

Capítulo 4. Métodos de Análisis Aplicados.

Introducción

Revisadas las principales teorías referidas a la modelización de la sostenibilidad, así como a su medición en base al uso de indicadores, en los siguientes capítulos se trata de avanzar en la opción de la definición de un indicador sintético de calidad del desarrollo urbano aplicado a las ciudades más pobladas de Andalucía.

A la hora de elaborar índices o indicadores sintéticos existe una larga tradición en materia de predicción y análisis de ciclos económicos²³². De las múltiples posibilidades metodológicas existentes, tras una serie de comentarios generales referidos al uso de técnicas multivariantes, en este capítulo se exponen sucintamente los tres métodos de análisis estadístico que se aplicarán seguidamente para la obtención de dicho índice. Se han seleccionado básicamente tres métodos de análisis multivariante:

- a) Análisis de Componentes Principales (ACP). Se trata de la técnica con mayor aceptación en la elaboración de índices aplicados ampliamente a todos los ámbitos de las ciencias sociales y ambientales.
- b) Análisis de la Distancia P_2 (ADP_2). Como método representativo del grupo de técnicas referidas a la medición de distancias, el índice DP_2 se ha aplicado a la elaboración de indicadores sintéticos en Economía.
- c) Agregación de Conjuntos Difusos (ACD). Esta técnica se basa en la teoría de los conjuntos difusos (fuzzy sets theory) como forma para salvar la vaguedad e imprecisión de la información estadística disponible y del concepto a medir, el desarrollo.

Finalmente, se enuncian los principales condicionantes derivados de un enfoque basado en el uso de indicadores como medida del desarrollo a partir de sus componentes, así como las propiedades que ha de cumplir un buen índice.

²³² Entre otras referencias clásicas, destacan Burns y Mitchell (1946), Hymans (1973), Auerbach (1982) y Lahiri y Moore (1991), así como Maravall (1989), Melis (1983) e INE (1994) en España. No obstante, autores como Koopmans (1947) critican abiertamente la construcción de indicadores sintéticos sin la adecuada base teórica previa.

4.1. Bases para la aplicación de métodos multivariantes en la elaboración de índices de desarrollo.

En análisis empíricos centrados en la Economía Regional, para obtener una única medida explicativa del nivel de desarrollo o bienestar de un territorio, se recurre a modelos que tratan de determinar estructuras latentes en un conjunto de variables (Martín, 1988; Pulido y Cabrer, 1994). Básicamente se puede distinguir entre técnicas basadas en el análisis de la correlación existente, o bien metodologías centradas en la regresión múltiple y modelos econométricos.

Dentro de los modelos basados en el análisis de la correlación observada, el procedimiento genérico que se sigue tras la definición del modelo inicial es:

1. Identificación y selección de las variables e indicadores relevantes. Definidas las variables significativas del modelo *a priori*, se seleccionan los indicadores que reflejen su valor, en base unas veces a la correlación observada entre los indicadores y el objetivo de medida, otras a la variancia explicada por los mismos.
2. Normalización. La estandarización se realiza con el objetivo de salvar, en el caso de variables cuantitativas, el problema derivado de la distinta unidad de medida y la forma funcional de los indicadores.
3. Ponderación. Como ya se ha comentado en el apartado referido a los indicadores de sostenibilidad (epígrafe 3.3), se trata de la cuestión crucial en la definición del índice final. Básicamente pueden utilizarse como ponderaciones los pesos implícitos en el modelo empírico, otros basados en hipótesis sobre su importancia en términos del objetivo final, o bien medidas subjetivas. En este punto resulta importante la definición de niveles críticos para la sostenibilidad.
4. Agregación y cálculo.
5. Interpretación o evaluación.

Como aparece en la mayoría de textos de referencia para el análisis multivariante clásico (Kendall, 1975; Lebart *et al.*, 1977; Anderson, 1984), el objetivo principal del mismo es el conocimiento del comportamiento colectivo de un conjunto de variables interrelacionadas de forma que sus efectos no pueden interpretarse únicamente por separado. El análisis se centra en la definición e interpretación del valor teórico. Este

valor se define como una combinación lineal de la realización de las variables aleatorias (X_j) con ponderaciones (w_j) determinadas empíricamente por la técnica multivariante específica:

$$\text{Valor Teórico: } w_1 X_1 + w_2 X_2 + \dots + w_j X_j + \dots + w_p X_p$$

Dependiendo de la técnica multivariante, el valor teórico tendrá una función definida en base al tipo de análisis realizado: de dependencia o de interdependencia. Por ejemplo, en el Análisis Factorial, técnica para el análisis de la interdependencia, el valor teórico trata de representar las estructuras subyacentes o la dimensionalidad de las variables tal y como se representan en sus correlaciones.

Los pasos genéricos de todo análisis multivariante suelen ser los siguientes (Anderson, 1984):

1. Definición del objetivo de la investigación, así como de la técnica multivariante conveniente.
2. Desarrollo y planificación del análisis, formulando los supuestos básicos del análisis multivariante.
3. Evaluación de los supuestos básicos y su incidencia en la capacidad para representar las relaciones multivariantes.
4. Estimación del modelo multivariante y valoración del ajuste del modelo.
5. Interpretación del valor teórico para identificar la evidencia empírica de las relaciones multivariantes de los datos.

Una cuestión previa a la aplicación de la técnica multivariante es el análisis de los datos, hecho que redundará en un mejor conocimiento de las relaciones entre las variables así como una mejor fiabilidad en los resultados obtenidos. Para ello puede realizarse el siguiente procedimiento (Hair *et al.*, 1999):

1. Descripción de los datos. Mediante el habitual análisis estadístico de medidas descriptivas, etc.
2. Identificación y tratamiento de los datos ausentes y atípicos. Estableciendo las posibles causas, lo que llevará a distintos procedimientos en cada caso, tales como el mantenimiento de las variables o casos con este tipo de problemas, aplicar técnicas de imputación, o bien la eliminación del análisis.
3. Verificación de los supuestos del análisis multivariante sobre las variables individuales, su distribución conjunta y el valor teórico final. Estos supuestos

varían en cada técnica, pasando por la normalidad, la linealidad, la homoscedasticidad o la ausencia de correlación en los errores.

4.1.1. Hipótesis y requisitos generales para los indicadores sintéticos.

Además de los supuestos derivados de la técnica multivariante específica es necesario definir otro tipo de hipótesis por la naturaleza del análisis en sí. El hecho de que se trate de medir la calidad del desarrollo mediante el análisis de sus componentes en base al uso de indicadores, hace tan necesario como evidente definir las siguientes hipótesis iniciales²³³ (Pena, 1977):

- Hipótesis I. Completitud. Se supone que el número de los componentes del desarrollo es completo, en el sentido de que están representadas todas las propiedades relacionadas con el objetivo buscado por el índice global.
- Hipótesis II. Bondad de los indicadores simples. Se acepta que los indicadores parciales o simples son “buenos” en el sentido de que miden adecuadamente los estados en que se encuentra cada componente en el momento del tiempo a que se refiere (se minimizan los errores de medición).
- Hipótesis III. Objetividad. Se acepta que la finalidad buscada por el indicador sintético puede ser debidamente alcanzada mediante indicadores simples objetivos, no necesitándose, por tanto, la utilización de indicadores de percepción para el conocimiento del problema.

Siguiendo a Pena (1977), es importante definir las condiciones que *a priori* han de exigirse a un indicador sintético genérico “I”:

- Postulado I. Existencia y Determinación. La función matemática que define el índice ha de existir y tener solución.
- Postulado II. Monotonía. El índice ha de responder positivamente a una modificación positiva de los componentes y negativamente a una modificación negativa. Ello obliga en algunos casos a cambiar el signo de los indicadores cuya correlación sea negativa con el objetivo a medir (desarrollo).
- Postulado III. Unicidad. El índice ha de ser único para una situación dada.
- Postulado IV. Invariancia. El índice ha de ser invariante respecto a un cambio de origen o de escala de los componentes.

²³³ La importancia de estas hipótesis es clara dado que el instrumento de las dos primeras técnicas es el análisis de la correlación existente entre las variables consideradas.

- Postulado V. Homogeneidad. La función matemática que define el índice $I = f(I_1, I_2, \dots, I_m)$ ha de ser homogénea de grado uno. Este postulado es vital para la cardinalidad del índice:

$$f(c \cdot I_1, c \cdot I_2, \dots, c \cdot I_m) = c \cdot f(I_1, I_2, \dots, I_m)$$

- Postulado VI. Transitividad. Si (a), (b) y (c) son tres situaciones distintas del objetivo medible por el índice, e $I(a)$, $I(b)$ e $I(c)$ son los valores del indicador correspondiente a esas tres situaciones, debe verificarse que:

$$[I(a) > I(b) > I(c)] \Rightarrow [I(a) > I(c)]$$

- Postulado VII. Exhaustividad. El índice debe ser tal que aproveche al máximo y de forma útil la información suministrada por los indicadores simples.

Los índices elaborados mediante el DP_2 cumplen estas condiciones, sin embargo, los indicadores basados en el Análisis Factorial no cumplen las propiedades siguientes (Zarzosa, 1996):

- a) El postulado III (si la extracción de los factores no es mediante el método de los componentes principales),
- b) El postulado IV (se han de estandarizar previamente los indicadores),
- c) El postulado V, pues no se derivan medidas cardinales, sólo ordinales.
- d) El postulado VI, pues al modificar la matriz inicial y añadir un nuevo elemento o variable puede afectar a las ordenaciones finales en las puntuaciones de los factores.

Considerando como objetivo el establecimiento de una medida sintética del desarrollo²³⁴, diversas críticas pueden efectuarse sobre las metodologías seleccionadas, tanto sobre los índices elaborados a partir de componentes principales como en las medidas de distancia. La principal se centra en el no cumplimiento de alguna de las hipótesis de partida arriba comentadas, lo que sumado a la asignación de ponderaciones en base a correlaciones empíricas, puede llevar a resultados alejados a la realidad. Si no se realiza una selección correcta de los indicadores simples, o si ésta no abarca las principales dimensiones del objeto de estudio, difícilmente el índice final “indicará” algo representativo acerca de la cuestión principal.

²³⁴ Muchas son las críticas sobre el uso de medidas sintéticas del desarrollo centradas en los problemas que conlleva la selección correcta de los indicadores, su comparabilidad, la generalización excesiva, los efectos compensatorios, la mayor importancia de factores como el crecimiento económico o la renta, etc.

Aplicando estas técnicas, la medida del grado de desarrollo a partir de un conjunto completo de indicadores representativos de las esferas social, económica y ambiental no provee una información directa sobre la sostenibilidad del ámbito en cuestión. En este trabajo se reconocen las limitaciones derivadas del uso de medidas sintéticas para el desarrollo cualificado como sostenible, así como aquellas otras específicas de las metodologías multivariantes, todas centradas en el supuesto de linealidad en las relaciones entre variables.

4.2. Análisis de Componentes Principales (ACP).

4.2.1. Análisis Factorial y Análisis de Componentes Principales.

El Análisis Factorial puede considerarse como un conjunto de técnicas de interdependencia cuyo principal objetivo es definir la estructura subyacente en una matriz amplia de datos. Entre las mismas se encuentra el Análisis de Componentes Principales (ACP), uno de los procedimientos propios de la estadística descriptiva más utilizados para sintetizar la información contenida en un número elevado de indicadores sobre diversos factores determinantes del nivel de desarrollo, calidad de vida, bienestar, etc²³⁵.

El objetivo específico del ACP, en palabras de Uriel (1995:343), “es explicar la mayor parte de la variabilidad total observada en un conjunto de variables con el menor número de componentes posibles”. Se trata pues de reducir la dimensión original de un conjunto de p variables observadas llamadas *originales*, correlacionadas entre sí, en un nuevo conjunto de m variables ortogonales (no correlacionadas), denominadas *componentes principales*.

²³⁵ Estas técnicas son desarrolladas inicialmente por Pearson (1901), Spearman (1904), Hotelling (1933) y Rao (1965), siendo muy utilizadas en análisis psicosociales por la Escuela de Chicago, con Thurstone (1947) o Vernon (1950) entre otros. Se pueden citar numerosas referencias, entre las que destacan desde una perspectiva metodológica: Kendall (1975), Harman (1976), Lebart *et al.* (1977), Anderson (1984), Comrey (1985), Dillon y Goldstein (1984), Johnson y Wichern (1998) y Hair *et al.* (1999). En España son importantes las referencias a Cuadras (1981), Sánchez (1984), Mallo (1985), Batista y Martínez (1989) y Uriel (1995), entre otros. De entre las aplicaciones del ACP al ámbito de estudio de este trabajo destacan King (1974), Ram (1982), Slottje *et al.* (1991), Young (1999), Lai (2000) y en España INE (1986;1991), Somarriba y López (2000), entre otros.

A partir de las correlaciones observadas entre las variables originales, se definen unas dimensiones subyacentes (los valores teóricos), que son los componentes principales, obtenidos como combinaciones lineales de las variables originales²³⁶. Obtenidos los componentes o factores, mediante la observación de las cargas factoriales, se consigue una mayor interpretabilidad de las relaciones existentes entre los datos, así como la definición del grado de explicabilidad de cada variable, afrontándose con todo ello el objetivo principal de este análisis: el resumen y la reducción de los datos en un conjunto más pequeño de variables con la menor pérdida de información posible.

En referencia a los supuestos básicos del ACP, gracias a que se trata de una técnica con una clara base geométrica (Pearson, 1901), se pueden relajar o no considerar en sentido estricto aquellos referidos a normalidad y homoscedasticidad²³⁷ (Sánchez, 1984; Uriel, 1995). No obstante, dado que la clave del análisis radica en la correlación lineal, resulta deseable cierto grado de multicolinealidad²³⁸.

Realizados los pasos previos de la investigación multivariante arriba comentados, se seleccionan las variables relevantes a incluir en el análisis. Ha de puntualizarse que, como señalan Hair *et al.* (1999), el ACP siempre producirá componentes, por lo que ha de minimizarse el número de variables a incluir y no proceder a seleccionar grandes cantidades de variables de forma indiscriminada, lo que conduciría a malos resultados (el conocido problema de “basura de entrada, basura de salida”) y correlaciones deshonestas.

Otra característica de esta metodología es la necesidad de trabajar con variables medidas en una escala de intervalo o razón²³⁹. La existencia de variables con menos

²³⁶ Se recuerda que un supuesto básico de esta técnica es la existencia de relaciones lineales entre las variables, hecho que, como argumenta Pena (1977), no resulta excesivamente restrictivo en análisis centrados en el desarrollo socioeconómico a la hora de identificar relaciones causa-efecto.

²³⁷ Lógicamente, ello supondrá una menor correlación observada entre las variables así como la posible inconsistencia posterior al aplicar test estadísticos de significación sobre los factores, hecho no obstante poco frecuente (Hair *et al.*, 1999).

²³⁸ De hecho puede aplicarse un contraste de esfericidad de Bartlett (1950) para verificar la hipótesis de correlación entre cada par de variables. No obstante, ante la presencia de medidas con cierto grado de heterogeneidad y muy diferentes escalas se opta por el uso de las variables estandarizadas (ACP normado).

²³⁹ En este sentido, Uriel (1995) aboga directamente por el uso de variables ratio, dado que eliminan el problema de magnitud o escala que enmascara otras características más profundas (*Op. cit.* pág. 333). No obstante, esta práctica acarrea otro tipo de problemática, modificando la forma de la distribución y

categorías o incluso dicotómicas reducirá las correlaciones afectando al Análisis Factorial²⁴⁰. La justificación a esta restricción es la baja robustez del coeficiente de correlación de Pearson a la no linealidad y a la presencia de variables con observaciones anómalas. Asimismo, es necesario trabajar con una base de datos completa, realizándose por ello un tratamiento de valores ausentes previos en su caso.

Los siguientes pasos suponen la elección de unas técnicas u otras, dentro del Análisis Factorial²⁴¹, por lo que pueden variar en cada investigación aplicada. No obstante, en el análisis empírico que sigue a este capítulo, el procedimiento general a seguir es el propio de un análisis de componentes principales normado.

4.2.2. Aplicación del ACP para la elaboración de un indicador sintético.

Se ha comentado que para elaborar un indicador sintético o índice que resuma la variabilidad observada en un conjunto de variables, definiendo así el comportamiento de una variable latente (p.e.: el desarrollo), el Análisis Factorial y en concreto su variante ACP, constituye un instrumento de análisis empírico muy útil. Los pasos a seguir para elaborar esta medida son los siguientes.

concediendo quizás demasiada importancia a casos que en términos absolutos estarían localizados en las colas de la distribución de cada variable.

²⁴⁰ Como señalan García *et al.* (2000), cuando se trabaja con variables categóricas o dicotómicas el coeficiente de correlación de Pearson pierde validez siendo necesarios otros coeficientes basados en la Chi-cuadrado (C de Contingencia, V de Cramer) o los coeficientes phi respectivamente. No obstante en esos casos es recomendable el uso de otras técnicas multivariantes como el Escalamiento Multidimensional, el Análisis de Correspondencias o el Análisis de Conglomerados jerárquico.

²⁴¹ La mayoría de autores constatan cierto grado de confusión entre el ACP y el Análisis Factorial común, a pesar de las diferencias en sus objetivos, sus características y su grado de formalización (Uriel, 1995). Sin duda, a ello contribuye el hecho de que el ACP sea una de las posibles técnicas aplicables para la definición de la primera matriz factorial en el Análisis Factorial. Sin embargo, el objetivo del presente trabajo no pasa por el análisis exhaustivo de ambos métodos. El ACP es la técnica de uso generalizado dado que no presenta los problemas prácticos del Análisis Factorial común tales como indeterminación de factores (las puntuaciones u ordenaciones resultado del análisis no son únicas para cada caso) o la dificultad en el cálculo empírico de la variancia común. No obstante, diversas investigaciones apuntan a la convergencia de ambos resultados (Velicer y Jackson, 1990).

4.2.2.1. Definición de la matriz de correlaciones.

Se parte de la matriz de variables originales X que recoge la información inicial de la muestra de n casos sobre p variables:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}$$

La matriz de variancias y covariancias muestrales V queda definida como:

$$V = \begin{bmatrix} S_1^2 & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_2^2 & \dots & S_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{p1} & S_{p2} & \dots & S_p^2 \end{bmatrix}$$

Cuya diagonal principal está compuesta de variancias iguales a la unidad cuando las variables están tipificadas.

Asimismo, a partir de X se puede calcular la matriz de correlaciones muestral R . Esta matriz informa sobre la concomitancia en la variación observada entre pares de variables que se tratará de explicar con el menor número de factores (variables latentes)²⁴². Las variables que muestran una muy baja correlación son candidatas a ser eliminadas del análisis:

²⁴² Si se parte de variables con las mismas unidades de medida, se puede realizar el análisis en base a la matriz de covariancias, no obstante las variables con variancias muy elevadas introducirán un sesgo dominando los componentes iniciales (Jolliffe, 1986). Por ello es preferible extraer los componentes a partir de R , lo que equivale a hacerlo a partir de la matriz inicial con los valores estandarizados, concediendo a todas las variables la misma importancia (ACP normado). Una tercera alternativa pasa por el ACP ponderado, en el que a cada variable o grupo de éstas se le asignan distintos pesos relativos (p.e.: la inversa de la raíz de la desviación típica de los valores propios obtenidos en un ACP previo).

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

4.2.2.2. Obtención de las componentes principales.

El ACP trata de explicar la mayor parte de la variabilidad total observada en un conjunto de variables con el menor número de componentes principales²⁴³. Los componentes son una nueva clase de variables independientes entre sí (ortogonales) y funciones lineales de las variables originales, con la propiedad de tener la variancia máxima. Estos componentes están jerarquizados en base a la información que incorporan, medida por el porcentaje de variancia total explicada de la matriz de datos originales. La obtención de los componentes es la que sigue (Uriel, 1995).

La primera componente principal Z_{1i} se expresa como combinación lineal de las p variables originales, donde u_{1j} son las ponderaciones:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \\ \dots \\ Z_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{p1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \dots \\ u_{1p} \end{bmatrix}$$

De forma matricial resumida, el componente z_1 será:

$$z_1 = Xu_1$$

La primera componente se obtiene maximizando su variancia $Var(z_1)$, sujeta a la restricción de que la suma de sus ponderaciones (u_{1j}) al cuadrado sea igual a la unidad:

²⁴³ La variancia total puede dividirse en tres partes diferenciadas: variancia común, variancia específica y error. El ACP incluye las unidades en la diagonal de la matriz de correlación para que la matriz factorial considere la variancia completa. El Análisis Factorial común por el contrario incorpora en la diagonal únicamente la variancia compartida. Los primeros componentes del ACP, a diferencia de los derivados del Análisis Factorial, contienen proporciones bajas de la variancia común y de aquella derivada del error.

$$\sum_{j=1}^p u_{1j}^2 = u_1' u_1 = 1$$

La variancia del primer componente, considerando que su media es cero, viene dada por:

$$Var(z_1) = \frac{\sum_{i=1}^n Z_{1i}^2}{n} = \frac{1}{n} z_1' z_1 = \frac{1}{n} u_1' X' X u_1 = u_1' \left[\frac{1}{n} X' X \right] u_1$$

Si las variables están tipificadas, $\left[\frac{1}{n} X' X \right]$ es la matriz de correlaciones R . Si las variables están expresadas en desviaciones respecto a la media, esa expresión es la matriz de covariancias muestral V . Siguiendo la descripción sobre la base de la matriz V , la expresión de la variancia es:

$$Var(z_1) = u_1' V u_1$$

Para maximizar esa función sujeta a la restricción $\sum_{j=1}^p u_{1j}^2 = u_1' u_1 = 1$, se conforma el langrangiano a maximizar:

$$L = u_1' V u_1 - \lambda (u_1' u_1 - 1)$$

Derivando respecto a u_1 e igualando a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = 2V u_1 - 2\lambda u_1 = 0 ; (V - \lambda I) u_1 = 0$$

Al resolver esa expresión se obtienen raíces características o autovalores (eigenvalues). El vector u_1 es el vector característico (eigenvector) correspondiente a la raíz característica mayor (λ_1) de la matriz V .

El resto de componentes se obtienen de forma análoga. Para el siguiente componente z_2 se impone además de $u_2'u_2 = 1$, la condición de que no esté correlacionado con el anterior: $u_2'u_1 = 0$ y así para todos los p componentes. Para el componente genérico Z_h :

$$\begin{aligned} u_h'u_h &= 1 \\ u_h'u_1 &= u_h'u_2 = \dots = u_h'u_{h-1} = 0 \end{aligned}$$

Es decir, que no estén correlacionados los componentes.

El vector de ponderaciones u_h para el componente z_h está asociado a la raíz característica λ_h , una vez ordenadas éstas de mayor a menor.

Para considerar la proporción de la variancia total explicada por cada componente, es necesario determinar la variancia de las componentes. Dada la condición impuesta de que $u_h'u_h = 1$, la variancia del componente z_h es precisamente la raíz característica λ_h a la que va asociada:

$$Var(z_h) = u_h'Vu_h = \lambda_h$$

La variabilidad total observada en las variables originales puede definirse como la suma de sus variancias, las cuales aparecen en la diagonal principal de la matriz V . La traza, suma de los elementos de la diagonal principal, de la matriz V es precisamente esa variancia total:

$$Traza(V) = \sum_{h=1}^p \lambda_h$$

Por consiguiente, el componente z_h explica una proporción P_h de la variación total en los datos originales igual a²⁴⁴:

$$P_h = \frac{\lambda_h}{\text{Traza}(V)}$$

Resulta habitual determinar las covariancias y las correlaciones entre las variables originales y los componentes principales. La covariancia entre la variable X_j y la componente Z_h es:

$$\text{Cov}(X_j, Z_h) = \lambda_h u_{hj}$$

La correlación entre la variable tipificada X_j y la componente Z_h es:

$$r_{jh} = \frac{\lambda_h u_{hj}}{\sqrt{\text{var}(X_j)} \sqrt{\lambda_h}} = u_{hj} \sqrt{\lambda_h}$$

Este coeficiente es el que conforma la denominada *matriz factorial, de componentes o de cargas factoriales*.

Por otro lado, el Análisis Factorial propiamente dicho tiene una finalidad inferencial más acusada. Se plantea como objetivo explicar únicamente las interrelaciones entre las variables, mediante el análisis de la variancia común compartida por todas las variables objeto de análisis (comunalidades). En este caso, las variables originales son las variables dependientes y vienen explicadas por los factores comunes no observables. A la hora de extraer la matriz de factores inicial se pueden aplicar distintos métodos alternativos. Los dos más importantes son el método de ejes

²⁴⁴ Si en vez de partir de la matriz V se trabaja con la matriz R , la $\text{Traza}(R) = p$, por lo que

$$P_h = \frac{\lambda_h}{p}$$

principales y el método de componentes principales²⁴⁵, este último muy similar al ACP pues parte de la matriz de componentes resultante del mismo.

4.2.2.3. Selección del número de componentes.

Sobre la base de la información recogida en las raíces características (autovalores) hay diversos criterios para decidir el número razonable de factores que permita definir la estructura correcta de los datos y posibilite su posterior interpretación. Los criterios más importantes son²⁴⁶:

- a) Criterio de la media aritmética o de la raíz latente (Kaiser, 1958). Se basa en la selección del número de factores cuya raíz característica λ_j supere el valor medio de las raíces características. En el caso de variables tipificadas (donde $\sum_{j=1}^p \lambda_j = p$), este criterio se traduce en seleccionar las componentes cuya raíz característica sea mayor que 1²⁴⁷.
- b) Contraste de caída (Cattell, 1965). Este contraste parte de la representación gráfica de las raíces características para cada componente en orden decreciente (gráfico de sedimentación). Se escogen las componentes hasta el punto en que la curva descendente comience a ser una línea horizontal (zona de sedimentación), lo que indica que a partir de ese punto la proporción de variancia explicada no compartida es demasiado grande.
- c) Porcentaje de variancia explicada. El criterio de la variancia explicada radica precisamente en acumular el porcentaje de variancia explicada por las componentes o factores hasta llegar a un nivel mínimo (en investigaciones sociales suele ser en torno al 60-70%), en relación con el número de variables y observaciones. Otra alternativa consiste en escoger suficientes componentes para explicar o discriminar entre subconjuntos muestrales que *a priori* se puedan delimitar.

²⁴⁵ Se trata de los dos métodos más importantes, sin embargo pueden mencionarse otros tales como el de Máxima Verosimilitud, Mínimos Cuadrados No Ponderados, Mínimos Cuadrados Generalizados, Factorización Alfa y Factorización Imagen.

²⁴⁶ Otras técnicas vienen recogidas en Cuadras (1996:286-291).

²⁴⁷ Jolliffe (1972) propone, en base a simulaciones, que el valor límite para seleccionar un componente puede llegar a ser 0,7. No obstante, este hecho repercute en una menor explicabilidad de la variancia total del componente en cuestión, que ni siquiera explica la variancia contenida en una variable.

4.2.2.4. Interpretación de los componentes.

En ocasiones, los componentes seleccionados inicialmente en la matriz de cargas factoriales permiten una interpretación clara de las variables que comprenden cada uno de ellos y de cuáles son más representativas dentro de los mismos. Básicamente el ACP, como técnica de reducción estadística, concluye en este punto a falta de la aplicación de los resultados del análisis.

Por otro lado, para facilitar la interpretación, lo habitual es realizar la rotación de los factores consiguiendo soluciones factoriales menos ambiguas y más significativas. La rotación de factores es una técnica iterativa que supone girar en el origen los ejes de referencia de los factores hasta alcanzar cierta posición. Si la rotación es *ortogonal* se giran 90 grados respecto a los de referencia. Si la rotación es *oblicua* no se plantean restricciones al ángulo de giro²⁴⁸. Identificadas las variables con mayor carga o influencia sobre cada factor se puede proceder a etiquetar o nombrar el factor.

4.2.2.5. Aplicación de los resultados del análisis.

Bajo el objetivo final de la reducción de datos, se pueden plantear diversos procedimientos alternativos. Si bien no existe un consenso claro sobre este tema, básicamente se pueden agrupar en dos tipos de técnicas: el uso de escalas aditivas o de las puntuaciones en los componentes. Como señalan Hair *et al.* (1999), en la elección del método han de valorarse dos parámetros complementarios: el interés en conseguir una medida que mantenga la ortogonalidad (puntuaciones de los componentes), frente a una medida más aplicable o extrapolable a otros ámbitos (escala aditiva).

En la formulación de escalas aditivas se trata de crear una medida compuesta o sintética a partir de las *variables suplentes*. Éstas son aquellas variables con mayor carga para cada factor seleccionado, actuando como representantes del mismo. Lo habitual es

²⁴⁸ El tipo de rotación más usada es la ortogonal al mantener independientes los componentes finales. Por su parte, la rotación oblicua muestra una mayor interpretabilidad, permitiendo que los componentes estén relacionados entre sí. Dentro de los métodos de rotación ortogonal se encuentran distintas técnicas como VARIMAX, EQUAMAX y QUARTIMAX. El método VARIMAX es el más utilizado, consistente en la maximización de la suma de variancias de la matriz de factores. En referencia a la rotación oblicua, no existe un consenso que permita señalar la técnica más frecuente, dependiendo en la mayoría de los casos del paquete de análisis estadístico que se maneje (para SPSS 10.0 se incluyen OBLIMIN directo y PROMAX) y del grado de explicabilidad finalmente obtenido.

asignar el mismo peso a todos los componentes y combinar las variables suplentes mediante la media aritmética simple²⁴⁹.

En el caso del cálculo de las puntuaciones factoriales, se parte de la *matriz de coeficientes de puntuaciones de los componentes o factores*²⁵⁰, la cual muestra los valores de u_{hi} para calcular el valor del componente h -ésimo para el caso i .

$$Z_{hi} = u_{h1}X_{1i} + u_{h2}X_{2i} + \dots + u_{hp}X_{pi} \quad h = 1, 2, \dots, p \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Así, todas las variables influyen en alguna medida en la puntuación final del caso. Lo habitual es presentar las puntuaciones de forma tipificada:

$$\frac{Z_{hi}}{\sqrt{\lambda_h}} = \frac{u_{h1}}{\sqrt{\lambda_h}} X_{1i} + \frac{u_{h2}}{\sqrt{\lambda_h}} X_{2i} + \dots + \frac{u_{hp}}{\sqrt{\lambda_h}} X_{pi} \quad h = 1, 2, \dots, p \quad i = 1, 2, \dots, n$$

En muchas ocasiones, la aplicación de esta técnica se suele limitar a la selección de la primera componente²⁵¹, identificando como indicador sintético la puntuación de los casos para la misma. Otra alternativa es la agregación directa de los primeros componentes, ponderados, por ejemplo, por la desviación típica de cada uno (Peters y Butler, 1970), o bien por el porcentaje de variancia explicada.

A partir de las puntuaciones obtenidas para cada componente también es posible realizar escalas sumativas, agregando los distintos valores de las puntuaciones para cada caso.

No obstante, sea cual sea el procedimiento elegido, resulta conveniente realizar un análisis posterior de la correlación entre este índice y los factores seleccionados, para en cierta forma validar la bondad de los resultados. El paso final consiste en la valoración de la necesidad de cambios en el análisis realizado, desde la eliminación de variables al

²⁴⁹ Esta posibilidad es desarrollada por Jolliffe (1973), quien describe varios métodos para seleccionar subconjuntos de variables.

²⁵⁰ Al utilizar el ACP para la extracción de factores se obtienen puntuaciones exactas de los factores para cada observación. En el resto de métodos (salvo factorización imagen y alfa) se ha de realizar una estimación.

²⁵¹ Siempre y cuando ésta explique un porcentaje suficientemente elevado de la variancia total.

empleo de otros métodos de selección de factores o rotación. Si el interés del análisis es la generalización de los resultados muestrales se puede proceder por ejemplo a repetir el mismo con una muestra adicional o, si la muestra es suficientemente grande, dividirla en varias submuestras para analizar la robustez de los resultados obtenidos.

4.3. Análisis de la Distancia P_2 (ADP_2).

4.3.1. Medidas de Distancia.

Las medidas de distancia o disimilitud constituyen un enfoque muy habitual para el diseño de indicadores sintéticos económicos de coyuntura o medidas del desarrollo, la pobreza y la desigualdad²⁵². Como se argumenta en Pena (1977) y Zarzosa (1996), los indicadores sintéticos elaborados sobre la base de las medidas de distancia satisfacen una serie de condiciones exigidas en un espacio métrico:

- a) No negatividad. La distancia es un número real único no negativo, tomando únicamente el valor cero cuando los dos vectores sean iguales.

$$d_1(X,Z)=0; \text{ solamente si } X=Z.$$

$$d_1(X,Z)>0; \text{ para todo } X \neq Z$$

- b) Conmutatividad. La distancia entre el vector X y el vector Z es igual a la distancia entre el vector Z y el X.

$$d_1(X,Z)=d_1(Z,X).$$

- c) Desigualdad triangular. Si se tienen tres vectores definidos en el mismo espacio vectorial tales como X, Y, Z, debe verificarse que la suma de las distancias de dos de ellos a un tercero ha de ser mayor o igual que la distancia existente entre ambos.

$$d_1(X,Z) < d_1(X,Y) + d_1(Y,Z).$$

²⁵² Enfoque muy aplicado a la medida del desarrollo (Ivanovic,1963;1974) y la desigualdad entre distribuciones de renta (*vid.* Beckenbach y Bellman, 1961; Atkinson, 1970; Dagum, 1980; Shorrocks, 1982; Ebert, 1984; Chakravarty y Dutta, 1987, entre otros). En Fernández (1992) se hace una revisión acerca de índices de pobreza.

Gracias a ello, estos indicadores pueden utilizarse para comparaciones entre distintos ámbitos y a lo largo del tiempo (siempre y cuando la base temporal sea la misma), dado que se consigue la denominada propiedad del mantenimiento de orden. La introducción de nuevos casos no supone la alteración de la ordenación entre los casos existentes, hecho que no ocurre en los indicadores elaborados a partir del ACP por ejemplo.

Desde la perspectiva de la métrica euclídea, la distancia entre dos vectores o casos (i, i^*) se define como la raíz de la suma cuadrática de las distancias lineales proyectadas sobre el eje de coordenadas para las p variables consideradas:

$$d(i, i^*) = \sqrt{\sum_{j=1}^p (x_{ij} - x_{i^*j})^2}$$

En ocasiones, como el análisis multivariante cluster por ejemplo, se trabaja con la distancia euclídea al cuadrado:

$$d^2(i, i^*) = \sum_{j=1}^p (x_{ij} - x_{i^*j})^2$$

En notación matricial:

$$d^2(i, i^*) = (x_i - x_{i^*})'(x_i - x_{i^*})$$

O bien también se normaliza²⁵³, dividiéndose entre las variancias de cada variable:

$$d^2(i, i^*) = \sum_{j=1}^p (x_{ij} - x_{i^*j})^2 / \sigma_j^2$$

En notación matricial:

$$d_e^2(i, i^*) = (x_i - x_{i^*})D_x^{-1}(x_i - x_{i^*})'$$

²⁵³ Como se señala en Hair *et al.* (1999: 504) el uso de datos no estandarizados implica una inconsistencia en las medidas de distancias derivada del cambio de la escala de las variables.

Donde D_x es la matriz diagonal con las variancias de las variables.

Una variante de medida de distancia basada en las diferencias al cuadrado se encuentra en la distancia generalizada de Mahalanobis d_m (1936):

$$d_m^2(i, i^*) = \sum_{j=1}^p (x_{ij} - x_{i^*j})^2 / \sigma_{ij}$$

En forma matricial:

$$d_m^2(i, i^*) = (x_i - x_{i^*}) C_x^{-1} (x_i - x_{i^*})'$$

Donde C_x es la matriz de covariancias.

La distancia d_m frente a la distancia euclídea aporta las ventajas de tener en cuenta la escala de medida de las variables y considerar además la correlación entre las mismas (d_m se hace máxima cuando éstas son incorrelacionadas). Se trata en realidad de la distancia euclídea ponderada por la matriz de covariancias. Sin embargo, no cumple la propiedad de desigualdad triangular, por lo que no es una distancia en un espacio métrico.

Por otra parte, si se deja de lado momentáneamente su interpretación anglosajona, el ACP no resulta un método ajeno al concepto de distancia según la métrica euclídea (Lebart *et al.*, 1995). De hecho, ya desde las bases para su formulación inicial (Pearson, 1901) se trata de encontrar la forma de ajustar hiperplanos según el criterio de mínimos cuadrados ortogonales. Por ello, el ACP también puede contemplarse como un método geométrico de distancias²⁵⁴ en el que se evalúan las similitudes o distancias entre casos (o variables) considerando el grado de correlación entre las variables de una amplia matriz de datos. De hecho, en el ACP, la distancia entre dos casos (i, i^*) se puede definir como la distancia de Mahalanobis (Cuadras, 1981) que define la inercia de la nube de puntos.

²⁵⁴ En palabras de Batista y Martínez (1989:34): “la técnica determina un subespacio de dimensión m ($m < p < N$), que en cierta manera optimiza el ajuste de una nube de puntos, de manera que las distancias medidas en este subespacio, reflejen de la mejor forma posible las distancias reales entre las variables y entre los objetos y sus representaciones respectivas en los espacios R^N y R^p .”

Frente a estas distancias basadas en diferencias cuadráticas existen otro grupo de medidas de las variaciones de las diferencias en términos absolutos. La distancia absoluta, de bloque, *city-block*, o también llamada de *Manhattan* (sus curvas de nivel son cubos) es:

$$d_B(i, i^*) = \sum_{j=1}^p |x_{ij} - x_{i^*j}|$$

Sin embargo, esta distancia puede plantear problemas al partir del supuesto de incorrelación entre las variables.

Variaciones sobre este tipo de distancias basadas son:

a) La distancia de Chebishev es:

$$d_C(i, i^*) = \max |x_{ij} - x_{i^*j}|; \forall j$$

b) La distancia F de Frechet:

$$d_F(i, i^*) = \sum_{j=1}^p \frac{|x_{ij} - x_{i^*j}|}{\sigma_j}$$

En general, la métrica de Minkowski, define la distancia genérica r-métrica:

$$d_M(i, i^*) = \sqrt[r]{\sum_{j=1}^p |x_{ij} - x_{i^*j}|^r}; r = 1, 2, 3, \dots$$

Donde x'_{ij} es el elemento j del vector i de tamaño p, x'_{i^*j} es el elemento j del vector i^* y r es el factor de Minkowski. Esta norma coincide con la distancia euclídea cuando $r=2$ y con la distancia absoluta (métrica de Hamming) cuando $r=1$.

La distancia I (d_I) de Ivanovic (1963; 1974), es usada ampliamente para la elaboración de indicadores sintéticos de pobreza, cuyo caso particular es la distancia de Frechet La distancia I es aplicada como medida de disimilitud entre casos o respecto a

un caso estándar con relación a un conjunto de p variables incluidas en el vector X , ponderándolas por la inversa de la desviación típica de la variable y corrigiendo la información redundante mediante la inclusión del coeficiente de correlación parcial. La distancia I entre dos vectores i, i^* :

$$d_I(i, i^*) = \sum_{j=1}^p \frac{|x_{ij} - x_{i^*j}|}{\sigma_j} \prod_{i=1}^{j-1} (1 - r_{ij,1,2,\dots,i-1}), i < j$$

Donde $r_{ij,1,2,\dots,i-1}$ es el coeficiente de correlación parcial entre el componente i -ésimo y el j -ésimo.

En su representación matricial:

$$d_I(i, i^*) = r' \Psi |x_i - x_{i^*}|$$

Donde r es el vector de ponderaciones definido sobre la base del conjunto de correlaciones parciales, y Ψ es la matriz diagonal con los inversos de las desviaciones típicas de las variables. Dado que el resultado del índice varía si se cambia el orden de introducción de las variables, es necesario establecer el orden de incorporación idóneo de cada componente, en función a su aportación de información. Para ello, Ivanovic describe un método de aproximación iterativo, basado en el uso del coeficiente de correlación entre el resultado anterior del índice calculado para cada caso (partiendo de

la distancia de Frechet $\sum_{j=1}^p \frac{|x_{ij} - x_{i^*j}|}{\sigma_j}$) y los valores de cada indicador parcial,

ordenándose éstos atendiendo al valor absoluto de las correlaciones. Este proceso concluye cuando el orden de inclusión se hace estable (solución convergente).

4.3.2. Distancia P_2 .

La distancia P_2 (DP_2)²⁵⁵ desarrollada por Pena (1977) a partir de la distancia I de Ivanovic, modifica el sistema de ponderaciones (factores correctores), basándose en el uso del coeficiente de determinación cuya interpretación resulta más directa que el uso

²⁵⁵ De entre las aplicaciones realizadas en base al DP_2 se pueden citar Pena (1977, 1994), Sanz y Terán (1988), Zarzosa (1996) e IEA (2000).

del coeficiente de correlación en la distancia I.

Sea x_i el vector de estado de los componentes (indicadores) en la situación o caso i , y x_{ij} el estado del componente j en la situación i :

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{ip})$$

Sea entonces x_{i^*} el vector norma o de referencia. Este vector puede referirse a una situación ideal donde x_{i^*j} es el estado del componente j en la situación de referencia:

$$x_{i^*} = (x_{i^*1}, x_{i^*2}, \dots, x_{i^*j}, \dots, x_{i^*p})$$

El índice P_2 para comparar los vectores x_i, x_{i^*} es definido de la siguiente forma:

$$DP_2 = \sum_{j=1}^p \frac{|x_{ij} - x_{i^*j}|}{\sigma_j} (1 - R_{j:j-1, j-2, \dots, 1}^2)$$

Donde $R_{j:j-1, j-2, \dots, 1}^2$ es el coeficiente de determinación en la regresión de x_j sobre $x_{j-1}, x_{j-2}, \dots, x_1$; Este coeficiente es independiente de la unidad de medida de las variables. $R_1^2 = 0$, dado que la primera variable contribuye con toda su información al no existir una variable previa, por lo que la ponderación que se le asigna es 1. La desviación estándar σ_j corresponde a los valores mostrados por el componente o variable j .

Se realiza la normalización mediante el factor $\frac{|x_{ij} - x_{i^*j}|}{\sigma_j}$. Dividiendo la distancia para el componente j entre σ_j , el indicador es adimensional. Además, esta distancia es ponderada por la inversa de σ_j , por lo que su contribución al índice es inversamente proporcional a su dispersión.

Las ponderaciones principales vienen dadas por $(1 - R_{j:j-1, j-2, \dots, 1}^2)$. Estos factores

eliminan la información redundante de los indicadores, separando de los mismos la variabilidad ya explicada por otros indicadores precedentes²⁵⁶.

El orden de introducción de los componentes también hace variar el resultado final. Para ello se aplica el proceso iterativo de Ivanovic arriba descrito. Cada indicador es introducido de acuerdo con su correlación lineal con el índice previamente calculado, partiendo de la distancia de Frechet como primera aproximación. La distancia P_2 final para la situación o caso i respecto a la referencia i^* muestra el orden de inclusión correcto para los indicadores:

$$DP_2 = \frac{|x_{i1} - x_{i^*1}|}{\sigma_1} + \frac{|x_{i2} - x_{i^*2}|}{\sigma_2} (1 - R_{2,1}^2) + \frac{|x_{i3} - x_{i^*3}|}{\sigma_3} (1 - R_{3,2,1}^2) + \dots + \frac{|x_{ip} - x_{i^*p}|}{\sigma_p} (1 - R_{p,p-1,p-2,\dots,1}^2)$$

La distancia P_2 puede calcularse también por etapas, se trata del caso concreto en que es posible dividir la matriz inicial de indicadores en dos submatrices ortogonales que darían lugar a sendos índices cuya agregación será la distancia P_2 final.

4.4. Modelo de Agregación de Conjuntos Difusos (ACD).

4.4.1. Problemas derivados de la información imperfecta.

La información utilizada en la toma de decisiones referidas al bienestar o a la sostenibilidad no es perfecta, dada, entre otras cuestiones, la cualidad de concepto multidimensional a analizar. Este hecho cuestiona el llamado paradigma de la mensurabilidad completa o perfecta que ha sido la base del desarrollo científico clásico.

Existen ciertas trabas en términos de la calidad de la información que, sobre todo en las ciencias sociales, imposibilitan la medida completa de conceptos como el desarrollo. Éstos son, por orden de importancia, la concurrencia de incertidumbre e irreversibilidad, y de otro lado, la vaguedad y la subjetividad. El tratamiento de la

²⁵⁶ Un criterio de los existentes (Zarzosa, 1996) para eliminar los indicadores simples innecesarios consiste en excluir aquella X_j cuyo valor de $(1 - R_{j,j-1,j-2,\dots,1}^2)$ sea igual a la unidad.

información generada bajo estos elementos se ha realizado desde diversos enfoques propios de teorías de la medida y decisión (Roberts, 1979).

Incertidumbre e irreversibilidad

En la toma de decisiones bajo incertidumbre, tradicionalmente se diferencian dos tipos (Keynes, 1921): riesgo (débil) e incertidumbre (fuerte). El riesgo se refiere a las distribuciones de probabilidad basadas en clasificaciones de posibles eventos. La incertidumbre alude a sucesos cuya distribución de probabilidad no existe o no es completamente definible ante la falta de criterios de clasificación fiables. Frente a la incertidumbre, el principal instrumento es la teoría de la probabilidad, en todas sus vertientes, desde la frecuentista a la bayesiana.

La ortodoxia aplicada a la teoría de la decisión bayesiana utiliza un mecanismo basado en la racionalidad subjetiva. El agente decisor, en base a sus creencias o conocimientos, genera probabilidades subjetivas de los estados de la naturaleza más relevantes, así como a los resultados de las acciones disponibles. De esta manera, no existe diferencia analítica relevante entre riesgo e incertidumbre (Cyert y de Groot, 1987).

Sin embargo, esta solución necesita de un proceso de perfeccionamiento o aprendizaje siguiendo las reglas de decisión bayesianas. Dado que los individuos parten de un concepto subjetivo de la probabilidad (al no conocer el espacio probabilístico completo), se necesita establecer un proceso estocástico estacionario el suficiente tiempo para que se ajuste la toma de decisiones al mismo, como señala la racionalidad adaptativa (Lucas, 1986).

En la problemática asociada con la sostenibilidad, la toma de decisiones referida a la conservación o explotación de un recurso o ecosistema, va irremediamente asociada a riesgo e incertidumbre (Funtowicz y Ravetz, 1991). Por una parte, existe un riesgo cierto que es afrontado asignando probabilidades a los posibles eventos que aparecen en el corto plazo. De esta forma es posible maximizar el valor esperado conocido el conjunto de posibles “estados de la naturaleza”: desarrollo económico total vs. conservación total, así como todas las situaciones intermedias.

Por otra parte, se produce un elevado grado de incertidumbre sobre los efectos a largo plazo apareciendo problemas de irreversibilidad de los efectos derivados de la decisión adoptada, así como de aquellas otras implicaciones sobre el resto de ecosistemas o la calidad/cantidad de los recursos no renovables y la biodiversidad (problema de la complejidad). No sólo se desconoce el abanico de posibles situaciones futuras y sus probabilidades, sino que además, los daños ambientales producidos en el proceso de toma de decisiones pueden ser irreversibles, dado el grado de complejidad de las relaciones entre los subsistemas socioeconómico y ambiental²⁵⁷. Los agentes decisores carecen de una definición clara del espacio probabilístico dado que no conocen los posibles sucesos resultantes necesarios para asignar probabilidades. La irreversibilidad invalida la posibilidad de “aprendizaje” o perfeccionamiento²⁵⁸ en la asignación de probabilidades, dado que no es posible repetir la regla de decisión si el recurso natural (p.e.: biodiversidad) ha desaparecido.

Por regla general la toma de decisiones de gestión ambiental maximizando el valor esperado se realiza no sólo desconociendo las probabilidades de determinados sucesos posibles, sino también la evolución futura de los efectos de las actividades humanas sobre la calidad y disponibilidad de los recursos naturales. Este hecho justifica el uso de instrumentos como el valor de opción (Smith, 1983) para descontar los efectos de irreversibilidad ambiental de determinada inversión (p.e.: transformar vs. conservar un bosque), o la inclusión de los proyectos-sombra (Pearce *et al.*, 1989) en el análisis coste-beneficio tradicional a la hora de computar los gastos por deterioro ambiental. La consideración desde una perspectiva próxima al principio de precaución también ofrece un marco axiomático válido a la hora de modelizar la toma de decisiones con incertidumbre ambiental²⁵⁹.

En definitiva, desde muy diversos foros se señala que el uso clásico de la probabilidad no resuelve satisfactoriamente la toma de decisiones con problemas de

²⁵⁷ Idea que sustenta, como se ha comentado, la teoría de la Coevolución, basada en la consideración del sistema global viviente (Gaia) como un sistema complejo en sentido estricto y no simplemente como sistema “complicado” cuya representación completa es sólo un problema de capacidad de gestionar suficiente información.

²⁵⁸ No obstante, en el análisis econométrico aplicado a la toma de decisiones ambientales resulta habitual el uso de técnicas de simulación (modelos de Monte Carlo) con “aprendizaje” modelizado en procesos de Markov.

²⁵⁹ Acerca del establecimiento de “ahorros de precaución”, resulta muy interesante la aportación que desde la teoría de conjuntos difusos se hace en este sentido (Hauenschild y Stahlecker, 2001).

incertidumbre e irreversibilidad, necesitando la formulación de supuestos que suelen suponer grandes restricciones en la realidad. Como alternativa al análisis tradicional, se aboga por el desarrollo de técnicas basadas en la evaluación de alternativas o escenarios, y por tanto de valoración, aspecto que en la Economía del Medio Ambiente ocupa gran parte del discurso metodológico²⁶⁰.

Vaguedad y subjetividad

Por otra parte, en el estudio de la interacción entre los sistemas humanos y ambientales aparece un grupo de problemas relativos a la vaguedad, la imprecisión y la subjetividad, hechos que generan notable incertidumbre. No se trata, como antes, de un problema de incertidumbre estocástica sobre sucesos al menos bien definidos, sino que se trabaja con información que describe semánticamente de forma vaga los posibles estados del fenómeno. La información incompleta (vaguedad) e imprecisa es una característica fundamental de los sistemas complejos (Klir, 1991) que también ha de afrontarse en el análisis de la sostenibilidad del desarrollo. Se pueden encontrar indicadores incompletos o parciales referidos a la calidad del medio, el grado de bienestar subjetivo, la disponibilidad de recursos ambientales o el valor intrínseco de los mismos para diversos usos o entornos, por ejemplo.

Los juicios de valor son un ejemplo claro de información vaga y subjetiva, especialmente en su forma lingüística, siendo expresiones subjetivas de determinadas observaciones cognitivas. En la mayoría de los casos, una representación lingüística de una observación o percepción cognitiva requiere una transformación menos complicada que otra representación numérica y por tanto, menos distorsionada. En los modelos tradicionales, las variables son precisas, pero en el lenguaje diario y en la toma de decisiones, la imprecisión se manifiesta en la gran mayoría de representaciones de la realidad objeto de análisis. La afirmación "la calidad del agua es buena" encierra diversos puntos de vista para cada individuo y cada nivel de exigencia o exactitud. Lo que para una persona es considerado como "suficiente calidad de vida", para otra puede ser "insuficiente" o incluso "deficiente", pues se trata de representaciones de un proceso de percepción subjetivo.

²⁶⁰ Otras técnicas de valoración económica del activo ambiental en situaciones de incertidumbre e irreversibilidad son las medidas indirectas como el Coste de Viaje, la valoración contingente, etc. (Freeman, 1992).

Tradicionalmente se ha despreciado la información vaga o difusa y la subjetiva dentro de los patrones de la evaluación del impacto ambiental (Glasson, 1995). Este hecho constituye un error desde dos puntos de vista: por un lado, el olvido de la información difusa parte de la no consideración de la visión ecosistémica, donde la cantidad de información y de entropía del sistema son referentes fundamentales para describir la evolución y grado de desarrollo del mismo²⁶¹. Por otra parte, la información subjetiva ofrece una perspectiva más cercana a la verdadera percepción social que del recurso natural se tiene. Se da incluso el caso de que no existan indicadores cuantitativos parecidos para significar ciertos ámbitos o dimensiones (percepción o satisfacción del medio, etc.)²⁶².

La recogida y análisis de este tipo de información es de difícil modelización, dado que aparecen problemas derivados de la incertidumbre y la imprecisión de las medidas y su comparabilidad, así como de su tratamiento junto a otras medidas cuantitativas (Munda, 1993). La modelización de la vaguedad obliga a considerar distintos grados de seguridad o significatividad para un mismo concepto como "bueno" o "aceptable" por ejemplo.

4.4.2. Bases de la Teoría de los Conjuntos Difusos.

La Teoría de los Conjuntos Difusos o Borrosos (Fuzzy Sets Theory)²⁶³, desarrollada inicialmente por Zadeh (1965), es una teoría matemática de la incertidumbre para modelizar situaciones donde los instrumentos tradicionales no conducen a resultados óptimos debido a la existencia de problemas de incertidumbre, vaguedad en la definición y caracterización de variables (no precisas) y subjetividad en la representación de los valores. Mediante la generalización de la idea clásica de conjunto, esta teoría traduce estos problemas a uno en términos de *incertidumbre difusa* (Zadeh,

²⁶¹ En el capítulo referido al ecosistema urbano ya se ha hecho referencia a la importancia de las medidas de la entropía o desorden del sistema (como el índice de Shanon), caracterizada por la vaguedad y borrosidad en términos de información disponible. En los sistemas sociales también se pueden implementar medidas de la borrosidad en la información.

²⁶² Autores en línea con el movimiento de los indicadores sociales apuestan por el uso de los indicadores perceptivos o subjetivos definiéndolos como fundamentales para el análisis de la calidad de vida o el bienestar (Michalos, 1997). La lógica difusa es un instrumento idóneo para este tipo de estudios en el que se conjuga información precisa, con información vaga y subjetiva.

²⁶³ Para un análisis más detenido de esta teoría es necesario referenciar Zadeh (1965, 1973a, 1978), Zimmermann (1987;1996), Dubois y Prade (1980), Kaufmann (1975), Kaufmann y Gupta (1988), Yager (1982), Kosko (1992), Klir y Yuan (1995) y Cox (1998), entre otros.

1965; Bellman y Zadeh, 1970), asociada no a la ocurrencia de un evento, sino al evento en sí mismo, el cual no puede describirse sin ambigüedad²⁶⁴. Las principales aplicaciones pueden especificarse cuando: la información es imprecisa, el concepto a medir es impreciso, las reglas de decisión son imprecisas, o bien se desconocen los mecanismos internos del sistema.

En el análisis de sistemas sociales, ambientales (ecosistemas) o tecnológicos, se observa que las conclusiones y predicciones realizadas dejan de ser fiables cuando aumenta el grado de complicación del sistema. Ello es debido a que la complejidad del sistema acarrea la necesidad de ingentes cantidades de información, no necesariamente exacta o precisa a veces, hecho que dificulta la labor del investigador a la hora de interpretar simultáneamente las interrelaciones existentes. Para tratar de explicar el fracaso relativo en el uso de las técnicas matemáticas tradicionales, Zadeh (1973a) enuncia el *Principio de Incompatibilidad*²⁶⁵ en base a términos como complejidad (complexity) y vaguedad (vagueness) hechos que provocan imprecisión y borrosidad (fuzziness²⁶⁶): "Al aumentar la complejidad de un sistema, nuestra capacidad de realizar afirmaciones precisas y significativas sobre su comportamiento disminuye hasta un umbral pasado el cual la precisión y la significación aparecen como características mutuamente excluyentes".

Zadeh (1973b) propone el llamado *Enfoque Lingüístico* (Zadeh et al., 1975) para el análisis de los problemas y sistemas complejos. Una *variable lingüística* A (p.e.: temperatura), toma una serie de *valores lingüísticos* a_1, a_2, a_3 (frío, templanza, calor) que son semánticamente equivalentes a determinados conjuntos difusos²⁶⁷. Una vez definidos estos valores, es posible establecer las llamadas *relaciones difusas* entre variables lingüísticas (afirmaciones condicionales difusas) mediante una serie de reglas del tipo "si $A=a_1$, entonces $B=b_2$ " por ejemplo. En el caso en que se quieran componer dos relaciones difusas, para determinar el valor de la segunda variable lingüística se aplica la

²⁶⁴ Como apunta Kosko (1990), la borrosidad (fuzziness) describe el *grado* (o intensidad) en el que un evento ocurre, no *cundo* ocurre el mismo. En esta teoría se distingue claramente la posibilidad de un suceso de la probabilidad asociada al mismo.

²⁶⁵ Claramente puede interpretarse como la traducción del principio de incertidumbre enunciado en Física por Heisenberg al análisis de sistemas.

²⁶⁶ Zadeh (1978:395) diferencia entre información vaga, de la cual no se puede extraer ninguna información dada su ambigüedad ("nos reuniremos próximamente"), e información difusa, la cual da cierta información pero de forma poco precisa ("nos reuniremos a lo largo de esta semana").

²⁶⁷ Por tanto, los conjuntos difusos son usados para expresar los contenidos de una variable lingüística.

regla de inferencia compuesta o difusa que básicamente corresponde a la regla max-min entre relaciones difusas. Este tipo de aplicaciones de los conjuntos difusos ha dado lugar al desarrollo de una importante disciplina llamada *Lógica Difusa* y razonamiento aproximado²⁶⁸.

A partir de los conceptos básicos de la teoría de conjuntos difusos se han desarrollado otras ramas específicas centradas en el análisis de redes neuronales difusas, algoritmos genéticos, mapas cognitivos, etc. Las principales aplicaciones se encuentran en ciencias de los ámbitos de la ingeniería, tales como inteligencia artificial, sistemas expertos y de control, robótica, enfoque de imagen, reconocimiento de patrones, etc., pero también tienen cabida las ciencias naturales (zoología, botánica), medicina, psicología y las ciencias económicas, en aspectos como la toma de decisiones, la investigación operativa y la gestión empresarial.

4.4.2.1. Conceptos básicos²⁶⁹.

Los conjuntos difusos (fuzzy sets) están basados en la idea de flexibilizar el concepto de pertenencia de un elemento a un conjunto, mediante la definición del grado de pertenencia. En la teoría clásica de conjuntos, si llamamos X al universo de situaciones en discurso (conjunto completo) y dado un subconjunto A de X , cada elemento $x \in X$ satisface la condición de $x \in A$ o la alternativa $x \notin A$. El subconjunto A está representado por la aplicación: $f_A : X \rightarrow [0,1]$

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

f_A es la función característica del conjunto clásico A , también llamado conjunto rígido (crisp). En términos de los conjuntos difusos se generaliza dicha función. Dado el conjunto completo X , un conjunto difuso \tilde{A} en U es un conjunto de pares ordenados:

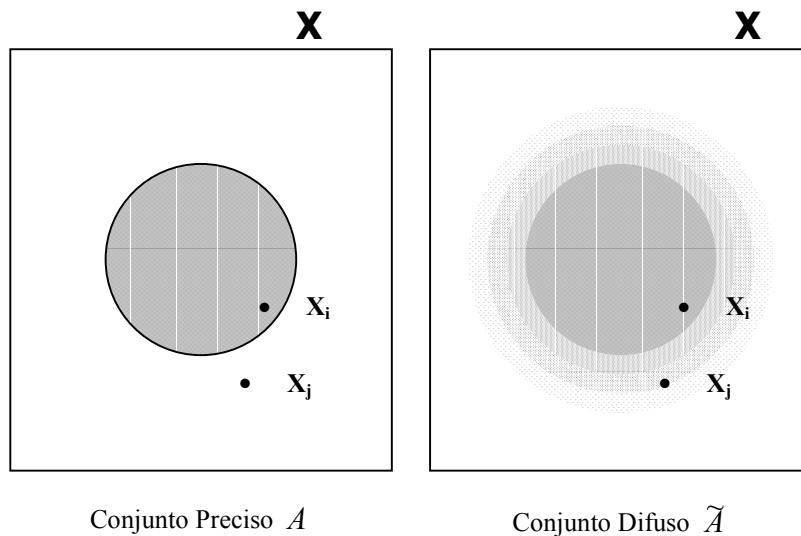
²⁶⁸ La *Lógica Difusa* (Zadeh, 1979, 1996; Mandami, 1977; Sugeno, 1985) se aplica profusamente al ámbito de la toma de decisiones para lo que pueden consultarse Bellman y Zadeh (1970), Jain (1976), Yager (1977), Dubois y Prade (1979), Zadeh y Kacprzyk (1992), Altrock (1995) o Lootsma (1997), entre otros.

²⁶⁹ Esta aproximación a los conceptos básicos de la teoría de los conjuntos difusos se basa en Morillas (1994) y Zimmermann (1996).

$$\tilde{A} = \{x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x)\}$$

Donde $\mu_{\tilde{A}}(x): X_{\tilde{A}} \rightarrow M$ es la función de pertenencia de los puntos $x \in X$ que indica los distintos grados de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$ agrupados de forma ordenada en el conjunto de pertenencia M , normalmente acotado entre $[0,1]$ (Figura 4.1). Mediante esta función se define completamente un conjunto difuso, donde x pertenece a \tilde{A} con un cierto grado²⁷⁰. Si la función de pertenencia devuelve valores únicos entre 0 y 1, se trata de un conjunto difuso de tipo 1, cuando ésta es a su vez un conjunto difuso, entonces se trata de un conjunto difuso de tipo 2. Si la función de pertenencia es un conjunto difuso de tipo 2, el conjunto \tilde{A} será difuso de tipo 3²⁷¹. De igual forma, es posible definir conjuntos difusos sobre intervalos, es decir, que la función de pertenencia arroje valores comprendidos en forma de intervalo.

Figura 4.1. Ejemplo de representación gráfica de un conjunto difuso.



²⁷⁰ Zadeh (1978) interpreta el valor de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$ como la *posibilidad* de que el parámetro cuyo valor es quasi-desconocido y que viene descrito por el conjunto difuso \tilde{A} tome el valor x . Este valor fluctuará entre 0 (totalmente imposible) y 1 (totalmente posible).

²⁷¹ No obstante, este tipo de conjuntos difusos entrañan una mayor problemática a la hora de realizar operaciones entre ellos, complicando su interpretabilidad ante el mayor número de dimensiones que comprenden (Zimmerman, 1996).

Por otra parte, también es necesario definir una serie de conceptos básicos antes de pasar a referir las principales operaciones entre conjuntos difusos:

Si la *altura* o mayor grado de pertenencia alcanzado por algún elemento es la unidad, $\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$, entonces se dice que el conjunto difuso \tilde{A} es *normal*. Se puede normalizar cualquier conjunto difuso dividiendo $\mu_{\tilde{A}}(x)$ entre $\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x)$, este procedimiento simplifica bastante las posteriores operaciones entre conjuntos difusos.

El *soporte* de un conjunto difuso \tilde{A} , $S(\tilde{A})$, es el conjunto no difuso de todos los valores de $x \in X$ tales que $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$. Si únicamente hay un único punto dentro del soporte, cuyo valor de pertenencia además es 1, se dice que el conjunto difuso es un “singleton”, es decir, un conjunto preciso o en sentido clásico con sólo un elemento.

Una generalización del concepto de soporte es el α -*corte*: Se trata del conjunto no difuso de elementos que pertenecen al conjunto difuso \tilde{A} al menos al nivel α .

$$A_{\alpha} = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

La familia formada por todos los α -*cortes* contiene toda la información acerca del conjunto difuso.

El α -*corte fuerte* es asimismo definido como el conjunto $A_{\alpha}^{>}$ tal que:

$$A_{\alpha}^{>} = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$$

El α -nivel de un conjunto difuso es el conjunto $A_{\alpha}^{\bar{}}$ tal que:

$$A_{\alpha}^{\bar{}} = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha\}$$

Se denominan *puntos de cruce* (crossover points) a los puntos tales que:

$$\text{Puntos de Cruce } (\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.5\}$$

El *núcleo* (kernel) de un conjunto difuso está formado por todos aquellos elementos con nivel de pertenencia igual a la unidad, considerándose también como el representante de dicho conjunto (equivalente a la probabilidad) a modo de *esperanza difusa*:

$$\text{Núcleo}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

La *cardinalidad* de un conjunto difuso \tilde{A} se refiere a su tamaño y viene definida por la suma de todos los grados de pertenencia de todos los elementos en \tilde{A} :

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

Un conjunto difuso \tilde{A} se dice que es *convexo* si para cualquier par x_1, x_2 se cumple:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}, x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1]$$

De igual forma, la convexidad implica que todos los α -corte sean convexos.

Un conjunto \tilde{A} es un subconjunto difuso de \tilde{B} , es decir, $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$, si:

$$\forall x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$$

Y si existe al menos un punto $x \in X$ tal que $\mu_{\tilde{A}}(x) \neq \mu_{\tilde{B}}(x)$, entonces: $\tilde{A} \subset \tilde{B}$.

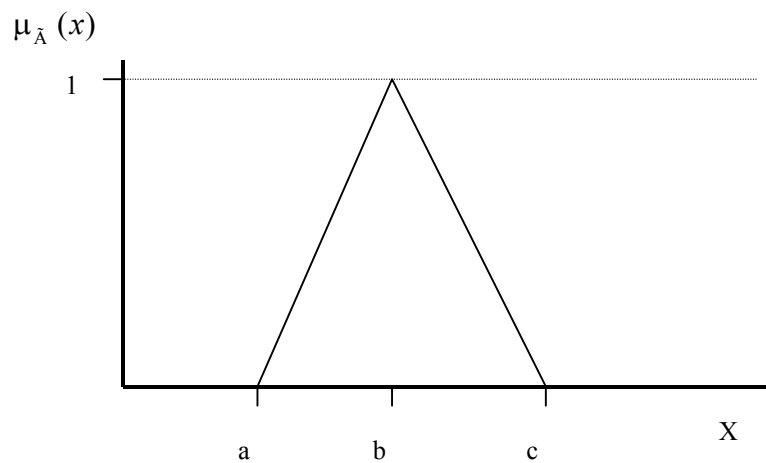
Se denomina *número difuso* a aquel conjunto difuso que esté normalizado y sea convexo. Se trata de la generalización del concepto clásico de número, gracias a la cual, operaciones aritméticas como la suma y la multiplicación entre números reales pueden aplicarse a este tipo de conjuntos difusos. Cualquier número real puede por tanto considerarse un número difuso, denominándose *número rígido* (crisp number). Las formas más simples de número difuso son los *números difusos triangulares*, caracterizados por una función de pertenencia de tipo triangular. A continuación se enumeran los tipos principales de números difusos en base a su función de pertenencia²⁷²:

²⁷² Además de las explicitadas, otras funciones de pertenencia muy utilizadas son la función- Γ , la función de tipo gaussiana y la función exponencial.

a) Número difuso triangular.

Un número difuso $\tilde{A} = (a, b, c)$ con $a \leq b \leq c$ es un número difuso triangular si su función de pertenencia es del tipo:

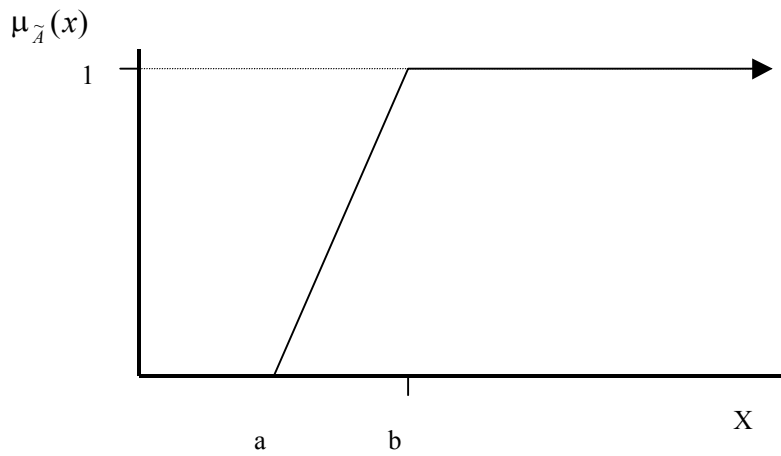
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & c \leq x \end{cases}$$



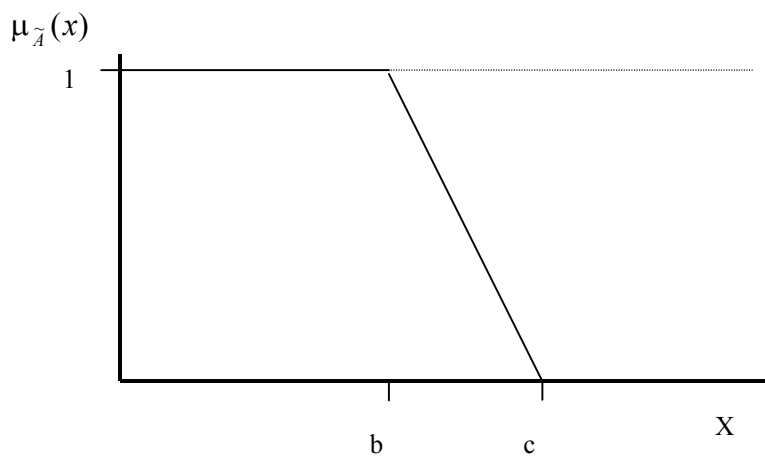
Su soporte es el intervalo (a, c) .

Un caso específico de número difuso triangular son los números difusos semi-infinitos $(a, b, +\infty)$ y $(-\infty, a, b)$ respectivamente:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & ; \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & ; \text{si } b < x \end{cases}$$



$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & ; \text{si } x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & ; \text{si } b \leq x \leq c \\ 0 & ; \text{si } c < x \end{cases}$$

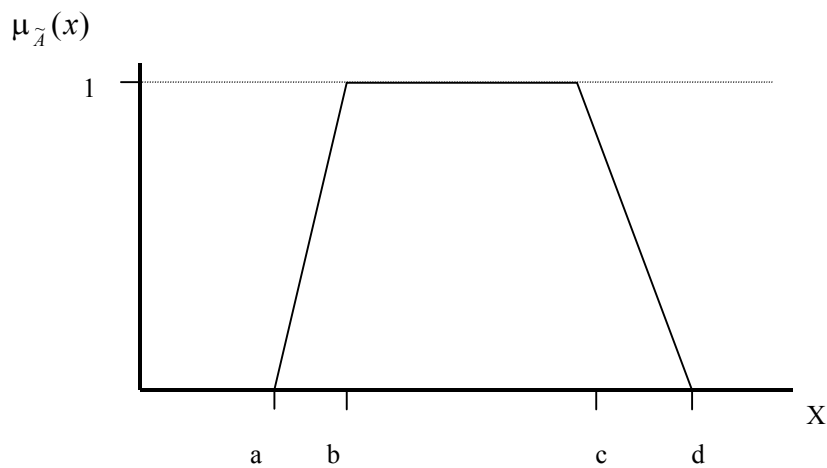


b) Número difuso trapezoidal.

Un número difuso $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ con $a \leq b \leq c \leq d$ es un número difuso trapezoidal si su función de pertenencia es del tipo:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 0 & d \leq x \end{cases}$$

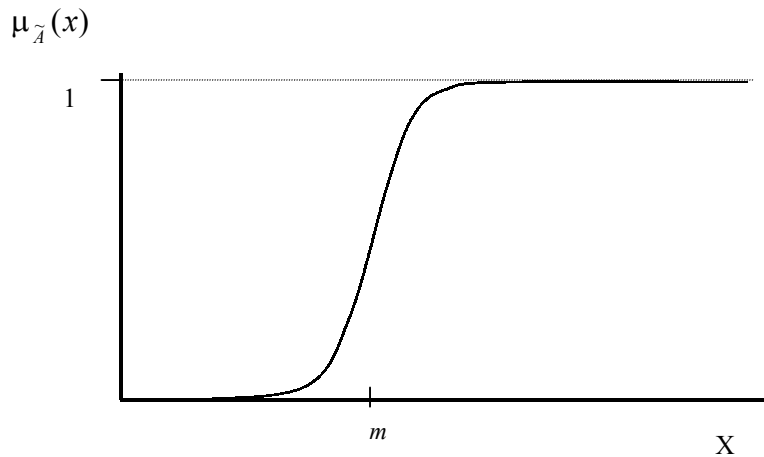
Su soporte es el intervalo (a,d).



Los números difusos triangulares son casos específicos de números difusos trapezoidales donde $b=c$.

c) Función-S.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq a \\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & ; a < x \leq m \\ 1 - 2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2 & ; m < x \leq b \\ 1 & ; x > b \end{cases}$$



El punto $m = \frac{a+b}{2}$ es el punto de cruce (crossover point) de la función-S.

d) Tipo L-R.

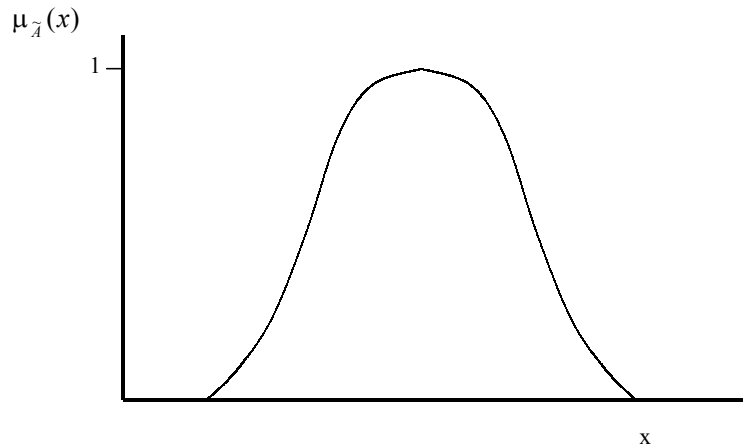
Un número difuso $\tilde{A} = (a, b, c)$ con $a \leq b \leq c$ es un número difuso L-R (Left-Right) si su función de pertenencia es del tipo:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{b-x}{b-a}\right) & ; \text{si } a \leq x \leq b \\ R\left(\frac{x-b}{c-b}\right) & ; \text{si } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se trata de una generalización de número difuso (Dubois y Prade, 1980), dada su función de pertenencia, la cual expresa muchas veces mejor la progresividad en la transición que un número difuso triangular o trapezoidal. L y R son funciones continuas monótonas decrecientes definidas en el intervalo (0,1). Por ejemplo, un número difuso triangular es un caso especial de número difuso L-R con $L(x) = R(x) = 1 - x$. El valor de c es el núcleo, mientras que L y R son las amplitudes a izquierda y derecha

respectivamente. Si para L y R se elige por ejemplo la función:

$$L(x) = R(x) = \frac{1}{2}(\cos(\pi x) + 1), \text{ se obtiene una figura campaniforme:}$$



4.4.2.2. Operaciones entre conjuntos difusos

Zadeh (1965) sugiere las operaciones básicas entre conjuntos difusos (la intersección, la unión y la complementación) mediante los siguientes operadores. La intersección es interpretada como el “Y lógico” definida mediante el operador-mínimo. La intersección de conjuntos difusos es interpretada como el conjunto difuso más grande contenido a la vez en A y en B. La función de pertenencia $\mu_{\tilde{C}}(x)$ para la intersección $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ queda de la siguiente manera:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x) | x \in X\}$$

El operador-mínimo es no compensatorio. No obstante, para la intersección, Zadeh (1965) también sugiere el producto algebraico, que permite cierto grado de compensación. El producto algebraico de dos conjuntos difusos determina a su vez un conjunto difuso $\tilde{C} = \tilde{A} \cdot \tilde{B}$, cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{\tilde{C}} = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) | x \in X$$

La unión viene dada por el “O lógico”, mediante el operador-máximo. La función de pertenencia $\mu_{\tilde{D}}(x)$ de la unión $\tilde{D} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ es:

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x) \mid x \in X\}$$

Se trata del conjunto difuso más pequeño conteniendo a la vez los otros dos conjuntos difusos. El operador-máximo es el único que permite una compensación completa entre las funciones de pertenencia consideradas.

Por otra parte, el conjunto difuso \tilde{A}^c (complementario de \tilde{A}) viene definido por una función de pertenencia de la siguiente forma:

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), x \in X$$

Se han descrito las operaciones de unión, intersección y complementación entre conjuntos difusos usando los operadores “clásicos” dentro de la teoría de conjuntos difusos, pero es posible utilizar otro tipo de operadores. Este tipo de operaciones son definidas generalmente a partir de las llamadas t-normas y t-conormas (entre las cuales se incluyen los operadores clásicos referidos). Pero existen otro tipo de operadores²⁷³, tales como los de Yager, Dubois y Prade, los operadores promedio (compensadores) y el operador- γ . A pesar de tratarse de una disciplina muy reciente, ha de destacarse la gran variedad de operadores matemáticos existentes para realizar las operaciones entre conjuntos difusos. Este hecho dificulta enormemente su sistematización (Zimmermann, 1996; Chen y Hwang, 1992), dependiendo su utilidad de las propiedades axiomáticas que se persigue cumplan los operadores²⁷⁴ (*op. cit.* pág. 38-42). A continuación se realiza un breve resumen de algunas de estas operaciones de cara a obtener una visión general de los instrumentos más utilizados a la hora de operar con conjuntos difusos.

²⁷³ Otras propuestas importantes de familia de operadores para la intersección y la unión son las realizadas por Hamacher (1978), Sugeno (1977) y Schweizer y Sklar (1963). Para profundizar en el análisis de operadores es necesaria la referencia a Dubois y Prade (1980; 1988), Yager (1991; 1994), Klir y Yuan (1995) y Zimmerman (1996), entre otros.

²⁷⁴ Entre los criterios definidos por Zimmerman (1996) para la selección del operador idóneo para cada caso están los de: potencia axiomática, ajuste empírico, adaptabilidad, eficiencia numérica, compensación, rango de compensación, comportamiento agregativo, compatibilidad con la escala de la función de pertenencia.

4.4.2.2.1. t-normas o normas triangulares.

Las *t-normas* son funciones bivalentes $t(a,b)$ que satisfacen ciertos axiomas básicos²⁷⁵. Los operadores t-norma son los que habitualmente se utilizan para el operador “Y” de la intersección. Ejemplos de éstos son (Dubois y Prade, 1984; Zimmermann, 1996):

- Mínimo.

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

Se considera el conjunto difuso \tilde{C} como el resultado de la operación. Ya se ha comentado que es el operador no compensatorio.

- Producto algebraico.

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$$

Se trata de un operador mínimo compensatorio, es decir, que permite cierto grado de compensación a la hora de realizar la intersección de conjuntos difusos.

Otros operadores que han de mencionarse son el producto drástico, el producto limitado, el producto de Einstein y el operador-mínimo o producto de Hamacher.

4.4.2.2.2. t-conormas, conormas triangulares o s-normas.

Las *t-conormas* caracterizan normalmente el operador “O” de la unión. Se trata de funciones $S(a,b)$ que cumplen una serie de propiedades. Como se recoge en Zimmermann (1996), ejemplos de operadores del tipo t-conormas, considerando el conjunto difuso \tilde{C} como resultado de la operación concreta, son los siguientes

²⁷⁵ No es el objeto de este trabajo el profundizar en el marco axiomático para estas operaciones difusas, simplemente señalar que normalmente se trata de extender las operaciones clásicas a partir de los axiomas de los conjuntos clásicos, aunque en el caso difuso no se constituye un álgebra de Boole pues no se cumple la “ley del medio excluido”, ya que $\tilde{A} \cap \tilde{A}^c \neq \emptyset$ y $\tilde{A} \cup \tilde{A}^c \neq X$. Para un análisis en este sentido referido a las restricciones derivadas del uso de determinados operadores lógicos “y”, “o”, puede consultarse Bellman y Giertz (1973).

- Máximo.

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

Como se ha comentado más arriba se trata del operador usado en la modelización del “o” lógico en la unión, siendo el único que puede considerarse como operador completamente compensatorio.

- Suma algebraica o probabilística

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$$

Este operador, sin embargo, es del tipo máximo-compensatorio, es decir, que permite cierto grado de compensación al realizar la unión de conjuntos difusos.

Otros operadores de este tipo destacables son la suma drástica, la suma limitada, la suma ponderada, la suma de Einstein y el operador-máximo o suma de Hamacher.

4.4.2.2.3. Operadores de Dubois y Prade.

Dubois y Prade (1984) proponen unos operadores alternativos a los tradicionales para la intersección y la unión. Estos operadores permiten la compensación parcial entre los valores de las funciones de pertenencia.

- Operador-mínimo compensatorio.

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{\max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x), \lambda)} ; \lambda \in (0,1)$$

Este operador disminuye con respecto a λ . Cuando $\lambda=0$, este operador es igual a operador-mínimo clásico. Cuando $\lambda=1$, se obtiene el operador producto algebraico.

- Operador-máximo compensatorio.

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) - \min(1 - \lambda', \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))}{\max(\lambda', 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x))}; \lambda' \in (0,1)$$

Para $\lambda'=1$ se obtiene la suma algebraica. El valor de $\mu_{\tilde{C}}(x)$ disminuye conforme λ' se aproxima a cero.

4.4.2.2.4. Operadores de Yager.

Yager (1991) propone una nueva clase de operadores para la unión y la intersección difusas: Sean \tilde{A} y \tilde{B} dos conjuntos difusos, la intersección difusa $\tilde{C}_p(x) = \tilde{A}(x) \cap \tilde{B}(x)$ es definida mediante el operador-mínimo de Yager como:

$$\mu_{\tilde{C}_p}(x) = 1 - \min\left\{1, \left[(1 - \mu_{\tilde{A}}(x))^p + (1 - \mu_{\tilde{B}}(x))^p\right]^{1/p}\right\}$$

Donde el parámetro p toma valores mayores o iguales a la unidad. Cuanto mayor sea, más fuerza tendrá la intersección. Si $p = \infty$, $\mu_{\tilde{C}_p}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$, coincidiendo con el operador “Y” clásico para la intersección u operador-mínimo. En el caso en que $p=1$, entonces $\tilde{C}_p(x) = \max\{0, \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x) - 1\}$, que es el operador “producto limitado”. El parámetro p está relacionado inversamente con la potencia o fuerza del operador lógico “y”. Este operador-mínimo de Yager permite por tanto cierta compensación, por lo que es considerado también como un operador mínimo compensatorio.

De igual forma, la unión difusa de Yager viene definida como una función $\tilde{D}(x) = \tilde{A}(x) \cup \tilde{B}(x)$ donde aplica el operador-máximo de Yager:

$$\mu_{\tilde{D}_p}(x) = \min\left\{1, \left[\mu_{\tilde{A}}(x)^{p'} + \mu_{\tilde{B}}(x)^{p'}\right]^{1/p'}\right\} \quad p' \geq 1$$

Si p es infinito, $\tilde{D}_p(x) = \max\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\}$, coincide con el operador “O” clásico para la unión (operador-máximo). Si $p=1$, entonces $\mu_{\tilde{D}_p}(x) = \min\{1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)\}$, que es el operador “suma limitada”.

4.4.2.2.5. Operadores-promedio, simétricos y compensatorios.

Los *operadores-promedio*²⁷⁶ se utilizan para agregar conjuntos difusos y se encuentran en una situación intermedia entre los operadores mínimo y máximo. Este tipo de operadores cuenta con numerosas aplicaciones a la toma de decisiones, especialmente en el análisis multicriterio, donde la unión o la intersección no siempre satisfacen las necesidades de agregación de los conjuntos difusos²⁷⁷. Ejemplos de este tipo de operadores son la media aritmética, la media aritmética ponderada y la media geométrica, entre otros.

- Operador media ponderada.

Si el objetivo es calcular la media de una serie de números difusos $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$ ponderados por unos pesos específicos que a su vez son números difusos $\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \dots, \tilde{W}_n$, esta media ponderada puede definirse, siguiendo el principio de extensión, como:

$$\tilde{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{W}_i \tilde{X}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{W}_i},$$

Cuya función de pertenencia viene dada por:

²⁷⁶ En Dubois y Prade (1984; 1985), Grabisch (1995), Klir y Yuan (1995), Yager (1994), entre otros, se hace una revisión de los operadores de agregación para integrar valores de pertenencia a conjuntos difusos.

²⁷⁷ Los operadores promedio forman parte de la familia de operadores agregativos. En un intento de clasificarlos, se pueden diferenciar dos grandes grupos: por un lado los operadores aditivos (p.e.: suma aritmética) o k -aditivos, los cuales cuentan con mayor número de aplicaciones; y por otra parte, los operadores no aditivos, basados en el uso de las integrales difusas (Sugeno, 1977) y relacionados con las integrales de Choquet (1953), son muy aplicados al análisis multicriterio (Grabisch, 1996).

$$\mu_{\bar{y}}(y) = \sup_{x,w} \min \left\{ \mu_{\bar{w}}(w_i), \mu_{\bar{x}}(x_i), i = 1, 2, \dots, n \mid y = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \right\}$$

Por otra parte, se pueden definir operaciones para la agregación de los conjuntos difusos a partir de los grados de pertenencia obtenidos. Por ejemplo:

- Operador media geométrica.

$$\mu(x) = [\mu_1(x) \times \mu_2(x) \times \mu_3(x) \times \dots \times \mu_n(x)]^{1/n}$$

- Suma simétrica ponderada (Silvert, 1979).

$$\mu/(1-\mu) = \left\{ [\mu_1/(1-\mu_1)]^A \cdot [\mu_2/(1-\mu_2)]^B \cdot [\mu_3/(1-\mu_3)]^C \dots \right\}^{1/(A+B+C+\dots)}$$

- Operador promedio ponderado generalizado (Dubois y Prade, 1985).

$$\mu_{\bar{p}}(x) = \left(\frac{\sum_i (w_i \mu_i(x))^\alpha}{\sum_i w_i} \right)^{1/\alpha} ; \alpha > 0$$

En esta expresión, ampliamente utilizada como promedio, w_i son los pesos relativos para cada pertenencia. El resultado oscila desde el operador-mínimo, pasando por la media geométrica, a la media aritmética (cuando $\alpha \rightarrow 1$) y el operador-máximo de la unión difusa cuando $\alpha \rightarrow +\infty$. Finalmente, se ha de mencionar también el operador de agregación “media ponderada ordenada” (OWA en inglés) desarrollado por Yager (1988), que permite la compensación entre las funciones de pertenencias.

En el operador- γ (operador “ γ ” compensatorio) propuesto por Zimmermann y Zysno (1980; 1983) es el parámetro γ el que determina el balance de información entre la intersección y la unión. Para un par de funciones de pertenencia $\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)$, el operador- γ se define como:

$$\mu_{\theta} = (\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x))^{1-\gamma} (1 - (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \cdot (1 - \mu_{\tilde{B}}(x)))^{\gamma}$$

Donde para la intersección se utiliza el producto algebraico y para la unión la suma algebraica. γ indica la posición del operador entre el “y” lógico y el “o” lógico. Si $\gamma=0$, entonces $\mu_{\theta} = \prod \mu_i$, es decir, el operador “y” de la intersección. Si $\gamma=1$, entonces $\mu_{\theta} = 1 - \prod (1 - \mu_i)$, la suma algebraica que caracteriza al operador “o” de la unión clásica.

La expresión del operador usando distintas ponderaciones para las pertenencias es:

$$\mu_{\theta} = \left(\prod_{i=1}^n \mu_i^{w_i} \right)^{1-\gamma} \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_i)^{w_i} \right)^{\gamma}; \quad 0 \leq \gamma \leq 1; \quad \sum w_i = n$$

4.4.2.3. Principio de Extensión.

Este principio (Zadeh, 1965) delimita un marco teórico general para traducir cualquier tipo de operaciones entre conjuntos y números reales al campo difuso. A la formulación inicial han seguido otras en las que se modifican los operadores usados. La definición recogida en Zimmerman (1996) es la siguiente:

Sea X el producto cartesiano de r universos $X = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_r$, y $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \dots, \tilde{A}_r$ los r conjuntos difusos en $X_1, X_2, X_3, \dots, X_r$ respectivamente. Entonces, dada la función rígida $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_r)$ de X a un universo Y , el Principio de Extensión permite la definición de un conjunto difuso \tilde{B} en Y de la forma:

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_r); (x_1, x_2, x_3, \dots, x_r) \in X\}$$

donde:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_r) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), \mu_{\tilde{A}_3}(x_3), \dots, \mu_{\tilde{A}_r}(x_r)\} & ; \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $r=1$ la expresión se simplifica notablemente:

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x); x \in X\}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x) & ; \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

4.4.2.4. Distancias entre conjuntos difusos.

El *Principio de Extensión* difuso permite, entre otras aplicaciones, la definición de medidas de distancias entre números difusos²⁷⁸. La utilidad de las distancias difusas es variada, destacándose como uno de los métodos más aplicados a la hora de establecer jerarquías u ordenaciones entre los conjuntos difusos resultado de un análisis multicriterio con información difusa. De esta manera se puede evaluar qué resultado es mejor y las distancias relativas al resto de soluciones del modelo difuso.

La pseudo-métrica \tilde{d} , distancia difusa entre dos conjuntos difusos \tilde{A} y \tilde{B} puede definirse como:

$$\mu_{\tilde{d}(\tilde{A}, \tilde{B})}(z) = \sup_{|x-y|=z} \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\}$$

Si se opera con dos números difusos triangulares $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$, Diamond (1988) sugiere una distancia en términos de la métrica euclídea:

$$d^2(\tilde{A}, \tilde{B}) = ((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2)$$

Por otro lado, Yager (1979) sugiere la formulación del concepto de distancia como promedio de las distancias entre dos conjuntos difusos \tilde{A} y \tilde{B} (o entre sus

²⁷⁸ En Dubois y Prade (1980) y Gupta y Sanchez (1982), entre otros, se exponen medidas de distancias difusas.

funciones de pertenencia) en $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, en términos de una métrica de Minkowsky del tipo:

$$d_p(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[\sum_{i=1}^n |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|^p \right]^{1/p} ; p = 1, 2, 3, \dots$$

Si $p = 1$, se obtiene la denominada métrica o distancia de Hamming (Klir y Yuan, 1995), muy usada, que para el caso discreto viene definida como:

$$d_1(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{i=1}^n |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|$$

Si $p = 2$, el resultado es la métrica euclídea:

$$d_2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[\sum_{i=1}^n (\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i))^2 \right]^{1/2}$$

La distancia euclídea normalizada viene dada por:

$$z_2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i))^2 \right]^{1/2}$$

4.4.2.5. Aclarado de conjuntos difusos.

En la toma de decisiones con información difusa, el resultado obtenido es en forma de conjunto difuso. Este hecho, si bien supone una ventaja al aportar un mayor cantidad de información frente a la incertidumbre de tipo difusa, en ocasiones no resulta útil en primer término al no encajar directamente en la mayoría de procesos de decisión o gestión que buscan la consecución de un dato o número “rígido” final. En definitiva, en un medio dominado por la lógica precisa es necesario partir de unos parámetros muy claros y por tanto “traducir” a términos precisos el conjunto difuso normalmente

obtenido por procedimientos de *lógica difusa*. Este proceso recibe el nombre de aclarado o perfilado (defuzzification)²⁷⁹.

A la luz del comentario anterior resulta evidente que no se trata de un paso obligatorio, sino todo lo contrario. Como señala Silvert (1997), se ha de realizar un balance previo entre la necesidad de un dato rígido (“crisp”) y la consiguiente pérdida de información que se produce en el proceso de aclarado, pues el conjunto difuso ofrece información importante referida a la ambigüedad implícita en el problema inicial de clasificación de los elementos en determinadas categorías.

Por otra parte, si se ha desarrollado un modelo difuso en base a la agregación de conjuntos difusos, el resultado final (el valor de pertenencia agregada) ya de por sí es un valor entre (0,1) que no necesita de aclarado. No obstante, conocida la forma funcional del conjunto final, es posible deshacer el proceso de difuminado inicial y obtener una medida en la escala de medida de la variable base.

Siguiendo el trabajo de Driankov *et al.*, (1996), de entre los métodos más usuales para realizar el perfilado destacan el método del centroide del área, la mediana, la media del máximo, el menor del máximo y el mayor del máximo:

- a) Método del centroide o centro de gravedad del área. Según este método, de amplia difusión, el valor rígido se obtiene, en el caso habitual en que el dominio de la función sea discreto o compacto²⁸⁰ como:

$$\text{Aclarado}(\tilde{A}) = \frac{\sum_i x_i \cdot \mu(x_i)}{\sum_i \mu(x_i)}$$

- b) Método de la bisectriz o mediana del área. En el caso continuo, definidos el menor y el mayor valor de X (x^m, x^M), el aclarado se realiza calculando el punto mediano x^* tal que divida en dos mitades iguales el área por debajo de la curva de la función de pertenencia.

²⁷⁹ En Yager y Filev (1993) y Driankov *et al.* (1996) se hace una revisión de los principales métodos para el paso de una medida difusa a otra rígida.

$$\text{Aclarado}(\tilde{A}) = x^* \left/ \int_{x^m}^{x^*} \mu(x_i) dx \right. = \int_{x^*}^{x^M} \mu(x_i) dx$$

- c) Método de la media de los máximos. En el caso discreto por ejemplo, se calcula el promedio con los k valores x_j para los que la función de pertenencia alcanza su valor máximo μ^M .

$$\text{Aclarado}(\tilde{A}) = \frac{\sum_{j=1}^k x_j}{k}; \mu_{\tilde{A}}(x_j) = \mu^M$$

- d) Método del menor de los máximos. El representante del conjunto difuso \tilde{A} es el menor valor de los x_j que tengan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ máximo.

$$\text{Aclarado}(\tilde{A}) = \min \{x_j / \mu_{\tilde{A}}(x_j) = \mu^M\}$$

- e) Método del mayor de los máximos. En este caso es el mayor valor de los x_j que tienen la máxima valoración en la función de pertenencia.

$$\text{Aclarado}(\tilde{A}) = \max \{x_j / \mu_{\tilde{A}}(x_j) = \mu^M\}$$

4.4.2.6. Aplicaciones de la Teoría de Conjuntos Difusos a la Economía Ecológica y Regional.

En el ámbito de las ciencias de la tierra, así como en la Economía Regional y Ecológica, cada vez son más frecuentes aplicaciones de la teoría de los conjuntos difusos y la lógica difusa. Como señalan Bergh *et al.* (1995), los sistemas espacio-ambientales son sistemas complejos caracterizados por su subjetividad e imprecisión. Este hecho da pie al uso de la teoría de los conjuntos difusos a la ecología (Bosserman y Ragade, 1982) y en general a las ciencias de sistemas (Bárdossy y Duckstein, 1995; Salski, 1992; Silvert, 2001), concretamente en aspectos tales como la definición del nicho ecológico (Cao, 1995), la clasificación de impactos ambientales (Silvert, 1997; Lehn y

²⁸⁰ Puede determinarse asimismo para el caso continuo en función del tipo de análisis que estemos

Temme, 1996; Enea y Salemi, 2001), o la toma de decisiones medioambientales (Morillas *et al.*, 1997b; Geldermann *et al.*, 2000; Despic y Simonovic, 2000).

Desde el trabajo inicial de Bellman y Zadeh (1970) donde se relaciona la teoría de los conjuntos difusos con la toma de decisiones multicriterio, han sido muchas las aportaciones delimitando las técnicas principales para el análisis multicriterio difuso²⁸¹. Estos métodos utilizan de forma conjunta información precisa, estocástica y difusa (información lingüística y subjetiva), partiendo del modelo Bellman y Zadeh (1970)²⁸² que sobre la base de las funciones de pertenencia define las decisiones en términos de agregación de todos los conjuntos difusos delimitados para los objetivos y las restricciones iniciales. Entre las aportaciones más interesantes al campo de la toma de decisiones medioambientales²⁸³ destaca la realizada por Munda (1995) denominada *NALADE* (Novel Approach to Imprecise Assessment and Decision Environments).

El Método *NALADE* realiza una evaluación lingüística de las alternativas en base a una medida de distancia semántica entre estas variables lingüísticas en forma de números difusos. Este proceso se realiza en base a la noción de relaciones difusas y cuantificadores lingüísticos. La agregación de preferencias concede mucha importancia a la cuestión de la heterogeneidad y diversidad de los criterios individuales, permitiéndose la compensación parcial entre los mismos y planteándose una medida de la entropía, concepto asociado al grado de borrosidad del sistema. Finalmente, el modelo multicriterio arroja una solución que considera el conflicto entre los tres criterios económicos de eficiencia, equidad y sostenibilidad.

El enfoque difuso resulta idóneo en el análisis del desarrollo sostenible dada la elevada ambigüedad contenida en el término. El concepto difuso de la sostenibilidad (Castro y Morillas, 1998) viene justificado por el elevado grado de incertidumbre de tipo difusa manifestada en los siguientes hechos (*op. cit.* pág. 14):

realizando, calculándose entonces la correspondiente integral y viceversa.

²⁸¹ Entre otras aportaciones cabe mencionar las de Yager (1977), Dubois y Prade (1984), Chen y Hwang (1992), Fodor y Roubens (1994), Grabisch (1996) y Morillas *et al.* (1997a).

²⁸² Estos autores utilizan el operador-mínimo para construir la función de decisión $\mu_{\tilde{D}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x), \mu_{\tilde{A}_2}(x), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x)\}$ con la que se obtiene, para cualquier alternativa x, el grado en el que x cumple los criterios expresados por los conjuntos difusos $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$

²⁸³ Destacan las aportaciones de Smith (1994), Munda (1995), Munda *et al.* (1993; 1994; 1995) o Reilly (1996), entre otros.

- a) Ambigüedad conceptual. Se ha podido comprobar que la lógica dual tradicional se encuentra con la imposibilidad de clasificar sin ambigüedad ciertas situaciones como simplemente “sostenibles” o “no sostenibles”. Ello es debido a que esta categorización no obedece a criterios estrictamente objetivos y cuantificables, debido a una indefinición manifiesta en el propio concepto de sostenibilidad. El enfoque difuso permite, entre otras ventajas conceptuales, el establecimiento de “umbrales blandos” (soft thresholds) o progresivos entre ambos términos lingüísticos.
- b) Calidad de la información de partida. En este tipo de análisis, junto a la información objetiva existen otras fuentes de información importantes de naturaleza subjetiva. Asimismo, numerosas estadísticas son incompletas, imprecisas o ambiguas en algunos casos, hecho que dificulta las comparaciones entre ámbitos distintos, sobre todo a escala urbana donde no existe una base estadística en materia de indicadores de desarrollo sostenible. El enfoque difuso permite afrontar este tipo de problemáticas asociadas a la información subjetiva o ambigua, asignando distintos grados de pertenencia a la misma.
- c) Conflicto entre intereses. Si bien hay otras técnicas para evaluar el conflicto entre objetivos, la adopción de un enfoque difuso aporta una mayor flexibilidad en las soluciones obtenidas bien sea a partir de técnicas multicriterio, como a través de medidas agregadas a partir de indicadores en conflicto que necesitan de mecanismos compensadores.

En referencia a la elaboración de medidas específicas de la sostenibilidad, son escasas y muy recientes las referencias aplicables, destacando Silvert (2000), Phillis y Andrian. (2001) y Cornelissen *et al.* (2001). Desde un enfoque difuso para la elaboración de medidas sintéticas del desarrollo sostenible sobre la base de indicadores de sostenibilidad, se pueden distinguir dos tipos de análisis para construir índices difusos de sostenibilidad:

- a) En primer lugar, una línea de trabajo viene dada por la construcción de índices difusos a partir de la agregación de conjuntos difusos. Silvert (1997; 2000) propone un intuitivo método que sigue los pasos habituales en la elaboración de índices pero aplicados a un entorno difuso. Seleccionados los indicadores iniciales en base a criterios científicos y políticos, así como la importancia relativa de cada uno de ellos, se calculan los valores de pertenencia de cada indicador a los valores lingüísticos definidos para la variable (p.e.: no

aceptable, aceptable), considerando para ello los valores críticos u objetivo planteados. La agregación ponderada de estos valores de pertenencia mediante un operador compensatorio, dan lugar a un conjunto final a modo de índice difuso. Si se parte de varias funciones de pertenencia, se puede implementar un proceso de aclarado para llegar a una única puntuación rígida para cada caso.

- b) Una segunda posibilidad es la elaboración de modelos de lógica difusa o razonamiento aproximado (reglas “if-then”). Un ejemplo se encuentra en el modelo SAFE (Sustainability Assessment by Fuzzy Evaluation) desarrollado por Phillis y Andrian. (2001). En este modelo se parte de la definición de unos indicadores de sostenibilidad ecológica y social agrupados según el enfoque PER de la OCDE, llegando finalmente a la formulación de una medida difusa de la sostenibilidad global. Las variables rígidas iniciales son normalizadas (en referencia al valor objetivo para cada una de ellas) y transformadas a variables lingüísticas difusas. Mediante distintos operadores estas variables son agregadas en varias fases siguiendo las reglas de inferencia difusa (Zadeh, 1979), configurando el índice difuso de sostenibilidad. Finalmente, mediante el proceso de “aclarado” (defuzzification) se pasa a una medida rígida de la sostenibilidad.

En referencia a las aplicaciones difusas más relevantes en el ámbito de la sostenibilidad urbana destaca, entre otros, el trabajo de Nijkamp y Pepping (1998), quienes aplican el análisis de conjuntos rugosos²⁸⁴ a la identificación de pautas o condiciones para el éxito de la sostenibilidad urbana, en un ejercicio de meta-análisis de políticas urbanas en algunas ciudades europeas.

Por otra parte, son varias las aplicaciones de redes neuronales basadas en lógica difusa que se centran en el análisis espacial (Openshaw, 1993) y urbano (White, 1989). Diappi *et al.* (1998) desarrollan una red neuronal difusa que modeliza el equilibrio entre los diferentes subsistemas urbanos: el social, el económico y el físico o ambiental. Mediante un aprendizaje utilizando una base de datos con 43 atributos para 95 ciudades

²⁸⁴ Un conjunto rugoso es una extensión del concepto básico de conjunto difuso debida a Pawlak (1982; 1991). Se aplica como instrumento para transformar y clasificar datos cualitativos en distintas clases de atributos (Bergh *et al.*, 1997) cuando la información imprecisa no permite clasificarlos numéricamente mediante sus características en una categoría, expresando los grados de pertenencia mediante el concepto de aproximación (Pawlak, 1982).

italianas, la red neuronal asigna las ponderaciones de las variables en función a la optimización de grupos específicos de atributos. Finalmente se jerarquizan las ciudades en base a las propiedades de estas variables, pero no se obtiene una medida sintética final.

En Diappi *et al.* (1999) se elaboran unos mapas de riesgo y oportunidades para la sostenibilidad a escala urbana, manejando variables referidas a contaminación, niveles educativos, desempleo juvenil o calidad de las viviendas, entre otras. El modelo implementado se apoya también en el desarrollo de una red neuronal difusa. Finalmente, Buscema y Diappi (1999) estudian la complejidad de la estructura urbana a partir de una red neuronal para caracterizar la especialización cultural, técnica y productiva de las ciudades analizadas así como las interrelaciones socioeconómicas y ambientales.

4.4.3. Descripción del modelo difuso.

A la hora de escoger el modelo difuso para determinar una medida de la calidad del desarrollo a partir de un conjunto de indicadores, se han identificado dos grupos de metodologías: la agregación de conjuntos difusos y la lógica difusa. En este punto es necesario recabar argumentos que fundamenten la elección de una alternativa u otra. Con este objetivo resulta interesante la comparativa que Cornelissen *et al.* (2001) realizan de las dos vías posibles.

Entre sus conclusiones (*op. cit.* pág. 183), destacan que “la agregación de conjuntos difusos es una aplicación robusta de la teoría de conjuntos difusos que permite un enfoque general del razonamiento humano. Desde el punto de vista de la toma de decisiones, esta técnica realiza una ordenación de las actitudes frente al desarrollo sostenible, partiendo de la conservadora hasta la liberal”. Por otro lado, en referencia al modelo de aplicación de la lógica difusa, señalan que se trata de “una aplicación más refinada de la teoría de los conjuntos difusos que permite un enfoque específico del razonamiento humano”.

El modelo de lógica difusa, siguiendo la formulación que se ha mencionado más arriba o cualquier otra apoyada en redes neuronales difusas para estimar las ponderaciones entre las variables y la estructura de las reglas de razonamiento difuso, resulta una alternativa más enriquecedora desde el punto de vista de la medida del

desarrollo sostenible. Ya se ha comentado que la “vaguedad” presente en dicho concepto es el principal obstáculo para su evaluación.

Desde la lógica difusa se pueden modelizar más acertadamente las reglas de decisión implícitas en la visión que los agentes decisores, la comunidad científica o la sociedad tienen acerca del desarrollo sostenible. De esta forma se elude el paso previo de la definición del concepto de desarrollo sostenible, estableciendo en su lugar las reglas de razonamiento implicadas y que subyacen en los juicios de valor referidos a las decisiones en materia de desarrollo²⁸⁵.

De forma resumida, son tres las principales trabas que justifican la no selección de un modelo de lógica difusa en el presente trabajo:

- a) La necesidad de construir las reglas de razonamiento difuso para realizar la inferencia difusa. Desconocidas las reglas de forma total o parcial, dos son las principales alternativas (Bardossy y Duckstein, 1995): contar con una serie de opiniones de expertos que establezcan las relaciones entre los inputs y los posibles outputs, o bien con una base de datos amplia que permita identificar cuáles son las variables explicativas observadas y derivar el sistema de reglas difusas.
- b) El uso de un número elevado de indicadores complica exponencialmente las reglas difusas, dada su naturaleza combinatoria, perdiendo transparencia el análisis. Este hecho obliga a la selección del menor número posible de indicadores iniciales de cara a mantener la transparencia del modelo a costa de una menor representatividad.
- c) La robustez del modelo basado en lógica difusa depende de la amplitud y la calidad de la base de datos. En ciertos casos no es posible la extrapolación de las reglas de razonamiento difuso a otros ámbitos, máxime si se han elaborado sobre la base de redes neuronales, pues en este caso se desconocen las operaciones realizadas en la llamada “caja negra” para pasar del input al output, perdiendo sentido el análisis comparativo con otros ámbitos no recogidos inicialmente en el análisis.

²⁸⁵ Con el instrumento del razonamiento aproximado es posible además realizar otro tipo de análisis centrados, por ejemplo, en el estudio de conflictos en la toma de decisiones medioambientales (conservar vs. explotar) mediante teoría de juegos difusos, etc.

Por su parte, de forma complementaria, la selección del modelo difuso de agregación de conjuntos se basa en los siguientes puntos:

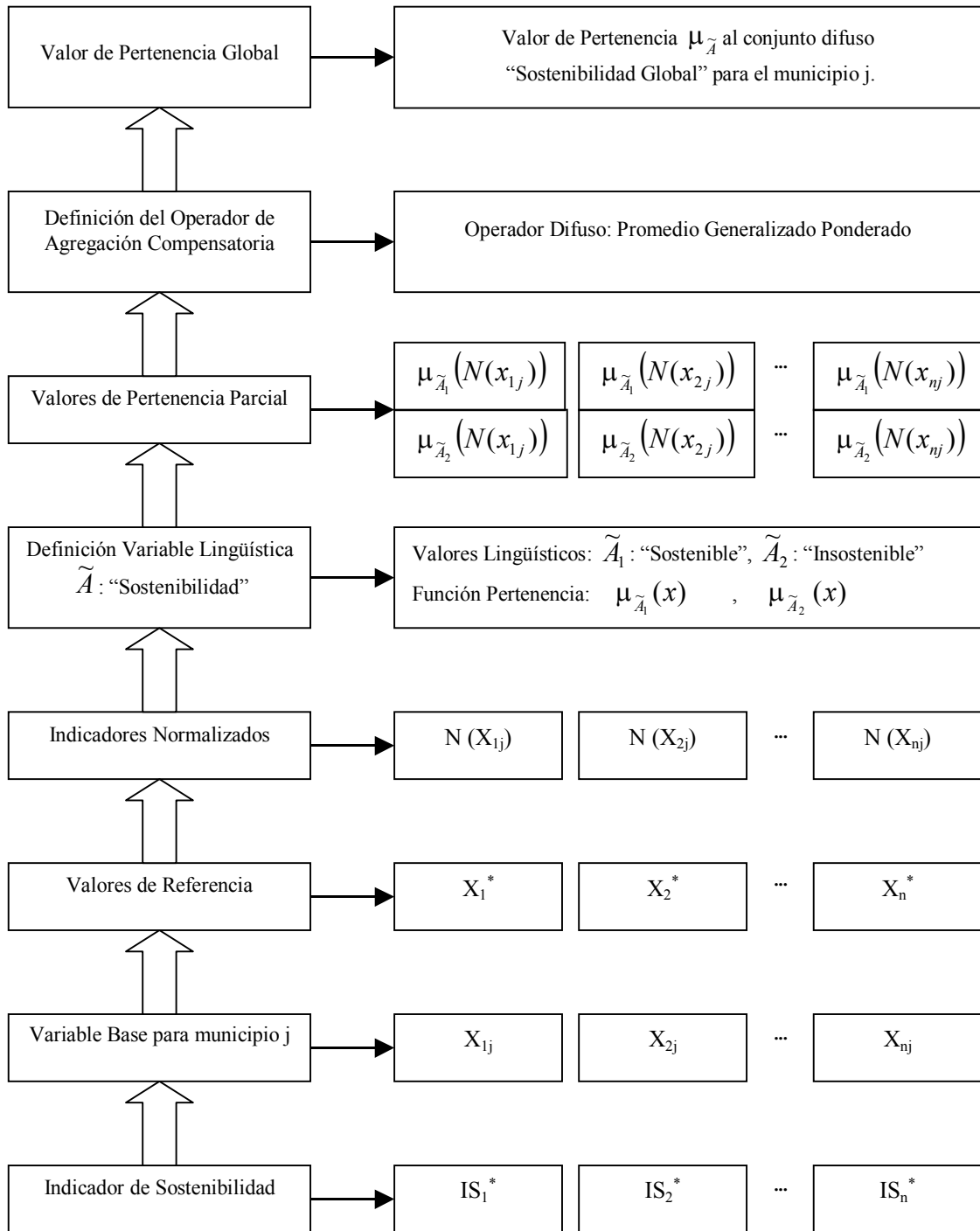
- a) Supone un método idóneo para una primera aproximación descriptiva de las variables que componen el concepto de desarrollo. Por la propia estructura del modelo, es posible determinar el peso relativo de cada variable y realizar análisis de sensibilidad específicos.
- b) Facilita la consideración de un mayor número de dimensiones a la hora de cuantificar el desarrollo sostenible, manteniendo la transparencia interna del modelo.
- c) Partiendo de una definición en términos relativos de la sostenibilidad, permite la comparación directa entre análisis de ámbitos distintos, siempre y cuando hayan seguido los mismos pasos en su formulación, hecho no totalmente necesario en los modelos de razonamiento aproximado.

En base a todo lo anterior, se propone en este epígrafe el marco general para implementar un modelo difuso lingüístico aplicado a la obtención de un índice de desarrollo sostenible mediante la agregación de conjuntos difusos (ACD). Los pasos a seguir son (Figura 4.2):

- a) Selección de los indicadores, definición de los valores de referencia y normalización.
- b) Definición de la variable lingüística difusa “sostenibilidad parcial” en base al concepto operativo de desarrollo sostenible finalmente seleccionado.
- c) Definición de las funciones de pertenencia y de los valores de pertenencia parciales.
- d) Agregación de las pertenencias parciales y obtención del índice difuso “sostenibilidad global”.
- e) Aclarado y obtención de una medida rígida como índice final no difuso.

La aproximación que sobre la base de datos elaborada se realizará en el capítulo siguiente seguirá este esquema, concretando en mayor medida las diversas opciones que se plantean en este modelo general.

Figura 4.2. Modelo difuso para la agregación de indicadores de desarrollo sostenible.



4.4.3.1. Selección de los indicadores de sostenibilidad y de los valores de referencia.

La selección de los indicadores iniciales ha de partir de la base de un conocimiento experto acerca de la información relevante para la medida del desarrollo. Para ello es necesaria la formulación previa de un modelo que presente las principales interrelaciones entre los componentes, en este caso, del ecosistema urbano²⁸⁶.

Definido el modelo de partida, se establecen criterios para decidir qué tipo de medida se desea obtener. Dada su principal utilidad (apoyo a la toma de decisiones), un índice de desarrollo ha de considerar aquellas dimensiones factibles para la posterior gestión o actuación sobre las mismas. No obstante, se han de aunar criterios tanto científicos como sociales para delimitar el concepto operativo de desarrollo.

En cada uno de los subsistemas del modelo de análisis local se han de identificar los más indicadores relevantes para elaborar el índice difuso. Para realizar esta selección resulta pertinente partir de los resultados previos de otras técnicas multivariantes, tales como el análisis de componentes principales, cuando los indicadores así lo permitan.

También se ha comentado que el modelo difuso posibilita el uso de información no necesariamente rígida o exacta. Gracias al uso del enfoque lingüístico, entre los indicadores se podrán incluir al mismo nivel valoraciones subjetivas (p.e.: percepciones subjetivas de la calidad del medio ambiente), e información vaga o incompleta.

Seleccionados los indicadores iniciales en base a su incidencia directa sobre cuestiones relativas al desarrollo, se pasa a la identificación de los valores de referencia. Otra característica inherente al modelo difuso es la definición de umbrales progresivos. Este importante aspecto es destacado por Phillis y Andrian. (2001:436): “el límite entre situaciones sostenibles e insostenibles es muy difuso, por lo que no es posible determinar valores de referencia rígidos para la sostenibilidad”. En función a los valores de referencia, son diversas las posibilidades de análisis de la sostenibilidad, destacando las tres siguientes.

²⁸⁶ Sobre las cuestiones no directamente relacionadas con el modelo difuso, en concreto la definición de los componentes del modelo, la selección de indicadores y la justificación de los valores de referencia, se ocupa en profundidad el primer apartado del siguiente capítulo.

En primer lugar, si se opta por la aplicación de valores objetivo observados (máximo, media, mínimo), el modelo difuso se aproxima al concepto de la sostenibilidad relativa comentada en el epígrafe de ciudad y sostenibilidad. Los indicadores son referidos a determinados valores observados en la muestra. Una elevada pertenencia al conjunto “Sostenible” denotaría una mejor evaluación del indicador en relación a los valores observados en la muestra y por tanto una mejor posición relativa del ámbito de estudio.

En segundo lugar, si se parte de valores de referencia absolutos (umbrales o niveles críticos predefinidos), el concepto de desarrollo se puede considerar bajo el enfoque de la sostenibilidad absoluta. Las distancias de los indicadores a los valores de referencia aportan información acerca del margen que queda (o bien el déficit producido) para alcanzar el límite físico o nivel crítico estimado. Una elevada pertenencia de la evaluación difusa de un indicador concreto al conjunto “Sostenible” implicaría que en gran medida se cumple el valor de referencia u objetivo definido para el mismo y que por tanto, en términos de la contribución al desarrollo sostenible de dicho indicador, se cumple el criterio de la sostenibilidad absoluta.

Una tercera alternativa es la derivada de que en el modelo difuso se pueden utilizar valores de referencia orientados hacia la toma de decisiones, es decir, los denominados valores o niveles objetivo (targets). Los mismos formulan un nivel a alcanzar por la política de desarrollo implementada en el ámbito de acción y que se plasma en un determinado valor para el indicador.

Sobre la base de la matriz con las variables base para el modelo lingüístico difuso, se considera para cada valor x_{ij} en el ámbito i y la dimensión j , un valor de referencia x_j^* . Este valor cumple para todos los indicadores la misma función desde distintas perspectivas. En unos casos se trata de un valor objetivo mínimo (p.e.: niveles de ruido ambiental), de un valor objetivo máximo (p.e.: renta *per capita*), o de un valor objetivo en forma de intervalo (p.e.: distancia temporal a zonas verdes). En términos de la evaluación del desarrollo, se trata de delimitar para cada indicador el valor que determine el sentido de su contribución al desarrollo sostenible²⁸⁷.

²⁸⁷ En el capítulo anterior ya se hizo referencia a la selección del valor de referencia entre alternativas como el nivel objetivo, el umbral crítico, o los niveles observados (min, max, medio, mediano). El hecho de seleccionar el nivel-objetivo no descarta los demás, dado que puede coincidir en algunos casos con

Seguidamente se procede a la normalización de los indicadores. Existen muchas alternativas para conseguir una medida homogénea comparable para todos los indicadores. La normalización clásica parte de las siguientes expresiones:

$$a) \quad N(x_i) = \frac{x_i}{\bar{x}}$$

$$b) \quad N(x_i) = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$$

La alternativa primera es la más simple, donde sólo se relativiza respecto al valor medio, eliminando el efecto de la unidad de medida. La segunda es la más utilizada, pues las diferencias al valor medio relativas a la desviación típica observada consiguen eliminar los efectos de unidad de medida y escala.

Otra posibilidad contemplada en la construcción de índices agregados es la definida por Drewnowski (1970) llamada “punto de correspondencia” utilizada en la elaboración del Índice de Desarrollo Humano (UNDP, 2000). Consiste en establecer para cada indicador un intervalo limitado por un mínimo y un máximo empíricos y calcular el nivel alcanzado como tasa o porcentaje de dicho intervalo:

$$N(x_i) = \left(\frac{x_i - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \right) \cdot 100$$

Con esta alternativa se pretende normalizar el indicador en base a su distancia al valor mínimo en relación al recorrido total. Profundizando en esta idea, la normalización se puede realizar respecto a los valores de referencia seleccionados para cada indicador, considerándola como una estandarización en términos de distancia respecto al valor objetivo de cada indicador.

Siguiendo a Phillis y Andrian. (2001) se pueden definir las siguientes funciones de normalización en base a que el valor objetivo sea un máximo x_{max}^* , un valor mínimo x_{min}^* , o un intervalo (x_{min}^*, x_{max}^*) :

ciertos valores observados (eligiéndose así de referencia la mejor situación observada) o con los niveles críticos a mantener de determinados conceptos (p.e.: el verde urbano ha de superar los 5 m²/hab.).

a) Si el valor objetivo es un máximo x_{max}^* ,

$$N(x_i) = \begin{cases} \frac{x_i - x_{min}}{x_{max}^* - x_{min}} & ; x_i < x_{max}^* \\ 1 & ; x_i \geq x_{max}^* \end{cases}$$

b) Si el valor objetivo es un mínimo x_{min}^* ,

$$N(x_i) = \begin{cases} 1 & ; x_i \leq x_{min}^* \\ \frac{x_{max} - x_i}{x_{max} - x_{min}^*} & ; x_i > x_{min}^* \end{cases}$$

c) Si el valor objetivo es un intervalo (x_{min}^*, x_{max}^*) ,

$$N(x_i) = \begin{cases} \frac{x_i - x_{min}}{x_{min}^* - x_{min}} & ; x_i \leq x_{min}^* \\ 1 & ; x_i \in (x_{min}^*, x_{max}^*) \\ \frac{x_{max} - x_i}{x_{max} - x_{max}^*} & ; x_i \geq x_{max}^* \end{cases}$$

Tras esta normalización, todos los indicadores son adimensionales, tomando valores en el intervalo (0,1). Un valor próximo a cero indica que, en la dimensión recogida por el indicador específico, se está lejos del objetivo marcado. De forma complementaria, un valor del indicador normalizado próximo a la unidad refleja que se cumple el objetivo definido para la consecución del desarrollo sostenible.

4.4.3.2. Definición de la variable lingüística.

Bajo el enfoque lingüístico, el principal instrumento de este modelo es la definición de una variable lingüística difusa. Cuatro son sus características:

- El nombre de la variable (p.e.: la altura).
- El valor o valores lingüísticos (p.e.: bajo, mediano, alto). Cada uno de ellos tiene un valor sintáctico (etiqueta) y un valor semántico (significado).
- Las funciones de pertenencia de los valores lingüísticos (p.e.: funciones matemáticas como las derivadas de los números triangulares).

- d) El dominio de la variable base (p.e.: la escala de medida en centímetros).

La variable lingüística traducirá a términos difusos, mediante la función de pertenencia, la información inicial de la variable base (Bonissone, 1982). Este proceso recibe el nombre de “difuminado” o “borroseado” (fuzzification). La elección del conjunto de términos lingüístico con sus semánticas respectivas, la “granularidad” (granularity) de la variable lingüística (Jiménez, 1998), es el primer paso a realizar, de ahí la importancia de una correcta definición del dominio de expresión lingüística (Zadeh, 1975)²⁸⁸.

De cara a evaluar el desarrollo sostenible, se define precisamente esta variable lingüística \tilde{A} : “Sostenibilidad” cuyo ámbito de aplicación es la evaluación difusa de la distancia de un indicador específico al nivel de referencia previamente definido.

Seguidamente se han de identificar los posibles valores lingüísticos, para cada uno de ellos su valor semántico vendrá definido por un subconjunto difuso \tilde{A}_i en el universo de discurso $N(x_{ij}) \in [0,1]$. Se podrían definir tantos valores como fueran necesarios para caracterizar o adjetivar a la variable nivel de desarrollo.

La definición de dos valores lingüísticos (\tilde{A}_1 : Sostenible y \tilde{A}_2 : No sostenible), supone una opción válida como primera aproximación que no persigue más que la clasificación de los municipios considerando que tiene características pertenecientes a ambos conceptos con distintos grados de intensidad o posibilidad. La justificación de elegir dos valores lingüísticos, frente a la posibilidad de definir más valores²⁸⁹ se basa en dos razones:

- a) Adecuación lingüística. En la literatura revisada en los capítulos anteriores se parte de la definición de una única variable: sostenibilidad, caracterizada en la

²⁸⁸ Una definición operativa de los pasos a establecer en la toma de decisiones con información lingüística puede encontrarse en Herrera y Herrera-Viedma (2000).

²⁸⁹ La diferenciación de más categorías o valores para el término lingüístico ha de cumplir un compromiso genérico de operatividad (Zadeh, 1975). La mayor especificación de categorías lingüísticas redundará en un mayor refinamiento o desagregación de la información resultante en el output del modelo. No obstante, el análisis planteado persigue una formulación más genérica propia de una primera aproximación metodológica a la modelización de la sostenibilidad.

lógica clásica por dos términos complementarios y excluyentes: “sostenible” frente a “no sostenible”²⁹⁰.

- b) Adecuación difusa. El hecho de considerar un modelo difuso en sí permite una pertenencia gradual y progresiva del valor del indicador al concepto de desarrollo descrito por el conjunto difuso “sostenible”, por lo que en una primera aproximación se considera como suficiente. Este hecho no ocurre en la lógica clásica donde dos valores frontera de un indicador se clasifican en conjuntos complementarios a pesar de su mínima diferencia (problema de los bordes rígidos en la teoría clásica de conjuntos), lo que obligaría en ese caso a la redefinición de más conjuntos rígidos (más granulación) para evitar el efecto de los valores frontera.

Si los indicadores son referenciados a determinados valores observados en la muestra, se considera el enfoque de la sostenibilidad relativa. Una elevada pertenencia al conjunto “sostenible” denotaría una mejor evaluación del indicador en relación a los valores observados en la muestra y por tanto una mejor posición relativa del ámbito de estudio.

Si se parte de valores de referencia absolutos (enfoque de la sostenibilidad objetiva), las distancias de los indicadores a los valores de referencia aportan información acerca del margen que queda (o bien el déficit producido) para alcanzar el límite físico o nivel crítico estimado. Una elevada pertenencia de la evaluación difusa de un indicador concreto al conjunto “Sostenible” implicaría que en gran medida se cumple el valor de referencia u objetivo definido para el mismo y que por tanto, en términos de la contribución al desarrollo sostenible de dicho indicador, se cumple el criterio de la sostenibilidad en sentido objetivo.

Los distintos valores lingüísticos vienen definidos por unas funciones de pertenencia específicas, las cuales se refieren y justifican en el siguiente epígrafe. De las mismas se derivan una pertenencia parcial al conjunto difuso “sostenible” para cada indicador normalizado.

²⁹⁰ Para facilitar el cálculo posterior y de acuerdo a su adecuación lingüística, dado que ambos términos son complementarios, se definen las dos funciones de pertenencia también de forma complementaria.

La variable lingüística final obtenida tras la agregación de todos los indicadores está definida semánticamente de la misma forma que la variable descrita (\tilde{A}). No obstante, para reflejar el proceso de agregación se denominará \tilde{A}_{Global} : “Sostenibilidad Global”.

4.4.3.3. Definición de las funciones de pertenencia. Borroseado de la información.

Asumiendo el uso de los conjuntos difusos para describir la semántica de los términos lingüísticos, la correcta definición de la función de pertenencia es la clave para la obtención de un modelo difuso que ofrezca respuestas útiles al problema de incertidumbre difusa²⁹¹. Esta función permite la definición de un “umbral suave” (soft threshold) en contraste con el “umbral duro” (hard threshold) de los conjuntos clásicos.

A la hora de su definición en determinados ámbitos de aplicación, si no es posible partir de una base amplia de datos reales y objetivos²⁹² sobre los que aplicar una red neuronal de aprendizaje “prueba – error” (p.e.: ciencias sociales), puede producirse un elevado grado de subjetividad, hecho que no suele ocurrir en el caso de las aplicaciones realizadas en Ingeniería Industrial. En este sentido, al asociar un conjunto difuso a un concepto lingüístico, puede aparecer el obstáculo añadido de la indefinición en la aplicación, como señalan Bårdossy y Duckstein (1995:14) en referencia precisamente al ejemplo de los valores lingüísticos ”buena o excelente calidad medioambiental.”

Al revisar las técnicas existentes para la caracterización de conjuntos difusos²⁹³ se constata que no existe un único método de definición de funciones de pertenencia. Su elección está sin duda condicionada por el hecho de que la función de pertenencia represente fielmente el cumplimiento progresivo de determinada característica a modelizar por el conjunto difuso en concreto²⁹⁴.

²⁹¹ Resulta habitual referirse a la función de pertenencia como el punto fuerte y débil de la teoría de los conjuntos difusos.

²⁹² No obstante, en estos casos se suele recurrir a la opinión de expertos, el uso de indicadores aproximados o la simulación previa de datos.

²⁹³ Véanse Civanlar y Trussel (1986), Dubois y Prade (1986) y Türksen (1991).

²⁹⁴ Una vez que se han especificado las funciones de pertenencia, es recomendable realizar un análisis de sensibilidad para perfeccionar dichas funciones (Bårdossy y Duckstein, 1995), dado que el modelo difuso es muy sensible al tipo de soporte o pendientes de las mismas.

La manera más genérica de realizar este proceso es mediante la definición de un número difuso triangular \tilde{A} con respecto a un parámetro x mediante la identificación de tres números (Bárdossy y Duckstein, 1995):

- a) el valor más creíble x^* , al que se le asigna el valor de pertenencia de 1.
- b) el número x^- , que casi con total certeza es menor que el valor del parámetro, asignándole un valor de pertenencia de 0.
- c) el número x^+ , que casi con total certeza es mayor al valor del parámetro, asignándole un valor de pertenencia de 0.

Queda así definido el número triangular $\tilde{A} = (x^-, x^*, x^+)$. El intervalo (x^-, x^+) es el soporte del número difuso, fuera del cual la función de pertenencia es definida como cero.

La justificación de esta técnica de obtención de funciones de pertenencia es igualmente intuitiva. En situaciones en las que no es posible implementar otras técnicas basadas en la probabilidad *a priori* o aquellas que determinen valores funcionales (Türksen, 1991), la aproximación del número difuso triangular permite satisfacer unos requerimientos mínimos en términos de compatibilidad con otras formas funcionales, es decir, se trata de la mejor aproximación posible a la mayoría de funciones de pertenencia (Pedrycz, 1994), mostrando también una mayor comodidad a la hora de su cálculo.

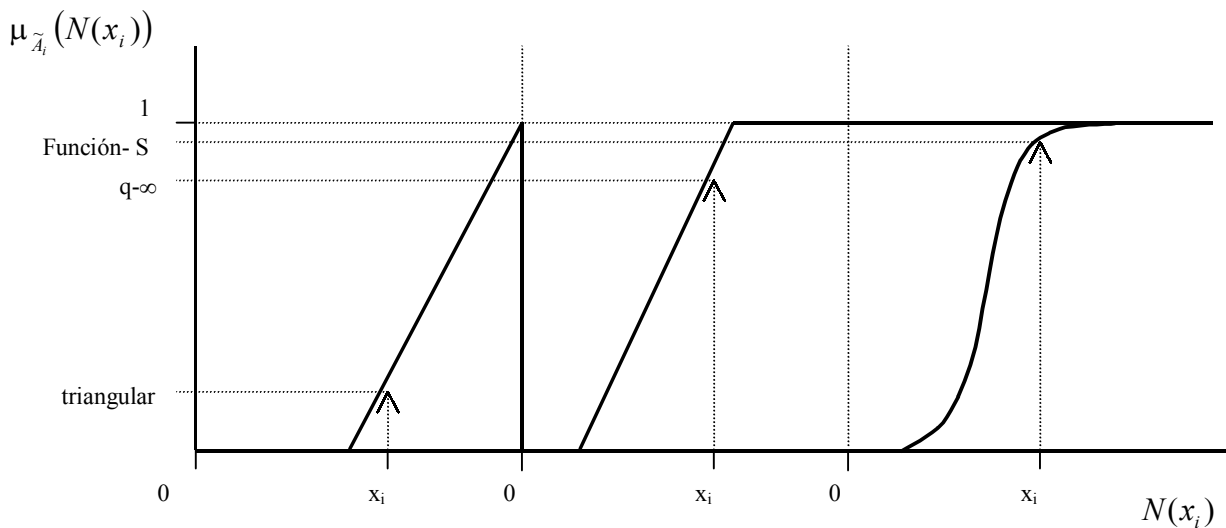
En estas situaciones, la alternativa radica en el desarrollo de métodos empíricos para la construcción de funciones de pertenencia basados en la opinión de expertos. En este punto, Cornelissen *et al.* (2001) consideran tres aspectos fundamentales: a) definir qué cualificación han de cumplir estos expertos; b) cómo obtener el conocimiento experto para construir la función de pertenencia; y c) establecer métodos para medir la fiabilidad de dicha función, hecho básico para fundamentar el modelo difuso.

En el análisis objeto de estudio existe cierta información, basada en la semántica propia del concepto de desarrollo sostenible, que permite una primera selección funcional que perfecciona la aproximación triangular. En primer lugar, si se elige la función triangular resultaría muy difícil defender que sólo un único valor de la variable tiene una pertenencia total al conjunto difuso “sostenible”.

Para solucionar esta cuestión, en la toma de decisiones con información lingüística, algunos autores consideran las funciones de pertenencia trapezoidales²⁹⁵ lineales como mejores aproximaciones a la evaluación lingüística, dado que “puede ser imposible e innecesario obtener valores más precisos” (Herrera y Herrera-Viedma, 2000:70). Por otra parte, un número difuso semi-infinito ($q - \infty$), caso específico de los números triangulares, resulta más adecuado que un número triangular genérico, dado que representa una mayor incertidumbre difusa en el cálculo de la pertenencia al objetivo de la sostenibilidad (Phillis y Andrian., 2001).

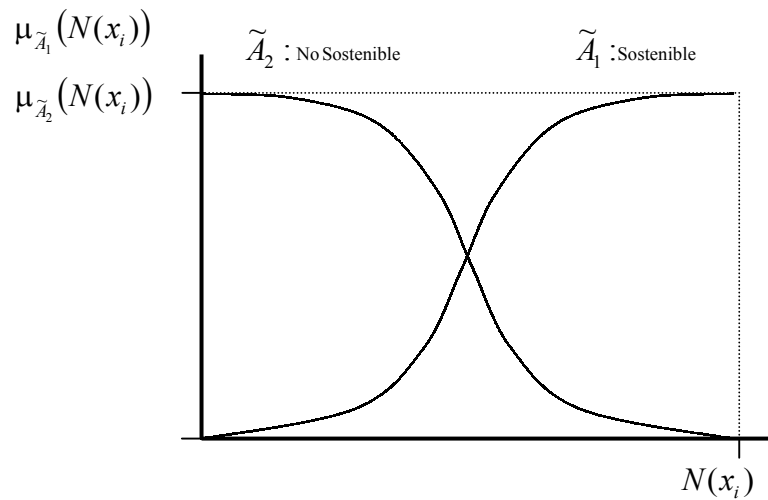
Un segundo aspecto en relación al concepto de sostenibilidad es la progresividad. La ganancia parcial de la sostenibilidad no es la misma para un indicador que mejora en su posición relativa partiendo desde valores mínimos o elevados. Resulta claro que a partir de cierto nivel crítico se modifica la pendiente al alcanzar niveles de sostenibilidad suficientemente elevados. En este sentido, un número difuso con función-S aporta una mayor flexibilidad que las anteriores formas funcionales (Figura 4.3), suavizando el balance progresivo de la pertenencia de forma no lineal y aproximándose así a la lógica humana a la hora de asignar valores de pertenencia a los conjuntos de “sostenible” y “no sostenible” (Figura 4.4).

Figura 4.3. Comparación entre formas funcionales de pertenencia difusa.



²⁹⁵ Se ha de recordar que un número triangular es un caso específico de número trapezoidal.

Figura 4.4. Función de pertenencia.



El siguiente paso es el de “borroseado” en la que se pasa de la información rígida a la información difusa en términos lingüísticos. Para ello se computa el grado de pertenencia del valor normalizado de cada indicador a los conjuntos difusos definidos.

4.4.3.4. Agregación. Selección de los operadores de agregación de las pertenencias parciales.

Calculados los valores de pertenencia para todos los indicadores referidos a cada ámbito de estudio, se procede a la agregación de los mismos para obtener una medida promedio difusa de los valores de pertenencia a los distintos términos lingüísticos empleados para referirse al desarrollo global del ámbito en cuestión.

No obstante, como paso intermedio, se puede diferenciar una agregación previa por subsistemas de indicadores, obteniendo así una medida del desarrollo específica para los mismos, mucho más homogénea internamente a la hora de interpretar la pertenencia a los distintos valores lingüísticos.

La *agregación* de los indicadores referidos a subsistemas distintos ha de afrontar las cuestiones referidas al balance o compensación de la misma. Esta cuestión permite la elección de uno de los enfoques de la sostenibilidad: fuerte o débil, al poderse

considerar distintos ajustes en el grado de sustituibilidad entre el capital natural y humano.

Desde la sostenibilidad débil, reconociendo la existencia de un balance entre los criterios (sobre todo el económico y el ambiental), se puede elegir una regla que permita compensar valores de pertenencia bajos de unos indicadores (p.e.: espacios protegidos) con valores elevados de otros (p.e.: verde urbano). En términos del modelo difuso, este enfoque se traduce en la aplicación de un operador para la agregación que considere un criterio de compensación o sustituibilidad plena (operador-máximo) o parcial (operador- γ , la suma simétrica, la media aritmética, etc.).

Zimmermann y Zysno (1980) constatan que el procedimiento de agregación que realiza el razonamiento humano es de naturaleza compensatoria, por lo que los operadores mínimo y máximo no son válidos para la agregación, dado que se necesita una solución de compromiso entre los resultados del “y” lógico y del “o” lógico. Como señalan Chen y Hwang (1992:60), es similar a “tomar una decisión en base únicamente al mejor y al peor de los valores del atributo considerado”.

Partiendo del enfoque de la sostenibilidad en sentido fuerte, el modelo difuso no ha de considerar la compensación de valores mínimos por debajo de cierto umbral de pertenencia o α -corte. La evaluación difusa global será determinada por el indicador en peor situación respecto al valor de referencia absoluto, independientemente de que otras variables sí consigan valores de pertenencia elevados. Para ello se pueden usar operadores no compensatorios como el operador-mínimo de la intersección o la media geométrica.

En relación con el concepto de balance o compensación aparece también la *ponderación*. En este sentido, si se dispone de la información necesaria para su definición, resulta recomendable establecer unos pesos relativos para cada variable, de manera que no todos los valores de pertenencia parciales se compensen de la misma manera (Silvert, 1997). No obstante, dado el grado de subjetividad en esta cuestión, se ha de realizar bajo el prisma de la información de expertos y el posterior análisis de sensibilidad de los resultados obtenidos.

De entre las alternativas a la hora de seleccionar finalmente el tipo de operador de agregación, lo habitual es aplicar la media aritmética, no obstante, Zimmermann y Zysno (1980) muestran que este promedio, si bien supone una compensación básica, da lugar a

evaluaciones sesgadas porque este operador no tiene en cuenta la interacción entre criterios. Para ello, Dubois y Prade (1985) desarrollan el operador promedio ponderado generalizado comentado anteriormente, de gran versatilidad y facilidad computacional, razón por la cual se utilizará en la aplicación propuesta al final de este trabajo.

Por otra parte, el operador- γ cuenta asimismo con gran aceptación en los modelos difusos de agregación de conjuntos, dado que también permite ajustar su posición relativa entre el operador-mínimo y el operador-máximo²⁹⁶. Asimismo, el operador suma simétrica (Silvert, 1979) también muestra una buena adecuación al análisis de pertenencias en términos de clases complementarias (sostenible y no sostenible), así como su capacidad de combinar objetivamente, compensar, las pertenencias parciales en caso de conflicto entre indicadores (Silvert, 1997).

El operador mínimo supone un grado de conservadurismo pleno, hecho que lo hace idóneo para análisis desde el enfoque de la sostenibilidad fuerte al no permitir la compensación. De forma menos estricta, la media geométrica es buena candidata para ese tipo de análisis, dado que permite cierta compensación, pero si una pertenencia parcial para un indicador es “cero” hace que la pertenencia global sea también “cero”, independientemente del resto de indicadores (Silvert, 1997).

Tras la agregación se obtiene para cada ámbito un promedio ponderado de la pertenencia parcial a los conjuntos difusos que caracterizan los valores lingüísticos que finalmente se hayan especificado. Si se ha utilizado un único conjunto, el promedio obtenido es el índice difuso de desarrollo que se buscaba. Si se han definido por ejemplo dos conjuntos difusos, para no tener que manejar dos cantidades para cada municipio y poder establecer una clasificación *rígida* en un único conjunto difuso se procede al proceso de aclarado (“defuzzification”).

En otros términos, para poder clasificar en un único conjunto difuso a cada ámbito o caso analizado lo habitual es recurrir al concepto de α -corte referido anteriormente. Definido un umbral crítico α^* , se pueden discriminar los valores de

²⁹⁶ Al igual que los operadores de Yager, se trata de un operador paramétrico, donde la correcta selección del valor del parámetro condiciona la evaluación difusa. Por ejemplo, en Choi y Oh (2000) se desarrolla una técnica iterativa para estimar el valor de dicho parámetro.

pertenencia que sean menores a α^* . Cada ámbito tendrá una pertenencia dominante a partir de un α^* dado.

Otra alternativa es la propuesta por Silvert (1997) que se basa en la obtención de una puntuación S a partir de la suma ponderada de las pertenencias obtenidas en los diversos subconjuntos que conforman un conjunto difuso:

$$S = w_1 \cdot \mu_{\tilde{A}} + w_2 \cdot \mu_{\tilde{B}} + \dots + w_k \cdot \mu_{\tilde{Z}}$$

De esta forma se concede un mayor grado de importancia a determinados conjuntos difusos así como a los distintos valores de pertenencia derivados y se obtiene una única medida para ordenar o jerarquizar los distintos ámbitos en su situación agregada frente al concepto de sostenibilidad subyacente en el estudio.

4.5. Conclusiones.

Las conclusiones de un capítulo dedicado específicamente a la descripción de las técnicas estadísticas multivariante y el modelo difuso se concretan en el comentario crítico sobre la utilidad y el alcance de las mismas en el análisis específico.

Se parte del objetivo principal de la reducción o resumen de la información contenida en la matriz de datos inicial, para obtener así una medida sintética de la evolución conjunta definida por estos datos. Como se comenta en el siguiente capítulo, la base estadística está referida a diversas dimensiones o ámbitos que componen el modelo de desarrollo del ecosistema urbano.

Las tres metodologías expuestas, el Análisis de Componentes Principales, la Distancia P_2 y la Agregación de Conjuntos Difusos, tratan de llegar a este objetivo final desde tres vías distintas, aunque se ha de explicitar que comparten el hecho de analizar relaciones lineales, propias del modelo causa-efecto referenciado en el enfoque PER de la OCDE, a partir de la correlación existente entre los indicadores iniciales o en referencia a los índices elaborados para los distintos subsistemas parciales.

En particular, el Análisis de Componentes Principales define un nuevo y reducido conjunto de indicadores, combinaciones lineales de los iniciales, que tienen la característica de ser independientes entre sí y mantener la mayor cantidad de información de la matriz inicial. Esta técnica se usa también como base para el Análisis Factorial, si bien en este caso se alude a su base geométrica como ajuste entre los planos creados por las nuevas medidas o componentes.

Para ganar en comparabilidad con las otras técnicas, el Análisis de Componentes Principales se aplica en su versión normada, es decir, normalizando los indicadores de la matriz inicial. Con este mismo objetivo, no se introduce un sistema de ponderaciones específico (lo que se denomina Análisis de Componentes Principales ponderado), hecho que redundaría en una diferenciación subjetiva en el peso relativo de indicadores de determinado subsistema, o sobre los indicadores con mayor explicabilidad dentro de cada subsistema (realizando previamente un análisis sólo para cada subsistema).

La elaboración de un índice mediante los resultados obtenidos del Análisis de Componentes Principales se puede afrontar de muy diversas maneras. En este caso se opta por una combinación de todos los componentes para con ello evitar mayores pérdidas de información y por tanto medidas menos significativas. Asimismo, se consigue un índice con un mayor grado de comparabilidad, dado que su elaboración no depende del ámbito específico de análisis²⁹⁷ y por tanto los resultados obtenidos son plenamente comparables.

En segundo lugar, el Análisis de la Distancia P_2 aporta varias ventajas, entre las que destaca la obtención directa de una medida sintética o índice. Esta distancia es un promedio de las diferencias normalizadas y ponderadas para cada indicador con referencia a un valor objetivo predefinido. Las ponderaciones se obtienen mediante un proceso iterativo de ajuste en la introducción de los indicadores, en base a la cantidad de nueva información que aportan los mismos en relación a los indicadores ya recogidos.

Frente a la técnica del Análisis de Componentes Principales, menos exigente en estas cuestiones, este índice cumple ciertas propiedades y axiomas exigibles para ser una medida cardinal del desarrollo.

²⁹⁷ Como ocurriría si se eligiera como índice únicamente el primer componente, independientemente de los indicadores contenidos en el mismo y su grado de explicabilidad respecto a la variancia total.

Finalmente, la técnica propuesta de Agregación de Conjuntos Difusos, pretende ser una aproximación a la aplicación de la Teoría de Conjuntos Difusos a la medida de la sostenibilidad mediante el uso de indicadores. Dado que esta teoría es de reciente aplicación en Economía y en la Ciencia de la Sostenibilidad, es necesario dedicar algunos apartados a describir los conceptos básicos sobre los que se asienta.

De cara a la elaboración de una medida sintética, la principal ventaja de este modelo es el elevado grado de flexibilidad que aporta frente al resto de técnicas descritas, gracias a la definición de las funciones de pertenencia. En este ejercicio se trata no obstante de obtener una medida final que sea muy similar a la derivada de las otras dos metodologías. Este hecho, si bien redundante en una simplificación excesiva, permite una mayor comparación entre las ordenaciones y resultados obtenidos para las tres técnicas empleadas. No obstante, en este capítulo teórico, se apuntan las principales aportaciones y potencialidades que se derivan de este modelo para obtener índices de sostenibilidad, básicamente:

- Definición operativa de la sostenibilidad utilizando límites progresivos.
- Definición lingüística de la sostenibilidad, más cercana al significado real del término (cargado de un elevado grado de *incertidumbre difusa*).
- Conjugación de indicadores objetivos junto a información subjetiva, incompleta o vaga.
- Definición de un sistema de ponderación junto al establecimiento de un mecanismo de compensación que permite aproximar el índice obtenido hacia una medida de la sostenibilidad en sentido fuerte (no compensación) o sentido débil (elevada compensación).
- Definición de procesos multicriterio difusos en base a la aplicación de las denominadas reglas de inferencia difusa a la toma de decisiones con conflicto entre objetivos ambientales, económicos y sociales.

En definitiva, este trabajo trata de aplicar tres metodologías alternativas de forma que se obtengan resultados comparables en la medida de lo posible. Se reconoce que las tres técnicas permiten perfeccionamientos alternativos para obtener medidas finales más cercanas al objetivo de medida, si bien ello supone un importante detrimento de la comparabilidad, dado que suponen decisiones en materia de normalización y ponderación que afectan notablemente al peso de los indicadores a la hora de analizar las correlaciones observadas.