1,k_2\ldots,k_m$, $S_0<0$ y $S_j>0$ con j=1..n todas las "n" raíces adoptarán el mismo valor cuantitativo, es decir, $r_{kl}=r_k$ para l=1..n. Luego, existirán múltiples raíces pero no existirá múltiple TIR toda vez que el valor será siempre el mismo[5].

Luego, los flujos cuando no son simples presentan TIR múltiples. Cuando entre los valores de las TIR múltiples se presentan más de una TIR>0 se observa por confusión un inconveniente para el uso de esta técnica en arbitrajes, protocolos y selección de proyectos.

3-Técnicas para Selección de TIR en Flujos No simples con multiplicidad de TIR positivas

En primer lugar se procede con el testeo de rentabilidad, éste es, $\sum S_j\, r_k^{\,j} >0$ con j=0..n. Luego, de existir entre las TIR múltiples solo una positiva, esa será la seleccionada como TIR del proyecto.

De existir más de una TIR positiva, una alternativa posible es comparar dichos valores cuantitativos con la relación utilidades sobre capital del primer año de explotación del

---

5

Con la ya mencionada condición de que si $r_k=0$ la TIR_k se debe calcular en su límite.

proyecto, ya que ambos valores se pueden considerar como variables “proxy”. Será elegida como TIR del proyecto aquella más semejante. Claro es que esta posibilidad de resolución del problema requiere que las medidas cuantitativas sean marcadamente diferentes. Por ejemplo, si la relación utilidades sobre capital suma 15%, y las TIR posibles son 20% y 258%, podría considerarse 20% como una sensata aproximación. Distinto sería el caso que la utilidad sobre capital sume 20% y las TIR 18% y 30%. En esos casos no sería prudente la adopción de una TIR por aplicación de este método.

Una técnica muy utilizada es la aplicación de la Tasa Interna de Retorno modificada, TIRm. Su formalización es la siguiente. Sea Sea $\{S_j\}$ con j=0..n los montantes de un flujo tal que $\{S_j\}$ con j=v….z son aquellos que cumplen la condición $S_j<0$ y $\{S_j\}$ con j=q….w son aquellos que cumplen la condición $S_j>0$ redefiniendo entonces j=v……z, q…..w sin ordenamiento temporal. Sea $VA(-)=\sum S_j/(1+i)^j$ para j=v….z y $VA(+)=\sum S_j*(1+i)^{j-1}$ para j= q….w. Sea J=MAX(j) entonces $TIRm=[VA(+)/VA(-)]^{1/j}-1$.

Este indicador cuenta con problemas puesto que depende su cuantía del valor de “i”, o tasa de corte[6], que se utilice para el cálculo de los VA().

3-1-Técnica de Capitalización Instantánea

Su planteo original se hizo en Infante (2010b).

Como se sabe, la dimensión de los valores “j” resultan ser los plazos de capitalización. Por ejemplo, si “j” se dimensiona en años, la capitalización resulta en años, cuestión que cuenta con coherencia toda vez que por lo común las empresas capitalizan beneficios con la distribución de las utilidades circunstancia que sucede con la aprobación anual de los informes contables de los entes productivos. Ahora bien, claro que es cierto que en esos plazos se distribuyen utilidades pero no resulta tan cierto que en esos plazos se adopten decisiones. Sobre todo en fenómenos complejos donde se producen reinversiones, cuestión que hace no simple al flujo. Frente a estos problemas podría procederse con el mecanismo que según sigue se reproduce del texto Infante (2010b). Primero se hará la presentación matemática, luego se procederá con las discusiones sobre los relajamientos técnicos a los efectos de alcanzar una herramienta metodológica.

Considerando el factor de descuento $1/(1+i)^j$ que se debe aplicar sobre los montantes para componer el polinomio de valores actuales, para el caso de i=TIR sucede que $VA(TIR)=\sum S_j/(1+TIR)^j=0$ y tomando períodos menores por adopción de un k>0 resulta $(1+i/k)^{j.k}$

6

La tasa de corte a veces es conocida como tasa de costo de oportunidad, tasa atractiva, tasa de desagio, tasa interna de retorno mínima, etc…

que es similar a $[(1+i/k)^{k/i}]^{i.j}$. Haciendo y=i/k y tomando el $\lim_{y\to 0} [(1+y)^{1/y}]^{i.j} = \{\lim_{y\to 0} [(1+y)^{1/y}]\}^{i.j}$ que es cierto por propiedad de los límites. Luego resulta que $\{\lim_{y\to 0} [(1+y)^{1/y}]\}^{i.j} = e^{ij}$. Tomando esta expresión para la realización de descuentos, se está presente a casos de capitalización instantánea.

Para calcular la TIR podrá practicarse $VAN_{(TIR)} = 0 = \int S_t\, e^{-TIR.t}\, dt$ con $t_0=0$ y $t_n= n$. Una forma de resolver el problema de periodicidad es trabajar con transformaciones. Cuando los períodos no son constantes, las transformaciones de Fourier dan lugar a Integrales de Fourier[7]. Una función temporal F(t) puede transformarse en una función periódica F*(w) con w variando en forma inversa al período T. Ambas integraciones se realizan en todo el entorno $(-\infty , + \infty)$. Adoptando $F(t) = (1/2\pi) \int F^*(w)\, e^{jwt}\, dw$ y $F^*(w) = \int F(t)\, e^{-jwt}\, dt$. Siendo $e^{-jwt} = \cos (wt) - j \operatorname{sen} (wt)$ se puede observar que $F^*(w) = R(w) - j X(w)$. Reemplazando F(t) por e^{-it} donde t representa el tiempo e i la tasa de costo de oportunidad, resulta por medio de integración por partes[8] que: $R(w) = \int e^{-it} \cos (wt)\, dt = -e^{-it} \cos (wt)/i - (w/i) \int e^{-it} \operatorname{sen} (wt)\, dt$ y $X(w) = \int e^{-it} \operatorname{sen} (wt)\, dt = -e^{-it} \cos (wt)/i +(w/i) \int e^{-it} \cos (wt)\, dt$. Resolviendo en los extremos 0 y $+\infty$, el exponencial resulta 1 en t=0 y tiende a 0 en infinito. Siendo coseno de 0 igual 1[9] resulta que $R(w)=1/i - (w/i) X(w)$ y $X(w)=(w/i) R(w)$. Resolviendo se obtiene que $R(w) = i/(i^2+w^2)$. Reemplazando dicho término en la expresión de F(t) resulta $F(t) = (1/2\pi) \int R(w) \cos (wt)\, dw$, debido a que se integra entre 0 y $+\infty$ tanto F(t) como R(w) resulta que $F(t) = (2/\pi) \int [i/(i^2+w^2)] \cos (wt)\, dw$[10]. Siendo w un número pequeño dado que es requisito de este estudio que T sea un número grande[11] se puede

---

7 Para mayor aclaración consultar Sproviero (2005).

8 $\int v.d(u) = v.u - \int u.d(v)$

9 Se realiza para este cálculo una aproximación ya que seno de infinito no existe. Para ello, y cómo el flujo de caja es un acto económico que si existe, se adopta el valor más alto posible restringiendo la integración a $\pi/2$.

10 La integración entre ambos extremos infinitos resulta dos veces la integración entre 0 e infinito.

11 Condición para que pueda existir sólo un resultado. Obsérvese que no se condiciona a que w = 0 sino sólo que es número chico. La condición w=0 inhabilitaría la integración posterior.

aproximar $i/(i^2+w^2) \approx 1/i$. Luego $F(t) = (2/\pi) \int(1/i)\cos(wt)\,dw = (2/\pi ti)\operatorname{sen}(wt)$ integrado entre 0 y $\pi/2$ a los efectos que pueda el modelo reflejar actos económicos. Con ello resulta que $F(t)=2/\pi ti$. Luego, se aplica esta expresión a cada término de retorno siendo i=TIR. No se aplica a la inversión en el momento 0. La expresión entonces es $VAN_{(i^*=TIR)}=0=-S_0 + \Sigma\, 2S_j/\pi j i^*$

Este método gana en eficiencia cuantos más términos tenga el flujo y resulta de baja predicción ante flujos de pocos términos.

3-1-1-Suposiciones realizadas

La expresión alcanzada $F(t)=2/\pi ti$ no sería cierta si no fuese cierto que $i/(i^2+w^2) \approx 1/i$ y, fundamentalmente que en la integración entre 0 e infinito de $(1/2\pi) \int R(w) \cos(wt)\,dw$ se restringe dicha integración entre 0 y $\pi/2$. Claro es que ambas aproximaciones son estrictamente eso con lo que $F(t)=2/\pi ti$ no resultaría propiamente un resultado matemático sino sólo una aproximación metodológica que permita contar adicionalmente con una herramienta que facilite la resolución, entonces aproximada, de un problema técnico. De considerarse abusiva tales aproximaciones debiera descartarse la posibilidad de aplicar la fórmula alcanzada. Resulta interesante entonces considerar en qué casos sería razonable su utilización. Para ello también debiera interpretarse qué significa las aproximaciones realizadas. Pues bien, la primera de ellas no sería preocupante toda vez que, como ya se ha expresado, $w \to 0$ y ello es razonable puesto que una herramienta que sensibilice los resultados periódicos debiera extender el período. Por ello, siendo $w=2\pi/T$, a condición de T grande, necesariamente w debe ser chico. Más complejo resulta fundamentar que en $\pi/2$ se alcanza el valor ∞. Para ello puede analizarse cómo es el crecimiento de la función seno, la cuál se incrementa en función de un ángulo obteniendo su máximo valor posible cuando el ángulo utilizado es de 90 grados o $\pi/2$. Es decir, nunca la función va a adoptar un valor más grande pero sí puede resultar indeterminada si el ángulo es indeterminado. Por ello, el resultado matemático no sería cierto, es decir, debiera también ser indeterminado concluyéndose que no existe valor posible. Ahora, en camino a la indeterminación, el máximo valor que alcanza la función viene dado por $\pi/2$ y sus múltiplos. Pues bien, tomando dicha aproximación a modo de un límite donde se considera su valor cuantitativo más extremo[12], la expresión resultante podría brindar información endógena.

---

12 Obsérvese que el argumento del seno se repite, en consecuencia, de observar la secuencia la expresión $F(t)=2/\pi ti$ resulta una cuantificación en valor absoluto que cíclicamente crece y decrece. Allí se encuentra la indeterminación matemática pero no económica toda vez que dicho valor máximo se encuentra acotado. En términos económicos será un problema de plazo de explotación pues t infinito no existe y sí existe un determinado t donde $F(t)=2/\pi ti$.

3-2 Forma de Aplicación

Atento lo descrito en 3-1, se ha indicado que $F(t)= 1/(1+i)^j$ y que bajo capitalización a períodos cortos resulta que, para un período t=j, $[1/(1+i)^j]\approx e^{-ij}$. Por ello, un proyecto de inversión con $\{S_j\}_{j=0..n}$ permite alcanzar un $VA(i)=\sum S_j/(1+i)^j$, cuya TIR resulta de $VA(TIR)=0=\sum S_j/(1+TIR)^j$. Reemplazando $[1/(1+i)^j]$ por e^{-ij} resulta que $VA(TIR)=0=\sum S_j\ e^{-TIRj}$ con j=0..n. Dicha expresión es similar $VA(TIR)=0=S_0 + \sum S_j\ e^{-TIRj}$ con j=1..n a Siendo que $e^{-it} \approx 2/\pi ti$, suponiendo t=j entonces, $e^{-ij} \approx 2/\pi ji$ que para el caso particular i=TIR resulta $e^{-TIRj} \approx 2/\pi jTIR$ con lo que resulta finalmente que $VA(TIR)=0=S_o + \sum 2S_j/ \pi jTIR$ siendo j=1…n.

Para su aplicación entonces se toma cada montante y se lo divide por la expresión alcanzada. La TIR se obtendrá por simple procedimiento de despeje. Por ejemplo, siendo $\{S_j\}_{j=0..n}$ en realidad $\{S_0\}+\{S_j\}_{j=1..n}$ que puede reescribirse como$\{S_0\}+\{S_1, \ldots, S_n\}$la expresión de cálculo será $0=S_0 + 2S_1/ \pi TIR+ \ldots + 2S_1/ \pi nTIR$. Luego $TIR= [2(S_1 + \ldots +S_j/j+\ldots+ S_n/n)]/[(-1)(\pi S_0)]$ siendo su medida en tanto por uno.

3-3-Ejemplos de Aplicación

Considérese los siguientes flujos de caja de un proyecto a 10 años de explotación económica.

año	Fujo 1	Fujo 2	Flujo 3	Flujo 4
0	- 3.000.000,00	- 3.000.000,00	- 1.000.000,00	- 1.000.000,00
1	500.000,00	100.000,00	100.000,00	500.000,00
2	500.000,00	500.000,00	500.000,00	500.000,00
3	900.000,00	900.000,00	900.000,00	900.000,00
4	- 1.000.000,00	- 1.000.000,00	- 3.000.000,00	- 3.000.000,00
5	400.000,00	400.000,00	400.000,00	400.000,00
6	500.000,00	500.000,00	500.000,00	500.000,00
7	600.000,00	600.000,00	600.000,00	600.000,00
8	600.000,00	600.000,00	600.000,00	600.000,00
9	600.000,00	600.000,00	600.000,00	600.000,00

10	600.000,00	600.000,00	600.000,00	600.000,00
Resultado Acumulado	1.200.000,00	800.000,00	800.000,00	1.200.000,00
TIR tradicional	5,98%	3,75%	6,40%	11,67%
TIR Cap. Instantánea	26,50%	18,05%	22,34%	47,80%

Se observa en todos los casos que cada proyecto es rentable toda vez que la fila de resultado acumulado indica valores positivos.

Habida cuenta que en los cuatro casos existen tres cambios de signos, es de esperar TIR múltiples. Se indica la primera raíz positiva que se obtiene por simple utilización de los mecanismos de resolución tradicionales. Como puede observarse, los resultados del cálculo tradicional a primera raíz supera un primer testeo de consistencia toda vez que la TIR crece cuando crece el resultado acumulado. Esto puede verse ya que el flujo 1 cuenta con mayor TIR que el flujo 2 ya que 5,98% supera a 3,75%.También supera este análisis de consistencia en relación a la distribución del flujo toda vez que cuenta con mayor TIR los casos donde la inversión inicial es menor. Esto se observa, por ejemplo, comparando la TIR del flujo 2 con la del flujo 3 ya que 6,4% es superior a 3,75%. El problema que surge es que la medida de TIR no es única con lo que no podría aseverarse que los resultados de la fila sean consistentes. Mediante el uso del método de capitalización instantánea se observa un único resultado que se expresa en la fila correspondiente, sensiblemente mayor, y que respeta las consistencias testeadas para el otro método de cálculo.

En este punto sería prudente considerar qué respuestas ofrece la TIRm. Para ello, obsérvese este otro caso.

Año	Flujo 5
0	-3.000.000,00
1	500.000,00
2	500.000,00
3	900.000,00
4	-1.000.000,00
5	400.000,00
6	900.000,00
7	900.000,00
8	900.000,00
9	900.000,00
10	900.000,00
Resultado Acumulado	2.800.000
TIR Tradicional	11,44%
TIR Cap. Instantánea	31,01%

Se observa que el proyecto es rentable toda vez que el resultado acumulado es positivo, la TIR por cálculo tradicional a primera raíz positiva ofrece una medida positiva y la TIR por capitalización instantánea también. En ambos casos, se alcanza medidas superiores a los flujos 1 y 2 que cuentan con una inversión similar pero menor retorno.

Para el caso de la TIRm, se requiere la determinación de una tasa de atracción. El cuadro que sigue muestra los resultados obtenidos.

Tasa de Corte	TIRm	TIRm/Tasa de Corte
0,00%	5,45%	
10,00%	10,66%	6,62%
20,00%	16,21%	-18,93%
30,00%	22,09%	-26,37%
40,00%	28,23%	-29,42%
50,00%	34,58%	-30,84%

Se observa que la medida de la rentabilidad es claramente dependiente de la medida de la tasa de corte produciendo inconsistencias toda vez que su magnitud varía determinando grados de viabilidad distintos en función de dicho parámetro exógeno. Comparando los tres resultados, se observa que el método de capitalización instantánea sigue indicando viabilidad en cortes de 20%.

En flujos más conflictivos, como lo son aquellos donde el flujo ofrece valores iniciales positivos, los resultados son más distantes y hasta inconsistentes. Obsérvese los siguientes casos

año	Fujo A	Flujo B	Flujo C
0	100.000	500.000	-3.000.000
1	-3.000.000	-3.000.000	500.000
2	500.000	500.000	500.000
3	900.000	900.000	900.000
4	-1.000.000	-1.000.000	-1.000.000
5	400.000	400.000	400.000
6	500.000	500.000	500.000
7	600.000	600.000	600.000
8	600.000	600.000	600.000
9	600.000	600.000	600.000
10	600.000	600.000	600.000

Resultado Acumulado	800.000	1.200.000	1.200.000
TIR tradicional	4,5 % y 2882%	4,46 % y 479%	5,98%
TIR Cap. Instantánea	14400%	286%	26,54%

Los tres flujos son rentables ya que sus resultados acumulados son positivos. Sería de esperar que una técnica que elija convenientemente prefiera el flujo B al A circunstancia que no se observa ya que las medidas de rentabilidades por cualquiera de los dos métodos utilizados prefieren al flujo A y no al B. Ahora bien, si se compara el flujo del caso C con el del B, donde el cambio que se indica es que la inversión del proyecto se adelanta en el caso C, el método de capitalización instantánea ofrece un resultado más consistente toda vez que la TIR del flujo C es inferior al del Flujo B, cuestión que no sucede con las medidas de las TIR calculadas a primera raíz bajo el método tradicional. Por su parte, resulta claramente informativa la diferencia entre las TIR del flujo B al C toda vez que es económicamente racional que debe ser elegible un proyecto con sistemas de preventa antes de invertir. Luego, si bien una cuantía de 286% podría ser abultada, el hecho que 286% sea mayor a 26,54% sí es racional.

Un flujo aún más complejo como el que refiere a continuación el Flujo D encuentra otro tipo de problemas:

año	Flujo D
0	1.698
1	- 32.524
2	279.721
3	- 1.422.554
4	4.736.413
5	- 10.785.326
6	17.005.435
7	- 18.326.087
8	12.913.043
9	- 5.369.565
10	1.000.000
Resultado Acumulado	255
TIR Tradicional	15% y 86,95%

TIR Cap. Instantánea	228%

Este flujo refiere a un proyecto productivo altamente dependiente de reinversiones y con inestabilidades mayúsculas[13]. En estos casos se observan raíces múltiples y TIR múltiples por vía del método tradicional. En este caso dos. El proyecto es rentable pero, en su medida contributiva acumulada es escasamente atractivo. Las dos TIR por método tradicional son positivas y ninguna refleja porcentualmente la medida de la contribución. Tampoco lo hace la medida de la TIR por capitalización instantánea. Dependiendo de la medida de corte, el método tradicional no es concluyente ya que un corte fácil de alcanzar del 16% produce inconsistencia[14]. No sucede tal cosa con el método de capitalización instantánea que es concluyente ya que 228% es un número alto que, como ya se ha dicho, para nada refleja la medida de la contribución del proyecto. Técnicamente, ya de por sí la medida del resultado acumulado debiera declarar una inviabilidad genérica[15]. Sin embargo, no se puede dejar de observar las importantes oportunidades que ofrece el flujo D. En primer lugar existe preventa, cuestión que normalmente es una situación deseada. A su vez, pequeñas inversiones cuentan con resultados más que excelentes, por ejemplo, 32.000 $ permite alcanzar saldos de 280.000 $ y una inversión de 1.400.000 $ retorna rápidamente con ganancias de 4.700.000 $. Estas realidades son detectadas por el mecanismo de capitalización instantánea precisamente por su modelado ya que los períodos de capitalización son urgentes prefiriéndose todo aquellos de rápida amortización. Claro que, en definitiva, nada en esos resultados revierte la escasa ganancia final.

13

Podría reflejar la producción de bienes tipo “bandwagon”, es decir, muy sensibles a “la moda social”.

14

Para un corte del 10%, ambas TIR lo superan con lo que no habría dudas de la viabilidad desde este enfoque. Si, por supuesto, no habría medida de arbitraje a menos que externamente se elija una u otra medida. Pero si el corte es del 16%, el hecho de que 15<16 genera inconsistencia.

15

Sólo faltaría considerar los casos donde una empresa particular en un escenario productivo particular cuente con tasas de corte negativas.

4- Análisis de Ventajas y Desventajas entre TIR tradicional, TIRm y TIR por Capitalización Instantánea

Como se ha expresado, en la evaluación de proyectos, por muchas razones entre ellas arbitraje o decisiones bajo protocolo, se requiere una medida porcentual endógena de la rentabilidad. La condición de endogeneidad no debiera ser relajable ya que implica que ningún decisor contará con herramientas subjetivas o por fuera del proyecto para producir una cuantía que favorezca una u otra decisión. Dicha función se normalmente cumplida por la TIR. El método de descuento comúnmente utilizado deriva matemáticamente en polinomios que, cuando no son simples produce multiplicidad de raíces. Es allí donde se produce una indeterminación. A continuación se discute las ventajas y desventajas de la aplicación de los diferentes métodos.

4-1- Ventajas y Desventajas del Método Tradicional de Cálculo de TIR

El método tradicional refiere al caso $VA(TIR)=\sum S_j/(1+TIR)^j$ con j=0..n. Sus ventajas en flujos simples son absolutas y claras ya que la medida de la TIR es endógena y única. En casos de flujos no simples sigue contando con la calidad de endógena pero deja de ser única. Al no ser única impide la selección precisa de un valor de TIR siendo ella una desventaja crucial de inconsistencia[16]. Se deberá en estos casos sumar otras restricciones que pasan a ser subjetivas o de opinión toda vez que un arbitro externo al flujo deberá proceder con al selección. Esta última desventaja puede ser atemperada cuando exista sólo una medida de TIR positiva y el proyecto sea rentable[17]. En definitiva, en flujos no simples mantendrá la ventaja de endogeneidad pero como desventaja mostrará inconsistencia.

4-2- Ventajas y Desventajas del Método de TIR modificada

Como se ha expresado, el cálculo resulta de $TIRm=[VA(+)/VA(-)]^{1/J}-1$ siendo $VA(-)=\sum S_j/(1+i)^j$ para j=v….z y $VA(+)=\sum S_{j*}(1+i)^{j-1}$ para j= q….w y J=MAX(j).

Bien puede observarse su valor depende de la medida de "i" cuestión que ha sido observada en los ejemplos antes descritos en 3-3.

---

16 Ausencia de único resultado.

17 $\sum S_j>0$ con j=0..n.

De lo expresado, una ventaja es la consistencia del resultado toda vez que refiere a una única medida cuantitativa. Sin embargo, no permite endogeneidad ya que para su estimación es preciso el uso activo de una medida de tasa de corte "i". La ausencia de endogeneidad es entonces una desventaja.

4-3- Ventajas y Desventajas del Método de TIR bajo Capitalización Instantánea

Su cálculo proviene de $VA(TIR)=0=S_o + \sum 2S_j/ \pi jTIR$ siendo $j=1\ldots n$.

Cómo puede observarse de la expresión formal mantiene las ventajas de endogeneidad y consistencia restringiendo esta última expresión a que la técnica facilita solo una medida. Estas condiciones en principio facilitan su uso en protocolos de decisión y en arbitraje.

Como desventaja debe considerarse las restricciones observadas en su aplicación práctica. Estas restricciones son relevantes en proyectos donde existe una fuerte incidencia inicial de montantes positivos. Allí el método reconoce posibilidades técnicas de diferenciar calidad de proyectos a los efectos de seleccionar, cuestión que facilita su utilización en mecanismos protocolizados, pero las cuantías que alcanza son claramente desproporcionadas para su uso en arbitrajes.

La herramienta no sustituye las ventajas del uso del método tradicional en flujos simples.

5-Conclusiones

Se ha traído a discusión una herramienta para el cálculo de TIR en flujos no simples por mecanismos de capitalización a períodos diferenciales o instantánea. Se ha formalizado el problema de las raíces múltiples y TIR múltiples que arrastran los flujos no simples, distinguiendo ambos casos, y se ha motivado el porqué de la discusión ante la existencia de técnicas alternativas como ser TIRm y otras mencionadas. Previamente se ha mencionado los motivos microeconómicos por el que se pretende la obtención de medidas únicas de TIR sobre la base de la necesidad de establecer protocolos de decisión, arbitrajes, etcétera.

Se ha formalizado la obtención de la herramienta de cálculo bajo capitalización instantánea y se ha puesto en tela de juicio algunas simplificaciones y suposiciones audaces que deben ser realizadas para la obtención de la misma. En este escenario, se ha advertido que la herramienta encontrada deberá ser contraindicada cuando las suposiciones realizadas no fueran posibles de sostener en el caso particular que se trate. En un extremo, de considerarse inviables las suposiciones en todo caso, deberá desecharse la herramienta.

Finalmente se ha ensayado ejemplos de aplicación para advertir el comportamiento empírico de la herramienta observándose que puede prestar servicio informativo superador a los mecanismos tradicionales de cálculo de TIR y TIRm en algunos casos, mientras que en otros casos su capacidad informativa no puede ser utilizada o no puede aportar cuantificaciones para arbitraje. A los efectos de precisar tales resultados se procedió con un análisis de ventajas y desventajas entre métodos.

Finalmente, se considera que es posible su utilización en un marco controlado y auxiliado por otros indicadores que permitan alcanzar algún grado de información.

Referencias

Bibliografícas

- Bebczuk, R. (2000): “Información Asimétrica en Mercados Financieros”, Cambridge
- Carbonell, M.R.E. (2008):”Cálculo”, Pearson.
- Gorbaneff, Y. (2003):”Teoría del Agente Principal”, Revista Universidad EAFIT 129.
- Infante J.L.(2001): “Economía y Producción”, Nueva Librería
- Infante, J.L (2010b):”Entrado el Otoño”, Nueva Librería.
- Mas Colell A. (1995): “Microeconomic Theory”, Oxford University Press
- Modigliani,F. y otro (1958):”The Cost of Capital, Corporation Finance, and The Teory Investment”, American Economic Review, vol.48, n°3, 261-297.
- Park, Ch. S. (2009):”Fundamentos de Ingeniería Económica”, Pearson.
- Reyes Guerrero, A. (2005):”Álgebra Superior”, Cengage Learning.
- Ross, S.A. (1976): “The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", Journal of Economic Theory.
- Sapag Chaín N. (2007): “Preparación y Evaluación de Proyectos”, Mac Graw Hill
- Sproviero, M. (2005):”Transformada de Laplace y de Fourier”, Nueva Librería.
- Sullivan, W.G. (2004): “Ingeniería Económica”, Pearson
- Sydsaeter, K. y otros (2009):”Matemáticas para el Análisis Económico”, Pearson.