Aplicaciones de la derivada: un enfoque para estudiantes de Economía.

Lic. Yudiesky Cancio Díaz[1]
Facultad de Ciencias Económicas, UCLV, CUBA.
E-mail: yudieskycd@uclv.edu.cu

"La era de la caballería ha terminado; ha llegado la de los sofistas, los economistas y los matemáticos".

Edmund Burke

Resumen:
Uno de los grupos temáticos de la Matemática Superior que más se aplica a la Economía es, sin duda, la derivada. Es utilizada para determinar el producto marginal, elasticidad e importantes funciones económicas, y para desarrollar los procesos de optimización. Tanto el óptimo microeconómico del consumidor como del productor, representan un problema de optimización modelado mediante un proceso en derivadas parciales. Este documento ilustra algunas de las aplicaciones de la derivada de las funciones de una variable independiente, con énfasis en las aplicaciones económicas.

Palabras claves: derivada, optimización, curvas.

Summary:
One of the thematic clusters of Mathematics for higher education more applied to Economics is undoubtly the derivative. It is used to determine the marginal product, elasticities of important economic functions, and to develop optimization processes. Both, the optimum micro-consumer and producer, represent a process modeled by partial derivatives. This paper illustrates some applications of the derivative of functions in one independent variable, with an emphasis on economic applications.

Keywords: derivative, optimization, curves.

Introducción:

La Matemática como ciencia ha proporcionado al hombre las más poderosas herramientas para enfrentar los más disímiles problemas de la cotidianidad. La mayoría de los campos del saber humano se valen de técnicas matemáticas para indagar en la explicación de relaciones causales de los procesos y fenómenos que ocurren en cada especialidad. Hoy en día resulta frecuente encontrarnos artículos de las ciencias médicas, químico-farmacéuticas, ciencias sociales (o de cualquier área general del saber), en que se haga referencia a algún concepto o ente matemático. Especialmente en las ciencias económicas son utilizados conceptos como la derivada, la integral, las ecuaciones diferenciales, las series temporales, entre otros. Los métodos más modernos de medición de la eficiencia y la optimización económica tienen como sustrato esencial algún modelo matemático.

---

[1] Profesor instructor del departamento de Economía, Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas. Economista-matemático, profesor de Matemática Superior I, II y III para economistas.

Probablemente uno de los conceptos más útiles y aplicables en la Economía sea *la derivada* de una función. Cualquier curso de matemática superior contiene, ineludiblemente, un tema dedicado especialmente a las *aplicaciones de la derivada*. Generalmente se acostumbra presentar el estudio, de acuerdo al área específica del conocimiento desde donde se aborde la temática, en dos partes. De una, la utilización de la derivada en la obtención de soluciones estrictamente matemáticas; a saber: el cálculo de límites indeterminados y el trazado general de curvas. De otra, las aplicaciones específicas en la especialidad de que se trate. El objetivo de este trabajo es **ilustrar las aplicaciones generales de la derivada**, con la intención de que este escrito sea utilizado por estudiantes de Economía. Se estructura en tres apartados: el primero, dedicado a la resolución de límites indeterminados; el segundo, al trazado de curvas; y por último, la resolución de problemas económicos de optimización.

Toda aplicación formalizada de la ciencia tiene su nacimiento en un problema de la práctica objetiva. Probablemente uno de los más bonitos y útiles ejemplos de utilización de la optimización se puede encontrar en el siguiente suceso de la segunda mitad del siglo XX[2]:

En febrero de 1953 se produjo en Holanda la inundación más importante de su historia. Los diques que protegían el país fueron arrasados y murieron más de 1800 personas. Los daños se cifraron en el 7 % del Producto Interno Bruto de aquel año. Se creó una comisión de investigación sobre los hechos y sobre cómo prevenir desastres semejantes en el futuro. La reconstrucción de los diques de tal forma que la seguridad fuera total, requería desembolsos astronómicos, y podía no ser factible. El problema real era, entonces, lograr una especie de equilibrio, entre costos y seguridad: diques más altos eran más costosos, pero reducían las posibilidades de futuras inundaciones. Por tanto, la comisión se enfrentó al problema de seleccionar la *altura óptima* de los diques. Estos tipos de equilibrios son centrales en economía. Conducen a problemas de optimización de un tipo que el análisis matemático maneja de forma natural. En este capítulo ilustraremos cómo resolver este tipo de problemas económicos.

I. APLICACIÓN DE LA DERIVADA AL CÁLCULO DE LÍMITES

Los límites de formas indeterminadas que no pueden resolverse mediante la factorización, generalmente se resuelven por la conocida en la matemática como *Regla de L´Hôpital*, que contiene en su estructura el concepto de derivada.

Teorema de L´Hôpital

Supongamos que las funciones f y g están definidas y son derivables en cierto entorno de a. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, y $g(x) \neq 0$ en cierto entorno de a, entonces, si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito), existe también $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, y se cumple que: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

La Regla de L´Hôpital también es válida en el caso que las funciones f y g no están definidas en a, pero $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

[2] Tomado de los excelentes profesores Hammond y Sydaeter: *Matemáticas para el Análisis Económico*. Editora Prentice–Hall, España, 1996.

Si $f'(a) = g'(a) = 0$, y $f'(x)$ y $g'(x)$ satisfacen las condiciones puestas sobre las funciones f y g, podemos aplicar la Regla de L´Hôpital a $\frac{f'(c)}{g'(c)}$, y obtenemos: $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ = $\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$; aplicar sucesivamente.

Ejemplo resuelto 1:
Calcular:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{x-sen\,x}{x^3}$ c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$

En este caso estamos ante la indeterminación $\frac{0}{0}$, pues $\lim_{x\to 1}(x^2-1+\ln x) = 1^2-1+0 = 0$, y $\lim_{x\to 1}(e^x-e) = e^1-e = 0$

Resolvemos aplicando la Regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x-e)'} = \lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}$$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x-sen\,x}{x^3}$ = $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-(-sen\,x)}{6x} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x} = \frac{1}{6}$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$ = $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-6x}{3x^2-8x} = \frac{3-6}{3-8} = \frac{3}{5}$

Ejemplo resuelto 2:

Hallar: $\lim_{x\to\infty}\frac{sen\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{sen\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{4}{x^2}.\cos\frac{4}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}(4\cos\frac{4}{x}) = 4\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{4}{x}) = 4.1 = 4$$

Cálculo de límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$

El teorema anterior es válido si se sustituye la exigencia de $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ por $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, y se llama, por extensión, Regla de L´Hôpital.

Ejemplo resuelto 3:
Hallar:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

Solución:

a) En este caso estamos ante la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$, pues, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = +\infty$, y $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Resolvemos aplicando la Regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = 0$$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

Existen otras formas indeterminadas, $0.\infty$ e $\infty - \infty$, que pueden transformarse en las formas $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$, y aplicar la Regla de L´Hôpital.

Si queremos calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)$ y , $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces,

$f(x).g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, y por tanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, y ahora es de la forma $\dfrac{0}{0}$.

Además, $f(x).g(x) = \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, y es un límite de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$.

En dependencia del límite que se esté calculando, se hará una u otra de las transformaciones anteriores, siguiendo el criterio que la aplicación de la Regla de L´ Hôpital simplifique el proceso de determinación del límite.

Ejemplo resuelto 4:
Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x^2$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

Solución:

Observemos que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, y $\lim\limits_{x\to 0} \ln x^2 = -\infty$ Luego, estamos ante una indeterminación del tipo $0.\infty$. Transformando,

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x^2 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x^2}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-\frac{2x}{x^4}} = \lim_{x\to 0} - x^2 = 0$$

Observe que $\lim_{x\to 0} x^2 \ln x^2 = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\dfrac{1}{\ln x^2}}$, pero esta transformación es menos recomendable en este caso en particular, pues la derivada de $\dfrac{1}{\ln x^2}$ es mucho más compleja que, simplemente, la derivada de $\ln x^2$.

b) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

No existe una forma única de proceder para resolver indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$. En este caso, se debe efectuar la resta:

$\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x - x + 1)}{(x-1)\ln x}\right)$ Aquí podemos observar que: $\lim_{x\to 1}(\ln x - x + 1) = 0$, y $\lim_{x\to 1}(x-1)\ln x = 0$ Luego, la indeterminación $\infty - \infty$ se ha transformado en una del tipo $\dfrac{0}{0}$. Basta entonces resolver $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{1.\ln x + (x-1).\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{x-(x-1)}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{1}{2}.$$

II. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE FUNCIONES

Examinar el comportamiento de una función es una parte básica de las Matemáticas y tiene aplicaciones en muchas áreas de estudio. Cuando esbozamos una curva colocando simplemente puntos, no puede dar información suficiente acerca de su forma.

Ejemplo: La función $y = (x+1)^3(x-1)$ pasa por los puntos (-1; 0), (0; -1) y (1; 0). Observemos que los siguientes gráficos lo cumplen, pero solo el representado en la figura 1, es $f(x)$.

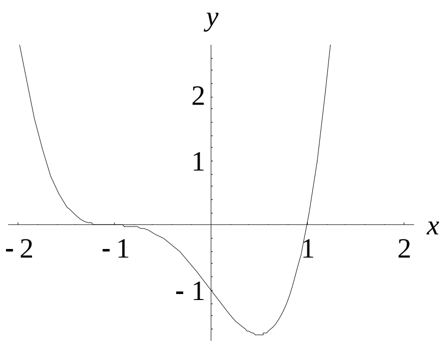

Figura 1

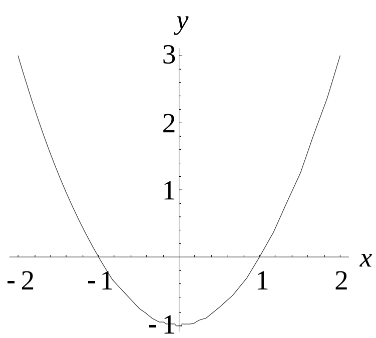

Figura 2

Por esto, se ha desarrollado todo un procedimiento basado en conceptos del análisis matemático, para acercarse a la forma de una función.
Una función puede tener más de un punto de máximo y/o de mínimo. (Véase la figura 3).

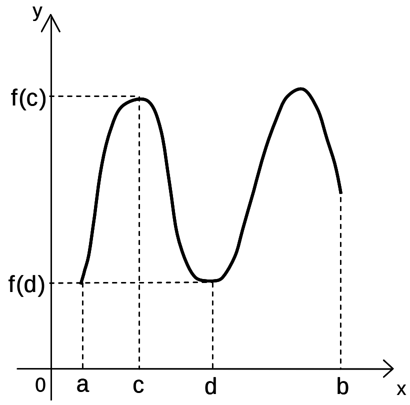

Figura 3

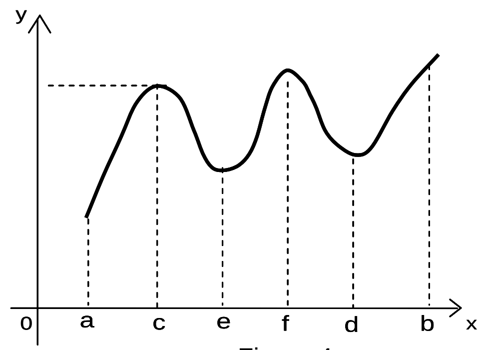

Figura 4

Los valores extremos pueden ser interiores o extremos del intervalo.
En la figura 4, c y d no son máximo y mínimo, respectivamente, en [a, b], pero sí en una vecindad.

Definición de Máximo Relativo o local (Mínimo relativo o local)

Un punto x_0 es un punto de *máximo local (mínimo local)* de la función f, si existe δ >0 tal que:
$f(x) \leq f(x_0)\left(f(x) \geq f(x_0)\right)$ para todo x tal que $|x - x_0| < \delta$.

Recuerde que: $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) = |x - x_0| < \delta$

El valor de $f(x_0)$ recibe el nombre de *valor máximo relativo* de la función o *(valor mínimo relativo).*
Los valores máximos y mínimos se llaman *extremos* de la función.

Condición necesaria para la existencia de extremos

Teorema de Fermat

Sea f una función y c un punto de extremo local de f. Entonces, si f es derivable en c, $f'(c) = 0$.
Luego, si f es derivable en c, una *condición necesaria* para que c sea extremo local, es $f'(c) = 0$.
Pero puede suceder:

- que no exista la primera derivada de una función en algún punto, y este no constituya un punto de extremo. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
- que no exista la primera derivada de una función en algún punto, y este sea un punto de extremo. Por ejemplo, $f(x) = |x|$.
- que una función no sea derivable en un punto, y este constituya un punto de extremo.

Puntos críticos o estacionarios: los valores c tales que $f'(c) = 0$.
Puntos singulares: puntos en los que la derivada no existe, pero sí la función.

Condiciones suficientes para la existencia de extremos
Criterio de la primera derivada: se basa en el signo de la primera derivada.
Analizamos el signo de la primera derivada por la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en una vecindad de x_0. (Véanse las figuras 5 y 6).

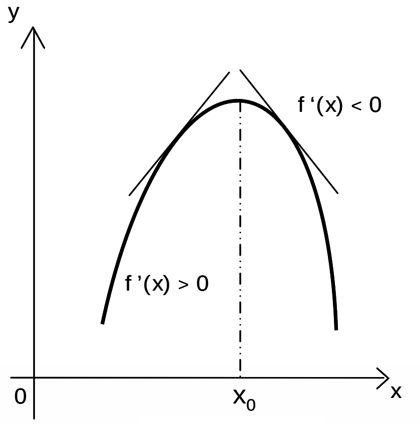

Figura 5

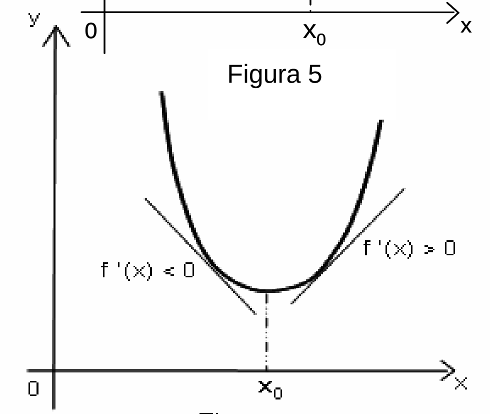

Figura 6

Teorema (Criterio de la Primera derivada)
Sea f continua en $V_\delta(x_0) = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ = [a, b] y derivable en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ = (a, b), y supongamos que $x_0 \in$ (a, b) es un punto crítico o estacionario. Entonces:
1. Si $f'(x) \geq 0$ para $(x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) \leq 0$ para $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces x_0 es un punto de *máximo local* de f.
2. Si $f'(x) \leq 0$ para $(x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) \geq 0$ para $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces x_0 es un punto de *mínimo local* de f.
3. Si $f'(x)$ no cambia de signo en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces x_0 no es un punto de extremo local de la función.

Ejemplo resuelto 5:
Determinar los extremos de: $f(x) = x^3 - 3x$.
Solución:
Hacemos $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad 3(x^2 - 1) = 0 \ \Rightarrow$ x = 1 ó x = -1

En la cercanía x = 1, si x < 1, $f'(x)$ < 0, y si x > 1, $f'(x)$ > 0. Luego, x = 1, punto de mínimo local.

Si un punto de abscisa es de mínimo, tiene asociado un valor ordenado, o valor de f correspondiente, al que llamamos *valor mínimo*. Si es de máximo, le llamamos *valor máximo.*

En este caso en particular, el valor mínimo se obtiene encontrando el valor de $f(1)$.

$f(1)$ = $1^3 - 3.1$= 1 – 3 = -2, valor mínimo.

En la cercanía x = -1, si x < -1, $f'(x)$ > 0, y si x > -1, $f'(x)$ < 0, luego, x = 1, punto de máximo local.

f (-1) = $(-1)^3$ – 3(-1) = -1 + 3 = 2, valor máximo.

Criterios para funciones crecientes o decrecientes

Sea f derivable en el intervalo (a, b). Si $f'(x)$ >0 para toda x en (a, b), entonces f es creciente en (a, b). Si $f'(x)$ < 0, entonces f es decreciente en el intervalo.

Ejemplo resuelto 6:

Analice la monotonía de una función que tiene como primera derivada: $f'(x)$ = $3x^2 - 3$.

Solución:

$f'(x)$ = $3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 > 0$

$3(x^2 - 1) = 0$

(x -1)(x +1) = 0

x = 1 ó x = -1

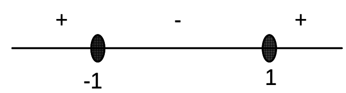

Figura 7

Luego, f es creciente en ($-\infty$; -1) y (1; $+\infty$), y decreciente en (-1; 1). Representemos en un rayo numérico los valores críticos. (Véase figura 7). Verifique los signos de la primera derivada.

Ejemplo resuelto 7:

Determine los extremos relativos de las siguientes funciones y analizar la monotonía en todo su dominio.

a) $f(x)$ = $x^{\frac{2}{3}}$ b) $f(x)$ = x². e^x

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{2}{3.\sqrt[3]{x}}$

Hallar los extremos relativos de la función, implica encontrar los cambios de signo de $f'(x)$ en el dominio de f. Este proceso es similar al de resolución de inecuaciones fraccionarias. Encontramos los ceros del numerador y del denominador de la primera derivada de f :

2 $\neq$ 0 Luego, el numerador nunca toma valor cero.

$3.\sqrt[3]{x}$ = 0 $\Rightarrow$ x = 0 Observe que $f'(0)$ no está definida, pero $f(0)$ sí lo está. Luego, x = 0 es un valor crítico, y no hay ningún otro. Podemos determinar los cambios de signo de $f'(x)$, colocando los signos de esta derivada alrededor de los puntos críticos. (Figura 8).

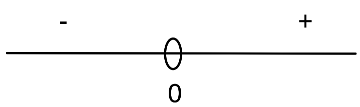

Figura 8

Recuerde que $f(x)$ es creciente donde $f'(x)$ es positiva, y decreciente, donde $f'(x)$ es negativa.
Así, observe que:
Si x < 0, $f'(x)$ < 0, luego, en ese intervalo f es decreciente.
Si x > 0, $f'(x)$ > 0, luego, en ese intervalo f es creciente.
Como hay un cambio de signo de la primera derivada, alrededor del punto x = 0, de negativo a positivo, este es un punto de mínimo relativo. Además, porque f está definida en x = 0.

f (0) = $0^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{0^2}$ = 0. Luego, el punto (par ordenado) donde existe un mínimo, es (0; 0).

b) $f(x) = x^2e^x$

$f'(x) = xe^x(x+2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow xe^x(x+2) = 0 \Rightarrow$ x = 0 ó x = -2

Cuando la función no es racional, como es el caso de $y = x^2e^x$, se usará una tabla para determinar los signos de la función en los diferentes intervalos de su dominio. La tabla, en este caso, consiste en determinar los signos de $y = x^2e^x$, en correspondencia con los signos de x, e^x y $x+2$ en los intervalos $(-\infty,-2)$, $(-2,0)$ y $(0,+\infty)$. De acuerdo con el ejemplo que desarrollamos, tenemos:

	$(-\infty,-2)$	(-2,0)	$(0,+\infty)$
x	-	-	+
e^x	+	+	+
$x+2$	-	+	+
	+	-	+

Podemos notar que f es creciente en $(-\infty; -2)$ y $(0; +\infty)$, y decreciente en: (-2; 0).
Alrededor de x = -2 hay un cambio de signo de la primera derivada, de positivo a negativo, por lo que este es un punto de máximo relativo.
Alrededor de x = 0 hay un cambio de signo de la primera derivada, de negativo a positivo, por lo que este es un punto de mínimo relativo.
La primera derivada proporciona mucha información útil para el análisis de funciones, sin embargo, para conocer la verdadera forma de una curva necesitamos más información.
Ejemplo: $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow$ x = 0 es valor crítico. Si x < 0, $f'(x)$ < 0, y si x > 0, $f'(x)$ > 0.
Notemos que las curvas representadas en las figuras 9 y 10 satisfacen las condiciones anteriores, pero, ¿qué gráfica describe verdaderamente la función?

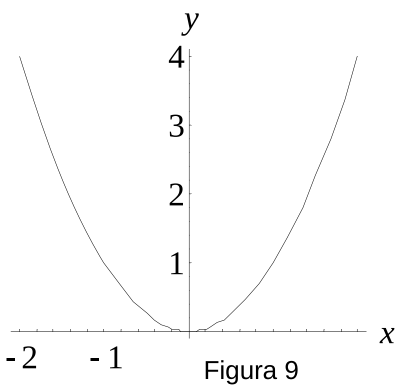

Figura 9

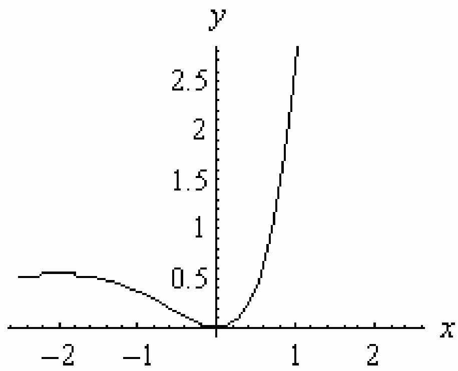

Figura 10

Esta pregunta se contesta fácilmente usando la segunda derivada y la noción de concavidad, que vienen a completar el análisis del comportamiento de una función.

Concavidad de una función

En las figuras 11 y 12, observe que cada curva $y = f(x)$ se "flexiona" (o abre) hacia arriba.

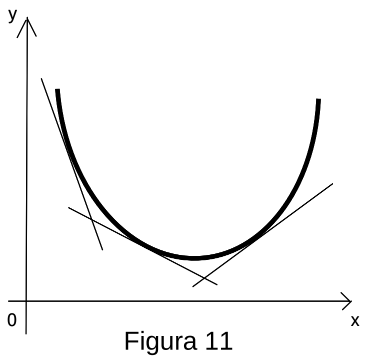

Figura 11

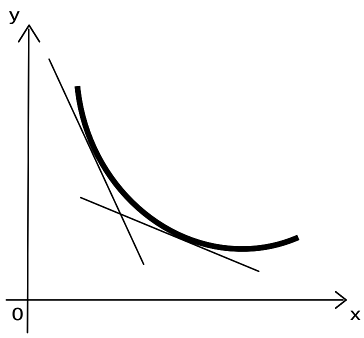

Figura 12

Si se trazan tangentes a las curvas, las curvas quedarán “por arriba” de estas. Además, las pendientes de las líneas tangentes crecen en valor al crecer x. Luego, f' es una función creciente. Se dice entonces que la función es *cóncava hacia arriba.*
Si la curvas se encuentran “por debajo” de las tangentes, se flexionan hacia abajo. (Véanse los gráficos de las figuras 13 y 14).

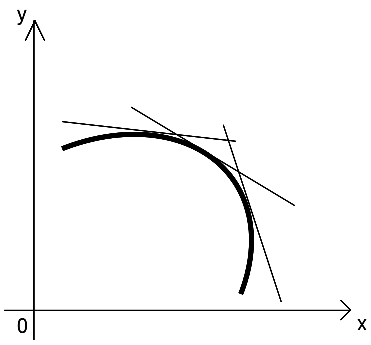

Figura 13

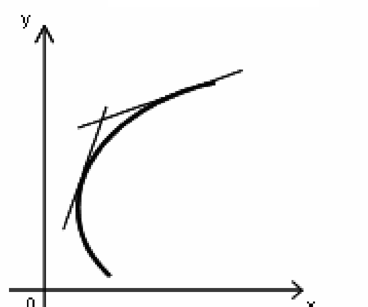

Figura 14

Cuando x crece, las pendientes decrecen, luego, f' es una función decreciente. Decimos que f es *cóncava hacia abajo.*

Definición

Sea f derivable sobre (a, b). Se dice que f es cóncava hacia arriba (cóncava hacia abajo) sobre (a, b), si f' es creciente (decreciente) sobre (a, b).

Criterio de concavidad

Sea f' derivable en (a, b). Si $f''(x) > 0$ para toda $x \in$ (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b).

Si $f''(x) < 0$ para toda $x \in$ (a, b), entonces f es cóncava abajo en (a, b).

La noción de concavidad nos permite reconocer la curva que verdaderamente se corresponde con la función dada ($y = x^2$). (Recordar las figuras 9 y 10). Si determinamos la concavidad de la función $y = x^2$, nos percatamos de que la curva que se corresponde con esta función es la representada en la figura 9, pues cumple que: $f''(x) > 0$ para todo $x \in Dom\, f$, luego es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

Ejemplo resuelto 8:

Analizar la concavidad de la función $f(x) = x^3$.

Solución:

a) $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6x$

$f''(x) < 0$ para $x < 0$ y $f''(x) > 0$ para $x > 0$. Luego, si $x < 0$, f es cóncava hacia abajo; si $x > 0$, f es cóncava hacia arriba. Compruebe este resultado en la gráfica de la figura 15.

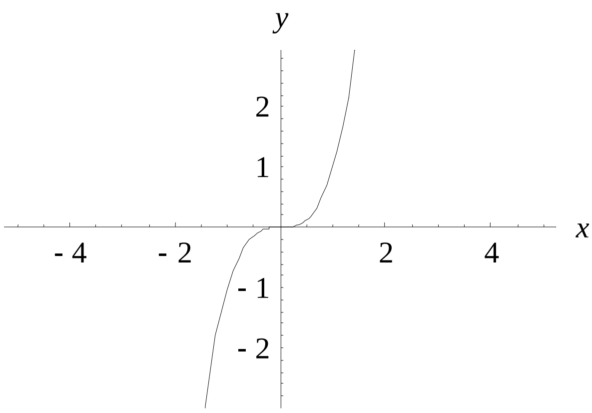

Figura 15

Punto de inflexión

Definición

Una función tiene un punto de inflexión en $x = x_0$ si y solo si, f es continua en x_0 y f cambia de concavidad en x_0.

Entonces, x_0 es un posible punto de inflexión si:

1. $f''(x_0) = 0$; o no existe $f''(x_0)$, pero sí $f(x_0)$.
2. f debe ser continua en ese punto.

Ejemplo resuelto 9:

Analizar la concavidad y encontrar los puntos de inflexión de $f(x) = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

Solución:

$f'(x) = 24x^3 - 24x^2 = 24(x^3 - x^2) \Rightarrow f''(x) = 24(3x^2 - 2x)$ = 24x (3x -2) Luego, $f''(x) = 0$ en x = 0, y en x = $\frac{2}{3}$, que son posibles puntos de inflexión.

Se procede de forma análoga a la solución de una inecuación, como lo hemos visto anteriormente. Ubiquemos los signos en un rayo numérico para observar los cambios de signo de la segunda derivada. (Figura 16).

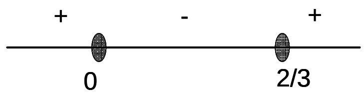

Figura 16

En (-∞; 0) f es cóncava hacia arriba, al igual que en ($\frac{2}{3}$; +∞), pues en estos intervalos f'' es positiva. En (0; $\frac{2}{3}$) f es cóncava hacia abajo, pues f'' es negativa.

Luego, x = 0 y x = $\frac{2}{3}$ son puntos de inflexión, pues hay cambio de signo de la segunda derivada alrededor de estos puntos. Recuerda que son puntos de inflexión, si f es continua en esos puntos y existe cambio de signo de la segunda derivada alrededor de estos ellos. Verifique este resultado en la figura 17.

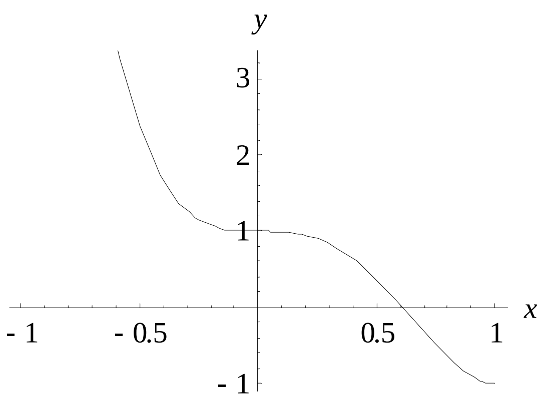

Figura 17

Criterio de la segunda derivada para la existencia de puntos extremos

Si $f'(x_0) = 0$, y $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene máximo relativo en x_0.

Si $f'(x_0) = 0$, y $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene mínimo relativo en x_0.

Ejemplo resuelto 10:

Verifique la existencia de extremos de la función $f(x) = 2x^2 - 4x$, considerando los criterios de la primera y segunda derivadas.

Solución:

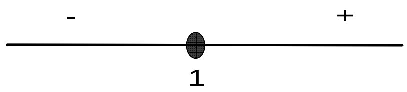

Figura 18

$f(x) = 2x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 4x - 4$

$f'(x) < 0$ para $x < 1$ y $f'(x) > 0$ para $x > 1$.

Luego, x = 1 es punto de mínimo. (Véase figura 18).
Comprobemos que x = 1 es punto de mínimo, si se verifica que $f''(1) > 0$.
$f''(x) = 4 > 0$ para todo x del dominio de f, por lo que se verifica la existencia de un mínimo en x = 1.

Las asíntotas en el comportamiento de una función

Para completar el análisis del comportamiento de una función, resulta muy necesaria la comprensión de los conceptos de asíntotas verticales y no verticales. Estudiemos la existencia de asíntotas en el gráfico de una función.
En el análisis del comportamiento de una función son importantes los casos en que la gráfica de la función se aproxima indefinidamente a una recta, cuando la variable independiente se acerca a un punto o cuando crece o decrece indefinidamente.

Definición de asíntota

Dada una función f, se dice que la recta L es una asíntota de $y = f(x)$ si cuando un punto P(x, y) se desplaza continuamente por $y = f(x)$, de tal forma que x ó y tienda a $+\infty$ ó $-\infty$, la distancia entre P(x, y) y la recta L tiende a cero.
A continuación se muestran gráficas de funciones que tienen asíntotas. (Están representadas en las figuras 19-22).

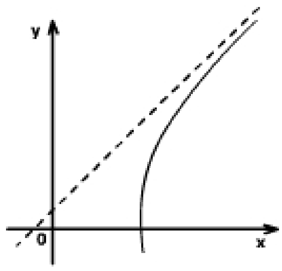

Figura 19

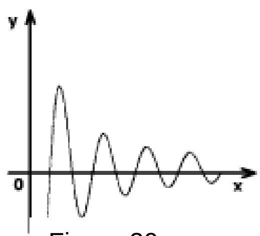

Figura 20

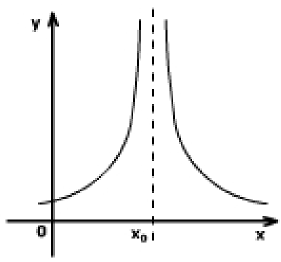

Figura 21

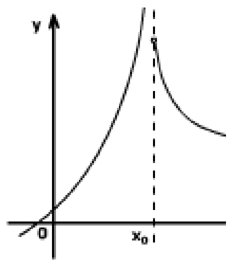

Figura 22

Las asíntotas las clasificamos en verticales (o sea perpendiculares al eje x) y oblicuas, o sea, no verticales.

Asíntotas verticales

Se muestra a continuación los gráficos de funciones que presentan asíntotas verticales, en las figuras 23 – 25.

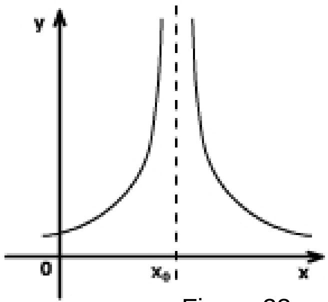

Figura 23

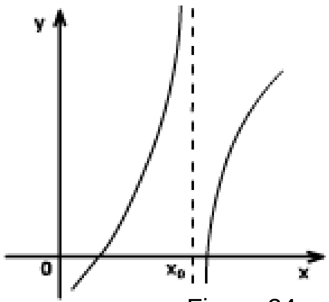

Figura 24

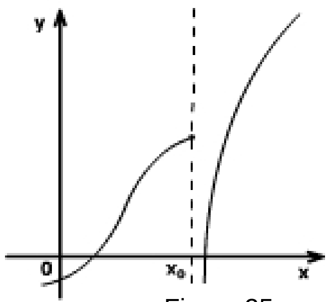

Figura 25

Como se observa, la distancia entre un punto P(x, y) de $y = f(x)$ y la recta x = x_0, se hace cada vez más pequeña cuando x es próximo a x_0, si y solo si uno de los límites laterales en x_0 de f es $+\infty$ ó $-\infty$.

Definición de asíntota vertical

La recta x = x_0 es una *asíntota vertical* de la curva de una función continua $y = f(x)$ si al menos uno de los límites laterales en x_0 de f es $+\infty$ ó $-\infty$.

Para determinar si la recta x = x_0 es asíntota vertical, se debe encontrar los puntos en los cuales la función $y = f(x)$ es discontinua y analizar los límites laterales en dichos puntos.

Ejemplos:

1. $y = \frac{1}{x}$; es discontinua en 0, se cumple que: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ Luego, la recta x = 0 es una asíntota vertical de la función $y = \frac{1}{x}$, y la gráfica de la función alrededor de la recta x = 0 toma la forma que se muestra en la figura 26.

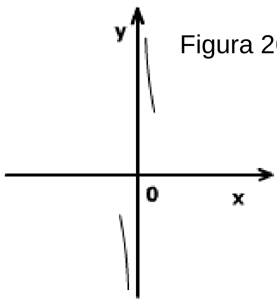

Figura 26

2. $y = \dfrac{1}{x-2}$ es discontinua en 2; se cumple que:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \text{ y } \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Luego la recta x = 2 es una asíntota vertical de la función $y = \dfrac{1}{x-2}$, y la gráfica de la función tomará alrededor de la recta x = 2, la forma de la figura 27

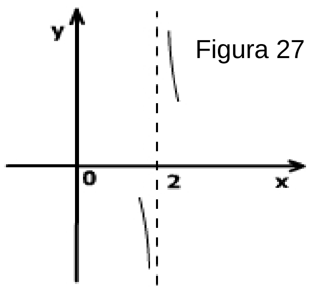

Figura 27

3. $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x-3)^2}$ no es continua en –1 y 3; se cumple que :
   - Para x = –1,

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$$

   - Para x = 3,

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$

Luego las rectas x = -1 y x = 3 son asíntotas verticales de la función $y = f(x)$, y la gráfica de la función tomará alrededor de las rectas x = -1 y x = 3, la forma que se muestra en la figura 28.

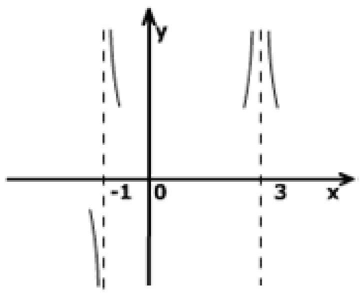

Figura 28

Definición de asíntota oblicua

Se dice que la recta $y = mx + n$ es una *asíntota oblicua* de $y = f(x)$ si se cumple que: 28

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ es la pendiente de la recta oblicua (lógicamente es un valor finito), y

$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$ es el intercepto de la recta con el eje de las Y.

Observe un ejemplo en la figura 29.

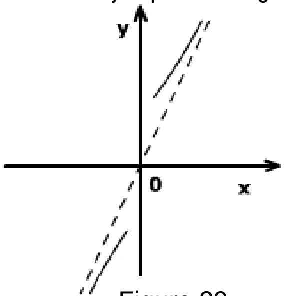

Figura 29

Cuando ocurre que m = 0, y n existe, la asíntota no vertical es *horizontal,* por lo que la recta $y = mx + n$ se convierte en $y = n$. En estos casos, n es el punto o valor de Y, donde la función tiene una asíntota horizontal, y como $m = 0$, $n = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

Ejemplo resuelto 10:

Sea $f(x) = 4x + \frac{1}{x+1}$. Analizar si tiene asíntota oblicua.

Solución:

Investiguemos si existen m y n.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(4 + \frac{1}{x(x+1)}\right) = 4$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(4x + \frac{1}{x+1} - 4x\right) = 0$$

Luego y = 4x es una asíntota oblicua.

Ejemplo resuelto 11:

Aproximarse al gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$.

Solución:

Dominio: R\ $\{5\}$

Intercepto con los ejes coordenados:

Eje de las x: 1 $\neq$ 0 No tiene intercepto con el eje x.

Eje de las y: si x = 0, y = $\dfrac{1}{0-5} = -\dfrac{1}{5}$ Luego, (0; -$\dfrac{1}{5}$)

Asíntotas:

Asíntotas verticales:

Si existen, es en los puntos que anulan el denominador de f .

$\lim_{x\to 5^+} \dfrac{1}{x-5} = +\infty$ y $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{1}{x-5} = -\infty$

Luego, x = 5 es asíntota vertical.

Asíntotas No verticales:

$y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x-5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2 - 5x} = 0$$

Luego, si la pendiente, m , es igual a cero, y existe n, hay una asíntota horizontal, porque no existe inclinación alguna de dicha recta con respecto al eje de las X. Así, $y = mx + n$ se transforma en $y = n$. Luego, si existe, ¿en qué punto n se verifica la asíntota horizontal? Basta calcular: n = $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$, que en este caso en particular porque $m = 0$, se calcula, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ = $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-5} = 0$ Luego, $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Extremos y monotonía:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-5)^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para toda x $\in$ $Dom\ f$. Luego, no hay extremos.

Observe que $f'(x)$ < 0 para todo el dominio de f , pues el término del denominador siempre será positivo porque está elevado al cuadrado, y el signo negativo delante de la expresión, cambia el signo de $f'(x)$.

Comprobemos:

$-\dfrac{1}{(x-5)^2}$ > 0 $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{(x-5)^2}$ < 0.

Ubiquemos los ceros del denominador de esta expresión en un rayo numérico. (Figura 30).

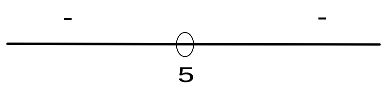

Figura 30

Note que no hay cambio de signo porque x = 5 es un cero doble, y se comienza con signo negativo pues se está indicando que la expresión sea < 0. Luego, f es decreciente en todo su dominio, porque $f'(x)$ es negativa en todo punto.

Puntos de inflexión y concavidad:

$$f''(x) = -\frac{-2(x-5)}{(x-5)^4} = \frac{2}{(x-5)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para toda x $\in Dom\ f$. No tiene puntos de inflexión.

$\frac{2}{(x-5)^3} > 0$; $(x-5)^3 = 0 \Rightarrow$ x = 5 Solución triple.

Observe que, si x > 5, $f''(x) > 0$, luego, f es cóncava hacia arriba en dicho intervalo. Si x < 5, $f''(x) < 0$, luego, f es cóncava hacia abajo. (Véase la figura 31).

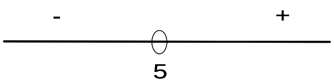

Figura 31

Note que, aunque exista cambio de signo de la segunda derivada alrededor de x = 5, este no es punto de inflexión, porque no pertenece al dominio de la función. Este punto es de discontinuidad de f . Observe el gráfico de la función en la figura 32.

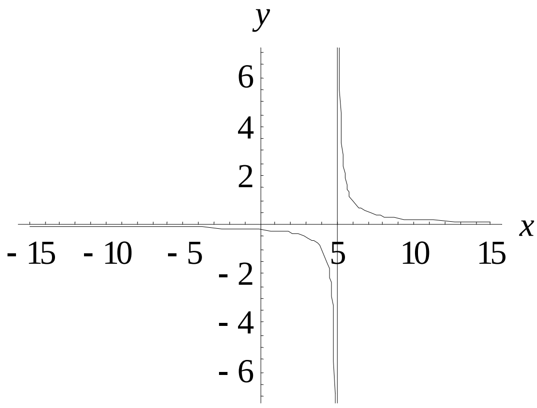

Figura 32

Ejemplo resuelto 12:

Trazar la gráfica de la función $y = \frac{x^2}{1-x}$.

Solución:

Dominio: R\ $\{1\}$

Intercepto con los ejes coordenados:

Eje de las x: $\frac{x^2}{1-x} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow$ x = 0. Luego, (0; 0)

Eje de las y: Si x = 0, y = 0 Luego, (0; 0)

Asíntotas:

Asíntotas Verticales:

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2}{1-x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2}{1-x} = -\infty$. Luego, x = 1 es una asíntota vertical.

Asíntotas no verticales:

$y = mx + n$

m = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{1-x}}{x}$ = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-x^2} = -1$ Luego, si existe n, f tiene una asíntota oblicua.

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1-x} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x(1-x)}{1-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{1-x} =$$

= $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{1-x} = -1$ Luego, y = -x -1 es una asíntota oblicua.

Extremos y monotonía:

$$f'(x) = \frac{(1-x)2x - x^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

Ceros del numerador y del denominador:

x(2 –x) = 0 $\Rightarrow$ x = 0 ó x = 2

$(1-x)^2 = 0$ $\Rightarrow$ x = 1 Observe los cambios de signo de $f'(x)$ en la figura 33.

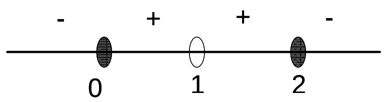

Figura 33

f es monótona creciente en (0; 1) y en (1; 2)

f es monótona decreciente en (-∞; 0) y en (2 +∞)

Luego, en x = 0 hay un mínimo local, y en x = 2 un máximo.

$f(0)$ = $\frac{0^2}{1-0} = 0$ Valor mínimo; $f(2)$ = $\frac{2^2}{1-2} = -4$ Valor máximo.

Puntos de inflexión y concavidad:

$$f''(x) = \frac{(1-x)^2(2-2x) - (2x-x^2).2(1-x).(-1)}{(1-x)^4} = \frac{2(1-x)^3 + (2x-x^2).2.(1-x)}{(1-x)^4} =$$

$$\frac{2 - 4x + 2x^2 + 4x - 2x^2}{(1-x)^3}.$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x$\in$ $Domf$. Luego, no hay puntos de inflexión.

$(1-x)^3 = 0$ $\Rightarrow$ x = 1

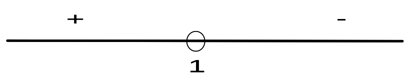

Figura 34

Como $f''(x)$ > 0 para todo x < 1, luego, f es cóncava hacia arriba para (-∞; 1)

Como $f''(x)$ < 0 para todo x > 1, luego, f es cóncava hacia abajo para (1; +∞). (Véanse los signos de $f''(x)$ en la figura 34). Compruebe los resultados obtenidos en este análisis del comportamiento de la curva, en la gráfica de la figura 35.

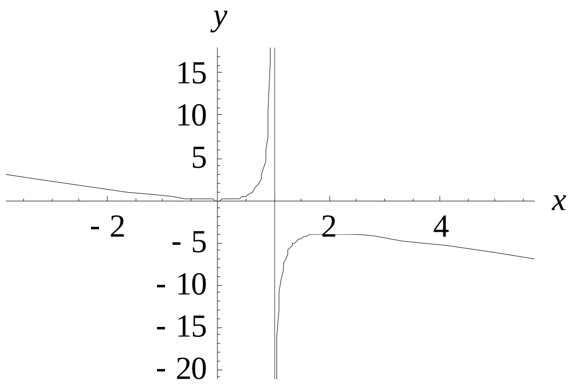

Figura 35

III. APLICACIÓN DE LA DERIVADA A PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Muchos de los problemas que se presentan en la práctica diariamente, están relacionados de una forma u otra, con encontrar los valores máximos y mínimos de una función, y más aún, determinar para qué valores de la variable independiente se alcanzan estos. Estos problemas se llaman, en general, *problemas de optimización.*

En términos generales, un problema de optimización consiste en encontrar el valor mínimo o minimizar, o encontrar el valor máximo o maximizar, una cierta función, de tal forma que satisfagan ciertas condiciones dadas.

La solución o soluciones óptimas son aquellas para las cuales se satisfacen las restricciones del problema y el valor de la función sea mínimo o máximo.

La función que representa el problema de optimización se le llama *función objetivo.*

Fases en la solución de un problema de Optimización

1. Planteamiento del problema
2. Formulación Matemática (construir la función objetivo si no se da explícitamente)
3. Análisis del comportamiento de la función objetivo (puede incluir su representación gráfica)
4. Obtención de las soluciones

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo resuelto 13:

Una empresa tiene la siguiente función de producción: Q = $-\frac{2}{3}L^3 + 10L^2$, donde L representa el número de horas de trabajo aprovechadas por la empresa diariamente, y Q el número de quintales obtenidos de un determinado producto agrícola.

a) Halle el valor de L para el cual el producto total es máximo. Halle el producto total máximo.
b) Haga el gráfico de esta función.
c) Haga en un gráfico debajo del anterior, las funciones de producto marginal y producto medio.
d) ¿Qué conclusiones saca usted de estos gráficos?

Solución:

a) Q' = - $\frac{2}{3}$. 3L^2 + 10. 2L   -2L^2+ 20L = 0

Q' = -2L^2+ 20L L^2 -10L = 0

Q'' = -4L +20 L(L -10) = 0

L = 0 ó L = 10

Q'' (0) = 20 > 0, luego, L = 0 es punto de mínimo.

Q'' (10) = -4.10+20 = -20 < 0 Luego, L = 10 es punto de máximo.

Q (10) = $-\frac{2}{3}$ (10)^3 +10. (10)^2 = $-\frac{2}{3}$ .1000 +1000 = 333,3

El valor de L es 10, y el producto total máximo es aproximadamente 333. Luego, si la empresa labora 10 horas diarias, obtiene su máxima producción, de aproximadamente 333 quintales.

b) Q = $-\frac{2}{3}$ L^3 + 10 L^2

$DomQ$ = R

Intercepto con los ejes coordenados:

Eje de las x: $-\frac{2}{3}$ L^3 + 10 L^2 = 0 Eje de las y: Si x = 0, y = 0.

L^2($-\frac{2}{3}$ L +10) = 0 Luego, (0; 0).

L^2 = 0 ó $-\frac{2}{3}$ L +10 = 0

L = 0 ó L = 15

Luego, (0; 0) y (15; 0) intercepto con el eje de las x.

Asíntotas:

Asíntotas verticales: No tiene, pues la función no tiene puntos en los que no esté definida.

Asíntotas No verticales:

$y = mx + n$

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(-\frac{2}{3}L^2 + 10L) = \infty$ No tiene asíntotas no verticales.

Monotonía y puntos extremos:

Q' = -2L^2 + 20L

-2L^2 + 20L > 0

2L^2 - 20L < 0

2L(L - 10) = 0 $\Rightarrow$ L = 0 ó L = 10

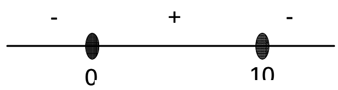

Figura 36

Luego, Q es creciente en [0; 10] , y decreciente en (-∞ ; 0) y [10; +∞). (Comprobarlo en la figura 36).

Entonces, (0; 0) es punto de mínimo, y (10; 333) es punto de máximo.

Concavidad y puntos de inflexión:

$Q'' =$ -4L + 20

-4L + 20 = 0 $\Rightarrow$ L = 5

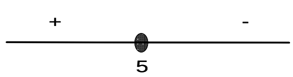

Figura 37

Luego, si L < 5, *Q* es cóncava hacia arriba. Si L > 5, *Q* es cóncava hacia abajo. (Véase la figura 37). Entonces, L = 5 es punto de inflexión: (5; 166,6).

Observe el gráfico de Q en la figura 38.

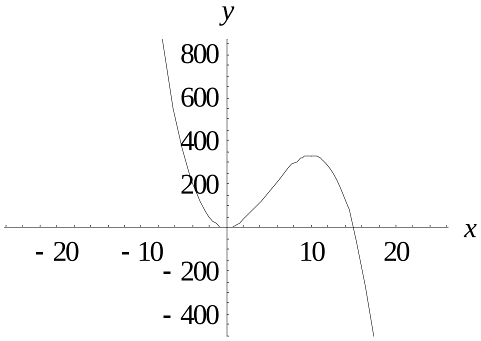

Figura 38

c) Producto marginal:

Q' = -2L^2 + 20L La función de producto marginal es una función cuadrática.

2L(L - 10) = 0 $\Rightarrow$ L = 0 ó L = 10 Raíces de la función.

Vértice : V($-\frac{b}{2a}$; $f(-\frac{b}{2a})$) = V(-$\frac{20}{-4}$; $f(\frac{20}{-4})$) = V(5; 50)

El intercepto con el eje de las Y es el propio cero de la función (0; 0), pues en la parábola, C = 0. Observe el gráfico de la parábola en la figura 39.

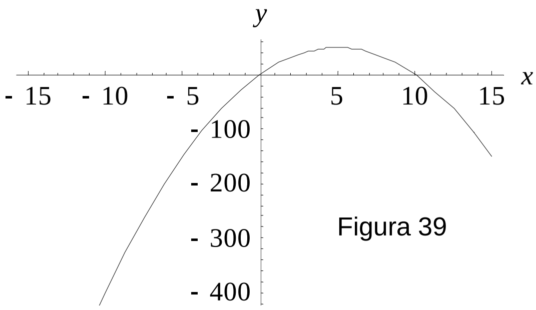

Figura 39

Producto medio:

$\frac{Q(L)}{L}$ = -$\frac{2}{3}$ L^2 + 10L

-$\frac{2}{3}$ L^2 + 10L = 0 $\Rightarrow$ L(-$\frac{2}{3}$ L + 10) = 0 $\Rightarrow$ L = 0 ó L = 15 Ceros de la función.

Vértice:

Otra forma de encontrar el vértice de la parábola, es utilizando la primera derivada de la función:

Q' = -$\frac{4}{3}$ L + 10

-$\frac{4}{3}$ L + 10 = 0 $\Rightarrow$ L = $\frac{30}{4} = \frac{15}{2}$ = 7,5

L = 7,5 es punto crítico, pero, lógicamente, es de máximo, pues la parábola abre hacia abajo porque A < 0.

$$f(7.5) = -\frac{2}{3}.(7.5)^2 + 10.(7.5) = 37.5$$

En la figura 40 se muestra la gráfica de la función del producto medio, y en la figura 41 podemos observar las funciones de producto marginal y producto medio en un mismo sistema de coordenadas.

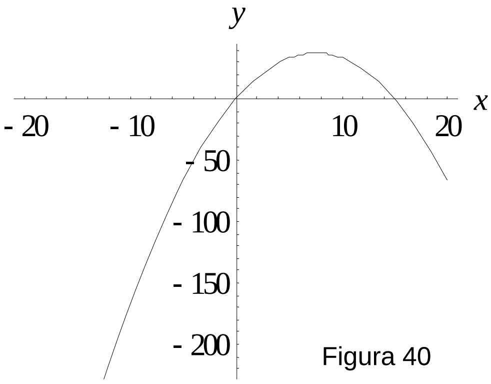

Figura 40

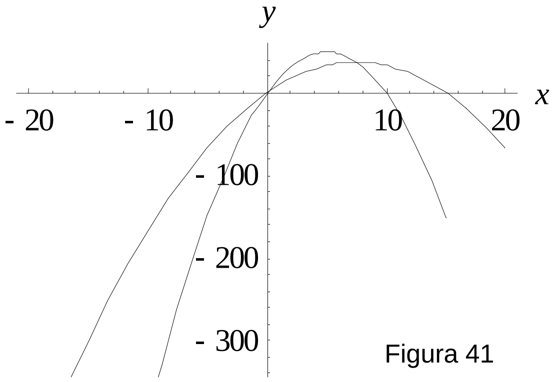

Figura 41

d) El rango de utilización de horas de trabajo diarias $0 \leq L \leq 7.5$, es aquel donde el producto marginal supera al producto medio (verifíquelo en el gráfico). Es el rango en el que, un incremento en una hora de trabajo adicional a partir de cualquier valor de L que pertenezca al rango, determina un incremento productivo superior a la producción promedio en cada uno de los instantes (horas de trabajo) que se encuentran en el rango $0 \leq L \leq 7.5$. Decimos, en estos casos, que los rendimientos de la producción son crecientes en ese intervalo de horas de trabajo. A partir de 7.5 horas, observe que, aunque la producción crece hasta L = 10 horas, crece lentamente. Decimos que los rendimientos, en estos casos, son decrecientes. Comienza a actuar lo que se conoce en Economía como *ley de los rendimientos decrecientes de la producción.* No descuide que, aún actuando la mencionada ley, la producción continúa incrementándose hasta L = 10, pero, en este caso, lo esencial es percatarnos de que este crecimiento es más lento a partir de 7.5 horas de trabajo (compruébelo en el gráfico de Q).

Ejemplo resuelto 14:

Dada la función de demanda $p = 4 - q$ y la función de costo medio de un monopolista, C_{me} = $q - 2 + \frac{4}{q}$.

a) Represente las funciones de costo total e ingreso total en un mismo gráfico.

b) Represente las funciones de costo marginal e ingreso marginal en otro gráfico.

c) Determine el valor de q que maximiza la ganancia. Compruebe estos resultados en los gráficos de los incisos a) y b). Halle la ganancia máxima.

d) Calcule la elasticidad de la demanda para $q = 1$ y para $q = 3$. Determine el valor de q para el cual la elasticidad es -1.

Solución:

a) *CT* = $C_{me} . q$ = $\left(q - 2 + \frac{4}{q} \right) . q = q^2 - 2q + 4$

$q^2 - 2q + 4 = 0$ No tiene intercepto con el eje de las x.

CT' = $2q - 2$

$2q-2=0 \Rightarrow$ q = 1

CT(1) = 1^2 -2 + 4 = 3

(1; 3) es el vértice, que es punto de mínimo, porque la función de *CT* es una parábola que abre hacia arriba.

$IT = p.q = (4-q).q = -q^2 + 4q$

$-q^2+4q=0 \Rightarrow q(-q+4)=0 \Rightarrow q=0$ ó $q=4$ Ceros de la función.

$IT' = -2q+4$

$-2q+4 = 0 \Rightarrow q=2$ Luego, $q=2$ es punto de máximo, pues la función de ingreso total es una parábola que abre hacia abajo.

El gráfico de la figura 42 representa las funciones de costo e ingreso total en un mismo sistema de coordenadas.

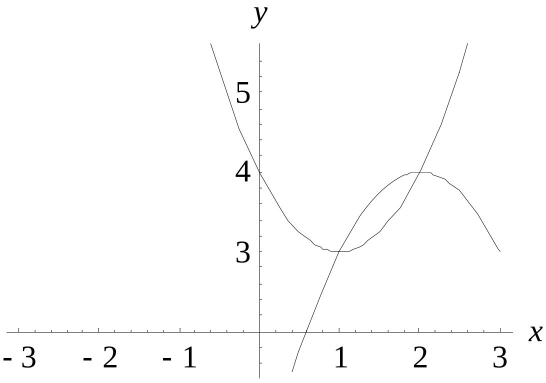

Figura 42

b) Costo marginal: $CT' = 2q-2$ Ingreso marginal: $IT' = -2q+4$

Ambas funciones son lineales. Bastan dos puntos arbitrarios para obtener sus gráficas, o sea, dos rectas.

Denotemos como Cm a la función de Costo marginal, e Im a la función de ingreso marginal.

Si $q=1$, $Cm=0$; si $q=2$, $Cm=2$. Si $q=0$, $\mathrm{Im}=4$; si $q=2$, $\mathrm{Im}=0$.

En la figura 43 se muestran las funciones de costo e ingreso marginal en un mismo sistema de coordenadas.

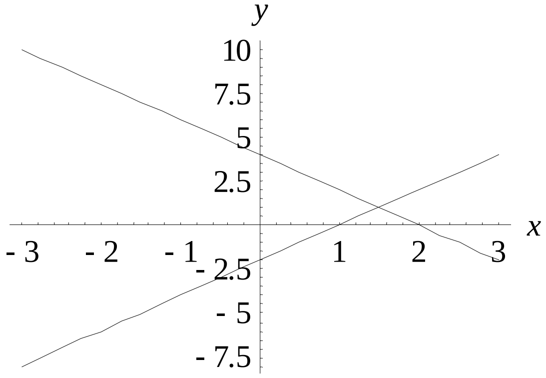

Figura 43

c) El proceso c ción objetivo, en este caso *Ganancia*. Com La ganancia, comúnmente, es el resultado dos.

G = IT - CT

G = $-q^2+4q-(q^2-2q+4) = -q^2$

G = $-2q^2+6q-4$

G' = $-4q+6$

$-4q+6=0 \;\Rightarrow\; q=\dfrac{3}{2}=1{,}5$

G'' = - 4 < 0, por lo que $q=1{,}5$ es punto de máximo.

$G_{máx}$ = -2.(1,5)^2 +6.(1,5) – 4 = 0,5 Esta es la máxima ganancia: 0,5 unidades monetarias.
Observe en el gráfico de la figura del inciso a) que, en el punto q donde se obtiene la máxima ganancia, se verifica la mayor distancia entre las curvas de ingreso y costo total.
Verifique en el gráfico del inciso b), que la máxima ganancia se obtiene en el punto q donde $I'=C'$.

d) $E = \dfrac{Función \;\; marginal}{Función \;\; media} = \dfrac{\dfrac{-1}{4-q}}{q} = -\dfrac{q}{4-q}$

Si $q=1$, E = $-\dfrac{1}{3}$

Si $q=3$, E = -3

Si $-\dfrac{q}{4-q}=-1 \;\Rightarrow\; q=2$.

Ejemplo resuelto 15:
El director de mercado de una compañía ha estimado que la ganancia depende de la inversión hecha en publicidad, del siguiente modo: $G(x)=\dfrac{22x+11}{x+2}$. Esboce gráficamente la función de ganancia.

Solución:

$G(x)=\dfrac{22x+11}{x+2}$

$Dom\ G$ = {x∈ R/ x $\neq$ 0}

Intercepto con los ejes coordenados:

Eje de las X: 22x + 11 = 0 $\Rightarrow$ x = $-\dfrac{11}{22}$; ($-\dfrac{11}{22}$; 0)

Eje de las Y: G (0) = $\dfrac{11}{2}$; (0; $\dfrac{11}{2}$)

Asíntotas:
Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{22x+11}{x+2}=+\infty$, y $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{22x+11}{x+2}=-\infty$ Luego, x = -2 es asíntota vertical.

Asíntotas No verticales:

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{22x+11}{x^2+2}$ = 0. Luego, si n existe, hay una asíntota horizontal. Investiguémoslo:

$$n = \lim_{x \to +\infty} \frac{22x+11}{x\ \ +2} = 22$$

Luego, y = 22 es asíntota horizontal.
Monotonía y puntos extremos:

$$G' = \frac{22(x+2)-(22x+11).1}{(x+2)^2} = \frac{22x+44-22x-11}{(x+2)^2} = \frac{33}{(x+2)^2}$$

Observe que $\frac{33}{(x+2)^2}$ > 0 para todo x. Luego, la función G es siempre creciente, y no tiene puntos extremos.

Concavidad y puntos de inflexión: $G'' = \frac{-33(2)(x+2)}{(x+2)^4}$ = $\frac{-66(x+2)}{(x+2)^4}$

$(x+2)^4 = 0 \iff$ x = -2 Cero del denominador.

$-66(x+2) = 0 \iff$ x = -2 Cero del numerador.

Luego, x = -2 es una solución que se obtuvo 5 veces. Existe cambio de signo alrededor de este punto. (Véase la figura 44).

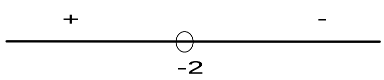

Figura 44

La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-2)$, y cóncava hacia abajo en $(-2,+\infty)$.

No tiene puntos de inflexión, porque x = -2 no pertenece al dominio de G.

Luego, en la gráfica de la figura 45 representamos la función de ganancia.

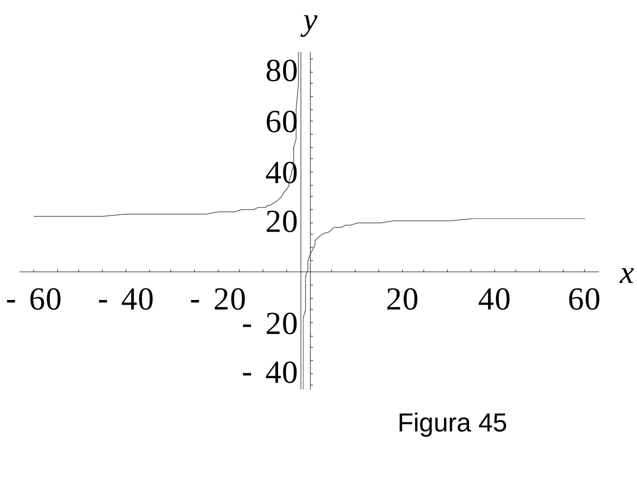

Figura 45

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$ d) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^3}$

2. Encuentre:

a) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$ b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}$

c) $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-2)}{\ln(e^x-e^2)}$ d) $\lim_{x\to +\infty}\frac{sen\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}}$

3. Calcular:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{senx}-\frac{1}{x}\right)$ b) $\lim_{x\to +\infty} xe^{-x}$

4. Hallar:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$ b) $\lim_{x\to 1}\frac{x\cos x-sen\,x}{x^3}$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

5. Analizar si se cumple el teorema del valor medio para la función $f(x)=x^3-x^2+1$ en [-1; 1] y encuentre los puntos x$\in$(-1; 1) tales que: $f'(x)$ = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

6. Comprobar si se cumplen las condiciones del teorema de Lagrange para la función $f(x)$ = x – x^3 en [-2; 1] y hallar el correspondiente valor intermedio.

7. Comprobar si se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy para las funciones dadas en los intervalos señalados, y hallar el valor intermedio.

a) $f(x)$ = x^2 + 2 $g(x)$ = x^3 -1 en [1; 2]

b) $f(x)$ = *sen x* $g(x)$ =*cos x* en [0; $\frac{\pi}{2}$]

8. Trazar la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ b) $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ c) $f(x)=\frac{x}{x^3+1}$

9. Aproximarse al gráfico de las siguientes funciones:
a) $f(x) = -x^2 + 12x - 20$ b) $f(x) = x^3 - 27x$

10. Esbozar gráficamente:

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ b) $f(x) = e^{-x^2}$

c) $f(x) = x \ln x$ d) $f(x) = \begin{cases} x^4 - x^3 & si \;\; x \leq 1 \\ \dfrac{x^3 - 1}{7} & si \;\; 1 < x < 2 \\ x^2 - x & si \;\; x \geq 2 \end{cases}$

11. Para el producto de un monopolista, la función de demanda es: *p = 72 -0,04q*, y la función de costos es *C = 500 +30q*.
¿A qué nivel de producción se maximiza la utilidad?
¿A qué precio ocurre este, y cuál es la utilidad correspondiente?

12. Para el producto de un monopolista, la función de demanda es: $p = \dfrac{50}{\sqrt{q}}$; y la función de costo promedio es: $\overline{C} = 0{,}50 + \dfrac{1000}{q}$.
Encuentre el precio y la producción que maximizan la utilidad.
A este nivel, demuestre que el ingreso marginal es igual al costo marginal.

13. Un fabricante ha determinado que, para cierto producto, el costo promedio $\overline{C}$ por unidad, está dado por: $\overline{C} = 2q^2 - 36q + 210 - \dfrac{200}{q}$, donde $2 \leq q \leq 10$.
a) ¿A qué nivel dentro del intervalo [2; 10] debe fijarse la producción para minimizar el costo total?
b) Si la producción tuviese que encontrarse dentro del intervalo [5; 10], ¿qué valor minimiza el costo total?

14. La demanda de un mercado monopolizado sigue la ley: *p = 100 -3x*, y el monopolista produce x unidades a un costo total de: $C = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 1500$. Determinar el precio del artículo y la cantidad que debe producirse para obtener la máxima utilidad.

15. Para un monopolista, el costo por unidad de producir un artículo es de $3.00, y la ecuación de demanda es $p = \dfrac{10}{\sqrt{q}}$.
¿Cuál es el precio que dará la utilidad máxima?

16. Para el producto de un monopolista, la ecuación de demanda es: *p = 42 -4q* y la función de costo promedio es: $\overline{C} = 2 + \dfrac{80}{q}$. Encuentre el precio que maximiza la utilidad.

17. Un fabricante puede producir cuando mucho, 420 unidades de cierto artículo cada año. La ecuación de demanda para ese producto es: $p = q^2 - 100q + 3200$, y la función de costo promedio del fabricante es: $\overline{C} = \frac{2}{3}q^2 - 40q + \frac{10000}{q}$.

Determine la producción q que maximiza la utilidad y la correspondiente utilidad máxima.

Bibliografía:

1. Ayres JR., Frank. (1977): *Cálculo diferencial e integral*. 2da. Edición. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
2. Barnett, Raymond A. y otros. (2003): *Precálculo. Funciones y gráficas*. (en dos volúmenes). Editorial Félix Varela. La Habana.
3. Casas Pardo, José. (1987): *Curso de Economía*. Editorial de Economía Política. S.A. Barcelona.
4. Casasús, T. y otros. (1991): *Cálculo integral. Ecuaciones diferenciales*. Editorial NAV llibres. Valencia.
5. Castillo Serpa, Alfredo. (2004): *Series*. Tomo I. Editorial Félix Varela. La Habana.
6. Chiang, Alpha C. (1987): *Métodos fundamentales de economía matemática*. Mc. Graw – Hill. México.
7. Dankó P. E. y otros. (1983): *Matemáticas superiores en ejercicios y problemas*. Parte I. Editorial MIR, Moscú.
8. Etgen, Gannet J. (1999): *Calculus one and several variables*. Editorial John Wiley & sons. España.
9. Fernández Muñiz, José L. (1983): *Análisis matemático.* Tomo III. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
10. Fraleigh, John B. (1990): *Calculus with analytic geometry*. Editorial Addison – Wesley publishing company. España.
11. Kitchen Jr., Joseph W. (1986): *Cálculo.* Mc. Graw – Hill. España.
12. Kudriávtsev, L. D. (1984): *Curso de análisis matemático*. Tomo II. Editorial MIR Moscú.
13. Larson, Roland E. y otros. (1995): *Calculus of a single variable*. Editorial D. C. Heath and company. España.
14. Lipschutz, Seymour. (1975): *Ejercicios y problemas de teoría de conjuntos y temas afines.* Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
15. Manuel Álvarez, Eugenio. (1973): *Análisis matemático III. Funciones de varias variables*. Editorial MIR Moscú.
16. Maqueira, Raquel y otros. (2003): *Laboratorio de Matemática Superior.* Editorial Félix Varela. La Habana.

17. Martínez Puig, Eduardo y otros. (1990): *Matemática Superior.* Tomo I. Sin editorial.
18. Martínez, D. (1998): *Estudio del concepto de función en la formación de profesores*. Tesis de maestría. Universidad Central de Las Villas. Santa Clara.
19. Pita Ruiz, Claudio. (1995): *Cálculo vectorial*. Editorial Prentice – Hall. España.
20. Ríbnikov, K. (1987): *Historia de la Matemática*. Editorial MIR Moscú.
21. Sáenz Quiroga, Eladio. (1987): *Matemáticas para Economistas*. Fondo de cultura económica. México.
22. Samuelson, Paul A. (1983): *Economía*. Mc. Graw – Hill. México.
23. Sánchez Fernández, Carlos. (1982): *Análisis matemático*. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
24. Santos Marín, N. (1988): *Sistema de habilidades lógicas relacionadas con los conceptos y los teoremas en la matemática de las ciencias técnicas*. Tesis para optar por el grado de Doctor en Ciencias de la Educación. Santa Clara, UCLV.
25. Schumpeter, Joseph A. (1994): *Historia del análisis económico*. Editorial Ariel. S.A. Barcelona.
26. Shipachev, V.S. (1991): *Fundamentos de las Matemáticas Superiores.* Editorial MIR. Moscú.
27. Spivak, M. (1970): *Cálculo infinitesimal*. Editorial Reverté, S.A. España.
28. Stein, K. Sherman. (1984): *Cálculo y geometría analítica*. 3ra. Edición. Mc. Graw – Hill. Madrid.
29. Sydsaeter, Knut. y Hammond, Peter. (1996): *Matemáticas para el Análisis Económico*. Editorial Prentice - Hall. España.
30. Valdés Castro, Concepción. (1983): *Análisis matemático*. Tomo III. Editorial Pueblo y Educación. LaHabana.
31. Varian, H. R. (1992): *Análisis microeconómico.* 3ra. Edición. Anthony Bosch Editor. España.
32. Yamane, Taro. (1962): *Mathematics for economists*. Editorial Prentice – Hall. España.