

An sketch about a possible reproduction and accumulation sraffian theory

Reading the Sraffa's book *Production commodities by means commodities* it is difficult to conclude that the Italian economist have a reproduction theory of economic just as have Marx in his book *The Capital*. But this theory is only implicit question in his book but is necessary to develop it. This article it is an attempt to go as far as is possible to create an reproduction and accumulation *sraffian* theory.

by Antonio Mora Plaza.

keywords: sraffian, production, reproduction, accumulation.

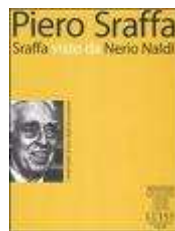
Esbozo de una teoría de la reproducción y acumulación a partir de Sraffa

De la lectura de la obra de Piero Sraffa *Producción de mercancías por medio de mercancías* no pareciera posible obtener una teoría de la reproducción y acumulación semejante a la que tiene Marx en sus escritos. Sin embargo, en el libro del italiano hay implícita una teoría de la reproducción simple que puede ser extendida a una teoría sobre la reproducción ampliada. Este artículo trata de sacarla a la luz.

por Antonio Mora Plaza

palabras clave: Sraffa, producción, reproducción, acumulación.

ESBOZO DE UNA TEORÍA DE LA REPRODUCCIÓN Y ACUMULACIÓN A PARTIR DE SRAFFA



por

Antonio Mora Plaza

$$p_j y_j = w l_j + (1+r) \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

$$p_j y_j = (1+R) \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

$$\sum_{j=1}^n p_j y_j - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} = 1$$

$$\sum_1^n l_j = 1$$

ESBOZO DE UNA TEORÍA DE LA REPRODUCCIÓN Y ACUMULACIÓN A PARTIR DE SRAFFA

Antonio Mora Plaza

Leyendo literalmente la obra de Sraffa *Producción de mercancías por medio de mercancías* no podría decirse que tiene el economista italiano una teoría explícita de la reproducción y, menos aún, de la acumulación, como tiene, por ejemplo, Marx. Sin embargo su modelo lo es de equilibrio general y tiene por ello una teoría explícita de, al menos, reproducción simple. Lo tiene por los siguientes motivos: a) en la ecuación que define su sistema -que luego veremos- no están fechadas ni sus variables ni sus supuestas constantes; b) la razón-patrón **R** interrelaciona los medios de producción con los productos finales en términos físicos y esto exige dos momentos diferentes del tiempo; c) la mercancía-patrón se calcula a partir de unos multiplicadores que, al igual que la razón-patrón, interrelaciona medios y productos que no pueden ser simultáneos; d) la matriz de requerimientos $A=XY^{-1}$ que relaciona también medios y productos se supone constante a lo largo del tiempo, incluso cuando llega Sraffa a la reducción del capital a trabajo fechado; e) la propia aplicación del teorema Perron-Froebenius exige una matriz de requerimientos **A** varada en el tiempo para obtener un vector de precios no negativos. Se podría añadir algún argumento más, pero quizá sería redundante. Además, cuando Sraffa nos señala el tipo de economía (modelo) objeto de análisis nos dice en el prefacio que: “*La investigación se ocupa exclusivamente de aquellas propiedades de un sistema económico que no dependen de variaciones en la escala de producción o en las proporciones de los factores*”¹. Es verdad que la diana a la que apunta es el marginalismo, pero con ello está suponiendo -quizá sin querer- o rendimientos constantes a lo largo del tiempo o reproducción simple o ambas cosas. De hecho, en la ecuación que define el sistema en la reproducción simple se pueden despejar los precios (únicos) en función del resto de las variables. No hay originalidad en todo esto, pero sí creo que la hay si se logra demostrar que los modelos que Sraffa va exponiendo, pasando por la producción sin excedente, con excedente, la reducción a trabajo fechado, la producción conjunta, la diferenciación entre bienes básicos y no básicos, y la producción con capital fijo, no sale en cualquier caso *de la reproducción simple*. Se puede presentar ese recorrido por sus

¹ Pág. 11 de *Producción de mercancías por medio de mercancías* (en adelante *PMPM*).

esquemas como un caso particular de un modelo de reproducción y acumulación parecido pero distinto al de Marx, que es, por otro lado, al que más se parece, y ello a pesar de que uno trabaje con lo que llama precios de producción² (Sraffa) y el otro con valores-trabajo (Marx). No es este el momento, pero no me resisto a afirmar que el italiano no tiene justificación en llamarles precios de producción y en el alemán los valores-trabajo da lugar a una definición de teoría de la explotación en lugar de una ley económica. Sólo en el interesantísimo *apéndice B* se ve obligado Sraffa a hablar explícitamente de “*productos no-básicos que se auto-reproducen*”³. No es que Sraffa se negara a admitir que su modelo implica la reproducción simple, sino que, dado que su interés se centraba en la distribución, dejó, digamos, cojo su esquema. Nada que objetar, porque hasta los genios deben pararse a descansar. Los simples mortales vamos a tratar modestamente de completar su esquema.

Reproducción simple. Vamos a entrar directamente en la reproducción simple haciendo explícitos el sistema de ecuaciones que pueden definirla. Por supuesto que éstas no han sido elegidas al azar sino tras algunos intentos de comprobar si la meta final no traicionaba el modelo *esrafiano* original. Son estas las ecuaciones:

$$(1) \quad P_{C,k+1}Y_{C,k+1} + P_{k+1}X_{k+1} = (1+g)[P_k X_k + wL_k]$$

$$(2) \quad P_{C,k+1}Y_{C,k+1} + P_{k+1}X_{k+1} = (1+g_M)P_k X_k$$

$$(3) \quad X_{k+1}I = X_k I \quad y \quad P_{k+1} = P_k = P$$

$$(3 \text{ bis}) \quad \sum_{j=1}^n x_{k+1,ij} = \sum_{j=1}^n x_{k,ij} \quad \text{para todo } i = 1 \text{ a } n$$

$$(4) \quad P_{C,k+1}Y_{C,k+1}I = 1$$

$$(5) \quad L_k I = LI = 1$$

La ecuación (1) es la de *definición del sistema* y se ha diferenciado los bienes no-básicos $Y_{C,k+1}$ que aquí vamos a llamar *de consumo*, sea cual sea el consumidor y que son aquellos que se consumen en el período

² En mi opinión son sólo precios de intercambio porque Sraffa no tiene una teoría de costes ni una función de costes. Lllamarlos precios de producción induce al error.

³ Pág. 125 de *PMPM*.

considerado (por ejemplo, un año) y no son medios de producción; $Y_{C,k+1}$ es una matriz *no* cuadrada $m \times n$ y $P_{C,k+1}$ es su vector de precios $1 \times m$. X_{k+1} , por su parte, es la matriz de bienes básicos $n \times n$, pero que aquí los consideramos como medios de producción producidos. Ello supone quizá forzar las definiciones *esrafianas* de bienes básicos y no-básicos, pero no queda otro remedio⁴. Creo, a pesar de todo, que no supone traición al menos a su espíritu. P es el vector de precios $1 \times n$, que es común a los medios de producción como a los productos finales que sirven para producir; este vector de precios permanece constante a lo largo del tiempo, por lo que hemos omitido la referencia temporal. Por último, X_k es la matriz de medios de producción $n \times n$. Se ha *pre-multiplicado* también en (1) la masa salarial wL_k por la tasa de ganancia g , a pesar de que Sraffa suele trabajar con lo que él llama salarios *post-factum*. Hoy día eso es inadmisibile y la razón de trabajar así -y que procede de Ricardo- está mal justificada por el italiano⁵. No obstante, los resultados son esencialmente los mismos, solo que con un factor $(1+g)$ pegado a w . Que la matriz $Y_{C,k+1}$ sea *no* cuadrada se ha hecho en aras del realismo, porque que el número de mercancías (hoy bienes y servicios) destinadas al consumo (m en $Y_{C,k+1}$) sea igual al número de mercancías destinadas a la reproducción de los medios (n en X_{k+1} y X_k) es *un suceso* casi imposible. La ecuación (2) surge de hacer cero la tasa de salarios w . La (3) es la ecuación estratégica de este modelo. En ella se expresa la igualdad entre el total de los medios de producción X_k en *términos físicos* de un período y los productos finales de medios de producción X_{k+1} del período siguiente, también en términos físicos. Es decir, el sistema se reproduce así mismo sólo en los medios de producción, mercancía a mercancía, en el total de los sectores. Insisto que no se exige que cada sector produzca la misma cantidad de mercancías período a período, sino que la igualdad se de para *la suma* de todos los sectores (pero mercancía a mercancía). Si el modelo se ve muy rígido, vale con que se cumpla la ecuación en términos de *valor* $PX_{k+1}I = PX_kI$, donde I es el vector de unos $n \times 1$. No obstante, en mi opinión debe mantenerse la ecuación tal y como está en (3), es decir, como *suma en términos físicos de todos los sectores* por cada mercancía por dos motivos: a) porque creo que es más acorde con el espíritu *esrafiano* que se desprende de su obra; b) porque hacerlo en

⁴ Schefold ha hablado de abandonar la distinción de *bienes básicos* y *no-básicos* porque traen más complicaciones que dilucidan conceptos.

⁵ Y no solo por Sraffa sino por todos los economistas posteriores. Se ha confundido *la forma* de cálculo (que es lo que hace Sraffa) con *cuando* se cobran los salarios (que es lo que cree Sraffa que hace).

términos de valores, es decir, como $PX_{k+1}I = P_kXI$, se corre el peligro de llegar *sólo* a una igualdad total y tautológica entre *demanda agregada*⁶ en términos de valor (derivada de las rentas salariales y las ganancias) y *oferta agregada* como suma, en términos de valor, de los bienes de consumo $Y_{C,k+1}$ más los bienes finales de producción X_{k+1} . Insisto que el peligro es acabar en una igualdad contable en lugar de un equilibrio derivado de leyes económicas.

El sistema es de *reproducción simple*⁷ porque lo que indica (1) y (3) es que con las rentas obtenidas por la venta de $X_{k+1}I$ se compran nuevamente medios de producción para el período siguiente, que son idénticas si $X_{k+1}I = X_{k+2}I$; alternatively pueden serlo en términos de valor y por el total, si hacemos que se cumpla $PX_{k+1}I = PX_kI$. Las ecuaciones (4) y (5) son los numerarios que se van a aplicar y que no se han elegido al azar precisamente. Hemos dejado para lo último la explicación sobre el período temporal que llevan el resto de las variables. En la ecuación que define el sistema (1) se ha diferenciado el período $k+1$ donde se obtienen los bienes de consumo $Y_{C,k+1}$ y de productos finales de medios X_{k+1} -así como sus respectivos precios- de los períodos de las variables L_k y X_k del lado derecho de la ecuación y que se supone que entraron en la producción en un período anterior k . No obstante, dado que estamos en la reproducción simple, las referencias temporales desaparecen porque se supone que tanto el trabajo como los medios de producción se repiten en diferentes períodos, así como los productos de consumo Y_C . Las tasas de salario w y de ganancia g permanecen constantes en el modelo. Queda claro pues, que la (3) es una ecuación de comportamiento que permite alternativas, es decir, que es una ley económica y no una mera definición. De la ecuaciones (1) y (2) sale la ecuación explícita de precios de medios y productos finales.

$$(6) \quad P = \frac{(1+g)w}{g_M - g} \times L X^{-1}$$

⁶ Eso pasó con la demanda agregada de origen keynesiano, y el propio Keynes y epígonos se enfrascaron con conceptos como la demanda ex-ante y ex-post para evitar la tautología.

⁷ No hay que confundir que lo sea o no de *producción simple o conjunta*. En este caso podría valer para ambas, porque nada se ha dicho sobre la matriz Y de productos finales de medios de producción: si no fuera diagonal habría también en estos productos producción conjunta- aparte de los bienes de consumo P_C - y si Y fuera diagonal lo sería de producción simple para estos productos.

Una vez calculada la (6), del conjunto de $n+2$ ecuaciones que van de la (3) a la (5) más las n ecuaciones de (6) nos da, todo ello, la ecuación fundamental de este sistema:

$$(7) \quad w = \frac{g_M - g}{(1 + g) g_M}$$

¡Si reemplazáramos g_M por la razón-patrón *esrafiana* R , sería la ecuación fundamental de Sraffa de esta razón en su versión *pre-factum* en el pago de salarios! Es por supuesto una analogía, puesto que R no saldría de este conjunto de ecuaciones ni aún cuando añadiéramos la ecuación $PX_{k+1} = (1+R)PX_k$, porque ello exigiría un numerario tal como $PX_{k+1}I - PX_kI = 1$, cosa que *no* hemos hecho y que no podríamos hacer porque ya hemos tomado como numerario $P_{C,k+1}Y_{C,k+1}$ en (4), cosa que ha sido imprescindible para llegar a la ecuación (7). O lo uno o lo otro.

Frontera salario-ganancia. Cambiando de tema, esta ecuación es además la frontera de salarios-ganancias con puntos de corte en $w(g=0)=1$ y $g(w=0)=g_M$. La función (7) entre tasa de salario y de ganancia como variables es crecientemente decreciente, puesto que tiene la primera derivada negativa y la segunda positiva. La (7) implica otra ecuación que no hemos hecha explícita, que es como sigue:

$$(8) \quad P_{C,k+1}Y_{C,k+1}I = wL_kI + g(wL_kI + P_kX_kI)$$

La (8) nos dice que las rentas totales⁸ del lado derecho de la ecuación, es decir, las derivadas del trabajo más las ganancias sobre las masa de salarios y medios de producción (*demanda*), han de comprar todos - pero sólo- los medios de consumo $P_{C,k+1}Y_{C,k+1}I$ (*oferta*). Es la segunda ecuación de equilibrio del sistema, complementaria con la (3), pero en términos de valor, es decir, como $PX_{k+1}I = PX_kI$. Con ello completamos la reproducción simple. Podemos enunciarlo así: *un posible sistema de equilibrio y reproducción simple esrafiano es aquel en el que el conjunto de todos los bienes de consumo son comprados con el conjunto de las rentas del trabajo más las ganancias empresariales y que, complementariamente, el valor de los productos finales se*

⁸ No se puede llegar sólo a una ecuación como $P_C Y_C = wL + g(wL + PX)$ a partir sólo del sistema de ecuaciones original.

destinan íntegramente a comprar los mismos productos como medios de producción.

Reproducción ampliada. Debemos avanzar porque lo dicho hasta ahora está implícito en la obra de Sraffa, aunque el no pudiera llegar a (7) ni a definir explícitamente (8). Ahora sí nos adentramos en terrenos no explorados por el genial italiano, porque vamos a suponer dos *tasas de acumulación* (o de reproducción ampliada) del sistema. Una -llamémosla ν - en la reproducción de los medios de producción \mathbf{X} y otra -que será u - para la reproducción de los bienes de consumo \mathbf{Y}_C . Ambos hechos quedan reflejados en las ecuaciones que siguen:

$$(9) \quad \mathbf{X}_{k+1} \mathbf{I} = (1 + \nu) \times \mathbf{X}_k \mathbf{I} \quad \text{con } \nu > 0$$

$$(9 \text{ bis}) \quad \mathbf{Y}_{C,k+1} \mathbf{I} = (1 + u) \times \mathbf{Y}_{C,k} \mathbf{I} \quad \text{con } u > 0$$

En (9) el sistema ya no simplemente se auto-reproduce, sino que deja el margen $\nu \mathbf{X}_k \mathbf{I}$ destinada a aumentar los productos finales de medios de producción $\mathbf{X}_{k+1} \mathbf{I}$ por esa misma cantidad física para todas los medios de producción del conjunto de los sectores. Además se aumentan los bienes de consumo final \mathbf{Y}_{ck} un porcentaje igual a u . Alternativamente -y al igual que antes- podemos suponer que el sistema se acumula en términos de valor, aplicando ν a $\mathbf{P} \mathbf{X}_k \mathbf{I}$ directamente para obtener $\mathbf{P} \mathbf{X}_{k+1} \mathbf{I} = (1 + \nu) \mathbf{P} \mathbf{X}_k \mathbf{I}$ y u a $\mathbf{P}_{Ck} \mathbf{X}_{Ck} \mathbf{I}$ y nos da $\mathbf{P}_{C,k+1} \mathbf{Y}_{C,k+1} = (1 + u) \mathbf{P}_{C,k} \mathbf{Y}_{C,k}$. Como curiosidad podemos añadir que la diferencia entre u y ν es un índice de productividad *no laboral*⁹ del sistema. Si ahora resolvemos el conjunto de ecuaciones originales, pero sustituyendo la (3) por la (9) y (9 bis), nos da la significativa ecuación:

$$(10) \quad w = \frac{(1 + u) \times (g_M - g)}{(1 + g) \times (g_M - \nu)}$$

donde vemos que (10) se diferencia de (7) en que el segundo multiplicando del denominador ya no es g_M sino $g_M - \nu$ y que en el numerador aparece un nuevo multiplicando: $(1 + u)$. La tasa de ganancia se obtendría de (10):

⁹ No laboral dado que no interviene explícitamente \mathbf{L} .

$$(11) \quad g = \frac{g_M (1 + u - w) - vw}{1 + u + w(g_M - v)}$$

Despejando ahora *la tasa de acumulación* (o de reproducción) v :

$$(12) \quad v = \frac{g_M [(1 + g)w - 1 - u] + g(1 + u)}{(1 + g)w}$$

Y la tasa de crecimiento de los bienes de consumo:

$$u = \frac{(g_M - v)[(1 + g)w - 1]}{g_M - g}$$

Uno de los mantras de la teoría del crecimiento neoclásica es que, bajo ciertas condiciones, la tasa de crecimiento de una economía es proporcional (incluso igual) a la tasa general de ganancia del sistema. No entramos si la realidad se adecua a esta conclusión neoclásica porque la realidad -y más la actual- la ha dejado herida de muerte. En el modelo esrafiano no existe proporcionalidad. Calculamos la primera derivada de (12) y a pesar de su terrible aspecto, queda:

$$(13) \quad \frac{dv}{dg} = \frac{(1 + u) \times (g_M - g)}{(1 + g)^2 w} > 0 \quad \text{si } g_M > g$$

La segunda derivada es:

$$(14) \quad \frac{d^2 v}{dg^2} = -\frac{(1 + u) \times (1 + g_M)}{(1 + g)^3 w} < 0$$

Es decir, la primera derivada positiva y la segunda negativa significa que la función (12) es decrecientemente creciente. Además, su crecimiento se detiene tangencialmente con la recta: $v = (1 + g_M)/w$ que es, por lo tanto, su tope máximo. Los puntos de corte son:

$$(15) \quad v(g = 0) = \frac{g_M(w - 1 - u)}{w} \quad \text{con } v > 0 \quad \text{si } w < 1 + u$$

$$(16) \quad g(v=0) = \frac{g_M(1+u-w)}{1+u+wg_M} \quad \text{con } g > 0 \quad \text{si } w < 1+u$$

En el caso que nos ocupa, la ecuación de reproducción del sistema equivalente a la (8) de la reproducción simple sería como sigue:

$$(17) \quad (1+u)P_{C,k}Y_{C,k}I = (g-v)P_kX_kI + (1+g)wL_kI$$

donde el lado derecho de la ecuación son las ganancias y salarios que van a demandar los bienes de consumo (lado izquierdo). Se puede observar en (17) que las ganancias derivadas de los medios de producción $(g-v)P_kX_kI$ son menores que en (8) -que eran gP_kX_kI - por la necesidad de dedicar parte de ellas (vP_kX_kI) en (9) a aumentar la demanda de productos finales de medios de producción X_{k+1} . Por ello, ahora las ganancias correspondiente a la masa salarial gwL_kI han de servir para compensar esa menor demanda.

Generalización I. Una generalización del sistema de *reproducción simple* de origen esrafiano vendría dado por el sistema de ecuaciones:

$$(18) \quad P_{C,k}Y_{C,k+1} + P_kX_{k+1} = [P_kX_k + L_kW] \times (1+G)$$

$$(19) \quad P_{C,k}Y_{C,k+1} + P_kX_{k+1} = P_kX_k(1+G_M)$$

$$(20) \quad X_{k+1}I > X_kI$$

$$(9) \quad X_{k+1}I = (1+v) \times X_kI \quad \text{con } v > 0$$

$$(9\text{bis}) \quad Y_{C,k+1}I = (1+u) \times Y_{C,k}I \quad \text{con } v > 0$$

donde lo que cambia respecto al modelo anterior de reproducción ampliada es que ahora ya no tenemos tasas unitarias de salarios y ganancias, sino matrices diagonales de salarios W , de salarios, G y de ganancias máximas G_M . De las ecuaciones (19), (9) y (9bis) sale la ecuación de equilibrio del sistema:

$$(21) \quad P_{C,k}Y_{C,k}I = \frac{1}{1+u} \times LW(1+G)(G_M-G)^{-1}(G_M-vI_d)I$$

Es esta una ecuación que implica un doble equilibrio. Por un lado indica la necesidad de igualar la oferta de bienes de consumo (lado izquierdo de la ecuación) con las rentas salariales y gananciales que representa el lado derecho; por otro es un equilibrio temporal, porque si el sistema respecta (21), ello indicaría que la senda de crecimiento de los bienes de consumo (u) se equilibra con la demanda derivada de las rentas producidas en los dos sectores en los que hemos dividido la economía: el de medios de producción y el de bienes de consumo. Un gobierno que tuviera el poder político y económico capaz de obligar a mantener ese equilibrio en el conjunto de la economía podría dominar las crisis y evitar o, al menos, aplanar muchísimo los ciclos internos de la economía. Mejor aún si ese poder fuera un poder mundial. Pero eso es una utopía. Volviendo a la ecuación de equilibrio (21), de ella y de la de definición del sistema de este epígrafe, es decir, de la (18), junto el resto, obtenemos la complementaria de equilibrio y que es una alternativa a la (21):

$$(23) \quad (1+u)P_{Ck}Y_{Ck}I - P_kX_k(G_M - vI_d)I = L_kW(1+G)I$$

En esta no tenemos la matriz diagonal de ganancias máximas G_M y en la (21) está ausente la matriz de medios X_k . Juntas son redundantes. No es este el único modelo posible de reproducción simple o acumulada respetuoso con el espíritu *esrafiano*, pero es el más simple posible porque sólo hemos exigido que se reproduzca -o se amplíe- los productos finales X de un período que serán medios de producción en el período siguiente y que se haga lo propio con los bienes de consumo Y_C . Incluso la reproducción ampliado de los medios de producción no es necesaria. Es decir, la tasa de reproducción v podría ser cero. No se me ocurre otra manera más adecuada de equiparar en lo posible los bienes de consumo de la macroeconomía convencional con el criterio de bienes *no-básicos* de Sraffa. Aunque se ha expresado el equilibrio en términos monetarios, el origen de los equilibrios en la reproducción del sistema se ha hecho a partir de la igualdad -o del crecimiento- *en términos físicos* de los productos finales de medios de producción de un período con el de medios de producción del siguiente. En este modelo de equilibrio de inspiración *esrafiana*, los precios juegan un papel pasivo y sólo intervienen como relaciones de intercambio, a diferencia de los precios de los modelos de *equilibrios competitivos* del análisis convencional, donde determinan

los excesos de demanda que supuestamente vacían los mercados¹⁰. Los precios, en el equilibrio *esrafiano*, no son una guía para el conocimiento sobre la escasez de bienes y servicios, sino que expresan relaciones de intercambio entre bienes y servicios (mercancías, *commodities*, en lenguaje *esrafiano*). En Sraffa puede haber equilibrio mediante el trueque, sin precios, porque las propias relaciones de trueque sustituyen y son equivalentes a los cocientes de precios. En el (o los) equilibrios *esrafianos* no hay funciones de producción ni funciones de demanda explícitas, porque medios y productos son datos surgidos del intercambio. No obstante, ello es compatible con las funciones anteriores siempre y cuando estas no determinen salarios y ganancias. La razón es la de que en cualquier modelo *esrafiano* de reproducción o de acumulación o, simplemente, de equilibrio, la relación entre salarios y ganancias se determinan exógenamente, sociológicamente, y no tecnológicamente o por efectos de supuestas productividades o utilidades. Sraffa, como heredero de Torrens, Ricardo, Smith, Mill, Marx, etc., es decir, de los clásicos, abre un mundo nuevo, alternativo al marginalismo y en parte al neoclasicismo, e incompatible con ellos. Eso sí, ese mundo hay que completarlo y, porqué no, también crearlo.

Generalización II. El modelo que venimos proponiendo permite una generalización aún mayor, porque ahora vamos a suponer que existen n tasas de acumulación en la producción de bienes de consumo u_{ij} tales que para $u_{ij}=0$ si $i < j$ y con $u_{ij} > 0$ si $i=j$, concretadas en la matriz diagonal U ; también n tasas también de acumulación v_{ij} en la producción de medios de producción tales que $v_{ij}=0$ si $i < j$ y con $v_{ij} > 0$ si $i=j$, concretadas a su vez en la matriz diagonal V . Con ello las ecuaciones (9) y (9bis) del modelo anterior se convierten en:

$$(24) \quad Y_{C,k+1}I = Y_{C,k}(1+U)I \quad \text{con } v > 0 \quad \text{si } u_{ij} < 0$$

$$(25) \quad X_{k+1}I = X_k(1+V)I \quad \text{con } v_{ij} > 0 \quad \text{si } v_{ij} < 0$$

Ahora, sustituidas estas ecuaciones en la (19) del modelo anterior, nos da la ecuación de equilibrio tal como:

$$(26) \quad P_{Ck}Y_{Ck}(1+U)I - P_kX_k(G_M - V)I = L_kW(1+G)I$$

¹⁰ *General competitive analysis*, Arrow y Hahn, 1971.

donde, como siempre, *la parte de la izquierda de la ecuación es la oferta de bienes de consumo en términos de valor menos el valor de medios de producción minorado de la tasa de crecimiento (acumulación) de estos bienes, ha de ser igual también en términos de valor a las rentas salariales aumentadas por las tasas de ganancia.* Al igual que hemos hecho antes, podemos hacer desaparecer los precios de los medios de producción con una ecuación análoga a la (21) y se obtiene:

$$(27) \quad P_{C,k} Y_{C,k} I = LW(1+G)(G_M - G)^{-1}(G_M - V)(1+U)^{-1} I$$

Esta ecuación de equilibrio desde el punto de vista formal es más sencilla puesto que sólo tenemos un sumando a cada lado de la ecuación. Su interpretación económica viene a ser que el equilibrio con crecimiento -tanto en el sector de bienes de consumo como de producción de medios- se da si la oferta en términos de valor global de bienes de consumo se iguala a las rentas laborales modificadas por todos los factores que aparecen como multiplicandos en el lado derecho de la ecuación. Hay dos cosas significativas en (27): a) que estamos muy cerca ya de lo empírico, por lo que una política económica deliberada tendente a impedir crisis y ciclos debiera guardar este equilibrio si el un gobierno tuviera el poder político y económico capaz de hacerlo observar. En una economía de *mero* mercado es imposible llegar a ese poder, pero hay que ser consciente de lo que se pierde con ello; b) que se puede observar que los precios de los medios de producción no aparecen explícitos en (27). Eso significa que una planificación de la economía basada en (27) sólo tendría como dato -sea del mercado o planificado- los precios de los bienes de consumo. En términos aritméticos (27) sería):

$$(27bis) \quad \sum_{h=1}^m P_{C,k,h} \sum_{j=1}^n y_{C,k,hj} = \sum_{i=1}^n l_i \sum_{j=1}^n \frac{w_{ij}(1+g_{ij}) \times (g_{Mij} - v_{ij})}{(g_{Mij} - g_{ij}) \times (1+u_{ij})}$$

Antonio Mora Plaza

Madrid, octubre de 2010.

Bibliografía

Afriat, S.: "Sraffa's Prices", Università degli Studi di Siena, quaderni 474.

www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Ahijado, M.: "Distribución, precios de producción y crecimiento", 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Bour, Enrique A.: "Marx y la teoría económica moderna", 2007

<http://www.aaep.org.ar/anales/works/works2007/bour.pdf>

Caballero, A. y Lluch, E.: "Sraffa en España", Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2), 1986.

Dobb, M.: "Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith, edit. Siglo XXI editores.

Desai, M.: "Marxian Economic Theory", 1974 ["Lecciones de teoría económica marxista", 1977, edit. Siglo XXI].

Dobb, M.: "The Sraffa system and the critique of neoclassical theory of distribution", 1970.

Estrin, S. y Laidler, D.: "Introduction microeconomics".

Fiorito, Alejandro: "La implosión de la economía neoclásica". Está en la red:

www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Foncerrada, Luis Antonio: "Sraffa y Böhm-Bawerk". Está en la red:

<http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/FoncerradaPLA/tesis.pdf>

Garegnani, P.: "El capital en la teoría de la distribución", 1982, ed. Oikos-Tau ("Il capitale nelle teorie delladistribuzione", 1982)

Gehrke, Ch. y Kurz, D.: "Sraffa on von Bortkiewicz". Está en la red:

http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Harcourt, G.C.: "Teoría del Capital" (*Some Cambridge controversies in the theory of capital*, 1975), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Heathfield, D. F.: "Productions funtions".

Korsch, Karl; "Karl Marx", 1975, traducción de Manuel Sacristán, edit. Ariel.

Kurz, Pasinetti, Salvador y otros: "Piero Sraffa: The Man and the Scholar", Routledge, 2008.

Lange, O., Taylor, F. M.: "On tthe Economic Theory of Socialism, 1938 [Sobre la teoría económica del socialismo, 1971, edit. Ariel]

Marx, Carlos: "El método en la Economía Política", 1974, Ediciones Grijalbo, S.A.

Marx, Carlos: "El Capital", en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meade, J.: "A neo Classical Theory of Economic Growth", 1961.

Meek, R.: "Mr. Sraffa's Rehabilitation of Classical Economics", 1961.

Mendoza, Gabriel: "La transformación de valores en precios de producción", 1997
http://www.izt.uam.mx/economiayp/numeros/numeros/10/articulos_PDF/10_2_La_transformacion.pdf

Mora Plaza, A.: "Aspectos de la economía de Sraffa", revista: Nómadas, n. 23, U. Complutense de Madrid, enlace: <http://www.ucm.es/info/nomadas/23/antoniomora.pdf>

Mora Plaza, A.: "Notas sobre la producción simple y conjunta a consecuencia de Sraffa: <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/181/18112179020.pdf>;

Mora Plaza, A.: "Sobre la transformación de valores a precios":
<http://www.eumed.net/ce/2009b/amp2.htm>
<http://revistas.ucm.es/cps/15786730/articulos/NOMA1010140379A.PDF>

Mora Plaza, A.: "Notas sobre el teorema fundamental marxiano"
<http://www.eumed.net/ce/2009b/amp.htm>
http://econpapers.repec.org/article/ervcontri/y_3a2009_3ai_3a2009-10_3a22.htm

Morhisima, M.: "La teoría económica de Marx" (*Marx's Economics*, 1973), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Moseley, F.: "El método lógico y el problema de la transformación".
<http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm>

Murga, Gustavo: "Piero Sraffa".
http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Nuti, D.: "Capitalism, Socialism and Steady Growth", 1970.

Okishio, N.: "A mathematical note on marxian theorems", 1963.

Pasinetti, L.: "Critical of the neoclassical theory of growth and distribution". Está en la red:
http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Pasinetti, L.: "Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations", 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.: "Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth", 1961/2.

Pasinetti, L.: "Switches of technique and the rate of return in Capital Theory", 1969.

Pasinetti, L.: "Crecimiento económico y distribución de la renta" (*Growth and Income Distribution*, 1974), 1978, Alianza Editorial.

Pasinetti, L.: "Lecciones de teoría de la producción" (*Lezioni di teoria della produzione*, 1975), 1983, FCE.

Peris i Ferrando, J.E: “Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta”, 1987, en internet:

<http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf>

Potier, J.P.: “Piero Sraffa”, 1994, edicions Alfons Magnànim.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation*), 1973, F.C.E.

Robinson, J.: “Ensayos críticos”, 1984, Ediciones Orbis.

Samuelson, Paul: “Understanding the Marxian notion of Exploitation”, 1971.

Sánchez Choliz, Julio: “La razón-patrón de Sraffa y el cambio técnico”, 1989, Investigaciones Económicas, 2ª época, Vol. XIII.

<ftp://ftp.funep.es/InvEcon/paperArchive/Ene1989/v13i1a7.pdf>

Sargent, T.J.: “Teoría macroeconómica” (*Macroeconomic Theory*, 1979), 1988, Antoni Bosch editor.

Schefold, Bertram: *Mr. Sraffa on Joint Production*, 1971

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analysis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Steedman, I.: “Marx, Sraffa y el problema de la transformación” (*Marx after Sraffa*, 1977), 1985, F.C.E.

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analysis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Solow, R.: “The interest rate and transition between techniques”, 1967.

Sraffa, Piero: “Producción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities*, 1960), 1975, Oikos-Tau.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation*), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.: “Economía política y modelos multisectoriales”, 1979, edit. Tecnos.

Varios: “Matemáticas avanzadas aplicadas a la Economía”, UNED, 2001.

Madrid, 13 de septiembre de 2010.