TASA MÁXIMA DE GANANCIA Y RAZÓN-PATRÓN A PARTIR DE SRAFFA

(TEOREMA)

por *Antonio Mora Plaza*

MAXIMUM RATE OF PROFIT AND RATE-STANDARD FROM SRAFFA

In this article I will talk about the limits and conditions in the *sraffian* system model of rate-standard and the maximum rate of profit. Sraffa say the rate-standard is equal to the maximum rate of profit on the single-production and the *sraffian* joint-production, but never it can be demonstrated. The firstly demonstration is done here.

by Antonio Mora Plaza

TASA MÁXIMA DE GANANCIA Y RAZÓN-PATRÓN EN SRAFFA

En este artículo se trata de poner los límites y las condiciones para el cumplimiento de la afirmación de Sraffa de que la tasa máxima de ganancia es igual a la razón-patrón en la producción simple y en la producción conjunta esrafiana. Sraffa nunca demostró formalmente esas afirmaciones, pero aquí se da una demostración.

por Antonio Mora Plaza

TASA MÁXIMA DE GANANCIA Y RAZÓN-PATRÓN A PARTIR DE SRAFFA (teorema)

por *Antonio Mora Plaza*

El genial invento -¿o es descubrimiento?- de la mercancía-patrón y de la razón-patrón parecería, visto el libro de Sraffa, sólo es aplicable a la producción simple, es decir, al esquema de producción en el que cada sector produce un solo producto. Una situación así tiene la ventaja de que el esquema puede ser formalizado mediante la ecuación de definición del sistema $\boldsymbol{PY}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{PX}$, la cual es susceptible de aplicarse el teorema de *Perron-Froebenius* y obtener con ello un vector de precios *no* negativos y un autovalor que asegure una tasa de ganancia $\boldsymbol{R}$ positiva y única para todos los sectores. $\boldsymbol{P}$ es el vector de precios $\mathbf{1}\text{x}\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{Y}$ la matriz *diagonal* de productos finales y $\boldsymbol{X}$ la matriz cuadrada de medios de producción, ambas de dimensiones $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$. Es necesaria la ayuda de la ecuación $\boldsymbol{LQI}=\mathbf{1}$ para obtener los multiplicadores a partir de la ecuación matricial $\boldsymbol{uYQ}=\boldsymbol{XQ}$, que está íntimamente relacionada con la de definición del sistema. $\boldsymbol{L}$ es el vector trabajo, $\boldsymbol{Q}$ el vector $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{1}$ de multiplicadores y $\boldsymbol{u}$ un multiplicador escalar que es a la vez un autovalor. Además, con ello relacionamos el autovalor $\boldsymbol{u}$ con $\boldsymbol{R}$ mediante la ecuación $\boldsymbol{u}=\mathbf{1}/(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})$ que surge de la aplicación del teorema. Con ello calculamos $\boldsymbol{R}$. De esta manera, $\boldsymbol{R}$ será simultáneamente la tasa máxima de ganancia y la razón-patrón que buscaba Sraffa. Todo ello es posible, no obstante, porque $\boldsymbol{Y}$ es una matriz *diagonal*, es decir, que tiene todos los productos finales de las mercancías colocados en la diagonal principal: el resto de los elementos de la matriz son cero. Si estamos en la producción conjunta, es decir, en la producción donde en cada sector -y en cada empresa- produce más de un producto, la matriz de productos finales $\boldsymbol{Y}$ ya *no* es diagonal y la consecuencia funesta para el esquema *esrafian*o es que ahora no se puede aplicar *Perron-Froebenius*, con lo cual no podemos asegurar ni un vector de precios no negativos $\boldsymbol{P}$, ni unos multiplicadores no negativos $\boldsymbol{q}_{\mathrm{j}}$, ni que la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ coincida con la razón-patrón $\boldsymbol{R}$, suponiendo que la podamos calcular. Sin embargo, casi todo tiene solución. Sraffa la encuentra en el capítulo VIII de su libro eliminando "*completamente mediante transformaciones lineales las* *mercancías no básicas*[1] *del sistema, tanto del lado de los medios de producción como del lado de los productos*"[2]. En términos matemáticos eso equivale a realizar operaciones lineales de combinaciones de filas y columnas en la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$) de dimensiones $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$, de tal forma que quede una matriz de cuadrada de *rango* igual al número de filas (=columnas). Con ello se puede calcular el determinante de $\boldsymbol{uI}$-$\boldsymbol{A}$ y resolver el polinomio de grado $\boldsymbol{n}$ (número de filas o columnas). El teorema de *Perron-Froebenius* nos asegura una solución real, simple y positiva, como hemos visto. El problema es que para llegar a ello en la producción conjunta han de ocurrir dos cosas: 1) que la matriz $\boldsymbol{A}$ sea ya irreducible o reducible, aunque ninguna de las dos cosas la podemos asegurar de antemano; 2) que se parta del supuesto, como hace Sraffa, de que el número de bienes de productos finales sea el mismo que el de medios de producción, aunque esté repartido en $\boldsymbol{n}$ sectores de productos finales. Este es un supuesto muy restrictivo, pero Sraffa nunca salió de él porque se aferraba a las ventas de sus queridas mercancía-patrón y razón-patrón. Y no es para menos.

Hemos visto que el caso de la producción conjunta *esrafiana* puede resolverse diagonalizando la matriz de productos finales mediante la ecuación $\boldsymbol{Y}_{\text{s}}=\boldsymbol{Y}_{\text{c}}\boldsymbol{D}$, obtenida $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{Y}_{\text{s}}^{-1}\boldsymbol{Y}_{\text{c}}$, que es equivalente a sumar todos los productos finales por columnas de la matriz de productos finales $\boldsymbol{Y}_{\text{c}}$ en la producción conjunta y colocar estas sumas en la diagonal de la matriz $\boldsymbol{Y}_{\text{s}}$ como en la producción simple según sectores. Así podemos transformar la producción conjunta esrafiana en un modelo de ecuaciones igual al de la producción simple. A Sraffa no se le ocurrió este sistema, pero su discusión sobre la razón-patrón mínima mediante reducción al absurdo[3] es equivalente a lo anterior. Sraffa lo hizo así para no perder -y que no perdiera el lector- el hilo de su discusión económica y no meramente formal. La cuestión surge si los productos no-básicos aparecen diferenciados de los básicos formalmente en el modelo y

[1] Mercancías no básicas son aquellas que surgen como productos finales en el proceso productivo pero que nunca se utilizan como medios de producción. Las básicas son lo contrario: entran como medios y como productos. Según Sraffa en todos los sectores sin excepción. No obstante, ese todos no es necesario para la existencia de una solución de vectores no negativos y un autovalor positivo, simple y real.

[2] Pág. 77 de *Producción de mercancías por medio de mercancías.*

[3] Pág. 79 de *PMPM.*

si ambos no coinciden en el número de productos diferentes, cosa ya cercana a la realidad. ¿Tenemos entonces razón-patrón y mercancía-patrón o no? ¿Y si tenemos razón-patrón, es ésta igual a la tasa máxima de ganancia? ¿La podemos obtener de otra forma? Sraffa no pudo contestar a estas preguntas de manera formal, es decir, con alguna demostración. Empezaremos con alguna respuesta no satisfactoria. Para empezar. el método del recuento consistente en comparar todos los productos netos relativos (excedentes relativos) y tomar el menor de ellos, falla porque Perron-Froebenius nos da siempre un vector de precios no negativos y un autovalor positivo que da lugar a una razón-patrón que no tiene porqué coincidir con el menor valor del *excedente relativo*. He llamado excedente relativo de un sector a la ecuación:

(1) $$Exc.\ relativo\ de\ i = \frac{Y_i - \sum_{j=1}^{n} X_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}} \quad para\ i=1\ a\ i=n$$

Pues bien, esa solución es compatible con un sector cuyo excedente relativo es cero. Vamos a ver ahora que sí hay solución para modelos *no esrafianos*, pero desarrollados a partir de la semilla que nos dejó el genial italiano. Vamos hacerlo de la forma que tanto adolece el libro de Sraffa: planteando de entrada el sistema de ecuaciones con el que vamos a trabajar:

(2) $$P_N Y_N + PY = (1+r)\left[PX + wL\right]$$

(3) $$P_N Y_N + PY = (1+g_m)PX$$

(4) $$PY = (1+R)PX$$

(5) $$PYI - PXI = 1$$

(6) $$LI = 1$$

Como se verá, estas ecuaciones no están elegidas al azar, sino con mucho cálculo y muchos intentos. Son no obstante, creo, naturales, reflejan bien el espíritu esrafiano y son susceptibles de concretarse y acercarse a la realidad con una generalización de tasas de ganancia y de salarios, como luego veremos. La ecuación (2) es la de definición del sistema, donde $\boldsymbol{P}_N$ es el vector de precios $\mathbf{1}\text{x}\boldsymbol{m}$ de productos *no-básicos*, $\boldsymbol{Y}_N$ es la matriz no cuadrada $\boldsymbol{m}\text{x}\boldsymbol{n}$ de productos finales *no básicos*, $\boldsymbol{P}$ es el vector de precios $\mathbf{1}\text{x}\boldsymbol{n}$ de precios de productos *básicos*, $\boldsymbol{Y}$ la matriz cuadrada $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$ de productos finales básicos, $\boldsymbol{r}$ la tasa de ganancia, $\boldsymbol{X}$ la matriz $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$ de medios de producción, $\boldsymbol{w}$ la tasa de salarios, $\boldsymbol{L}$ el vector $\mathbf{1}\text{x}\boldsymbol{n}$ de inputs de trabajo y $\mathbf{I}$ es el vector de unos $\boldsymbol{n}\text{x}\mathbf{1}$. La ecuación (3) es el resultado de hacer cero la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$. Con ello obtenemos una ecuación cuya tasa de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ es la máxima posible manteniendo siempre el mismo excedente, es decir, $\boldsymbol{PY}$-$\boldsymbol{PX}$ en términos monetarios. Una tasa de ganancia más alta que hiciera que $\boldsymbol{Y}<\boldsymbol{X}$ para alguna mercancía en términos físicos no sería viable porque el sistema no se podría reproducir al ser menor para uno o varios bienes y servicios (mercancías) los productos finales que los medios de producción utilizados. Hay que recordar que estamos en un modelo de *reproducción simple*, aunque de producción conjunta, porque ni los precios ni los bienes (mercancías) están fechados, además de ser un modelo de equilibrio. Sigamos. La ecuación (4) es crucial en la demostración de lo que viene, porque es la misma que la de la producción simple, con $\boldsymbol{R}$ como presunta razón-patrón del subsistema de ecuaciones que representa esta ecuación matricial. Sobre esta ecuación hay que detenerse, lo mismo que sobre la siguiente, porque $\boldsymbol{R}$ surge independientemente de los precios por aplicación del teorema de *Perron-Frobenius*. Si $\boldsymbol{R}$ dependiera de los precios y/o de las tasas de ganancia y salarios no habría demostración y nada de lo que sigue tendría ningún valor. La (5) es el numerario *esrafiano*. Aquí cualquiera hubiera estado tentado de elegir un numerario del tipo $\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{Y}_N\mathbf{I}+\boldsymbol{PY}\mathbf{I}-\boldsymbol{PX}\mathbf{I}$ de la ecuación, es decir, del producto neto, incluidos los ingresos de los productos *no-básicos* $\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{Y}_N\mathbf{I}$. Obrando así no hubiéramos llegado a la demostración. Estas consideraciones son decisivas en lo que viene. La (6) es el segundo numerario ya conocido y utilizado por Sraffa. De las ecuaciones (2) y (3) sale la ecuación:

$$P = \frac{w(1+r)}{g_m - r} \times LX^{-1} \tag{7}$$

El lector del libro de Sraffa debiera tener *in mente* esta ecuación y es lástima que Sraffa nunca la hiciera explícita. La (7) nos dice al menos dos cosas importantes: a) que los precios de los productos básicos ***P*** *no* dependen de los precios de los no-básicos P_N; b) que si la tasa de ganancia general del sistema ***r*** se acercara (muy cerca) a la tasa máxima de ganancia, los precios crecerían exponencialmente. Secundariamente nos dice que los precios son proporcionales a los salarios y a los inputs de trabajo e inversamente proporcionales a la tasa máxima de ganancia y a los medios de producción. También es notable que para llegar a la tasa máxima de ganancia y a la razón-patrón no necesitemos resolver un sistema de ecuaciones, ni resolver la ecuación (7): tan sólo con despejar los precios en la ecuación (2) que define el sistema y aumentar la tasa de ganancia hasta llevar los precios al *rubicón* del más infinito al menos infinito, obtenemos la razón-patrón y la tasa máxima de ganancia (que tienen el mismo valor sólo en ese momento).

De (4) y (5) se obtiene:

(8) $$1 = RPXI$$

Sustituyendo los precios de (7) en (8) y con la (6) ya tenemos una ecuación sin precios, que además define la frontera entre salarios y ganancias:

(9) $$w = \frac{g_m - r}{(1+r)R}$$

donde los puntos de corte son $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ para $\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$ y $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}/\boldsymbol{R}$ si hacemos $\boldsymbol{g}=\mathbf{0}$. Seguimos. De las ecuaciones (2), (4), (5) y (6) se obtiene la singular ecuación:

(10) $$P_N Y_N I + 1 = \frac{r}{R} + (1+r)w$$

Obsérvese que la (10) está muy cerca de la ecuación fundamental *esrafiana* $\boldsymbol{r}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{w})\boldsymbol{R}/(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})$, es decir, de la ecuación de la razón-patrón para sistemas de pago *pre-factum* y no *pos-factum*, como utiliza Sraffa. Las consecuencias son las mismas, sólo que el multiplicador $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})$ está afectando a la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$. Si eliminamos (**1**+***r***) en todas las ecuaciones resultantes, tenemos el sistema empleado por Sraffa, aunque él no llegara nunca a demostrar lo que sigue. Ahora estamos preparados para eliminar una variable entre las ecuaciones (9) y (10), dado que no son una combinación lineal o de otro tipo entre ambas. Ello es así porque en la (10) no se ha utilizado la (3) y, en cambio, sí se ha hecho en la (9) a través de la (7). El resultado es:

$$P_N Y_N I = \frac{g_m - R}{R} \qquad (11)$$

Y en la (11), a simple vista, se puede comprobar que para que la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ sea igual a la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ es suficiente que el lado izquierdo de la ecuación, es decir, la suma de los productos de precios y cantidades de productos finales de los bienes *no-básicos* $\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N}}\mathbf{I}$ sea cero. O dicho de otro modo: la ecuación (11) nos asegura la *condición suficiente* de que la tasa máxima de ganancia sea igual a la única razón-patrón $\boldsymbol{R}$ si la suma de todos los productos finales de la matriz $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N}}$ vale cero. En cambio, sí tenemos con ello probado lo que queríamos demostrar: que al menos en la producción simple o conjunta *esrafiana* (pero *diagonalizada*), la tasa máxima de ganancia y la razón-patrón tienen el mismo valor aún cuando sean conceptos distintos: *la razón-patrón* es el coeficiente común que permite pasar de la realidad a la mercancía-patrón con la ayuda de los multiplicadores; *la tasa máxima de ganancia* surge de hacer cero la tasa de salarios en la ecuación (2) que define el sistema. Lo anterior puede resumirse de la siguiente manera:

$$si \;\; Y_N = 0 \;\; \forall i, j \;\Rightarrow\; \frac{g_m - R}{R} = 0 \;\Rightarrow\; g_m = R \qquad (12)$$

También se demuestra lo contrario: que si existen bienes *no-básicos* diferenciados de los *básicos*, la tasa de ganancia máxima es mayor que la razón-patrón:

$$si \;\; Y_N > 0 \;\; \forall i, j \;\Rightarrow\; \frac{g_m - R}{R} > 0 \;\Rightarrow\; g_m > R \qquad (13)$$

Pero aquí no acaba la cosa, porque de (7) sabemos cómo calcular la tasa máxima de ganancia, tanto en la producción simple y en la conjunta *esrafiana*, pero con ***Y*** diagonalizada. Simplemente tenemos que obrar por el método de prueba y error sobre la tasa de ganancia ***r***. Traemos a colación la ecuación:

(7) $$P = \frac{w(1+r)}{g_m - r} \times LX^{-1}$$

En (7) vemos que si la tasa de ganancia ***r*** se acercara a la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$, los precios tenderían -como ya hemos visto- a infinito primero, *para pasar bruscamente a menos infinito*. En esa situación y en el instante anterior de pasar a menos infinito ocurre que $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{R}$, con lo cual tenemos un método para calcular la razón-patrón sin necesidad de resolver el sistema $\boldsymbol{u}\mathbf{I}\text{-}\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ para los sistemas antes aludidos: dar valores a ***r*** (aumentándola) hasta pasar la frontera de los precios del *más* infinito al *menos* infinito. Veamos el resumen:

(14) $$si \;\; r \to g_m \;\; en \;\; P = \frac{w(1+r)}{g_m - r} \Rightarrow P \to \inf \Rightarrow r \to R$$

En los anexos se puede ver algunos ejemplos. Si en lugar de la ecuación se hubiera partido de la más típica de Sraffa:

(15) $$P_N Y_N + PY = (1+r)PX + wL$$

el resultado hubiera sido que:

(16) $$P_N Y_N I + 1 = \frac{r}{R} + w$$

Y ahora la ecuación deducida que relacionara ***r***, ***w*** y ***R*** sería:

(17) $$w=\frac{g_m-r}{R}$$

en lugar de la (9), que sustituida en la (16) da igualmente la (11). Cambiaría sólo la (7) que sería ahora:

(18) $$P=\frac{w}{g_m-r}\times LX^{-1}$$

Aquí se obtienen las mismas conclusiones anteriores cuando ***r*** se acerca a $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$, pero con unos valores ligeramente diferentes por el factor (**1**+***r***), que ahora no existe. Que el lector elija.

El teorema puede ser generalizado a ***n*** tasas de ganancia mediante la matriz diagonal ***G*** y a ***n*** tasas de ganancia máxima mediante la matriz también diagonal $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$. Las ecuaciones respectivas serían:

(19) $$P_N Y_N + PY = \left[PX + LW\right]\times(1+G)$$

(20) $$P_N Y_N + PY = PX\times(1+G_m)$$

(21) $$PY=(1+R)PX$$

(22) $$PYI-PXI=1$$

(23) $$LI=1$$

No vamos a repetir el proceso anterior, pero de este conjunto de ecuaciones sale:

(24) $$P_N Y_N I = LW(1+G)(G_m-G)^{-1}(G_m-R)I$$

que desarrollada en términos aritméticos queda:

(24 bis) $$\sum_{i=1}^{m} p_{Ni}\sum_{j=1}^{n} y_{Nij}=\sum_{i=1}^{n} l_i\sum_{j=1}^{n}\frac{w_{ij}(1+r_{ij})(g_{mij}-R)}{g_{mij}-r_{ij}}$$

donde todos los $\boldsymbol{w}_{ij}$, $\boldsymbol{r}_{ij}$ y $\boldsymbol{g}_{\mathbf{m}ij}$ valen cero si $\boldsymbol{i}<>\boldsymbol{j}$. En (24bis), si el primer término de la ecuación es igual a cero, es decir, si vale cero la suma del producto del conjunto de precios por sus respectivos productos finales de bienes *no-básicos*, entonces la parte de la derecha de la suma *sólo* vale cero si se cumplen las dos condiciones siguientes: a) que *todas* las tasas de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_{\mathbf{m}ij}$ sean iguales a la única razón-patrón $\boldsymbol{R}$; b) que estas tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{g}_{\mathbf{m}ij}$ sean mayores o iguales a la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}_{ij}$, pero con una al menos que sea mayor estrictamente.

Con este teorema -que yo sepa nunca demostrado antes- acotamos las posibilidades de utilizar la razón-patrón y de construir la mercancías-patrón tan cara a Sraffa. Podemos afirmar que con bienes *no-básicos* no se ve la forma de construir una mercancía-patrón y una razón-patrón. Al menos desde este modelo o similares. Sin embargo, no por ello la semilla plantada por el italiano deja ni dejará de fructificar, al igual que la incoherente teoría del valor-trabajo de Marx es sostenible más allá de la teoría de la explotación. Ambos sembraron, pero sus críticos constructivos deben seguir su tarea, por encima de los que quieren destruir sus obras o la de los meros apologistas que quieren perpetuarla con sus defectos y limitaciones. Ambos grupos no interesan al conocimiento que se reputa como científico o que, al menos, lo intenta.

Madrid, octubre de 2010

$$p_j y_j = w\, l_j + (1+r)\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

$$p_j y_j = (1 + R)\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} = 1$$

$$\sum_{1}^{n} l_j = 1$$

Anexo I

Excedente neto físico y tasa de ganancia máxima (p. simple)

P Y = (1 + g) P X + w L

L= 0,188 0,313 0,500 1,00

	productos finales			sumas		medios de producción			sumas
Y=	450	0	0	450	X=	186	54	30	270
	0	21	0	21		12	6	3	21
	0	0	60	60		9	6	15	30

w= 0,7 ***g*** = **48,253%**

Y^{-1}=	0,002	0	0	$A=XY^{-1}$ =	0,413	2,571	0,500	3,48
	0	0,048	0		0,027	0,286	0,050	0,36
	0	0	0,017		0,020	0,286	0,250	0,56
					0,460	3,143	0,800	

0,460 **<** autovalor máximo **<** 3,143

excedente físico relativo

66,7% 0,0% 100%

u=1 / (1+ g=G_m)

u = **0,6745**

Pasinetti, pág. 130

Razón-patrón= **48,25%**

P = w LY^{-1}(I-(1+g)A)$^{-1}$ = **191 1563 409** **PYI**= 143.270,4

Este anexo y los que siguen se han tomado de ejemplos de los libros de Pasinetti (*Lecciones de la teoría de la producción*) y de J.M Vegara (*Economía política y modelos multisectoriales*). En los tres se ha llegado a las razones-patrón mediante el método de prueba y error, haciendo variar la tasa de ganancia ***g*** hasta encontrar un valor para **PYI** tal que pase del más infinito a menos infinito. Por supuesto que aquí se trata de grados de aproximación, y nos hemos detenido en las milésimas del porcentaje. En el anexo I lo hemos hecho cuando la tasa de ganancia valía **48,253**%, en el anexo II cuando era de **19,999**% y en el anexo III cuando era de **18,537**%. En los tres casos un aumento en la tercera cifra decimal pasaría el valor de PYI de más a menos. En los tres casos coinciden la tasa máxima de ganancia así obtenida con las razones-patrón calculadas por los autores de los libros mediante Perron-Froebenius.

Anexo II

Excedente neto físico y tasa de ganancia máxima (p. simple)

P Y = (1 + g) P X + w L

L= 0,188 0,313 0,500 | 1,00

	productos finales			sumas
Y=	180	0	0	180
	0	450	0	450
	0	0	480	480

	medios de producción			sumas
X=	90	50	40	180
	120	125	40	285
	60	150	200	410

w= 0,7   ***g*** = **19,999%**

$A = XY^{-1}$ =	0,500	0,111	0,083	0,69
	0,667	0,278	0,083	1,03
	0,333	0,333	0,417	1,08
	1,500	0,722	0,583	

Y^{-1}=	0,006	0	0
	0	0,002	0
	0	0	0,002

0,583 **<** autovalor máximo **<** 1,500

u=1 / (1+ g=G_m)

u = **0,8333**

excedente físico relativo

0,0%	57,9%	17%

Vegara, pág. 117

Razón-patrón= **20,00%**

$\mathbf{P = w\,LY^{-1}(\,I-(1+g)A)^{-1} =}$ **167,4 60,9 45,7**   **PYI**= 79.434,9

Anexo III

Excedente neto físico y tasa de ganancia máxima (p.simple)

P Y = (1 + g) P X + w L

L= 0,188 0,313 0,500 | 1,00

	productos finales			sumas
Y=	450	0	0	450
	0	21	0	21
	0	0	60	60

	medios de producción			sumas
X=	222	78	90	390
	12	6	3	21
	12	8	20	40

w= 0,7 *g* = **18,537%**

Y^{-1}=	0,002	0	0
	0	0,048	0
	0	0	0,017

$A=XY^{-1}$ =	0,493	3,714	1,500	5,71
	0,027	0,286	0,050	0,36
	0,027	0,381	0,333	0,74
	0,547	4,381	1,883	

0,547 **<** autovalor máximo **<** 4,381

u=1 / (1+ g=G_m)

u = **0,8436**

excedente físico relativo

15,4% 0,0% 50%

Pasinetti, pág. 190

Razón-patrón= **18,54%**

$P = w\, LY^{-1}(I-(1+g)A)^{-1}$ = **218 2021 838** **PYI=** 190.605,5

Bibliografía

Afriat, S.: “Sraffa´s Prices”, Universitá degli Studi di Siena, quaderni 474. www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Ahijado, M.: “Distribución, precios de producción y crecimiento”, 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Bour, Enrique A.: “Marx y la teoría económica moderna”, 2007 http://www.aaep.org.ar/anales/works/works2007/bour.pdf

Caballero, A. y Lluch, E.: “Sraffa en España”, Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2), 1986.

Dobb, M.: “Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith, edit. Siglo XXI editores.

Desai, M.: “Marxian Economic Theory”, 1974 [“Lecciones de teoría económica marxista”, 1977, edit. Siglo XXI].

Dobb, M.: “The Sraffa system and the critique of neoclassical theory of distribution”, 1970.

Estrin, S. y Laidler, D: “Introduction microeconomics”.

Fiorito, Alejandro: “La implosión de la economía neoclásica”. Está en la red: www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Foncerrada, Luis Antonio: “Sraffa y Böhm-Bawerk”. Está en la red: http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/FoncerradaPLA/tesis.pdf

Garegnani, P.: “El capital en la teoría de la distribución”, 1982, ed. Oikos-Tau (“Il capitale nelle teorie delladistribuzone”, 1982)

Gehrke, Ch.y Kurz, D.: “Sraffa on von Bortkiewicz”. Está en la red: http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Harcourt, G.C.: “Teoría del Capital” (*Some Cambridge controversies in the theory of capital, 1975*), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Heahtfield, D. F.: “Productions funtions”.

Korsch, Karl; “Karl Marx”, 1975, traducción de Manuel Sacristán, edit. Ariel.

Kurz, Pasinetti, Salvador y otros: “Piero Sraffa: The Man and the Scholar”, Routledge, 2008.

Lange, O., Taylor, F. M.: “On tthe Economic Theory of Socialism, 1938 [Sobre la teoría económica del socialismo, 1971, edit. Ariel]

Marx, Carlos: “El método en la Economía Política”, 1974, Ediciones Grijalbo, S.A.

Marx, Carlos: “El Capital”, en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meade, J.: “A neo Classical Theory of Economic Growth”, 1961.

Meek, R.: “Mr. Sraffa´s Rehabilitationof Classical Economics”, 1961.

Mendoza, Gabriel: “La transformación de valores en precios de producción”, 1997
http://www.izt.uam.mx/economiatyp/numeros/numeros/10/articulos_PDF/10_2_La_transformacion.pdf

Mora Plaza, A.: “Aspectos de la economía de Sraffa”, revista: Nómadas, n. 23, U. Complutense de Madrid, enlace:
http://www.ucm.es/info/nomadas/23/antoniomora.pdf

Mora Plaza, A.: “Notas sobre la producción simple y conjunta a consecuencia de Sraffa: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/181/18112179020.pdf;

Mora Plaza, A.: “Sobre la transformación de valores a precios”:
http://www.eumed.net/ce/2009b/amp2.htm
http://revistas.ucm.es/cps/15786730/articulos/NOMA1010140379A.PDF

Mora Plaza, A.: “Notas sobre el teorema fundamental marxiano”
http://www.eumed.net/ce/2009b/amp.htm
http://econpapers.repec.org/article/ervcontri/y_3a2009_3ai_3a2009-10_3a22.htm

Morhisima, M.: “La teoría económica de Marx” (*Marx´s Economics, 1973*), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Moseley, F.: “El método lógico y el problema de la transformación”.
http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm

Murga, Gustavo: “Piero Sraffa”.
http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Nuti, D.: “Capitalism, Socialism and Sleady Growth”, 1970.

Okishio, N.: “A mathematical note on marxian theorems”, 1963.

Pasinetti. L.: “Critical of the neoclassical theory of growth and distribution”. Está en la red:
http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Pasinetti, L.: “Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations”, 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.: “Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth”, 1961/2.

Pasinetti, L.: “Switches of technique and the rate of return in Capital Theory”, 1969.

Pasinetti, L.: “Crecimiento económico y distribución de la renta” (“*Growth and Income Distribution*”, 1974), 1978, Alianza Editorial.

Pasinetti, L.: “Lecciones de teoría de la producción” (“Lezioni di teoria della produzioni”, 1975), 1983, FCE.

Peris i Ferrando, J.E: “Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta”, 1987, en internet: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf

Potier, J.P.: “Piero Sraffa”, 1994, edicions Alfons Magnànim.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Robinson, J.: “Ensayos críticos”, 1984, Ediciones Orbis.

Samuelson, Paul: “Understanding the Marxian notion of Exploitation”, 1971.

Sánchez Choliz, Julio: “La razón-patrón de Sraffa y el cambio técnico”, 1989, Investigaciones Económicas, 2ª época, Vol. XIII. ftp://ftp.funep.es/InvEcon/paperArchive/Ene1989/v13i1a7.pdf

Sargent, T.J.: “Teoría macroeconómica” (*Macroeconomic Theory, 1979*), 1988, Antoni Bosch editor.

Schefold, Bertram: *Mr. Sraffa on Joint Production*, 1971

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Steedman, I.: “Marx, Sraffa y el problema de la transformación” (*Marx after Sraffa, 1977*), 1985, F.C.E.

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Solow, R.: “The interest rate and transition between techniques”, 1967.

Sraffa, Piero: “Produción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975, Oikos-Tau.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.: “Economía política y modelos multisectoriales”,1979, edit. Tecnos.

Varios,: “Matemáticas avanzadas aplicadas a la Economía”, UNED, 2001.