

LA ECONOMÍA DE SRAFFA Y EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO (Sraffa's economy and the fixed-point theorem)

Antonio Mora Plaza

Los tratamientos sobre el equilibrio general competitivo de Debreu, Arrow y Hahn, etc., suelen estructurarse de forma axiológica, enumerando las hipótesis formales para llegar a las conclusiones. Nada más alejado del interés de Sraffa. El italiano parte, camina y concluye en el mundo de las proposiciones económicas, aunque se tenga que atener a la disciplina de las matemáticas o, al menos, utilizarlas como mero instrumento, para no errar en las conclusiones. Ambos métodos tienen sus ventajas e inconvenientes, además de que siempre se ha de distinguir entre el método de investigación y el de exposición. Visto el desarrollo de su libro, Sraffa fue sacando a la luz sus conclusiones sin tener un conjunto axiomático de hipótesis que le iluminaran al final del túnel. Por eso tuve que rectificar, por ejemplo, su consideración sobre los bienes básicos y no básicos cuando abordó la producción conjunta y/o se vio contrariado con su propia definición cuando llegó a la producción conjunta, aún cuando ésta la tuviera *in mente* desde el principio. También demuestran estos avances y titubeos con las consideraciones en el apéndice B de su libro Producción de mercancías por medios de mercancías cuando convirtió -en mi opinión con acierto- en un apéndice lo que en un principio debía ser sólo una nota a pie de página. A pesar de ello, hay que agradecer a Sraffa que fuera mostrando sus resultados a medida que los descubría, porque ello ha resultado mucho más pedagógico. Ha sido y es una de las tareas de sus epígonos: matizar sus hipótesis si son incoherentes con sus fines, solucionar sus errores y desarrollar su obra. Lástima que esos desarrollos -aún muy infucientes- no hayan llegado a los manuales universitarios de economía y sólo han quedado para tesis doctorales o artículos con los que aumentar algún currículo. Siguiendo con el contenido de lo que veníamos comentado, no tiene Sraffa un desarrollo axiomático que nos permita cerciorarnos de que su sistema parte, conduce y llega a un equilibrio, aunque no tenga sentido llamarle en principio *competitivo*. Mi opinión es que tampoco es incompatible con él, porque las cantidades de medios, productos e inputs de trabajo están dadas. De hecho sí se puede afirmar que Sraffa trabaja siempre -e incluso cuando reduce el capital a trabajo fechado- con un conjunto de ecuaciones que implican un equilibrio. Eso es notorio por dos cosas: 1)

las variables *no* están fechadas; 2) el vector de precios de productos finales es el mismo que el vector de medios. Sin embargo, Sraffa ni siquiera hizo en su libro consideración o mención alguna al respecto, aún cuando los avances sobre los aspectos formales de los equilibrios competitivos se estaban produciendo al mismo tiempo que el desarrollaba su obra¹. Las razones pueden ser varias, además quizá del desconocimiento que tuviera sobre estos tratamientos axiológicos. Una razón profunda es la absoluta diferencia que tiene la consideración de los precios entre los análisis mencionadas y lo que pretendía Sraffa: para los primeros, los precios son la guía de la asignación de los recursos y baremo de la escasez, mientras que para el italiano los precios son meros *coeficientes* de intercambio. Empleo el término *coeficiente*, consciente de que Sraffa no emplea un término ni parecido (podría ser *ratio*, por ejemplo), porque probablemente su temor a sufrir un rechazo -por si no bastaba ya el sufrido- por parte de sus compañeros de profesión que fuera total. Sraffa los llama *precios de producción*, a pesar de que no tiene una teoría de los costes ni trabaja con funciones de producción explícitas. En realidad el nombre le debió importar poco. El norte de Sraffa, como ya he señalado en otros artículos, era doble: el estudio del excedente y sus límites, y el mayor -y definitivo- ataque a la teoría de la producción neoclásica-marginalista. Sin embargo, al centrarse en estas dos cuestiones, creo que no se dio cuenta de que su modelo se acercaba a los desarrollos del equilibrio general de la época, que -y esta es una opinión muy personal- y compartía con ellos lo que supone un ataque a la teoría del capital y, en general, del mercado competitivo de la economía, por la necesidad de hacer explícitos los teóricos del equilibrio competitivo los supuestos vaporosos y paradójicos en los que se sustentaban la microeconomía de entonces (de Marshall) cuando se pasaba del análisis parcial al general. En concreto, Sraffa no menciona nunca nada referido al teorema de Perron-Frobenius y menos aún, claro, a los teoremas del punto fijo de Kakutani², que son básicos para modelizar los modelos de equilibrio competitivo. En el fondo es un mérito extraordinario del italiano y una muestra de su genialidad y confianza en sí mismo que, sin tener el báculo de las matemáticas que se desarrollaban en su época, pudiera culminar su obra y llegar a conclusiones económicas normalmente correctas y significativas.

¹ Véase la Introducción histórica de la obra de Arrow y Hahn *Análisis General Competitivo*.

² *A generalization of Brouwer's fixed-point theorem* (1941).

Cuando Sraffa plantea la ecuación:

$$(AX.1) \quad PY = (1 + R)PX$$

como hemos visto que surge a su vez de la ecuación de definición de su sistema al hacer cero la tasa de salarios, Sraffa está planteando una relación de equilibrio no demostrada, porque los precios son los mismos en el lado izquierdo de la ecuación (productos finales Y) de los del lado derecho (medios de producción X). Ya hemos comentado que las preocupaciones de Sraffa son otras, pero la visión actual, para poder propiciar el avance de sus modelos, deber ser también otra. Si llamamos como siempre A a la matriz de requerimientos tal que $X=AY$, por lo que $A=XY^{-1}$, la (AX.1) se transforma en:

$$(AX.2) \quad P = (1 + R)PA$$

Hemos visto que R surge de la resolución de un sistema de ecuaciones tales como $YQ=(1+R)XQ$ y $LQI=1$, siendo Q el vector $n \times 1$ de multiplicadores, por lo que $R=f(L,Y,X)$, y *no de los precios P* . Si ahora reemplazamos los precios P de la ecuación (AX.2) en el lado derecho de la misma ecuación de forma reiterada, llegaríamos a una función tal como:

$$(AX.3) \quad P = (1 + R)^n PA^n$$

Esta aplicación transforma precios (el conjunto P =dominio de definición de la aplicación) en $(1+R)^n PA^n$ (conjunto imagen). Parecería que fuéramos bien para llegar al terreno del teorema de Kakutani, pero no es así porque dado que R ha de ser mayor que cero, el conjunto imagen es mayor que el conjunto dominio y todo se va al garete. Eso no ocurrirá si hacemos directamente que (AX.2) sea:

$$(AX.4) \quad P = \frac{1+r}{1+R} PA$$

con tal de que $r < R$. Y tras sucesivas sustituciones de P :

$$(AX.5) \quad P \leq \left(\frac{1+r}{1+R} \right)^n P A^n$$

Se ha añadido la posibilidad del menor porque ello es imprescindible para aplicar Kakutani, por lo que (AX.5) es una construcción (una aplicación) inspirada en (AX.3), pero no deducida estrictamente de (AX.3). Falta aún una cosa para acotar el conjunto de precios P , objeto de la aplicación: dividir cada precio por la suma de todos ellos:

$$(AX.6) \quad P_{Fi} = \frac{P_i}{\sum_{i=1}^n P_i}$$

o en términos matriciales:

$$(AX.6bis) \quad P_F = \frac{1}{PI} \times P$$

por lo que (AX.5) quedaría:

$$(AX.7) \quad P_S \leq \left(\frac{1+r}{1+R} \right)^k P_F A^k$$

Con (AX.7) tenemos una posible aplicación que cumple el teorema de Kakutani si: $r \leq R$, si $A^{k+1} \leq A^k$ para $k=1$ a n y $P_{Fi} \geq 0$ para $i=1$ a n . De (AX.7) se puede decir que es una correspondencia continua (semicontinua por arriba) que proyecta puntos de un conjunto cerrado, acotado y convexo (los precios P_F) en un subconjunto del anterior (los precios P_S), también convexo, tal que tiene un punto fijo³, es decir, que ocurre que:

$$(AX.8) \quad P_F \leq \left(\frac{1+r}{1+R} \right)^k P_F A^k$$

³ Para la definición de teorema del punto fijo véase la pág. 136 del libro anterior mencionado de Arrow y Hahn.

Dicho de otra manera, que existe un vector P_S en la imagen del conjunto correspondiente mediante la transformación (AX.7) que hace que $S=R$, es decir, que $P_S = P_F$. Hay que demostrar rigurosamente que (AX.7) es una aplicación continua, cerrada, acotada y convexa. Sólo unos apuntes al respecto. La aplicación es continua⁴ si trabajamos con número reales para los precios y la función es continua; es acotada por (AX.6), es decir, porque hemos tomado como numerario la suma de los precios originales, con lo cual la suma de los precios transformados en (AX.6) vale 1; es cerrada porque el signo de (AX.7) es *menor o igual*, con lo cual todos los puntos de acumulación de P_F pertenecen al dominio de definición; por último es convexa porque una combinación lineal del lado derecho de la aplicación (AX.7) pertenece a su vez al dominio de definición si la combinación lineal se hace con dos coeficientes tales como m y $1-m$, para m tal que $0 \leq m \leq 1$.

Hay que pensar que no hubiéramos llegado a *Kakutani* si no hubiéramos partido de Perron-Frobenius para obtener un R independiente de los precios, lo cual implica que A ha de ser cuadrada, no negativa (al menos) e irreducible, con el añadido posterior que ha de ser productiva, es decir, que se cumpla que $A^{k+1} < A^k$ para obtener un conjunto de precios (autovector de A) no negativo (versión débil del teorema).

⁴ La condición necesaria -pero no suficiente- para que una función sea continua es que su dominio de definición y su imagen pertenezcan al conjunto de los números reales. Este hecho no se suele resaltar en los manuales de matemáticas, que suelen recaer la responsabilidad de la continuidad de las funciones en la forma de éstas.

Bibliografía

Afriat, S.: "Sraffa's Prices", Università degli Studi di Siena, quaderni 474.

www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Ahijado, M.: "Distribución, precios de producción y crecimiento", 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Bour, Enrique A.: "Marx y la teoría económica moderna", 2007

<http://www.aaep.org.ar/anales/works/works2007/bour.pdf>

Caballero, A. y Lluch, E.: "Sraffa en España", Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2), 1986.

Dobb, M.: "Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith, edit. Siglo XXI editores.

Desai, M.: "Marxian Economic Theory", 1974 ["Lecciones de teoría económica marxista", 1977, edit. Siglo XXI].

Dobb, M.: "The Sraffa system and the critique of neoclassical theory of distribution", 1970.

Estrin, S. y Laidler, D.: "Introduction microeconomics".

Fiorito, Alejandro: "La implosión de la economía neoclásica". Está en la red:

www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Foncerrada, Luis Antonio: "Sraffa y Böhm-Bawerk". Está en la red:

<http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/FoncerradaPLA/tesis.pdf>

Garegnani, P.: "El capital en la teoría de la distribución", 1982, ed. Oikos-Tau ("Il capitale nelle teorie delladistribuzione", 1982)

Gehrke, Ch. y Kurz, D.: "Sraffa on von Bortkiewicz". Está en la red:

http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Harcourt, G.C.: "Teoría del Capital" (*Some Cambridge controversies in the theory of capital*, 1975), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Heathfield, D. F.: "Productions functions".

Korsch, Karl; "Karl Marx", 1975, traducción de Manuel Sacristán, edit. Ariel.

Kurz, Pasinetti, Salvador y otros: "Piero Sraffa: The Man and the Scholar", Routledge, 2008.

Kurz D. Heinz; "Critical Essays on Piero Sraffa's Legacy in Economics", 2000, Cambridge University Press.

Lange, O., Taylor, F. M.: "On the Economic Theory of Socialism, 1938 [Sobre la teoría económica del socialismo, 1971, edit. Ariel]

Marx, Carlos: "El método en la Economía Política", 1974, Ediciones Grijalbo, S.A.

Marx, Carlos: "El Capital", en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meade, J.: "A neo Classical Theory of Economic Growth", 1961.

Meek, R.: "Mr. Sraffa's Rehabilitation of Classical Economics", 1961.

Mendoza, Gabriel: "La transformación de valores en precios de producción", 1997
http://www.izt.uam.mx/economiaytip/numeros/numeros/10/articulos_PDF/10_2_La_transformacion.pdf

Mora Plaza, A.: "Aspectos de la economía de Sraffa", revista: Nómadas, n. 23, U. Complutense de Madrid, enlace: <http://www.ucm.es/info/nomadas/23/antoniomora.pdf>

Mora Plaza, A.: "Notas sobre la producción simple y conjunta a consecuencia de Sraffa: <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/181/18112179020.pdf>;

Mora Plaza, A.: "Sobre la transformación de valores a precios":
<http://www.eumed.net/ce/2009b/amp2.htm>
<http://revistas.ucm.es/cps/15786730/articulos/NOMA1010140379A.PDF>

Mora Plaza, A.: "Notas sobre el teorema fundamental marxiano"
<http://www.eumed.net/ce/2009b/amp.htm>
http://econpapers.repec.org/article/ervcontri/y_3a2009_3ai_3a2009-10_3a22.htm

Morhisima, M.: "La teoría económica de Marx" (*Marx's Economics*, 1973), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Moseley, F.: "El método lógico y el problema de la transformación".
<http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm>

Murga, Gustavo: "Piero Sraffa".
http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Nuti, D.: "Capitalism, Socialism and Steady Growth", 1970.

Okishio, N.: "A mathematical note on marxian theorems", 1963.

Pasinetti, L.: "Critical of the neoclassical theory of growth and distribution". Está en la red:
http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Pasinetti, L.: "Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations", 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.: "Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth", 1961/2.

Pasinetti, L.: "Switches of technique and the rate of return in Capital Theory", 1969.

Pasinetti, L.: "Crecimiento económico y distribución de la renta" (*Growth and Income Distribution*, 1974), 1978, Alianza Editorial.

- Pasinetti, L.: "Lecciones de teoría de la producción" ("Lezioni di teoria della produzioni", 1975), 1983, FCE.
- Peris i Ferrando, J.E: "Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta", 1987, en internet:
<http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf>
- Potier, J.P.: "Piero Sraffa", 1994, edicions Alfons Magnànim.
- Ricardo, D.: "Principios de Economía Política y Tributación" (*On the Principles of Political Economy and Taxation*), 1973, F.C.E.
- Robinson, J.: "Ensayos críticos", 1984, Ediciones Orbis.
- Samuelson, Paul: "Understanding the Marxian notion of Exploitation", 1971.
- Sánchez Choliz, Julio: "La razón-patrón de Sraffa y el cambio técnico", 1989, Investigaciones Económicas, 2ª época, Vol. XIII.
<ftp://ftp.funep.es/InvEcon/paperArchive/Ene1989/v13i1a7.pdf>
- Sargent, T.J.: "Teoría macroeconómica" (*Macroeconomic Theory*, 1979), 1988, Antoni Bosch editor.
- Schefold, Bertram: *Mr. Sraffa on Joint Production*, 1971
- Schumpeter, J. A.: "Historia del Análisis Económico" (*History of Economic Analysis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.
- Segura, J.: "Análisis microeconómico", pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.
- Steedman, I.: "Marx, Sraffa y el problema de la transformación" (*Marx after Sraffa*, 1977), 1985, F.C.E.
- Segura, J.: "Análisis microeconómico", 2004, Alianza editorial Tecnos.
- Solow, R.: "The interest rate and transition between techniques", 1967.
- Sraffa, Piero: "Producción de mercancías por medio de mercancías" (*Production of commodities by means commodities*, 1960), 1975, Oikos-Tau.
- Ricardo, D.: "Principios de Economía Política y Tributación" (*On the Principles of Political Economy and Taxation*), 1973, F.C.E.
- Vegara, J. M.: "Economía política y modelos multisectoriales", 1979, edit. Tecnos.
- Varios,: "Matemáticas avanzadas aplicadas a la Economía", UNED, 2001.