Contribuciones a la Economía

"Contribuciones a la Economía" es una revista académica con el
Número Internacional Normalizado de Publicaciones Seriadas
ISSN 16968360

febrero 2006

Teoría de Juegos Aplicada a Problemas de Bancarrota

Dra. Flor María Guerrero Casas
Dr. Miguel Ángel Hinojosa Ramos
Francisca Jesús Sánchez Sánchez

Departamento de Economía y Empresa. Universidad Pablo de Olavide.
Ctra. de Utrera, Km.1. 41013-SEVILLA.
Telf.: 954 349 846 Fax: 954 349 339

e-mail: fguecas@dee.upo.es
mahinram@dee.upo.es
fsansan@dee.upo.es

Resumen

En una situación de bancarrota adquiere gran relevancia la cuestión de cómo dividir el valor neto de la empresa entre sus acreedores. En este trabajo se da respuesta a este problema económico usando reglas de reparto para problemas de bancarrota. Se usará como instrumento la Teoría de Juegos, en particular nos centraremos en los Juegos Cooperativos, y definiremos el Juego de Bancarrota asociado con los Problemas de Bancarrota a través de la definición de Juego de Bancarrota, indicando conceptos de solución en dicho juego. Se ha realizado una aplicación al Plan de Ayudas a la Investigación en Andalucía para el año 2001, en el que se calcularán el valor de Shapley, el nucleolo y el τ -valor.

Abstract

In a situation of bankruptcy the main question is how to divide the net value of the company among their creditors. The answer this questions we use Cooperative Game Theory an Application to Investigation. Grant allocation in Andalucía is given in which the value of Shapley, the nucleolus and the τ -value will be calculated.

Palabras Clave: Problemas de Bancarrota, Teoría de Juegos, valor de Shapley, nucleolo, τ-valor.

1. Introducción

Una situación de bancarrota conlleva muchos problemas, entre ellos adquiere gran relevancia la siguiente cuestión económica: ¿cómo debe dividirse el valor neto de la empresa entre sus acreedores? Nos encontramos ante una situación en la que hay un problema de distribución, hay que asignar una cantidad insuficiente que no es capaz de satisfacer las demandas de todos los agentes implicados en el reparto. Habrá que resolver este tipo de cuestiones usando ciertos procedimientos que permitan aplicar reglas que apliquen algún criterio ético y operacional y que, en cierta forma, las aspiraciones de los acreedores sean satisfechas. En esta investigación se pretende dar respuesta a este problema económico usando como instrumento la Teoría de Juegos, en particular nos centraremos en los Juegos Cooperativos, que en la situación que aquí estudiamos se denominan Juegos de Bancarrota, que son los que pueden dar respuesta al problema antes descrito.

2. Reglas de Reparto en Problemas de Bancarrota

Consideramos situaciones donde una propiedad o estado E va a ser dividido entre n demandantes o acreedores. El conjunto de demandantes se denotará como $N=\{1, 2, ..., n\}$. El acreedor i demanda una cantidad d_i de la propiedad E. El problema que se plantea es *cómo dividir la propiedad E de la empresa que ha quebrado entre todos los acreedores*. Buscaremos reglas de reparto que apliquen algún criterio de asignación que siga un razonamiento ético y operacional.

Un *problema de bancarrota* será un par $(E; d) \in P \times P^n$, con d el vector de demandas de los acreedores $d = (d_1, ..., d_n)$, donde las demandas de éstos están ordenadas en sentido creciente. El problema de reparto surge porque la propiedad que se va a dividir es insuficiente para satisfacer las demandas de todos los acreedores, es decir, $0 \leq E \leq d_1 + ... + d_n = D$. A partir de ahora denotaremos pro $d(N\backslash\{i\}) = \sum_{j \in N \backslash \{i\}} d_j$, a la suma de las demandas de todos los acreedores salvo la del demandante i.

Definición 2.1. Entenderemos una regla de división o reparto como una función f que asigna a cada problema de bancarrota $(E; d)$ una solución $f(E; d)=(f_1, ..., f_n)$ tal que se cumpla:

i) Racionalidad Individual: $f_i \geq 0, \ \forall i \in N$

ii) Eficiencia: $\sum_{i \in N} f_i = E$

2.1. Reglas de Reparto

- ***Regla de Reparto Proporcional***: ésta asigna al demandante i la cantidad de $\frac{Ed_i}{D}$.

  Cada demandante obtiene una fracción de los activos que es proporcional a su participación en las demandas totales.

- ***Regla de Ganancia Igualitaria o Constraint Equal Award (regla-CEA)***: es una regla de reparto que otorga la misma cantidad a todos los demandantes, sin dar a

cualquier agente más de lo que demanda. Esta regla da prioridad a los agentes con demandas más pequeñas, éstos reciben relativamente más que los agentes que tienen demandas más elevadas.
Intuitivamente el proceso es el siguiente: se reparte la propiedad E entre los n demandantes a partes iguales entre ellos, de forma que a cada uno se le asigna inicialmente $\frac{E}{n}$. Si un acreedor demanda una cantidad inferior a la que inicialmente se le ha asignado ésta se reduciría hasta la demanda del agente (como criterio esta regla nunca asigna una cantidad superior a la demanda de cada acreedor). La cantidad que ha sobrado del demandante se reparte a partes iguales entre el resto, y se empezaría de nuevo todo el proceso para el resto de demandantes hasta llegar al último. Sin embargo si la demanda del agente i es más elevada que la cantidad inicial que se le asigna entonces éste recibe dicha cantidad inicial.
Matemáticamente la regla de reparto asigna al demandante i la cantidad $CEA_i(E; d)=\min\{\alpha, d_i\}$, con α tal que $\sum \min\{d_i;\alpha\} = E$, para cada problema de bancarrota (E, d) y cada $i \in N$. Denotaremos por $CEA(E; d)=(CEA_1 (E; d), ..., CEA_n (E; d))$ al vector de repartos donde cada componente de éste representa la asignación que la regla realiza a cada demandante.

- ***Regla de Pérdida Igualitaria o Constraint Equal Loss (regla-CEL)*****:** el reparto se enfoca en las pérdidas en las que pueden incurrir los demandantes (nadie puede recibir una cantidad negativa) de forma que todas las pérdidas sean iguales. La regla da prioridad a los agentes con demandas más elevadas, éstos reciben una cantidad antes que los agentes con demandas menores. Es un procedimiento que se suele aplicar cuando las demandas están relacionadas con necesidades, por ejemplo en el apoyo público del gasto en salud.
El proceso se desarrollaría de la siguiente forma: sumamos las demandas de todos los agentes (D) y obtenemos qué cantidad es la que falta para cubrir las demandas de éstos (D-E), ésta cantidad se divide a partes iguales entre los demandantes $\frac{D-E}{n}$, lo que nos da la pérdida en las demandas que sufrirá cada uno de ellos. En la primera fase al primer demandante se le asigna la diferencia entre su demanda y la pérdida $d_1 - \frac{D-E}{n}$, si esta cantidad es positiva se le asigna directamente en el reparto, mientras que si es negativa no se le asignaría nada, y dicha cantidad negativa se quitaría a partes iguales de las demandas del resto de agentes, y se seguiría el mismo proceso con el resto de agentes.
Matemáticamente esta regla de reparto asigna al demandante i el $CEL_i(E;d)=\max\{d_i-\beta, 0\}$, donde β es tal que $\sum \max\{0; d_i - \beta\} = E$, para cada problema de bancarrota $(E;d)$ y cada $i \in N$. Denotaremos por $CEL(E;d)=(CEL_1(E;d), ..., CEL_n(E;d))$ al vector de repartos donde cada componente de éste representa la asignación que la regla realiza a cada demandante.

- ***Método de Realización Recursiva*** (O'Neill, 1982)**:** supongamos que los demandantes llegan en orden para establecer sus demandas (uno después de otro). El que llega en primer lugar, si hay propiedad suficiente, recibiría lo que demanda. De lo que queda de la propiedad después de que el primero haya recibido su parte, el segundo demandante también recibe lo que reclama (siempre que quede propiedad por repartir), es decir, el criterio que se sigue es que cada demandante que llega recibe su demanda o lo que queda de la propiedad después de que los demandantes que llegaron antes hayan recibido su parte. El resultado esperado de este procedimiento si todos los órdenes de llegadas[1] son considerados igualmente probables es el mismo que el método de realización recursiva. Esta forma de ver el método de realización recursiva sugiere la siguiente expresión:

$$RC_i(E;d) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_N} x_i^{\pi} \ .$$

Donde denotamos por $RC_i(E;d)$ la cantidad asignada al demandante *i* por el método de realización recursiva; x_i^{π} es la cantidad asignada al demandante *i* en el orden π, y es tal que:

$$x_i^{\pi} = \begin{cases} d_i & \text{si} \quad E \geq \sum_{j \in P(\pi,i)} d_j + d_i \\ E - \sum_{j \in P(\pi,i)} d_j & \text{si} \quad 0 \leq E - \sum_{j \in P(\pi,i)} d_j \leq d_i \\ 0 & \text{si} \quad E \leq \sum_{j \in P(\pi,i)} d_j \end{cases}$$

con π una ordenación o permutación del conjunto de demandantes y denominemos $P(\pi, i)$ al conjunto de demandantes de *N* que preceden al demandante *i* en la ordenación π. Denotaremos por $RC(E; d)= (RC_1 (E; d), ..., RC_n (E; d))$ al vector de repartos donde cada componente de éste representa la asignación que la regla realiza a cada demandante. La cantidad que asigna esta regla a cada acreedor *i* es una media de todas las asignaciones que recibe el agente en cualquiera de las permutaciones de los demandantes.

- ***Regla del Bien Disputado o Contested Garment Consistent (Regla-CG)*** (Aumann y Maschler,1985)**:** sea $CG(E; d)$ la solución asignada por la regla-CG para un problema de bancarrota $(E; d)$. Entonces:

$$CG(E;d) = \begin{cases} CEA\left(E; \frac{d}{2}\right) & \text{si} \quad E \leq \frac{1}{2} D \\ d - CEA\left(D - E; \frac{d}{2}\right) & \text{si} \quad E \geq \frac{1}{2} D \end{cases}$$

donde la regla-CEA se comentó en apartados precedentes. Denotaremos por $CG(E; d)= (CG_1(E;d), ..., CG_n(E;d))$ al vector de repartos donde cada componente de éste representa la asignación que la regla realiza a cada demandante.

- ***Ajuste Proporcional o Regla-AP*****:** Curiel, Maschler y Tijs (1987) proponen una regla de división que es una composición de la regla proporcional. Inicialmente cada demandante *i* recibe lo que vamos a llamar los *mínimos derechos* de éste, que denotaremos por m_i de tal forma que si queda algo de la propiedad que se reparte después de haber asignado las demandas al resto de acreedores, ésta cantidad se le asignaría al demandante *i*. Formalmente los mínimos derechos serían:

$$m_i = \max\{0; E - d(N \setminus \{i\})\}$$

Después de repartir los mínimos derechos tendremos una nueva cantidad para repartir que será $E^{'}=E-m(N)$, donde $m(N) = \sum_{i \in N} m_i$ es la suma de los mínimos derechos de todos los acreedores. Desde que el demandante *i* ha recibido su mínimo derecho, su demanda se reduce en dicha cantidad y ésta nueva reclamación quedaría establecida en $d_i^{'} = d_i - m_i$. Se considera irracional demandar más de la cantidad que hay disponible, así cada demanda mayor que $E^{'}$ es truncada por $E^{'}$. Se definen las nuevas demandas como $d_i^{''}$, con $d_i^{''} = \min\{E^{'}; d_i^{'}\} \geq 0$ para cada $i \in N$. Sea AP(E; d) el resultado de una regla-AP para un problema de bancarrota *(E;d)* y sea $m \in$ P^n un vector cuyas coordenadas son los derechos mínimos (m_i) de los acreedores ($\forall$ i$\in$ N). Denotaremos por $AP(E; d)=(AP_1(E;d), ..., AP_n(E;d))$ al vector de repartos donde cada componente de éste representa la asignación que la regla realiza a cada demandante. Entonces:

$$AP(E;d) = \begin{cases} m & \text{si} \quad E' = 0 \\ m + \dfrac{d_i^{''} E^{'}}{\sum_{i \in N} d_i^{''}} & \text{si} \quad E' > 0 \end{cases}$$

3. El Juego de Bancarrota

Sea $N=\{1, ..., n\}$ un conjunto de *n* agentes que pueden alcanzar mediante la cooperación una cantidad máxima *v(N)* de un cierto bien. Denominamos *coalición* a cualquier subconjunto no vacío de *N*, es decir, una coalición no es más que un grupo de individuos. A cada coalición *S* podemos asociarle un número *v(S)* que representa la cantidad o pago máximo del bien que los jugadores pueden garantizarse, independientemente de lo que hagan los otros jugadores. A la función *v*, que indica las cantidades del bien que cada coalición puede conseguir se denomina función característica. Veamos que para cada problema de bancarrota *(E; d)* se puede definir un juego cooperativo *(N, v)*. El conjunto de jugadores en el juego de bancarrota será el mismo que el conjunto de demandantes del problema de bancarrota. El valor de la coalición *S* en el juego se define como la propiedad que se reparte, que no es reclamada por los demandantes que no pertenecen a la coalición *S*. Denotaremos por *d(S)* a la suma de las demandas de todos los acreedores que forman parte de la coalición *S*, y por *d(N\S)* a la suma de las demandas de todos los agentes que no forman parte de la coalición *S*.

Definición 3.1. Un juego cooperativo *(N, v)* es un juego de bancarrota si existe un problema de bancarrota *(E; d)* tal que:

$$v(S)=\max\{0; E-d(N\setminus S)\} \text{ para todo } S \subset N.$$

El valor de cada coalición $v(S)$ es una valoración pesimista de lo que ésta puede lograr, primero reparte a los demandantes que no están en la coalición y si después de dicha asignación queda algo, eso sería lo que la coalición S podría conseguir.
Uno de los problemas que se plantea la Teoría de Juegos Cooperativos es cómo repartir entre los diversos jugadores la utilidad disponible en el juego. Para ello se proponen distintas soluciones, pasamos a abordar conceptos de solución en el Juego de Bancarrota.

Definición 3.2. (Shapley, 1953) El valor de Shapley de un juego (N, v) es un vector $\Phi(N, v)=(\Phi_1(N, v), ..., \Phi_n(N, v))$ cuyas componentes se obtienen mediante la siguiente expresión:

$$\Phi_i(N,v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S) \right), \forall\, \mathrm{i} \in \mathrm{N}$$

donde n y s son los cardinales de N y S respectivamente.

El valor de Shapley se obtiene a partir de las contribuciones marginales de cada jugador a las distintas coaliciones.

Teorema 3.3. Sea $(E; d)$ un problema de bancarrota y sea (N, v) el correspondiente juego de bancarrota. Entonces se cumple $RC(E; d)=\Phi(N, v)$.

Efectivamente el reparto que se obtiene en el problema de bancarrota $(E; d)$ a través del método de realización recursiva coincide con la solución que se obtiene en el correspondiente juego de bancarrota (N, v) a través del valor de Shapley.

Definición 3.4. Para el juego (N, v), el exceso de la coalición S con respecto al vector $x=(x_1, ..., x_2)$ se define como:

$$e(S,x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i \ .$$

Definición 3.5. Un vector m-dimensional, x, es lexicográficamente menor que otro vector m-dimensional, y, y lo denotaremos por $x \leq_L y$, si $x = y$ o si $x_h < y_h$, donde $h \in \{1,..., m\}$ es la primera componente en la que x e y son distintos.
Sea H_{2^n-2}: $\Re^{2^n-2} \rightarrow \Re^{2^n-2}$ una correspondencia que ordena vectores de dimensión 2^n-2 en orden de magnitud decreciente.

Definición 3.6. (Schmeidler, 1969) El nucleolo del juego (N, v), que denotaremos por $N(N, v)$, es el conjunto de repartos, x, que minimizan lexicográficamente el vector de excesos ordenando $H_{2^n-2}(e(S_1, x),..., e(S_{2^n-2}, x))$, es decir,

$$N(N, v) = \{x \in I^*(N, v) / H_{2^n-2}(e(S_1, x),..., e(S_{2^n-2}, x)) \leq_L H_{2^n-2}(e(S_1, y),..., e(S_{2^n-2}, y)),$$
$$\forall y \in I^*(N, v)\}.$$

Mediante el concepto de nucleolo se busca el reparto socialmente más justo en el sentido de que la coalición que resulte más desfavorecida en el reparto esté lo menos perjudicada posible.

Teorema 3.7. Sea *(E; d)* un problema de bancarrota y sea *(N, v)* el correspondiente juego de bancarrota. Entonces $CG(N, v) = N(N, v)$.

El reparto que se realiza a través de la regla del bien disputado en un problema de bancarrota es el mismo que el obtenido en el correspondiente juego de bancarrota con la asignación del nucleolo.

Definición 3.8. Sea *(N, v)* un juego cooperativo, para cada $i \in N$ se define la *máxima aspiración* del jugador *i* como su contribución marginal a la coalición total, es decir,

$$M_i^{\tau}(N, v) = v(N) - v(N\backslash i)$$

donde $v(N)$ es el valor de la gran coalición y $v(N\backslash i)$ es el valor de la gran coalición sin tener en cuenta al jugador *i*.

Así pues definimos el vector de máximas aspiraciones $M^{\tau}=(M_1^{\tau}(N, v),..., M_n^{\tau}(N, v))$ donde cada una de las componentes es la máxima aspiración de cada uno de los jugadores.

Definición 3.9. Sea *(N, v)* un juego cooperativo, para cada $i \in N$ se define la *mínima aspiración* del jugador *i* como:

$$m_i^{\tau}(N,v) = \max_{S \subseteq N / i \in S} \left\{ 0; v(S) - \sum_{j \in S\backslash i} M_j^{\tau}(N,v) \right\}.$$

Así pues definimos el vector de mínimas aspiraciones $m^{\tau}=(m_1^{\tau}(N, v),..., m_n^{\tau}(N, v))$ donde cada una de las componentes es la mínima aspiración de cada uno de los jugadores.

Definición 3.10. (Tijs, 1981) Para un juego *(N, v)* el τ-valor del juego se define como el único vector eficiente en el segmento que tiene de extremos $m^{\tau}(N, v)$ y $M^{\tau}(N, v)$, es decir,

$$\tau(N, v) = m^{\tau}(N, v) + \alpha[M^{\tau}(N, v) - m^{\tau}(N, v)],$$

con $\alpha \in [0, 1]$ y es tal que se cumple $\sum_{i \in N} \tau_i(N,v) = v(N)$.

$\tau_i(N, v)$ son las componentes del vector $\tau(N, v)$, es decir, $\tau(N, v)=(\tau_1(N,v), ..., \tau_n(N,v))$.

El τ-valor es un valor de compromiso, se busca un acuerdo entre las máximas y mínimas aspiraciones de las ganancias que cada jugador espera obtener en el juego.

Teorema 3.11. Sea *(E; d)* un problema de bancarrota y sea *(N, v)* el correspondiente juego de bancarrota. Entonces se cumple que $AP(E; d) = \tau(N, v)$.

El reparto a través de la regla de ajuste proporcional para un problema de bancarrota es el mismo que el obtenido con la solución del τ-valor en el juego cooperativo.

4. Aplicación al Plan de Ayudas a la Investigación en Andalucía

Disponemos de las peticiones de ayudas a la investigación de 1841 Grupos de Investigación en Andalucía en el año 2001, así como de la cantidad disponible para repartir por el Plan de Ayudas a la Investigación (PAI). Hemos agregado dichos Grupos por las distintas Áreas de Investigación que estipula el Plan de Investigación, de esta forma finalmente tenemos 9 Áreas de Investigación, éstas junto con las peticiones de ayudas se muestran en la siguiente tabla:

Área de Investigación	Descripción	Demanda (Ptas.)
AGRI	Agroalimentación	486.016.212
CTS	Ciencia y Tecnología de la Salud	1.044.187.913
CVI	Ciencias de la Vida	673.669.095
FQM	Física, Química y Matemáticas	871.337.785
HUM	Humanidades	1.732.100.078
RNM	Recursos Naturales y Medio Ambiente	732.735.134
SEJ	Ciencias Económicas, Sociales y Jurídicas	788.597.100
TEP	Tecnologías de la Producción	426.295.909
TIC	Tecnologías de la Información y de las Comunicaciones	293.717.175

Objetivo de la Aplicación: repartir la cantidad del Plan de Ayudas a la Investigación en Andalucía entre las distintas Áreas de Investigación.

Formulación del Problema de Bancarrota:
El conjunto de demandantes es $N=\{1, ..., 9\}$. La cantidad total disponible por el Plan de Ayudas a la Investigación es de 999.940.487,8 Ptas. En resumidas cuentas el problema de bancarrota $(E; d)$ es:

$$E = 999.940.487,8; \; d = (d_1, ..., d_n) \text{ con:}$$

$d_1 = 486.016.212$	$d_2 = 1.044.187.913$	$d_3 = 673.669.095$
$d_4 = 871.337.785$	$d_5 = 1.732.100.078$	$d_6 = 732.735.134$
$d_7 = 788.597.100$	$d_8 = 426.295.909$	$d_9 = 293.717.175$

La demanda total de ayudas es de D = 7.048.656.401 Ptas.
Es evidente que surge un *problema*, tenemos una cantidad para repartir que es insuficiente para satisfacer la demanda de las nueve Áreas de Investigación, la solución que daremos es aplicar la Teoría de Juegos para resolver el problema distributivo que se ha planteado, en concreto realizaremos la asignación a través de la solución que nos da el valor de Shapley, el nucleolo y el τ-valor.

Formulación del Juego de Bancarrota:
Hay un total de $2^9 = 512$ coaliciones, empezamos obteniendo cada una de éstas y el valor de cada coalición.

S	*v(S)*	*S*	*v(S)*
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}	279.927.403,8	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9}	211.343.387,8
{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8}	32.554.217,8	{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9}	267.205.353,8
{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	220.207.100,8	{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9}	128.602.702,8
{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9}	87.628.366,8	{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	326.271.392,8
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	706.223.312,8	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	513.924.275,8
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9}	573.644.578,8	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	999.940.487,8

Para cualquier otra coalición distinta de las anteriores el valor de ésta es cero (por eso no se han incluido el resto de coaliciones hasta completar las 512).
Realizamos el reparto a través de los conceptos de solución de la Teoría de Juegos antes indicados, siendo finalmente la asignación que recibiría cada Área de Investigación la siguiente:

Área	**Cantidad Demandada**	**Asignación (PAI)**	**Asignación (Valor Shapley)**	**Asignación (Nucleolo)**	**Asignación (τ-valor)**
AGRI	486.016.212	90.593.034	81.706.464,17	111.104.498,64	77.482.137,29
CTS	1.044.187.913	144.475.444,4	151.444.060,57	111.104.498,64	159.413.460,39
CVI	673.669.095	100.107.896	110.078.811,15	111.104.498,64	107.398.313,1
FQM	871.337.785	132.056.813,6	135.368.722,72	111.104.498,64	138.911.238,38
HUM	1.732.100.078	235.502.168	151.144.060,57	111.104.498,64	159.413.460,39
RNM	732.735.134	88.797.428,9	118.043.391,34	111.104.498,64	116.814.795,16
SEJ	788.597.100	108.161.235	125.026.137,09	111.104.498,64	125.720.474,46
TEP	426.295.909	52.805.411,8	73.174.992,31	111.104.498,64	67.961.350,53
TIC	293.717.175	47.441.056,1	53.653.847,85	111.104.498,64	46.825.257,91

Conclusiones de la Aplicación:

- Se aprecian diferencias significativas de las cantidades asignadas por el PAI y los repartos obtenidos a través de la Teoría de Juegos.
- El reparto obtenido con el valor de Shapley se obtiene como media de las contribuciones marginales de cada una de las Áreas a todas las posibles coaliciones de las que puede formar parte, en este sentido podemos decir que esta solución reflejaría de forma "justa" la cantidad que recibe cada una de las Áreas.
- En la asignación a través del nucleolo los repartos son iguales para todas las áreas, sin embargo, es conveniente indicar que el nucleolo no siempre asigna la misma cantidad a todos los jugadores. En nuestra aplicación sí es así porque dada la gran diferencia entre las demandas totales de todas las áreas (7.048.656.401 Ptas.) y la cantidad a repartir (999.940.487,8 Ptas.), es evidente que con la cantidad disponible no se puede cubrir ni siquiera la mitad de las demandas totales. De esta forma se consideran la mitad de las demandas de cada área y se hace un reparto igualitario a cada una de ellas, obteniéndose así la misma asignación para todas las áreas.
- El reparto a través del τ-valor es un valor de compromiso que tiene en cuenta las máximas y mínimas aspiraciones de cada una de las áreas. Esta solución discrimina en mayor medida que lo hacía el nucleolo, entre aquellas áreas que reclaman fuertes cantidades de las que reclaman menores ayudas. De esta forma resultan más favorecidas en el reparto las áreas de investigación que solicitaban grandes

cantidades frente a aquellas que tenían menores demandas. Las cantidades asignadas mediante esta solución son más parecidas al reparto real que el PAI realizó en el año 2001. Comparando con las asignaciones reales que realizó el PAI a cada una de las Áreas de Investigación, vemos que el nivel de compromiso de las reglas de reparto que utiliza dicho Plan de Ayudas es mayor que el compromiso en el reparto a través del τ-valor.

5. Bibliografía

Aumann, R.J., Maschler, M. (1985). Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. Journal of Economic Theory 36, pp 195-213.

Curiel, I.J., Maschler, M., Tijs, S.H. (1987). Bankruptcy games. Zeitschrift für Operations Research Series A 31, pp 143-159.

O'Neill, B. (1982). A problem of rights arbitration from the Talmud. Mathematical Social Sciences 2, pp 345-371.

Schmeidler, D. (1969). The nucleolus of a characteristic function game. Siam Journal of Applied Mathematics 17, pp 1163-1170.

Shapley, L.S. (1953). A value for n-person games. In: Contributions to the Theory of Games II (H. Kuhn and A. W. Tucker eds.). Princeton University Press, Princeton, pp 307-317.

Tijs, S.H. (1981). Bounds for the core and the τ-value. In: Game Theory and Mathematical Economics (O. Moeschlin and D. Pallaschke eds.). North-Holland Publishing Company, Amsterdam, pp 123-132.

[1] El orden de llegada corresponde a una permutación $\pi \in \Pi_N$ de un conjunto de demandantes N.