

**INSTITUTO SUPERIOR PEDAGÓGICO  
"FRANK PAÍS GARCÍA"  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA-COMPUTACIÓN**

**LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ESTRUCTURACIÓN  
DE UN SISTEMA DE HABILIDADES MATEMÁTICAS  
EN LA ESCUELA MEDIA CUBANA.**

**Tesis presentada en opción del grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas.**

**AUTORA: Lic. MARIBEL FERRER VICENTE**

**TUTOR: Dr. LUIS CAMPISTROUS PÉREZ**

**Santiago de Cuba**

**2000**

## Índice

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>3</b>
<b>CAPÍTULO I: LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA FORMACIÓN DE HABILIDADES.....</b>	<b>10</b>
<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>10</b>
<b>1.1. La resolución de problemas en el aprendizaje de la matemática.....</b>	<b>10</b>
1.1.1. Corrientes actuales.....	10
1.1.2. Los problemas matemáticos.....	12
1.1.3. Los problemas en los cursos de Matemática.....	15
<b>1.2. La habilidad matemática.....</b>	<b>20</b>
1.2.1. Concepto de habilidad.....	20
1.2.2. Las habilidades matemáticas.....	23
1.2.3. Tendencias pedagógicas contemporáneas.....	27
1.2.4. Concepciones en nuestro país.....	31
1.2.5. Tratamiento de las habilidades matemáticas en los programas de la escuela media.....	32
<b>1.3. La formación de habilidades y la estructura del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática.....</b>	<b>34</b>
1.3.1. La formación del sistema de conocimientos, hábitos, habilidades y capacidades.....	34
1.3.2. Vías para la formación de habilidades.....	39
1.3.2.1. De las particulares a las generales.....	40
1.3.2.2. De las generales a las particulares.....	42
1.3.3. La estructuración del contenido de la Matemática a partir de problemas.....	44
<b>CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.....</b>	<b>47</b>
<b>CAPÍTULO II: MODELO DIDÁCTICO PARA EL TRATAMIENTO METODOLÓGICO DE LAS HABILIDADES MATEMÁTICAS.....</b>	<b>49</b>
<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>49</b>
<b>2.1. La habilidad matemática.....</b>	<b>49</b>
2.1.1. La relación problema - habilidad.....	49
2.1.2. La actividad matemática.....	51
2.1.3. Las habilidades matemáticas.....	54
<b>2.2. Caracterización de las habilidades en la asignatura matemática.....</b>	<b>55</b>
2.2.1. Habilidades matemáticas atendiendo al objeto de la actividad matemática.....	55
2.2.2. Habilidades matemáticas atendiendo a los niveles de sistematicidad de la actividad matemática.....	57
<b>2.3. Estructura sistémica de las habilidades matemáticas.....</b>	<b>61</b>
2.3.1. Enfoque de sistema.....	61
2.2.3. Estrategia para estructurar el sistema de habilidades matemáticas.....	64
<b>2.4. Etapas del proceso de formación del sistema de habilidades matemáticas.....</b>	<b>67</b>
<b>CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.....</b>	<b>70</b>

<b>CAPITULO III: APLICACIÓN DEL MODELO DIDÁCTICO AL TRATAMIENTO METODOLÓGICO DE LAS HABILIDADES MATEMÁTICAS EN UNIDADES TEMÁTICAS SELECCIONADAS.....</b>	<b>71</b>
<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>71</b>
<b>3.1 Metodología para la aplicación del modelo didáctico.....</b>	<b>72</b>
<b>3.2. Aplicación del modelo teórico a la formación de habilidades en las unidades de geometría plana en la secundaria básica.....</b>	<b>74</b>
<b>3.3. RESULTADOS DE LA INTERVENCIÓN EN LA PRÁCTICA.....</b>	<b>81</b>
<b>3.3.1. Resultados del diagnóstico inicial.....</b>	<b>82</b>
<b>3.3.2. Resultados de la aplicación del modelo propuesto. ....</b>	<b>85</b>
<b>3.3.2.1. Resultados de las observaciones a clases. ....</b>	<b>87</b>
<b>3.3.2.2. Resultados de las pruebas pedagógicas aplicadas a los alumnos. ....</b>	<b>89</b>
<b>3.3.2.3. Resultados de las entrevistas a profesores.....</b>	<b>92</b>
<b>3.3.2.4. Valoración de los resultados. ....</b>	<b>95</b>
<b>CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.....</b>	<b>96</b>
<b>CONCLUSIONES. ....</b>	<b>97</b>
<b>RECOMENDACIONES. ....</b>	<b>99</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS. ....</b>	<b>100</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA. ....</b>	<b>103</b>
<b>ANEXOS.     113</b>	
<b>ANEXO 1: GUÍA DE OBSERVACIÓN DE CLASES.....</b>	<b>113</b>
<b>ANEXO 2. PRUEBAS PEDAGÓGICAS APLICADAS A LOS ALUMNOS EN LA UNIDAD TEMÁTICA .....</b>	<b>114</b>
<b>ANEXO 3. RESULTADOS ( EN POR CIENTO ) DE LAS PRUEBAS APLICADAS A LOS ALUMNOS DE 7. GRADO. ....</b>	<b>115</b>
<b>ANEXO 4. FUENTES DE SIGNIFICACIÓN DETECTADAS A PARTIR DE LA TÉCNICA DE HABERMAN (1973) MEDIANTE LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE INDEPENDENCIA. ....</b>	<b>116</b>

## **INTRODUCCIÓN.**

En las últimas décadas el Ministerio de Educación ha llevado a cabo el constante perfeccionamiento del proceso docente educativo, en este proceso los planes de estudio y programas se han encaminado a lograr una formación cualitativamente superior en todos los niveles y subsistemas de educación.

La Enseñanza General Politécnica y Laboral ha recibido particular atención, por ser la que garantiza la preparación necesaria de niños y jóvenes para enfrentar con éxito las exigencias de la labor técnica y profesional que el desarrollo socioeconómico del país demanda.

La tarea básica de este subsistema de educación se concreta en cada uno de los niveles y ciclos que lo integran y especialmente en la tarea que cada asignatura tiene de preparar cada alumno, no sólo con conocimientos del objeto de la ciencia que se enseña, sino con una visión de ese objeto que le permita utilizarlo en el enfrentamiento de los problemas que dentro y fuera de la institución escolar debe resolver.

Esta intención de que el contenido de la enseñanza reflejado en los programas de estudio asegure un adecuado nivel de información sobre el objeto de la ciencia que se enseña y que propicie un máximo de actividad intelectual y práctica del alumno ha sido un problema permanente cuya solución ha ido desde la sobrecarga de los contenidos teóricos hasta el excesivo practicismo.

La absolutización de una u otra variante no ha arrojado el resultado fundamental que se espera en la garantía de un egresado que se haya apropiado de los conocimientos, habilidades y cualidades exigidos en los programas de estudio y sea capaz de utilizarlos según los objetivos del sistema educativo.

La asignatura Matemática en la Enseñanza General Politécnica y Laboral y particularmente en el nivel medio, presenta la situación señalada, lo cual ha sido ha corroborado en los diagnósticos nacionales y provinciales efectuados entre los años 1990 y 1996, manifestándose en la insuficiente preparación de los alumnos para resolver los ejercicios y problemas con una dificultad promedio.

En la investigación realizada, en el período indicado, sobre el estudio de la habilidad para resolver problemas matemáticos en la escuela media, se profundizó en los

resultados de estos diagnósticos y se destacaron, entre otras, las siguientes dificultades en la formación matemática de los alumnos:

1. Los alumnos demuestran poca solidez en los conocimientos por lo que no logran su reproducción total o parcial;
2. Aunque algunos alumnos son capaces de reproducir los conceptos y teoremas son limitadas sus posibilidades para aplicarlos;
3. Las habilidades para escribir, en el lenguaje matemático, las ideas de la solución buscada son insuficientes.

Al analizar las dificultades señaladas se reconocen múltiples causas que van desde la labor de dirección del proceso de enseñanza por los profesores hasta la forma en que están concebidos los programas de la asignatura que provocan una actuación determinada del alumno.

Particular interés en la búsqueda de soluciones pedagógicas a estos problemas lo tiene el lograr que el profesor alcance una preparación cada vez más profunda que le permita comprender el contenido de la enseñanza. Esto quiere decir, que el profesor no limite su acción a que el alumno asimile conocimientos y habilidades de forma fraccionada que no le permita conformar un verdadero sistema y que ,además, contribuya con ello a la formación de las convicciones que las propias posibilidades de utilización en la resolución de problemas ha de aportar.

La comprensión insuficiente de la estructura de los conocimientos y habilidades como sistema es, en el profesor de Matemática, otra de las causas que se ha considerado, en esta investigación, influye en que no contribuya a la preparación de los alumnos para resolver problemas, categoría didáctica que se reconoce en diferentes tendencias actuales, como un elemento principal a tener en cuenta desde el diseño de la asignatura.

La concepción de los programas en las últimas décadas no refleja con precisión la estructura sistémica del contenido, especialmente de las habilidades matemáticas, que le permita al profesor ver la asignatura más allá de bloques de contenidos (conceptos, teoremas y procedimientos) y precisar cuál es la actividad más compleja que debe ejecutar el alumno, para concebir desde la planificación del proceso docente educativo las acciones necesarias, no como eslabones individuales, sino como partes del sistema.

En la organización del proceso de enseñanza de la Matemática la comprensión clara del papel de cada unidad temática (tema o capítulo) permite al profesor reconocer que los objetivos de la asignatura en este nivel de sistematicidad del proceso alcanzan todas las condiciones para su cumplimiento, si se considera que los problemas que el alumno no aprende a resolver en este período de tiempo, resulta muy difícil que lo logre posteriormente cuando son desarrolladas otras unidades temáticas, en las que generalmente se exige lo ya aprendido.

Esta unidad organizativa del proceso docente merece especial atención cuando se analizan los componentes del proceso de enseñanza y su dinámica, porque, es en este marco, que se planifica y ejecuta el trabajo conjunto del profesor y los alumnos con el fin de dar cumplimiento a los objetivos específicos y generales, instructivos y educativos.

Las reflexiones anteriores han servido de base para plantear como problema científico de esta investigación:

**La insuficiente preparación de los alumnos de la enseñanza media para resolver problemas matemáticos y su relación con la falta de una concepción sistémica en la formación de las habilidades matemáticas.**

El objeto de la investigación es el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Matemática en la escuela media y el campo de acción es el proceso de formación de las habilidades matemáticas.

El objetivo de la investigación es:

**El establecimiento de un modelo didáctico para la dirección del proceso de formación de las habilidades matemáticas, con un enfoque sistémico, basado en el papel de la resolución de problemas.**

Para el cumplimiento del objetivo se propuso dar respuesta a las siguientes preguntas científicas:

- ¿Cómo explicar el concepto de habilidad en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática?
- ¿Cómo caracterizar los niveles de sistematicidad en las habilidades matemáticas a partir de la resolución de problemas?
- ¿Cómo determinar la estructura sistémica de las habilidades matemáticas, en una unidad temática, a partir de la habilidad para resolver problemas matemáticos?

- ¿Qué metodología seguir para planificar y dirigir el proceso de formación del sistema de habilidades matemáticas?

Las tareas científicas desarrolladas son:

1. Caracterizar el objeto de estudio a partir del análisis de las tendencias en la concepción de la habilidad, la formación de habilidades matemáticas, la resolución de problemas y su papel en el diseño curricular de la asignatura.
2. Establecer las vías que se emplean en la dirección del proceso de formación de las habilidades matemáticas, sus antecedentes y fundamentos pedagógicos y psicológicos.
3. Construir el modelo didáctico para la estructuración del sistema de habilidades matemáticas, en una unidad temática, y la dirección del proceso de su formación en la escuela media.
4. Validar la aplicabilidad del modelo didáctico elaborado en las condiciones actuales de la escuela media.

El aporte teórico de la investigación es ofrecer un modelo didáctico para la planificación y dirección del proceso de formación de las habilidades matemáticas, con una concepción sistémica, a partir de la resolución de problemas

La significación práctica radica en ofrecer modelos didácticos concretos para la estructuración del sistema de habilidades en unidades temáticas seleccionadas, con la metodología que se propone, lo que contribuye a la precisión de los programas de la asignatura y la planificación y dirección del proceso por el profesor. La influencia en la labor pedagógica del profesor radica en que alcance una más profunda comprensión del contenido de la enseñanza de la Matemática y sugerencias para guiar al alumno en el proceso de formación de las habilidades lo que constituye una necesidad y se constata en la práctica escolar.

La idea fundamental a defender es:

**La aplicación de un modelo didáctico para la dirección del proceso de formación de habilidades matemáticas, con una estructura sistémica, favorece la preparación de los alumnos para la búsqueda de vías de solución de ejercicios y problemas.**

Los métodos de investigación aplicados son los siguientes:

**Métodos teóricos.**

- Método de análisis y síntesis: para estudiar los componentes del proceso de enseñanza de la Matemática, los componentes de la habilidad para resolver problemas matemáticos y las habilidades matemáticas básicas.
- Método hipotético - deductivo: para deducir de las teorías científicas existentes el comportamiento del proceso de formación de la habilidad para resolver problemas y la incidencia de las habilidades matemáticas básicas, establecer relaciones e inferir nuevas conclusiones para este sistema teórico.
- Método de análisis histórico y lógico: para analizar diferentes posiciones sobre la formación de habilidades matemáticas en los planes de estudios, delimitar tendencias y describir las conclusiones obtenidas.
- Método de modelación: para ofrecer un modelo didáctico que refleje la estructura del sistema de habilidades, con la ilustración de casos particulares para unidades temáticas seleccionadas.
- Método de enfoque sistémico: para fundamentar el enfoque de sistema de las habilidades matemáticas en una unidad temática.
- Análisis de las fuentes de información: para el estudio de los documentos de la planificación del proceso de enseñanza aprendizaje, la concepción de las habilidades y su tratamiento.

### **Métodos empíricos.**

- Método de valoración de expertos: para someter a valoración la selección de la muestra.
- Experimento de constatación: para validar la aplicabilidad del modelo en unidades seleccionadas, en las condiciones actuales de la escuela.
- Observación: observar clases para hacer un diagnóstico previo del tratamiento metodológico dado por el profesor a la formación de las habilidades matemáticas. Además se aplicó este método para valorar en el profesor la asimilación del modelo didáctico elaborado.
- Entrevistas a profesores: para conocer la valoración de los resultados de la experiencia en la aplicación del modelo didáctico, ventajas, desventajas y perspectivas.
- Pruebas pedagógicas: para comprobar el nivel de desarrollo de las habilidades matemáticas en los alumnos.

## **Métodos estadísticos.**

Para el tratamiento descriptivo de la información se aplicó la prueba  $\chi^2$  de independencia y la prueba de Haberman (1973) para la determinación de fuentes de significación mediante el análisis de residuos.

La prueba  $\chi^2$  se propone establecer relaciones de dependencia o no en los resultados de las pruebas pedagógicas en cada uno de los niveles establecidos en una escala valorativa para la medición de la sistematización de las habilidades matemáticas en los alumnos.

La prueba de Haberman ofrecerá criterios sobre las fuentes de significación de esa dependencia y el comportamiento, por encima o por debajo de lo esperado, en cada uno de los niveles de la escala valorativa, en cada una de las pruebas pedagógicas.

La tesis cuenta con una introducción, tres capítulos, conclusiones, recomendaciones y anexos.

El primer capítulo denominado “La resolución de problemas matemáticos y la formación de habilidades” se dedica al análisis de lo que significa la resolución de problemas en la Educación Matemática, el concepto de habilidad y cómo han sido tratados en diferentes tendencias y en la Metodología de la enseñanza de la Matemática en la formación de maestros y profesores, así como los fundamentos que sustentan las vías que se siguen en la formación de habilidades en relación con la estructura del proceso de enseñanza aprendizaje.

En el capítulo 2 denominado “Modelo didáctico para el tratamiento metodológico de las habilidades matemáticas” se presenta, a partir de la relación entre las categorías didáctica problema y habilidad, una caracterización de las habilidades matemáticas tomando como base el objeto y la estructura de la actividad matemática, se fundamenta el enfoque de sistema y las etapas del proceso de su formación, lo que constituye el principal aporte teórico de la investigación.

El capítulo 3 “La aplicación del modelo didáctico al tratamiento metodológico de las habilidades matemáticas” ofrece una metodología con propuestas de tareas para el profesor para la dirección del proceso, se muestran sugerencias para el diseño de sistemas de habilidades para el complejo de materia Geometría Plana y se presentan los resultados

de la intervención en la práctica, desde una etapa de diagnóstico, de constatación y luego la generalización de una experiencia en las secundarias básicas de Santiago de Cuba.

Los anexos aportan información acerca del procesamiento estadístico de las pruebas pedagógicas aplicadas a los alumnos, así como el contenido de dichas pruebas.

# **CAPÍTULO I: LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA FORMACIÓN DE HABILIDADES.**

## **INTRODUCCIÓN.**

Una de las prioridades de la educación en Cuba es alcanzar niveles óptimos en la formación matemática de los alumnos, lo que queda debidamente plasmado en el Programa Director que se aplica desde el curso escolar 1997 - 1998, que indica las habilidades matemáticas que deben ser atendidas con mayor fuerza, entre ellas la de resolución de problemas, y propone investigar las metodologías que son empleadas en la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje.

El análisis del papel de la resolución de problemas matemáticos para el estudio de la naturaleza de las habilidades, en particular cómo son comprendidas las habilidades matemáticas y las vías que son empleadas para la dirección del proceso de su formación sentará, en este capítulo, las bases de la fundamentación de los aspectos que son objeto de perfeccionamiento, tanto del diseño curricular como de la actividad del maestro y los alumnos.

El lugar que ocupa la resolución de problemas como actividad matemática fundamental se debate explícitamente a partir de diferentes tendencias contemporáneas para, en consecuencia, estudiar la naturaleza de las habilidades matemáticas.

### **1.1. La resolución de problemas en el aprendizaje de la matemática.**

#### **1.1.1. Corrientes actuales**

Al referirse a lo esencial del quehacer matemático son muchos los que han insistido, en diferentes épocas, en que "hacer matemáticas es por excelencia resolver problemas" <sup>1</sup>, que resolver problemas no es repetir conceptos o procedimientos, es construir el conocimiento matemático, buscarlo y utilizarlo.

Desde la década de los setenta ha sido una tendencia en la enseñanza de la Matemática la de fortalecer la habilidad para plantear y resolver problemas, antecedido de

---

<sup>1</sup> Nota Editorial. En Educación Matemática. Vol 4 (3). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Diciembre. 1992. P. 5

un fuerte movimiento de innovación surgido en los años 60 con la introducción de la matemática moderna que ubicó en un primer plano el estudio de estructuras algebraicas abstractas, lo que acentuó los aspectos lógicos sobre los aspectos prácticos, los ejercicios formales en detrimento de los problemas prácticos, lo que produjo un crecimiento en el estudio de las nociones algebraicas y de la teoría de conjuntos en detrimento de la geometría elemental y la intuición espacial.

El objeto de la actividad matemática en esta etapa estuvo más encaminado a la comprensión de las estructuras matemáticas, el rigor en la fundamentación de proposiciones y, en menor medida, a la resolución de problemas, lo que tuvo sus antecedentes en los auges del formalismo que presenta a la Matemática como un cuerpo estructurado de conocimientos que tiene como criterio de validación de los resultados el marco axiomático deductivo.

Al trabajar exclusivamente con las formas y las relaciones entre los objetos matemáticos, el formalismo se inclina a ignorar el significado de esos objetos y, si bien se han reconocido los aportes en el desarrollo de la Ciencia Matemática en este siglo a partir de esta concepción, sus consecuencias, en la práctica educativa, no se han correspondido, según los estudios realizados por autores como M. De Guzmán, L. Moreno, G. Waldegg, A. Schoenfeld y otros.

La necesidad de cultivar la intuición, en particular la intuición espacial, a partir de la crítica a la exageración en el estudio de las estructuras abstractas de la Matemática ha ocupado desde los años 80 la atención de investigadores que han fundamentado el hecho de que la Ciencia Matemática en su propio decursar histórico se reconoce como cuasiempírica por las múltiples posibilidades de solución de problemas de las ciencias naturales, económicas, sociales, etc. y que es en la actividad productiva de los hombres que surgieron las matemáticas y que los nuevos conceptos y métodos se formularon, en lo esencial, bajo la influencia de las ciencias naturales.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> Ribnikov, K.: Historia de las Matemáticas. Primera Edición en Español. Editorial MIR. Moscú. 1987.

P. 12.

En la intención de señalar las tendencias generales en el panorama educativo de la matemática en la actualidad M. De Guzmán expone como los aspectos más interesantes los siguientes:

- ◆ ¿Qué es la actividad matemática?.
- ◆ La educación matemática como proceso de “inculturación”.
- ◆ Continuo apoyo en la intuición directa de lo concreto. Apoyo permanente en lo real.
- ◆ Los procesos del pensamiento matemático. El centro de la educación matemática.
- ◆ Los impactos de la nueva tecnología.
- ◆ Conciencia de la importancia de la motivación.

En estas tendencias se resalta la necesidad de que la filosofía de la matemática contemporánea se fundamente a partir del carácter cuasiempírico de la actividad matemática a partir de los trabajos de Y. Lakatos, el papel de esta ciencia en la cultura de la sociedad y la insistencia en que la Matemática es saber hacer, es “una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido” y, por tanto, los esfuerzos se encaminan a la transmisión de estrategias heurísticas adecuadas para la resolución de problemas, más que a la transmisión de teorías ya acabadas.<sup>3</sup>

### **1.1.2. Los problemas matemáticos.**

El concepto de problema es comprendido, en la Didáctica, como una situación inherente a un objeto, que induce una necesidad en un sujeto que se relaciona con dicho objeto y que sirve como punto de partida, tanto para el diseño, como para el desarrollo del proceso docente educativo, lo que significa, según C. M. Alvarez de Zayas, que en el desarrollo del proceso docente educativo el problema es el punto de partida para que en su solución el alumno aprenda a dominar la habilidad y se apropie del conocimiento.<sup>4</sup> Es importante en esta investigación la relación que establece este autor entre las categorías problema y habilidad.

---

<sup>3</sup> De Guzmán, M.: Tendencias innovadoras en educación matemática. Editorial Olímpica. Buenos Aires. 1992. P. 12.

<sup>4</sup> Alvarez, C.: Fundamentos teóricos de la dirección del proceso de formación del profesional de perfil ancho. Ciudad de la Habana. 1984. p.130.

Como se indica, resolver problemas es considerado, actualmente, una actividad de especial importancia en el proceso docente educativo, por su valor instructivo y formativo. Lo esencial para comprender la particularidad de esta actividad está en la idea siguiente: **resolver un problema es hacer lo que se hace cuando no se sabe qué hacer pues si se sabe lo que hay que hacer ya no hay problema.** Esto, evidentemente, rompe con la idea de que sea una actividad basada en la repetición de acciones o estrategias ya asimiladas y deja claro el reto de que el individuo se enfrenta a situaciones que lo deben poner a prueba, por su novedad, por la diversidad de posibilidades al cambiar las condiciones en que se manifiesta esa situación.

El concepto de problema, establecido en la Metodología de la enseñanza de la Matemática de autores alemanes (W. Jungk, W. Zillmer, etc.) y retomada por el colectivo de autores cubanos en el libro de texto vigente para la asignatura, en los Institutos Superiores Pedagógicos, expresa que **un problema es un ejercicio que refleja, determinadas situaciones a través de elementos y relaciones del dominio de las ciencias o la práctica, en el lenguaje común y exige de medios matemáticos para su solución; se caracteriza por tener una situación inicial (elementos dados, datos) conocida y una situación final (incógnita, elementos buscados) desconocida, mientras que su vía de solución también desconocida se obtiene con ayuda de procedimientos heurísticos.**<sup>5</sup>

En este concepto se concentra la atención en el aspecto de la formulación o presentación de la situación (de la práctica o de los dominios de las ciencias) en un lenguaje común, no teniendo en cuenta las situaciones que dentro de la matemática constituyen verdaderos problemas para el alumno (no disponen de vías inmediatas de solución) y pueden estar descritas con una orden muy directa o planteadas en el lenguaje propio de la disciplina. De igual manera no se tiene en cuenta que para que exista un problema además del aspecto objetivo señalado, hay que considerar el aspecto subjetivo, la disposición, motivación e interés de ese alumno por darle solución.

---

<sup>5</sup> Ballester, S. y otros: Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomo 1. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1992. P. 407.

En los estudios más recientes sobre este concepto se destaca la atención al aspecto objetivo del sujeto que aprende, considerando lo que debe saber hacer (métodos, procedimientos) y también los factores afectivos y volitivos que se comprometen en la resolución de problemas. Como señalan L. Campistrous y C. Rizo el problema es “toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo”, pero que en su solución hay al menos dos condiciones necesarias: la vía de solución tiene que ser desconocida y el individuo quiere hacer la transformación, es decir, quiere resolver el problema.<sup>6</sup>

En este sentido Fredy González expresa que un sujeto está ante una situación problemática cuando, estando motivado (u obligado por las circunstancias académicas, personales o vitales) para alcanzar un determinado objetivo, se encuentra impedido o frustrado, de modo temporal para lograrlo. Significa entonces que el sujeto ha de estar consciente de la existencia de la situación y de que desea o necesita actuar para superar la situación.<sup>7</sup>

La diferencia que enmarca este autor entre los conceptos de problema y de ejercicio se sustenta en los objetivos que cada uno se propone. Los ejercicios se proponen para el aprendizaje de hechos y habilidades específicas y los problemas permiten la **adquisición de enfoques generales que ayudan a enfrentar situaciones matemáticas diversas, ayudan a “aprender a aprender”**.<sup>8</sup>

En este sentido, el estudio del pensamiento matemático, la actividad matemática y la resolución de problemas, en su interrelación, revela en los trabajos de A. H. Schoenfeld, cuatro categorías que ayudan a dilucidar cómo el sujeto entiende la Matemática y por qué es más importante que la entienda a que la ejercite:

- Los **recursos** se refieren a los conocimientos matemáticos que el sujeto posee y cómo accede a ellos para su utilización.

---

<sup>6</sup> Campistrous L. y C. Rizo: Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1996. P. IX-X.

<sup>7</sup> González, Fredy: Trascendencia de la Resolución de Problemas de Matemática. En Paradigma Vol. VIII (2). Venezuela. Diciembre, 1987. P. 252.

<sup>8</sup> Ibid. P. 253.

- La **heurística** se refiere a las estrategias matemáticas generales para resolver exitosamente problemas, teniendo en cuenta la naturaleza de cada una y el tipo de conocimiento que requiere para implementarlas.
- El **control** se refiere a cómo lograr un hacer competente y poder evaluar de qué depende la actuación matemática.
- El **sistema de creencias** se refiere al conjunto de entendimientos acerca de qué es lo que la Matemática establece y el contexto psicológico en el que el sujeto hace Matemática, aquí se argumenta que la visión matemática de las personas determina su orientación hacia los problemas, los instrumentos y cómo las técnicas en las cuales la persona cree son relevantes, incluso su acceso inconsciente está potencialmente relacionado constituyendo un material útil.<sup>9</sup>

En algunos países los trabajos de A. H. Schoenfeld ya son considerados una propuesta en la dirección del aprendizaje de las Matemáticas (México, Argentina, España, además de Estados Unidos) al implementar actividades relacionadas con el proceso de resolver problemas en el aprendizaje de las Matemáticas a partir de lograr esclarecimientos acerca de cómo los sujetos actúan cuando resuelven problemas matemáticos.

Consideramos que, las categorías descritas, reflejan más la responsabilidad del alumno, y no del profesor, en el proceso de enseñanza aprendizaje, aquellas condiciones que él debe ser capaz de desplegar para poder enfrentar el objetivo formativo fundamental que es resolver los problemas, que en cada nivel de su desarrollo se plantean.

### **1.1.3. Los problemas en los cursos de Matemática**

Los cursos de Matemática, generalmente, han sido desarrollados planteando los problemas para resolver al finalizar un determinado bloque de contenido (clase, sistema de clases, unidad o capítulo) por lo que hace que esta disciplina se presente a los alumnos como algo abstracto y alejado de la realidad y mucho más del quehacer diario, con la inevitable consecuencia de provocar pobre motivación por su estudio e insuficiente comprensión de las posibilidades que brinda en la solución de problemáticas de la práctica cotidiana.

La búsqueda de vías para la enseñanza de la Matemática donde los problemas contribuyan a modificar tal concepción de la disciplina ha sido objeto de discusión en los foros internacionales e implica realizar serias modificaciones tanto al diseño curricular como a la labor docente metodológica de maestros y profesores. Un punto de especial interés radica en comprender que el proceso de búsqueda, análisis y solución de problemas permite la generalización, con significado, de los conceptos y procedimientos que se emplean, así como la revelación de la necesidad de esos conceptos y procedimientos en el marco de un contenido determinado.

Un aspecto de interés en la labor docente metodológica de maestros y profesores es el estudio de las condiciones que poseen los alumnos para encontrar vías de solución, para construir o utilizar estrategias de razonamientos, elaborar esquemas, y particularmente cuál es su disposición para enfrentar los procesos de búsqueda de forma individual o colectiva.

Son importantes las cualidades que se han atribuido a la resolución de problemas como: la flexibilidad del pensamiento, el afán por lograr un objetivo, la constancia, la tenacidad, la capacidad de generalización y transferencia de los conocimientos, etc. Por lo que la resolución de problemas no se reduce sólo al uso y asimilación de diferentes métodos o estrategias heurísticas como resultado de resolver un gran número de ellos. Estudiosos de este tema como M. de Guzmán, A. H. Schoenfeld, L. M. Santos, J. Arrieta, R. Valenzuela, J. Gascón, etc. han reconocido el proceso de resolver problemas como un importante modo de comprender y profundizar en la actividad matemática y proponen enseñar a través de este método, lo que implica implementar actividades que propicien, al alumno, condiciones similares al proceso de desarrollo de la Matemática.

La perspectiva constructivista, que comprende el problema como fundamento y medio de aprendizaje, pretende que el maestro organice el proceso de enseñanza aprendizaje a partir de una situación inicial que toma un sentido y un determinado contexto y que el alumno transformará con la adquisición del nuevo conocimiento.

La estructuración de la enseñanza de la Matemática a través de problemas está conceptualizada, actualmente, como una vía que ofrece significativas posibilidades para la

---

<sup>9</sup> Schoenfeld, H.: *Mathematical Problem Solving*. Academic Press INC. California. Estados Unidos. 1985.

eliminación del formalismo, que por mucho tiempo ha prevalecido y hacer de ésta una disciplina más práctica, más cercana de lo cotidiano.<sup>10</sup>

Se trata de dar al profesor vías concretas que les permitan seleccionar y plantear esas situaciones - problemas y poder diseñar en un tema cómo llegar a dominar las habilidades que son necesarias para resolverlas.

Consideramos entonces, que en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática los problemas planteados como medio del aprendizaje y también como un medio de fijación de los conocimientos y las habilidades aportan una alternativa que debe contribuir a evitar la insuficiente solidez en el dominio de los modos de actuación esperados del alumno; de ahí que sea necesario un diseño donde se precise **una estrategia que fomente el cumplimiento de ambas funciones, como una unidad, sin absolutizar una u otra.**

Un destacado estudio sobre el papel de la resolución de problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática ha sido realizado por J. Gascón al investigar los paradigmas o modelos que resumen las formas de diseño del curso de Matemática que tienen su fundamento en el modelo epistemológico implícito que sostiene la noción de “problemas de matemáticas” y de lo que significa “enseñar” y “aprender matemáticas”.

- ♦ Los principales modelos o paradigmas se analizan críticamente, en su evolución, a partir del lugar en que diferentes escuelas han situado los problemas, su significación y la búsqueda de métodos para su solución. Los modelos son los siguientes:<sup>11</sup>
- ♦ El aprendizaje de teorías acabadas e ignoran la elaboración de estrategias de resolución de problemas;
- ♦ El aprendizaje de técnicas matemáticas (algorítmicas), los problemas aparecen aislados;
- ♦ El aprendizaje se centra en la actividad exploratoria de problemas no triviales;

---

<sup>10</sup> Peltier, Marie Lise: Una Visión General de la Didáctica de las Matemáticas en Francia. En Educación Matemática. Vol.5 (2). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Agosto, 1993. P. 4.

<sup>11</sup> Gascón, J. El papel de la Resolución de problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. En Educación Matemática. Vol. 6 (3). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Diciembre, 1994. P. 37-50.

- ◆ El aprendizaje como construcción del conocimiento utilizando la resolución de problemas, ignoran el trabajo con la técnica;
- ◆ El aprendizaje de sistemas estructurados de procedimientos para la resolución de problemas;
- ◆ La actividad matemática de resolución de problemas se engloba en una actividad más amplia de “modelización matemática”;
- ◆ El problema matemático es considerado como punto de partida de un campo de problemas. Toda actividad matemática es interpretada como un proceso de estudio de campos de problemas.

Estos paradigmas de investigación utilizados para analizar el papel de la resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática dan la posibilidad de reconocer los criterios que son empleados, tanto desde el punto de vista teórico como práctico, en el diseño de los programas de Matemática, de forma consciente o no.

Del análisis detallado de estos paradigmas es evidente la tendencia a que la resolución de problemas sea en el curso de Matemática el elemento a partir del cual el alumno aprenda, elaborando estrategias, técnicas, pero no para problemas aislados, sino que se logre establecer los sistemas estructurados de procedimientos con los cuales se estudien los campos de problemas y la construcción recursiva de las teorías matemáticas. El último paradigma, el de los momentos didácticos, que considera cada problema como punto de partida de un campo de problemas y que toda actividad matemática es interpretada como un proceso de estudio de campos de problemas, lo consideramos como el más completo teniendo en cuenta que establece la resolución de problemas como el elemento a partir del cual el alumno aprende y elabora estrategias que no se hace para problemas aislados y pone en su centro la actividad del alumno.

En los esfuerzos por concretar reformas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos de Norteamérica (NCTM) ha definido los **estándares curriculares** como declaraciones de principios para determinar qué tiene valor y qué no lo tiene al juzgar la calidad de un currículo para esta asignatura.

En consecuencia, con la recomendación de este Consejo, de que la solución de problemas sea el principal objetivo de la enseñanza de la Matemática en las escuelas, y las

tendencias que han prevalecido en las dos últimas décadas definen como el estándar curricular número uno “las matemáticas como resolución de problemas” que significa la inclusión de abundantes y diversas experiencias de resolución de problemas como método de indagación y aplicación; conjuntamente con otros estándares como: las matemáticas como comunicación, las matemáticas como razonamiento y las conexiones matemáticas que contribuyen a desarrollar la capacidad de construir argumentos válidos para analizar y resolver problemas.

La llamada nueva metodología “resolviendo problemas” que según L. Santaló consiste en iniciar el avance de los conocimientos matemáticos, planteando problemas comprensibles con los conocimientos previamente adquiridos y que sean suficientemente motivadores para despertar el interés de los alumnos, y que al mismo tiempo necesiten nuevos conocimientos para su solución;<sup>12</sup> es una expresión de los resultados que se han alcanzado en la Didáctica de la Matemática y citando a M. de Guzmán y B. Rubio reafirma la conveniencia didáctica de presentar, en primer lugar, las situaciones que por su interés han dado lugar a las estrategias, técnicas y métodos de pensamiento.<sup>13</sup>

No obstante, a esta metodología se imputan particularidades en relación con el tiempo, la selección de los problemas apropiados a los alumnos, la atención diferenciada y el trabajo en grupos, las generalizaciones de los métodos o estrategias empleadas y otras; que deben ser consideradas especialmente en la preparación del profesor.

El análisis, en particular, de los programas de enseñanza de la Matemática en la escuela media cubana, conduce a la conclusión de que los problemas aparecen al finalizar el estudio de los elementos teóricos de los temas, se presta más atención al aprendizaje de procedimientos y la solución de problemas aislados o los llamados “ejercicios integradores” con el propósito de relacionar estos procedimientos.

El diseño de estos programas no se fundamenta en modelos epistemológicos que orienten el aprendizaje de sistemas estructurados de procedimientos para la resolución de

---

<sup>12</sup> Santaló, L. y otros: La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia. En Tratado de Educación Personalizada, dirigido por Víctor García Hoz. Ediciones RIALP. S. A. Madrid. 1994. P. 104-105.

<sup>13</sup> Ibid. P. 105.

problemas, ni se trabaja con la noción de campos de problemas, estas concepciones quedan a las condiciones de cada profesor para llevarlo a cabo.

Los objetivos de la asignatura en los programas vigentes reflejan más las exigencias para la comprensión de conceptos y demostraciones, reglas de cálculo, uso de tablas, etc. y de forma implícita se infiere la actividad de resolución de problemas en el nivel de aplicación de esos conocimientos matemáticos. No se proponen objetivos referidos al dominio de las estrategias matemáticas para resolver problemas.

## **1.2. La habilidad matemática.**

### **1.2.1. Concepto de habilidad.**

Dentro de la psicología marxista leninista la categoría actividad ocupa un importante lugar. La actividad humana está conformada por diferentes procesos mediante los cuales, el hombre, respondiendo a sus necesidades, se relaciona con la realidad, es decir, con la naturaleza.

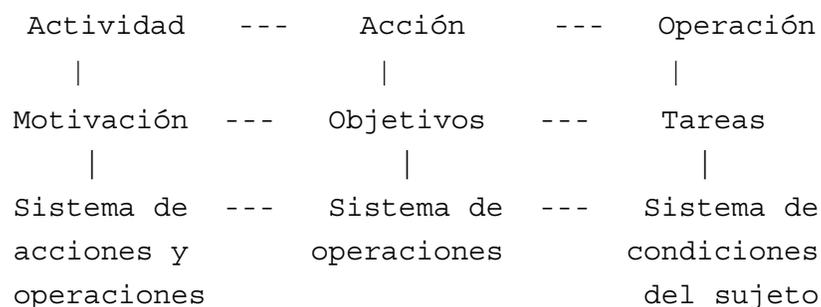
Algunos psicólogos como S. L. Rubinstein, L. S. Vigotski, D.N. Uznadze, A. N. Leontiev y A. V. Petrovski desarrollaron importantes ideas acerca de la estructura de la actividad que revelan la relación motivo - objetivo y los tránsitos recíprocos entre las distintas unidades de la actividad.

La actividad humana tiene un carácter objetal y por dicho carácter está indisolublemente ligada a su motivo que le confiere a la actividad de la personalidad su dirección, orientación y sentido para el sujeto.

De ahí que la actividad que constituye la vida humana esté formada por actividades específicas de acuerdo al motivo que las induce. Cada una de ellas está compuesta por acciones que son procesos subordinados a objetivos, cuyo logro conduce al objetivo general de la actividad como expresión consciente del motivo de la misma. A su vez, las acciones transcurren a través de operaciones que son formas de realización a tenor de las condiciones orientadas para el logro de los objetivos. Esta es la estructura general de la **actividad de la personalidad**.<sup>14</sup>

---

<sup>14</sup> Brito, Héctor: Psicología general para los Institutos Superiores Pedagógicos. Tomo 2. Ciudad de la Habana. 1987. p. 51.



El análisis de una actividad debe iniciarse por la delimitación de la actuación que el que la realiza debe cumplir para resolver la tarea que se le plantea, para luego pasar a la separación de las acciones que la forman y, después, al análisis estructural y funcional del contenido de cada una de ellas, que es lo que permite, como análisis sistémico, revelar sus componentes, vínculos, interrelaciones y dependencias para asegurar el logro del objetivo de la actividad de la que forman parte.

Muchos de estos psicólogos han orientado su estudio hacia las formas de asimilación de la actividad que se explican a través de los conceptos de hábitos, habilidades y capacidades y se caracterizan por reflejar diferentes niveles de dominio de las unidades estructurales: operación, acción y actividad, respectivamente.

Por la importancia que tiene el estudio de estos conceptos en el proceso docente educativo se ha destacado la atención al análisis de las acciones del alumno que conllevan a asimilar conocimientos, hábitos y habilidades que le permiten adoptar formas de conducta y tipos específicos de actividad para el logro de un objetivo determinado.

La expresión de las formas de asimilación de la actividad humana, dada a través de los conceptos de hábitos, habilidades y capacidades, explica estos conceptos a partir del nivel de perfeccionamiento que se alcanza en el dominio de sistemas de acciones y operaciones que conforman una determinada actividad.

Sobre el concepto de habilidad son conocidos los estudios realizados por L. F. Spirin en su libro Formación de las habilidades profesionales del maestro, en el que selecciona 22 definiciones dadas por autores como O. A. Abdulina, E. I. Boiko, I. M.

Viktorov, N. V. Kuzmina, A. N. Leontiev, K. K. Platonov, A. A. Stepanov y otros, que expresan las dos principales tendencias en la evolución de este concepto: los que definen la habilidad como un hábito culminado y los que la definen como una acción creadora en constante perfeccionamiento. El estudio de éste y otros trabajos sobre el tema, indica la mayor tendencia al segundo grupo, tanto en psicólogos como en pedagogos.

Derivado de esta tendencia una de las definiciones más difundida en nuestro país es la que señala que las habilidades constituyen el dominio de acciones (psíquicas y prácticas) que permiten una regulación racional de la actividad, con ayuda de los conocimientos y hábitos que el sujeto posee.<sup>15</sup>

Las habilidades se forman con la **sistematización de las acciones subordinadas a un fin consciente** y se desarrollan sobre la base de la experiencia del sujeto, de sus conocimientos y de los hábitos que posee; pero los conocimientos se manifiestan o expresan concretamente en las habilidades, en la posibilidad de operar con ellos, de ahí que se les denomine como instrumentación consciente en la manifestación ejecutora de la actuación de la persona en un contexto dado.

En general, muchos de los autores citados asumen que la habilidad es resultado de la asimilación de conocimientos y hábitos por lo que **prestan la mayor atención a su estructura funcional y se ocupan menos de cómo actúa el sujeto con esos conocimientos y hábitos en los diferentes niveles de sistematicidad del contenido.** Especialmente importante es el hecho de que la actuación del sujeto se motiva por **un fin consciente** que consideramos ha de estar relacionado con el contexto que brinda el problema que se propone resolver.

La reducción del concepto de habilidad a tratar de describir sistemas o conjuntos de acciones, en ocasiones, lleva a la expresión de un proceso algorítmico que muestra cada uno de los pasos o momentos de la actuación y se atiende muy poco a la contextualización de ese sistema de acciones en función de los problemas que se resuelven con su ejecución y las condiciones del sujeto. De igual forma, ha sido

---

<sup>15</sup> Brito, Héctor y otros: Psicología general para los Institutos Superiores Pedagógicos. Tomo 2. Ciudad de la Habana. 1987. p. 51.

restringida la comprensión de este concepto en el sentido de la repetición, a través de ejercicios, del sistema de acciones determinado.

### 1.2.2. Las habilidades matemáticas.

Al hablar de la metodología de la enseñanza y la metodología del aprendizaje se debate la idea de que no basta con transmitir o apropiarse de los conocimientos, sino que a la persona que aprende hay que modelarle las condiciones necesarias para que aprenda a aprender, o sea, desarrollar las potencialidades metacognitivas.<sup>16</sup>

Coincidimos, con esta idea, en que la metodología de la enseñanza ha de estar dirigida a lograr que el estudiante construya sus propios mecanismos, métodos, técnicas, procedimientos de aprendizaje; por lo que la tarea fundamental es la dirección del proceso de **construcción de conocimientos y los métodos a emplear por el alumno, la construcción de los modos de actuación que le posibilitan enfrentar las tareas docentes, entre ellas la resolución de problemas.**<sup>17</sup>

El concepto de habilidad matemática que se maneja se analizará a continuación a la luz de esta posición.

En el libro de Metodología de la enseñanza de la Matemática para la escuela primaria (1975), de autores alemanes (de la antigua RDA), se entiende por habilidades matemáticas “los componentes automatizados que surgen durante la ejecución de acciones con un carácter preferentemente matemático y que posteriormente pueden ser empleados en acciones análogas”<sup>18</sup>. Evidentemente, queda limitada la habilidad matemática a la repetición de la misma forma de acción que con la automatización puede ser incorporada a formas más complejas como acciones parciales. Esto ha conducido a la idea de que la formación y desarrollo de una habilidad matemática se alcanza con la formación de determinados patrones cuando se propone la ejercitación con grupos de ejercicios

---

<sup>16</sup> Bermúdez, R. y M. Rodríguez: Teoría y Metodología del aprendizaje. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1996. P. 44.

<sup>17</sup> IBID. p. 44

<sup>18</sup> Geissler, E. y otros: Metodología de la enseñanza de la Matemática. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 1975. P. 41.

similares sin que necesariamente se reflexione sobre las posibilidades de utilización en situaciones diferentes, en una diversidad de contextos.

Este concepto limita su aplicación a actividades como la resolución de problemas, en el sentido ya explicado, si se tiene en cuenta que no se trata de situaciones análogas, ni se trata de automatizar acciones a partir de la repetición de una misma forma de acción, por lo que es conveniente hacer precisiones sobre el concepto que comprenda el sentido de la habilidad matemática en toda su complejidad y niveles de sistematicidad de la actividad matemática.

En las orientaciones metodológicas para los programas de estudio de Matemática, vigentes para el nivel preuniversitario, se incluyen precisiones teóricas para los profesores acerca de las habilidades matemáticas.

Las habilidades matemáticas son definidas como “un complejo formado por conocimientos específicos, sistemas de operaciones y conocimientos y operaciones lógicas”<sup>19</sup>. Por lo que se consideran tres componentes fundamentales: los conocimientos matemáticos, los sistemas de operaciones de carácter matemático y los conocimientos y operaciones lógicas.

En este concepto la habilidad puede ser comprendida más a partir de todo aquello que la conforma en el plano estructural y de las operaciones lógicas, como un complejo aislado, y no por lo que representa en la actuación del alumno para enfrentar las tareas docentes, la resolución de uno u otro problema.

En el libro de Metodología de la enseñanza de la Matemática en la escuela primaria (1991) de un colectivo de autores cubanos se asume la habilidad como “las acciones que el sujeto debe asimilar y, por tanto, dominar en mayor o menor grado y que, en esta medida, le permiten desenvolverse adecuadamente en la realización de determinadas tareas”<sup>20</sup>. Asumen las habilidades como modos de actuación que se forman y desarrollan en la actividad a través de los siguientes momentos:

- ◆ Comprensión del modo de actuar y del orden en que deben realizarse las acciones.
- ◆ Asimilación de forma consciente del modo de actuación.

---

<sup>19</sup>Campistrous, L. y otros: Matemática. Orientaciones metodológicas, décimo grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1989. p. 7.

- ◆ Fijación del modo de acción asimilado, a través de la repetición.
- ◆ Aplicación de las habilidades adquiridas a otras situaciones más complejas desde el punto de vista del contenido y en la adquisición de nuevos conocimientos.

Estos momentos expresan un proceso en el que el alumno llega a apropiarse de un modo de actuación que, sin embargo, puede conducir a la elaboración de un proceso algorítmico, a la formación de un hábito, cuando se señala como esencial la repetición de la acción con la misma dificultad hasta lograr su automatización, aunque queda positivamente planteada la idea de que deben variarse las condiciones del ejercicio y aumentar las dificultades, destacando también el papel importante del lenguaje matemático, no sólo como medio de comunicación sino como una forma de pensamiento.

En los libros de texto de Metodología de la enseñanza de la Matemática empleados en la formación de profesores de la escuela media de W. Jungk, W. Zillmer y más recientemente de un colectivo de autores cubanos, no se asume un tema sobre el proceso de formación de habilidades matemáticas y queda solamente ligado al concepto de **poder matemático** cuando se estudian los campos de objetivos de la asignatura.

El poder matemático está formado por los hábitos, habilidades y capacidades específicas de la asignatura, desarrollados por los alumnos para operar con los conocimientos adquiridos y darles aplicación, así como las normas de conducta y cualidades de la personalidad.<sup>21</sup> Sin embargo, en la discusión de este tema no se esclarece el concepto de habilidad matemática ni se expresan explícitamente estrategias metodológicas para dirigir el proceso de su formación y desarrollo, aún cuando se reconoce, basado en principios de la psicología marxista leninista, que este proceso de formación y desarrollo de las habilidades matemáticas se rige por el principio de la sistematicidad y el carácter científico de la enseñanza.

En el programa vigente, así como en los anteriores planes de estudio, de la disciplina Metodología de la enseñanza de la Matemática en los Institutos Superiores Pedagógicos para la formación del Licenciado en Educación en la carrera Matemática -

---

<sup>20</sup> Colectivo de autores: Metodología de la enseñanza de la Matemática en la escuela primaria. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1992. p. 88.

<sup>21</sup> Ibid (5). P. 12.

Computación, no se ha incluido un tema sobre la formación y desarrollo de las habilidades matemáticas.

En investigaciones relacionadas sobre este tema H. González presenta un criterio para clasificar las habilidades matemáticas que toma como punto de partida la idea de que hacer matemáticas “es el reflejo de una o de un subconjunto de habilidades específicas, entonces el sistema así planteado es un conjunto de habilidades matemáticas específicas, estrictamente secuenciadas en la acción”.<sup>22</sup>

El problema que queda planteado a partir de esta conclusión, está en determinar esas interrelaciones, sus componentes y etapas de desarrollo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática porque sólo muestra, este autor, conjuntos de habilidades específicas y caracteriza el hacer terminal como aquel que está situado al final de un proceso que, supuestamente, integra numerosos otros haceres que justamente por considerarse previos, parecen irrelevantes frente al hacer terminal.

La clasificación se presenta a partir de tres etapas en el proceso de enseñanza aprendizaje: el proceso del hacer matemático asociado al uso de definiciones matemáticas, las asociadas a las generalizaciones matemáticas y las relacionadas con el quehacer matemático terminal que es la resolución de problemas, tanto teóricos como prácticos.

Si bien, la clasificación comprende lo esencial de lo que este autor define como hacer o quehacer matemático, las tres etapas se diseñan con un enfoque conductista al considerar que el alumno, en un proceso gradual, formará las habilidades sobre conceptos, luego sobre teoremas, propiedades y posteriormente resolverá problemas, afirmando que cualquier trastorno a esta secuencia sólo contribuye a dañar el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática.

La propuesta de que el hacer matemático terminal está al final de un proceso integrado por otros previamente formados y que en esa etapa terminal está la resolución de problemas como propósito del modo de actuar que se pretende formar en la asignatura Matemática, es aceptado, lo que debe ser analizado es el papel de la resolución de problemas en el diseño de ese proceso, que se plantea como teoricista y tecnicista ya que,

---

<sup>22</sup> González, H.E.: Un criterio para clasificar habilidades matemáticas. Educación Matemática. Vol. 5. (1). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Abril, 1993. P. 49.

en muy poca medida, destaca el significado de la resolución de problemas para desarrollar las habilidades asociadas a la formación de conceptos y teoremas. Quiere decir, que las llamadas habilidades específicas se integren por lo que significan en la solución de determinados tipos de problemas.

Como se observa, el concepto de habilidad se ha enmarcado en dos momentos históricos. En uno de ellos la habilidad se asociaba a la automatización de sistemas de acciones, a su repetición, por tanto, a lo que actualmente se define como hábito. Sin embargo, ha habido una importante tendencia en los últimos años que identifica la habilidad como proceso y resultado de perfeccionamiento de los modos de actuación correspondientes a una actividad determinada, lo que sin dudas acerca esta categoría a la capacidad.

El concepto de habilidad se asume en la tendencia que la reconoce como una acción creadora en constante perfeccionamiento que parte desde el proceso de construcción del modo de actuar y se domina en la medida en que se aplica en la solución de situaciones diferentes, novedosas.

El dominio del modo de actuar, que constituye en un momento la meta a alcanzar, se contextualiza cuando se utiliza como un método o instrumento para enfrentar una nueva situación y siempre que dicha situación se modifique, poder interpretarla y encontrarle vías de solución.

### **1.2.3. Tendencias pedagógicas contemporáneas.**

El análisis de las tendencias pedagógicas contemporáneas, tomando como base el protagonismo del alumno, no solo en la construcción del conocimiento, también en las convicciones, valores, sentimientos, que conforman el modo de actuación que la resolución de problemas es un importante fundamento considerado en esta investigación.

El enfoque histórico cultural, en el que se sustenta el sistema educativo cubano, toma como premisa la relación enseñanza - desarrollo, es el elemento de partida en el análisis del papel del profesor, en su intervención pedagógica y en la dirección del aprendizaje de sus alumnos, en un contexto socializado dentro de la clase y fuera de ella, a

través de métodos que estimulen el interés, la disposición y el compromiso en el enfrentamiento de las tareas docentes, en la búsqueda de soluciones a los problemas.

En las tendencias constructivistas, actualmente, se observa que la discusión acerca del concepto de habilidad se ha encaminado a precisar **la importancia de la enseñanza a través de problemas, como vía para proporcionar al alumno un contexto significativo para actuar y construir interpretaciones**. La concepción constructivista del aprendizaje parte de que toda actividad mental es constructiva.

En estas posiciones se orienta el proceso de formación de las habilidades desde el modo de actuar generalizado hacia la búsqueda de nuevos conocimientos y estrategias que permitan resolverlo, es decir, va del carácter instrumental de los conocimientos (sirven para resolver uno o varios problemas) al carácter objetal (una vez que sirven para resolver un problema pasan a formar parte de la teoría correspondiente).<sup>23</sup>

En estudios realizados por Josep Ma. Fortuny Aymery (1990), sobre el aprendizaje de la Matemática como proceso de acción constructivo, se caracteriza la ejecución de las acciones mediante la planificación de fases en la que cada actividad y estrategia se realizan según un determinado orden siguiendo el proceso heurístico de resolución de un problema.

Las estrategias se describen para acciones como la representación, concientización, comunicación y recursión de forma tal que se convierten en métodos de obtención de conocimientos y habilidades como: la observación, exploración, visualización, modelación, interpretación, construcción, descripción, etc.

Esta caracterización, como concepción constructivista para el aprendizaje de la Matemática, justifica la tendencia a resaltar las vías que utiliza el alumno para construir el conocimiento.

En la fundamentación del aprendizaje operatorio, J. L. Hidalgo Guzmán, considera la habilidad, cuando el que aprende se ve frente a un enigma que reclama imaginación, conjeturas y estructuraciones razonadas, rechazando la idea de que su desarrollo se logre a partir de la repetición. Al concebir este aprendizaje como

---

<sup>23</sup> Ibid (9). P.6.

construcción de conocimientos dan especial importancia a que el que aprende asimile las estructuras intelectuales a partir de la actividad y la comunicación.

En este caso, se asume que "el alumno parte de un mundo de significaciones, ejerce sus saberes, puede cumplir un papel importante en la comunicación con sentido y construye modelos conceptuales mediante sus estrategias heurísticas para plantear y resolver problemas".<sup>24</sup>

Si bien se resalta el protagonismo del alumno y el hecho de que pueda operar con una estructura cognoscitiva en términos de estrategias heurísticas para enfrentar la realidad expresada en los problemas, no queda preciso en qué términos se construyen los conocimientos que tienen la finalidad de prepararlos para resolver problemas.

La construcción de conocimientos se produce, según Juan Luis Hidalgo, cuando se efectúan actividades sapientes tanto prácticas (saber hacer) como intelectuales (saber interpretar, pensar en lo diferente y construir) para resolver problemas, además precisa que el que aprende no construye, en sentido estricto, la información que le transmite el docente, sino que conforma la estructura de conocimientos, es decir, las nuevas condiciones de entendimiento y las bases de sus modelos conceptuales, finalmente se acepta que el alumno construye estrategias heurísticas para plantearse y resolver problemas.

Por su parte, César Coll, como representante de estas tendencias constructivistas, parte del papel atribuido a la actividad del alumno, como elemento clave del aprendizaje escolar; sin embargo, critica la insistencia injustificada a olvidar que el proceso de enseñanza aprendizaje es, en esencia, un proceso interactivo en el que el profesor actúa con el fin de facilitar el aprendizaje de los alumnos y cómo en la medida en que se enriquecen los conocimientos y se desarrollan habilidades cada vez más complejas se hace más difícil su intervención.

Al analizar en este contexto la relación interpersonal profesor - alumno y fundamentándose en el concepto de "zona de desarrollo próximo" de L. S. Vigotski, César Coll indica como tareas del profesor: "proporcionar un contexto significativo para la ejecución de las tareas escolares en el que el alumno pueda `insertar' sus actuaciones y

---

<sup>24</sup> Hidalgo Guzmán, José L.: Aprendizaje operatorio. Ensayos de teoría pedagógica. Casa de la cultura del maestro mexicano A. C. 1992. p. 115.

construir interpretaciones coherentes; adecuar el nivel de ayuda o directividad al nivel de competencia de los alumnos; evaluar continuamente las actividades de los alumnos e interpretarlas para conseguir un ajuste óptimo de la intervención pedagógica".<sup>25</sup>

Por su parte, Jerome Bruner reconoce el desarrollo y estructura de las habilidades, como "el desarrollo de estrategias para la utilización inteligente de la información, escogiendo entre modos alternativos de respuestas", aceptando la estrategia como patrón de decisiones en la adquisición, retención y utilización de la información que sirve para lograr ciertos objetivos.<sup>26</sup>

Resulta importante, en este caso, el papel que se asigna al dominio de estrategias y el hecho de que el sujeto sea capaz de verbalizarlas y ser consciente de ellas, tanto para el desarrollo de las habilidades como para el desarrollo del pensamiento. Sin embargo, desde estas posiciones cognitivistas no se destacan los sentimientos, actitudes, valores que se forman y desarrollan asociados al conocimiento de estrategias de trabajo.

Aunque aceptamos el papel activo del alumno en este modelo de aprendizaje, está claro que no precisa el modo de estructurar el proceso docente educativo de una asignatura - curso o unidad temática de forma tal que propicie la planificación y dirección del proceso de construcción de los conocimientos y estrategias y cómo lograr su sistematización para resolver problemas. Lo que no queda suficientemente claro es la secuencia lógica, que en la estructuración de los contenidos de una asignatura, garantice tales exigencias.

Evidentemente, en estas posiciones se le da especial importancia a que el alumno pueda construir y dominar estrategias, para su utilización en la resolución de problemas. La idea de que el alumno construye el modo de actuación, más que apropiarse de él, teniendo en cuenta que lo que se espera de su actividad en la resolución de problemas no es

---

<sup>25</sup> Coll, César: Acción, interacción y construcción del conocimiento en situaciones educativas. Revista Educación 279. p. 9-24. Madrid. Enero-abril 1996. p. 19.

<sup>26</sup> Bruner, Jerome: Acción, pensamiento y lenguaje. Compilación. Alianza Editorial. Madrid. 1989. p.129.

reproducir acciones aprendidas sino buscar, decidir, sistematizar esas acciones en la diversidad de condiciones de las situaciones que así lo requieran.

Uno de los temas que más atención ocupa hoy en los diferentes sistemas didácticos es el que se refiere a las tendencias para el trabajo con problemas dirigidos a la fijación de conocimientos y habilidades, la enseñanza de la Matemática a través de problemas y enseñar a los estudiantes a resolver problemas.

La tendencia referida a la presentación y tratamiento de los nuevos contenidos a través de problemas cobra especial interés por las potencialidades que brinda para la estimulación y contextualización del aprendizaje, aun cuando no disponen de propuestas didácticas para maestros y profesores. Para la Didáctica de la Matemática este constituye un problema, considerando además que las transformaciones que se proponen al proceso docente educativo, en las secundarias básicas, se orientan en este sentido.

En este epígrafe se observa desde diferentes posiciones la relación de la habilidad con el dominio de estrategias, en particular, las estrategias heurísticas, el papel protagónico del alumno en la construcción del conocimiento y del modo de hacer con ellos y el papel de resolución de problemas que aporta el contexto a la actividad desde la búsqueda o construcción del modo de actuar y del resultado que se expresa en su dominio

Existe una tendencia generalizada a observar que es medular en este proceso la actitud activa del alumno para estructurar los conocimientos y sobre su base las estrategias de trabajo para el logro de ciertos objetivos, principalmente referidos a la comprensión y solución de problemas.

#### **1.2.4. Concepciones en nuestro país.**

En las concepciones didácticas actuales, en nuestro país, el análisis sistémico del contenido de la enseñanza distingue entre sus componentes: un sistema de conocimientos y un sistema de habilidades. El conocimiento refleja el objeto de la ciencia y su movimiento propio y las habilidades reflejan las relaciones del hombre con dicho objeto. Lo esencial del contenido es lo que determina las **invariantes** de conocimientos y habilidades.

La invariante de habilidad, habilidad generalizadora, caracteriza el modo de actuar el estudiante en el contexto de un tema y como señala C. Alvarez, es: "el modo de

actuar, de relacionarse el estudiante con el objeto de estudio, está condicionado por dicho objeto, por sus componentes, por su estructura, por las relaciones que están presentes en el mismo. El dominio de la habilidad presupone, a la vez, el dominio de las características del objeto de estudio".<sup>27</sup>

Cada nueva habilidad, según C. Alvarez, en "su estructura de acciones y operaciones contiene componentes que son dominados previamente por el escolar, para él es novedosa la nueva estructura y quizás alguna acción del conjunto que exige la nueva habilidad".<sup>28</sup>

En esta idea se expresa el carácter flexible de la habilidad que se manifiesta en la medida en que se plantea al alumno una nueva situación, un nuevo problema que enriquece el nuevo objeto de estudio.

En esta discusión se centra la importante idea de que la habilidad no sólo se limita al resultado o producto de la formación de sistemas de acciones o el dominio de una metodología de acción ya aprendida, sino que comprende también **la actuación del sujeto en una nueva situación, cómo se orienta en la búsqueda y ejecución de esos modos de actuar a partir de las condiciones previas que posee.**

La formación de habilidades en el proceso docente educativo, así comprendida, precisa que no puede verse aislada de las demás formas de asimilación de la actividad: los hábitos y las capacidades, porque la habilidad se forma y desarrolla en la unidad del sistema de acciones y conocimientos, por lo que debe prevalecer su integración para que el alumno se apropie de un modo de actuación.

Estas posiciones permiten una orientación precisa al profesor y al alumno hacia lo esencial en la actividad de aprendizaje, lo que sin embargo, no se manifiesta así en los programas de Matemática en la escuela media y conduce a que se desarrolle el proceso de enseñanza - aprendizaje sin la claridad de objetivo que éste requiere.

### **1.2.5. Tratamiento de las habilidades matemáticas en los programas de la escuela media.**

---

<sup>27</sup> Alvarez, C.: Didáctica de la Educación Superior. Material impreso. P.47.

<sup>28</sup> Ibid. P.46

El análisis de los programas de la asignatura en las últimas tres décadas evidencia lo siguiente:

- ◆ Los programas y orientaciones metodológicas de autores alemanes (1975-1984) ofrecen una amplia visión al profesor sobre los conocimientos y la descripción del tratamiento metodológico de las clases de cada punto esencial. En las orientaciones metodológicas aparecen de forma implícita las habilidades específicas a desarrollar.
- ◆ Las orientaciones metodológicas complementarias que constituyeron una etapa del perfeccionamiento dirigidas a introducir simplificaciones a los programas anteriores aportaron la definición de ideas rectoras por capítulos o unidades temáticas con las exigencias a lograr en los alumnos. No obstante, en ellas no se logra suficiente precisión de cual es la habilidad fundamental y se describen las habilidades matemáticas con un carácter muy específico. Esto, sin dudas, orienta al profesor hacia las habilidades que se forman con los procedimientos matemáticos específicos, esencialmente.
- ◆ En los programas actuales se logra una definición de las habilidades más generales que están presentes en el contenido de toda la Matemática escolar y se plantea como objetivo fundamental garantizar su desarrollo. Además se mantiene la concepción de las ideas rectoras y exigencias de la unidad lo que se caracteriza en los tipos de ejercicios que debe resolver el alumno. En estos programas y sus orientaciones metodológicas es explícita la descripción de las habilidades y hábitos, a diferencia de los anteriores, lo que no se demuestra es su estructuración sistémica.

Como se observa, el perfeccionamiento continuo de los programas se ha ido encaminando a enriquecer el papel de las habilidades en el contenido de la enseñanza de la Matemática, aún cuando en el plano metodológico los niveles de sistematicidad de ese contenido no alcanzan una determinación precisa.

Con el propósito de establecer prioridades y garantizar que los alumnos adquieran gradual y sistemáticamente una formación matemática adecuada, desde el curso escolar 1997-1998 está vigente el Programa Director de Matemática que tiene como principal objetivo elevar la eficiencia del proceso docente educativo en la escuela estableciendo objetivos básicos encaminados a avanzar en dos direcciones: el cumplimiento de los

objetivos de cada grado y del nivel de asimilación de los conocimientos y desarrollo de las habilidades matemáticas, así como el fortalecimiento de las relaciones interdisciplinarias.

En los objetivos básicos del Programa Director de Matemática se expresan un conjunto de habilidades matemáticas que sintetizan el centro de atención de la formación matemática a las que tienen que responder las disciplinas del plan de estudio. Se indican habilidades como: operar con conceptos, proposiciones y procedimientos; leer, escribir, comparar y ordenar números; calcular utilizando las reglas del cálculo aproximado, resolver problemas sobre el significado de las operaciones de cálculo y tanto por ciento; realizar conversiones de unidades de magnitud y monetarias; trazar figuras, construir gráficos y medir empleando instrumentos de dibujo; reconocer las figuras y cuerpos geométricos fundamentales, sus propiedades y relaciones y aplicarlos a la resolución de problemas; trabajar con variables, ecuaciones y fórmulas, traducir del lenguaje común al algebraico para enunciar y resolver problemas e identificar relaciones funcionales y sus propiedades en diferentes formas de representación y utilizarlas en la modelación de situaciones prácticas.

Como se observa, este programa expresa las exigencias principales de la formación matemática para todas las enseñanzas, particularmente la primaria y la secundaria básica, que sientan las bases de los conocimientos y las habilidades matemáticas necesarias.

El Programa Director hace explícita la exigencia de no convertir la resolución de problemas en la realización de ejercicios rutinarios y que los alumnos deben aprender a razonar a partir de datos y situaciones intra y extramatemáticas.

Opinamos que, para la escuela cubana actual, este programa debe constituir un importante impulso para que maestros y profesores orienten la formación matemática hacia los contenidos básicos y las habilidades que son indispensables para lograr el aprendizaje significativo, sólido y aplicable.

### **1.3. La formación de habilidades y la estructura del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática.**

#### **1.3.1. La formación del sistema de conocimientos, hábitos, habilidades y capacidades.**

En el proceso de enseñanza es una cuestión de mucho interés conocer de qué modo ha de organizarse y desarrollarse, para asegurar conocimientos sólidos y profundos en el alumno y motivarlo para su constante perfeccionamiento.

Para ello hay que ver su estructura como un sistema que se determina por la lógica del proceso docente, que expresa el orden o secuencia de pasos de la enseñanza para la asimilación de los conocimientos y el desarrollo de las habilidades y capacidades.

La búsqueda del ordenamiento más efectivo del proceso de enseñanza ha sido objeto de estudio, especialmente, en el problema de que el alumno asimile los conocimientos de forma tal que cada concepto, teorema, procedimiento, no los vea aislados, independientes; que puede traer como consecuencia que se fraccione el contenido y, sobre todo, la significación que pueda tener.

En las investigaciones realizadas por la Doctora Margarita Silvestre Oramas (1993), sobre el desarrollo intelectual, se fundamenta cómo la asimilación de conocimientos fraccionados es, en nuestra escuela, una causa de la pobre preparación que en este sentido alcanzan los alumnos. Aquí se señala el hecho de que el proceso de enseñanza no asegura la necesaria integración de los conocimientos.

Para el desarrollo intelectual, tiene gran importancia la asimilación de conocimientos integrados en un sistema complejo, dinámico y, además, dominar las habilidades teóricas que intervienen en la asimilación de los conocimientos.

En las investigaciones realizadas sobre la enseñanza de la resolución de problemas en los alumnos de la escuela primaria, Alberto Labarrere (1988) propone los aspectos para formar un pensamiento desarrollado y destaca, como esencial, que los maestros se planteen la necesidad de organizar y conducir el proceso de forma tal que propicien la adquisición de sólidos conocimientos, habilidades y hábitos y la formación de un pensamiento que haga capaz a los alumnos de asimilar los progresos científicos y técnicos.

La solución de problemas es vista por A. Labarrere no como un momento final, sino como todo un complejo proceso de búsqueda, encuentros, avances y retrocesos en el trabajo mental que hace necesario analizar cómo transcurre la preparación del alumno y cuál es la labor que debe desempeñar el maestro.

En este punto, queda planteada la doble función que realizan los problemas en la enseñanza de cualquier asignatura: la función de asimilación, de fortalecimiento y comprobación de los conocimientos y la función educativa y de desarrollo. Pero, afirma, "no es cualquier estructura del proceso de enseñanza la que favorece que dé la solución a los problemas a la vez que se asimilen los conocimientos, se formen hábitos y habilidades y se desarrolle el pensamiento del alumno; debe lograrse de una forma determinada y planificada desde la formulación de los objetivos".<sup>29</sup>

En esta posición al relacionar el proceso de solución de problemas con la asimilación de conocimientos, hábitos y habilidades consideramos se debate un importante problema pedagógico cuya solución puede favorecer esa función educativa, desarrolladora que prepare a los alumnos para el cumplimiento de los objetivos formativos que nuestro sistema educativo se ha planteado.

Tomando como referencia la enseñanza de la Matemática, observamos que, el proceso se estructura de forma tal que el alumno recibe primero las partes (conceptos, teoremas) realiza las actividades dirigidas a su fijación y generalmente al final de cada unidad temática o sistema de clases es que aparecen problemas o ejercicios integradores que exigen de la sistematización de los conocimientos y habilidades que se elaboraron anteriormente.

En la estructura descrita, los conocimientos, hábitos y habilidades se forman en ese orden, por lo tanto, los conocimientos y los hábitos son considerados la base de la formación de la habilidad o la habilidad es el resultado de la asimilación de conocimientos y hábitos.

Quiere decir, que la estructura del proceso de enseñanza presupone, que el alumno primero asimile cada una de las acciones y el hecho de que posteriormente esté en condiciones de ordenarlo e integrarlo en un sistema es lo que expresa que posea la habilidad que luego con la repetición (mediante ejercicios) alcanza niveles superiores de desarrollo.

---

<sup>29</sup> Labarrere, A.: Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1988. P. 18.

Asumimos entonces, que la habilidad no debe separarse de la formación de los sistemas de conocimientos y hábitos por lo siguiente:

1. Las acciones que sistematizadas definen la habilidad tienen como contenido los conocimientos y los modos de utilizarlos;
2. Las acciones para constituirse en un sistema, en el alumno, es conveniente que estén orientadas a un fin consciente desde el inicio, lo que refuerza el papel de la base orientadora a través de una adecuada motivación y orientación del objetivo;
3. La formación de los nuevos conocimientos y habilidades adquiere significación cuando se orienta a la comprensión, análisis o solución de un determinado problema, lo que da la posibilidad de ver el conocimiento integrado.

En los puntos de vistas anteriores se declara la idea de que la habilidad, en su formación, no se puede asociar sólo a la ejercitación o repetición de acciones ya elaboradas anteriormente. En este concepto, debe considerarse todo el proceso de construcción, estructuración y perfeccionamiento del sistema de acciones y sus operaciones, es decir, todo el proceso a través del cual el alumno se apropia de un modo de actuación.

En estas valoraciones justificamos la necesidad de comprender que la formación de la habilidad se inicia con la situación que mueve a la necesidad de la búsqueda y estructuración del sistema de conocimientos, hábitos y habilidades operacionales o elementales, sin los cuales no se puede lograr una actuación adecuada del alumno, orientado por los problemas que debe aprender a resolver como principal propósito.

Asimismo, se destaca lo que representa la elaboración de conceptos, relaciones, procedimientos, para la habilidad, no sólo como partes del sistema de acciones, sino por el valor formativo de estos procesos de búsqueda de nuevos conocimientos, para introducir al alumno en procesos mentales esenciales como reconocer, analizar, interpretar, comprender y resolver problemas que sientan la base para la formación y perfeccionamiento de cualquier habilidad. Con esto se reitera la idea de no relacionar la habilidad únicamente con el ejercicio, con la utilización práctica.

La habilidad, según lo expuesto anteriormente, se ha ido caracterizando como expresión de la preparación del alumno para **elaborar y aplicar** el sistema de acciones inherente a una determinada actividad que es lo que permite al profesor verla en todo el

proceso de enseñanza y no limitarla a los eslabones del proceso destinados a la asimilación de lo aprendido.

El concepto atiende, en nuestra opinión, a todo el proceso en el que el alumno realiza una determinada actividad, desde una forma imperfecta inicialmente para luego con el completamiento y profundización de los conocimientos lograr mayor precisión, comprensión y seguridad en la ejecución. No es suficiente, pretender que para que el alumno domine la habilidad, deba, primeramente, haber recibido todo el conocimiento, según la estructura actual del proceso, sino una vía que le permita saber desde el inicio el tipo de actividad que se aspira que domine y cómo los conocimientos y los procedimientos constituyen medios para comprender y realizar con mayor calidad dicha actividad.

Las capacidades, como particularidades psicológicas del hombre, señala A. V. Petrovski, "son premisas y resultados de la adquisición de conocimientos, habilidades y hábitos, pero que por sí mismas no conducen a estos conocimientos, habilidades y hábitos; intervienen como posibilidad y el nivel necesario que se alcanza en una u otra esfera de la actividad es la realidad, luego, para que la posibilidad se transforme en realidad es necesario la ejecución de las actividades a través de las cuales se revelan y realizan estas capacidades".<sup>30</sup>

Las capacidades como condiciones para realizar con éxito una determinada actividad y como formación psicológica generalizadora del área de su regulación ejecutora, se revelan en el dominio de los conocimientos, hábitos y habilidades necesarios para ella por lo que la concepción de las habilidades y hábitos debe corresponder con el desarrollo de las condiciones que hacen capaz a un individuo para ejecutar con éxito una actividad particular.

Las habilidades, comprendidas en el sentido en que se asumen, en este capítulo, han de propiciar el desarrollo de las capacidades como formación psicológica generalizadora del área de su regulación ejecutora, en la medida en que aporten ese carácter de instrumento para la actuación del sujeto.

---

<sup>30</sup> Petrovski, A. V.: Psicología General. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1982. P. 468.

### **1.3.2. Vías para la formación de habilidades.**

Al estudiar, en particular, el método en el contexto específico de la formación de habilidades, se hace un análisis de cómo se lleva a cabo la actuación del alumno y la dirección del profesor, en el proceso en que se conforma y luego se ejercita y desarrolla un modo de actuación, tomando como principal criterio, **la estructura del proceso y las condiciones del alumno para formar las habilidades que son necesarias para la formación de la habilidad más general, compleja e integral que exige un tema o asignatura que se manifiestan a través de la solución de los problemas correspondientes.**

En las investigaciones realizadas por profesores de Matemática del ISP "Frank País" y de la escuela media de Santiago de Cuba (1991 - 1998) sobre la formación y desarrollo de la habilidad para resolver problemas matemáticos, de la que ésta ha constituido una tarea, se estudiaron los sistemas de acciones que caracterizan el modo de actuación inherente a esta habilidad, el contenido de estas acciones y sus operaciones, basados en concepciones como las de George Polya, Werner Jungk, L. M. Friedman, A. Schoenfeld, que fundamentan estrategias generales para preparar a los alumnos en esta importante actividad.

Pero, se concluyó que no es suficiente pensar en la resolución de problemas en sí misma (en un sistema de acciones), es imprescindible analizar el proceso en el que transcurre la preparación del alumno, es decir, el proceso en el que se construye y llega a dominar un modo de actuación, que se alcanza en etapas o eslabones didácticos a los que corresponde un determinado nivel de sistematización de los conocimientos, hábitos, habilidades, capacidades, modelos explicativos o patrones para actuar.

Como una de las tareas científicas, llevadas a cabo con el fin de caracterizar el modelo didáctico, que emplean los profesores de las secundarias básicas y los preuniversitarios, para dirigir el proceso de formación de habilidades matemáticas, se entrevistaron 145 profesores de Matemática y se observaron 76 clases, tomadas al azar. El modo de desarrollarse el proceso y la opinión de los profesores condujo a la conclusión de que se trabaja para desarrollar las habilidades matemáticas asociadas al dominio de uno o

varios conceptos, teoremas o procedimientos, es decir, al desarrollo de habilidades específicas en una o varias clases.

En muy pocos casos, los profesores pudieron argumentar los objetivos a lograr a mediano y largo plazos en los sistemas de clases y unidades temáticas, demostrando sólo precisión en los objetivos a lograr en la clase observada.

En las entrevistas realizadas ningún profesor pudo formular con precisión el objetivo a lograr en la unidad temática que impartía y, por lo tanto, no le fue posible precisar la habilidad matemática que en ese nivel de sistematicidad del contenido debían formar los alumnos.

Para la dirección del proceso de formación de las habilidades matemáticas, según los diferentes niveles de sistematicidad del modo de actuar que se espera del alumno y, teniendo en cuenta, los niveles de sistematicidad del proceso docente educativo que planifica y dirige el profesor (unidad temática, sistema de clases y clases), se destacan dos vías fundamentales, tanto en la literatura como en la práctica diaria de maestros y profesores.

#### **1.3.2.1. De las particulares a las generales.**

Es la vía en la que se guía la formación de habilidades matemáticas desde las específicas hacia las generales, presupone que si el alumno forma y desarrolla las habilidades específicas puede lograr su sistematización en las habilidades de carácter más complejo y general. En este método se transita de lo singular y particular a lo general, de cada una de las habilidades componentes a la habilidad integral.

Esta tiene su génesis en los postulados de la pedagogía tradicional en la que principios didácticos como el de la asequibilidad y el de la sistematicidad defienden la posición de que los conocimientos y las habilidades deben aprenderse con un grado de dificultad creciente, es decir, de lo fácil a lo difícil, de lo simple a lo complejo, de lo conocido a lo desconocido, de lo concreto a lo abstracto, y que el carácter científico de la enseñanza siempre se presenta estrechamente relacionado con esta exigencia.

En la planificación y organización del proceso de enseñanza aprendizaje, esta vía se manifiesta en la estrategia de que la apropiación de cada conocimiento y cada habilidad se dosifica para un determinado número de clases, y así se transita por cada una de las habilidades específicas a formar en esa etapa para, posteriormente, pasar a la formación de la habilidad que sistematiza o integra las anteriores, a esta nueva habilidad se le dedica también un determinado número de clases y así sucesivamente, sin constituir una suma de lo ya asimilado, se van formando las habilidades más generales.

La base psicológica del proceso de formación de las habilidades matemáticas, que se indica en los programas de estudio y aplican la mayoría de los profesores se fundamenta en la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales del profesor P.Y. Galperin.

En las orientaciones metodológicas de los programas de Matemática se precisa que, en las etapas del proceso de asimilación, el profesor debe lograr motivar a los alumnos para aceptar la habilidad y con ella los conocimientos que la integran, indicando la utilidad del planteamiento de los problemas y en la base orientadora representar el modelo de la actividad que requiere formar el alumno y, como resultado, él debe recibir ese modelo lo más completo posible.

La aplicación de esta teoría, en los aspectos indicados, ha guiado al profesor a un modelo de enseñanza en el que el estudiante no asume una total responsabilidad en los procesos de búsqueda (de elaboración del nuevo concepto, teorema o procedimiento), en definitiva en la formación de la habilidad matemática, sino que recibe un patrón ya elaborado que le exige principalmente una adecuada repetición de la acción que corresponde ejecutar.

La limitación de esta vía la observamos en que para la construcción de las habilidades no siempre se da al alumno una visión de futuro acerca del modo de actuación que debe llegar a dominar, qué objetivos debe vencer y, por tanto, autoevaluarse constantemente, comprobando el nivel alcanzado en el dominio de ese modo de actuación.

Significa que, aunque el profesor tenga claridad acerca de las habilidades generales que el alumno debe formar, en la dirección del proceso de formación de las habilidades, el objetivo del profesor no necesariamente se transfiere a la actuación del alumno, por cuanto cada uno se guía por metas diferentes.

Si el profesor no tiene claridad de la actuación que debe alcanzar el alumno al finalizar un tema, evidentemente no podrá planificar y organizar la formación de cada una de las habilidades necesarias a través de cada clase y sistema de clases, con una concepción sistémica del proceso de enseñanza aprendizaje; limitando su labor de dirección a que el alumno se apropie y ejercite una u otra habilidad, lo que quiere decir en el plano psicológico, que se ocupa de la esfera de regulación ejecutora de la personalidad (cómo y con qué se realiza la actuación) y en menor medida se atiende a la esfera de regulación inductora o motivacional afectiva (por qué y para qué se realiza la actuación); por lo que el planteamiento y solución de problemas no satisface la función de ser un medio de estimulación del aprendizaje.

Esto permite concluir que, esta vía propicia que se motive la actuación del alumno hacia objetivos o propósitos parciales y la satisfacción de ellos no necesariamente asegura la satisfacción del objetivo general que responde al modo de actuación que se propone que alcance en una etapa dada de su desarrollo y, por tanto, los referidos a la resolución de problemas.

En general, los profesores de Matemática admiten que ellos dirigen el proceso de formación de habilidades matemáticas aplicando esta vía.

### **1.3.2.2. De las generales a las particulares.**

En esta vía se guía la construcción de habilidades matemáticas desde las habilidades más generales y complejas hacia las habilidades específicas, parte de la caracterización del modo de actuar dado en las habilidades generales y la orientación hacia ese modo de actuar y su asimilación es lo que justifica la formación de habilidades de carácter más específico, de menor nivel de sistematicidad.

Aquí se transita de lo general a lo particular y singular, de la visión del todo, dado en el modo de actuar más complejo, hacia cada acción componente de dicho modo de actuar; lo que puede comprenderse desde la actividad de resolución de problemas como la meta o propósito, hacia todas aquellas habilidades que para el cumplimiento de este objetivo son necesarias formar.

En este caso para la formación de habilidades matemáticas, desde el punto de vista psicológico, se destaca que la esfera de regulación inductora o motivacional afectiva ocupa un lugar relevante y con ella moviliza al alumno hacia el logro de objetivos parciales que les permitan el logro de los objetivos más generales. En este proceso la regulación ejecutora se orienta por la claridad y precisión del ¿por qué y para qué se ejecuta un modo de actuación?, ¿por qué y para qué debe formarse una u otra habilidad?, tomando como premisas la meta real a alcanzar sin perderse en metas parciales o incompletas.

Lo más importante de esta vía es que el alumno, conociendo cuál es la meta, participe activa y conscientemente en la búsqueda de las vías y las condiciones que le posibiliten alcanzarla, que sea capaz de autoevaluarse en cada etapa del proceso de aprendizaje y pueda, además, buscar de forma independiente en la bibliografía; asistir a bibliotecas e investigar, con independencia, de acuerdo con sus particularidades individuales.

La orientación del alumno hacia las habilidades más generales significa también diseñar aquellas actividades a través de las cuales él pueda, con los sistemas de conocimientos y habilidades formados, orientarse conscientemente hacia su nuevo objetivo, de cuáles recursos dispone, cuáles condiciones, qué tiempo y esfuerzo requiere para tener éxito en su vencimiento.

En esta idea, se expresa la principal tarea del profesor en la dirección del proceso de construcción de las habilidades, con la realización de actividades que conduzcan al alumno, por sí mismo, hacia lo que debe saber hacer y evitar que este mensaje le llegue por la simple exposición verbal, impuesta o indicada desde fuera; lo que favorece según N.F. Talízina (1988) las condiciones para la creación de una base orientadora de tercer tipo por su carácter generalizado, completo y la independencia en su elaboración.

Este modelo favorece también el que el alumno no sólo transite de lo fácil a lo difícil, de lo simple a lo complejo, sino que a través de situaciones complejas, problemáticas, sea capaz de orientarse en el análisis, comprensión y solución empleando los recursos de que dispone y poder buscar aquellos de que no dispone, para que lo simple sea comprendido también a través de lo complejo; además que se forme la convicción de que

cada concepto, propiedad o procedimiento se justifica en el edificio de una determinada teoría porque es necesario para la solución de algún problema.

De igual manera, en este caso se logra un acercamiento al modo de actuar que el individuo pone en práctica en la vida cotidiana, en su actividad profesional, cuando ante un problema tendría que ser capaz de activar sus conocimientos y recursos, determinar estrategias, plantearse objetivos parciales y autovalorarse constantemente en función de los resultados esperados.

La formación de las habilidades matemáticas según los programas actuales de Matemática, de la escuela media, se orienta hacia criterios favorables, en función de esta segunda vía, tales como: destacar las insuficiencias de tratar de formar las habilidades matemáticas a través de la repetición de acciones prácticas únicamente; precisan las limitaciones de la formación de habilidades específicas, principalmente y la necesaria sustitución por habilidades generalizadas y fundamentan la contribución al desarrollo del pensamiento teórico con la formación de habilidades generalizadas.

Sin embargo, en ésta, como en las anteriores concepciones curriculares se reafirma la mayor atención a la parte ejecutora de las acciones, siendo limitadas las indicaciones y precisiones teóricas acerca de cómo lograr una orientación lo más completa posible para que el alumno realice las acciones con el nivel de complejidad esperado.

Por otra parte, no se precisa una estructuración de las habilidades matemáticas que se concrete en el tratamiento del contenido de cada unidad temática, ya que las indicaciones son generales y no se llega a la determinación de cada una de las habilidades en su relación con las de mayor o menor nivel de generalidad.

Consideramos que se puede completar la concepción sobre las habilidades matemáticas en la medida en que se precisen estos niveles de generalidad y su incidencia en la estructuración del contenido, que se materialice en la dosificación de las unidades temáticas, de los sistemas de clases y clases que realiza el profesor y que es donde puede garantizarse la formación de las habilidades.

### **1.3.3. La estructuración del contenido de la Matemática a partir de problemas.**

Un diseño para la estructuración del contenido de la Matemática escolar, en la que se tienen en cuenta tanto el papel del problema como fundamento del aprendizaje, como el papel del problema como medio para la fijación del saber y poder, se ofrece en el tema de investigación "Una variante para la estructuración del contenido en la Matemática escolar" del profesor A. Rebollar que al igual que este tema de tesis de grado, tuvo sus antecedentes en el tema de investigación "Estudio de la habilidad para resolver problemas matemáticos en la escuela media cubana".

La variante presupone que en la estructura del proceso de enseñanza aprendizaje el alumno comience por enfrentar el sistema de problemas matemáticos, que le den una visión general del contenido del tema, que siendo comprensibles, le permitan ir profundizando en las diferentes tareas cognoscitivas que de él se derivan, pero sobre la base de que la materia le llegue como un todo, que estudie cada una de sus partes, pero que siempre el punto de partida lo constituya el problema en sí y no algunas de sus partes que es lo que le permitiría comprender el proceso de sistematización científica.<sup>31</sup>

Esta estructura tiene como finalidad que el alumno no transite por la asignatura desconociendo siempre el contenido siguiente producto del conocimiento sistematizado, sino avanzar conociendo qué problemas tiene planteado y, en gran medida, conocer una vía de solución e ir precisando con cada nuevo conocimiento qué aporte hace para la explicación, profundización y precisión de esa u otra vía de solución, la mejor comprensión del problema en sí, así como la formulación de nuevos problemas.

La variante propuesta en su esencia le debe permitir al profesor una acción transformadora, que se concrete en métodos para dirigir el proceso de enseñanza de la asignatura basado en el planteamiento, comprensión y resolución independiente de problemas.

Lo esencial radica en que, al estructurar la asignatura, ocupen una posición rectora los problemas que constituirán la medida del valor instrumental del contenido que se presentará a través de ejemplos para el alumno, desde la etapa preparatoria hasta la fijación y aplicación.

---

<sup>31</sup> Rebollar, Alfredo: Estudio de la habilidad para resolver problemas matemáticos en la escuela media. Informe de investigación. Santiago de Cuba. 1993. p.29.

La idea fundamental que se propone es romper con el aislamiento en el aprendizaje de los conceptos, relaciones y procedimientos, que no permiten luego estructurarlos para lograr que con determinadas condiciones o datos conocidos puedan encontrar vías de solución que guíen hacia la demostración de lo desconocido.

Los problemas, con las exigencias planteadas, se caracterizan como sigue: “Los **problemas esenciales de la Matemática** expresan las exigencias que, desde el punto de vista teórico y práctico, deben saber hacer los alumnos, es decir, deben ser el reflejo de la situación que han de comprender, interpretar y resolver con el contenido de la asignatura”.<sup>32</sup> Con la precisión de los problemas esenciales y los campos de problemas que de él se derivan se concreta el propósito, la meta a alcanzar por los alumnos en el aprendizaje de una unidad temática con una visión más abarcadora y general, lo que conlleva a que el objetivo de cada clase se ubique como un eslabón para el logro de dicho propósito.

El objetivo de cada clase debe verse como componente necesario para la comprensión, análisis y solución de uno de los problemas esenciales por tanto, se deriva del objetivo del sistema de clases y debe expresar lo que aporta a la preparación del alumno para resolver esos problemas, lo que contribuye a la sistematización del conocimiento y las habilidades matemáticas.

En la concepción de esta variante se consideran **tres momentos principales para la estructuración del contenido de la enseñanza en una unidad temática:**

1. El planteamiento, comprensión y solución de los problemas esenciales y sus subproblemas como base para la preparación del nuevo contenido, es decir, la motivación y la orientación hacia los objetivos más generales de la unidad temática.
2. La elaboración de los conceptos, teoremas y procedimientos que conforman el sistema de conocimientos y habilidades como componentes imprescindibles para resolver los problemas esenciales de la unidad. La motivación va dirigida al

---

<sup>32</sup> Rebollar, Alfredo: Una variante para la estructuración del contenido de la Matemática en la escuela media cubana. Informe de investigación. ISP “Frank País García”. Santiago de Cuba. 1994. P. 57.

perfeccionamiento del sistema a través de la búsqueda de lo nuevo con el objetivo de resolver los problemas.

3. La fijación de los conceptos, teoremas y procedimientos específicos para promover la integración constante a través del planteamiento de problemas que estimulen la utilización del sistema de conocimientos y habilidades.

### ***CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.***

En este capítulo se han expuesto los fundamentos principales que se han tenido en cuenta al estudiar los procesos de resolución de problemas y de formación de habilidades matemáticas en relación con la lógica y estructura del proceso de enseñanza aprendizaje.

La resolución de problemas se refleja en las tendencias contemporáneas de la educación matemática como eje del diseño curricular en sus funciones de medio y fundamento del aprendizaje y de fijación del saber y poder matemáticos.

La habilidad matemática, restringida a la idea de la repetición de acciones que presupone que los alumnos alcancen el nivel de automatización y se conviertan en hábitos; no propicia una actividad desarrolladora, en constante perfeccionamiento a partir de la diversidad de condiciones de las situaciones que pueden resolverse.

La habilidad matemática se asume, en esta investigación, a partir de la idea de que expresa la preparación del alumno para elaborar, reelaborar y aplicar sistemas de acciones de carácter esencialmente matemático en una diversidad de situaciones intra o extramatemáticas, es decir, construir el modo de actuar más que su apropiación.

La estructura del proceso de enseñanza aprendizaje está indisolublemente ligada a la explicación y las vías que se siguen en la formación de habilidades matemáticas y la preparación de los alumnos para resolver problemas.

La formación de habilidades generales a partir de las específicas no siempre ayuda a crear una base orientadora completa y la vía que parte de las habilidades generales como base para la formación de las específicas ofrece condiciones favorables para una comprensión más clara del modo de actuación más completo e integral que se espera del alumno que es la resolución de problemas.

La estructura del proceso de enseñanza aprendizaje a partir de problemas favorece que el proceso de formación de las habilidades se oriente de la habilidad general e

integradora que se expresa en el modo de actuar para resolver problemas hacia todas aquellas habilidades matemáticas que son requeridas y que deben ser ejercitadas y sistematizadas en cada eslabón didáctico del proceso.

Queda planteado el problema de cómo diseñar el proceso de formación de las habilidades matemáticas que contribuya a la preparación de los alumnos para resolver problemas matemáticos y constituya un instrumento de trabajo para el profesor en la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje.

## **CAPÍTULO II: MODELO DIDÁCTICO PARA EL TRATAMIENTO METODOLÓGICO DE LAS HABILIDADES MATEMÁTICAS.**

### **INTRODUCCIÓN.**

En este capítulo se expone el modelo didáctico para la dirección del proceso de formación de las habilidades matemáticas en el que aparecen las precisiones de tipo conceptual sobre la naturaleza de estas habilidades, lo que se ha inferido de las definiciones dadas por autores de diferentes tendencias y, en particular, de la caracterización de la resolución de problemas como actividad matemática.

La consideración de la habilidad como un proceso de constante perfeccionamiento partiendo de la relación entre desarrollo, educación y enseñanza del paradigma histórico cultural y de la enseñanza a través de problemas, que como tendencia actual reconoce que la resolución de problemas se propone como eje curricular de la formación matemática, constituye premisa esencial en las propuestas que se sintetizan en el modelo didáctico.

El modelo didáctico presenta las habilidades matemáticas como procesos en los que el alumno construye modos de actuación, que en uno u otro nivel de sistematicidad del contenido son necesarios para resolver problemas, las etapas del proceso e indicaciones para su aplicación en la escuela en las condiciones actuales.

La caracterización de las habilidades matemáticas atendiendo al objeto y niveles de sistematicidad de la actividad matemática permite fundamentar la estructura sistémica del proceso de su formación que guíe en el diseño de la asignatura y en las estrategias metodológicas a emplear por el profesor para dirigir dicho proceso.

### **2.1. La habilidad matemática.**

#### **2.1.1. La relación problema - habilidad.**

El modelo teórico se fundamenta en la relación de la categoría **habilidad** con las categorías didácticas **problema, objetivo, contenido y método**. El reconocimiento de la relación problema - habilidad, de la resolución de problemas como la actividad matemática fundamental y el propósito de que el alumno aprenda a través del planteamiento y

resolución de problemas, constituyen las premisas a partir de las cuales se sustenta la propuesta del modelo didáctico.

El problema establece la situación hacia la cual ha de dirigirse la actuación del sujeto. La habilidad es el modo de relacionarse el sujeto con la situación que le posibilita darle solución y el objetivo expresa los conocimientos, niveles de asimilación, de profundidad y de sistematicidad y las condiciones en que ese sujeto formará la habilidad, como su núcleo.

La habilidad presupone un modo de actuación, imprescindible para darle solución a problemas, ya sea como el principal modo de hacer inherente al método de solución, o el modo de hacer necesario para realizar cada uno de los procesos parciales de ese método de solución o todas aquellas acciones más concretas que le permiten al sujeto realizar cada uno de los pasos con exactitud, en el tiempo apropiado.

De cualquier manera, cada habilidad adquiere su significación cuando el sujeto logra ubicarla como un eslabón necesario en la solución de uno u otro problema, así cuando hablamos de la habilidad se presta atención al aspecto subjetivo del sujeto que aprende, el significado y comprometimiento que tiene en la realización de una u otra acción.

El objetivo en cada eslabón del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática deberá reflejar en su núcleo la habilidad matemática, como exigencia, para que satisfaga así su función rectora al indicar al profesor y especialmente al alumno hacia donde se dirige la actividad de aprendizaje.

La concepción del proceso de formación de habilidades matemáticas donde se tome como principio que no sólo se atienda a la estructura de la actividad (sistemas de acciones y operaciones), sino que se tenga en cuenta la actuación del sujeto, su actitud y disposición hacia la apropiación de la actuación correspondiente, se materializa a través de la categoría didáctica problema ya que en ella se indica la situación con la que ese sujeto debe interactuar, sin menospreciar los factores subjetivos del que aprende.

La enseñanza a través de problemas asigna a esta categoría didáctica una posición significativa en el proceso de aprendizaje del alumno que basa su actuación en la búsqueda de todos aquellos recursos que le posibilitan explicar vías de solución para construir así del conocimiento matemático. Por tanto, la formación de las habilidades se contrapone a la idea de aplicar solo metodologías ya aprendidas y contempla todo el proceso en el que el

alumno toma conciencia del qué, por qué, con qué, cómo y hasta dónde del modo de actuación.

### **2.1.2. La actividad matemática.**

Las precisiones sobre el concepto de **habilidad matemática** tienen como premisas lograr claridad acerca del objeto matemático sobre el que actúa el individuo (concepto o definición, teorema, demostración, procedimiento de solución, etc.) y la delimitación de la acción que sobre dicho objeto va a ejecutar según el propósito o fin a lograr. Esto obliga a reflexionar sobre el significado que en el orden intelectual y lógico tiene una u otra acción, por ejemplo: describir, identificar, explicar, relacionar, generalizar, resolver, etc.

Cada contenido matemático, por su naturaleza, exige un modo de actuar con características específicas, por tanto las habilidades matemáticas han de expresar esas particularidades teniendo en cuenta el campo a que se refieren y los niveles de sistematicidad y complejidad de la actividad a ejecutar.

La explicación de las habilidades matemáticas ha sido un propósito de maestros y profesores desde las épocas más remotas. Desde la preparación de los alumnos para realizar operaciones de cálculo con precisión y rapidez, realizar mediciones y estimaciones, hasta las operaciones más complejas del pensamiento que exige la resolución de problemas.

Para caracterizar las habilidades matemáticas es conveniente analizar la actividad que realiza el sujeto (alumno) como el proceso en que manifiesta su actitud hacia el objeto, lo asimila y convierte en esencia de su actuación a la luz de la teoría de la actividad desarrollada por los seguidores de la escuela vigotskiana.

Estos presupuestos apuntan hacia la caracterización de la actividad matemática y para ello es necesario reconocer los rasgos del objeto matemático sobre el que actúa el alumno y las acciones que tiene que realizar.

El estudio de las relaciones cuantitativas y espaciales de la realidad objetiva, como objeto de la Ciencia Matemática, su carácter abstracto, que se materializa además en un lenguaje de términos y símbolos, hacen que a la luz de las tesis marxistas caractericemos la actividad matemática como un proceso en el cual el individuo opera, no necesariamente

con el mundo que le rodea de forma directa, sino con objetos ideales y sus representaciones a través del lenguaje de la disciplina.

Es, en este sentido, que consideramos conveniente poder comprender el objeto de la actividad matemática y que el sistema de acciones para actuar no puede desligarse del uso de la terminología y simbología especializada conjuntamente con el contenido de relaciones, propiedades, inferencias lógicas, representaciones geométricas, etc.

Al estudiar la actividad matemática, en su carácter especial, ella se materializa cuando el individuo es capaz de plantearse, interpretar y resolver un problema o situación que requiere de los medios que ofrece la Ciencia Matemática.

En el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática la actividad del alumno se orienta a la elaboración de conceptos, teoremas y sus demostraciones, procedimientos y la resolución de ejercicios; lo que constituye el sistema de conocimientos y habilidades que integran el contenido de esta asignatura en la escuela, conjuntamente con las cualidades de la personalidad a las que hace un importante aporte. La Metodología de la enseñanza de la Matemática, según el programa actual de la disciplina, reconoce estas actividades como procesos de solución de problemas.

La estructuración de estas actividades (como procesos de planteamiento y resolución de problemas) permite fundamentar que la actividad matemática transcurre a través de dicho proceso, que tiene como objetivo o finalidad la utilización de medios o instrumentos y estrategias o patrones que no son objetos reales y se expresan de forma oral o escrita mediante su lenguaje.

La asignatura Matemática debe preparar al alumno para la realización de una operación de cálculo, simplificar expresiones, resolver ecuaciones, realizar demostraciones y construcciones geométricas, todo lo cual se alcanza a través de actividades que requieren de los niveles más altos de abstracción para la comprensión y ejecución.

Este tipo de actividad va más allá de la conformación de conocimientos, del establecimiento de un orden en ellos, si no se disponen de las vías para su utilización en situaciones diversas y solamente cuando los conocimientos pueden utilizarse en función de un objetivo se convierten en los instrumentos de la actividad correspondiente. La sistematización del conocimiento del objeto matemático se produce al nivel de los conceptos, de las proposiciones y de los métodos de solución, de ahí que la resolución de

problema se identifique como una importante forma de sistematización de la actividad matemática.

Una conclusión sobre la estructura de la actividad matemática (como forma particular de actividad) en los planos psicológico y metodológico, se describe en el esquema siguiente:

Actividad	-----	Modo de actuar	-----	Problema a resolver
Acciones	-----	Métodos	-----	Elaboración o aplicación de conceptos, teoremas, procedimientos y estrategias de trabajo.
Operaciones	-----	Procedimientos	-----	Procedimientos matemáticos específicos según las condiciones del problemas (lo dado, lo buscado, el campo a que corresponde).

La estructura de la actividad matemática puede, entonces, considerarse a partir del problema matemático que constituye la necesidad o motivo de la actuación del alumno y la búsqueda de los conceptos o procedimientos como objetivos parciales que son los instrumentos para actuar en las condiciones específicas del problema dado.

La actividad del alumno queda estimulada por la necesidad de resolver un problema y tiene como contenido las acciones asociadas a la elaboración o aplicación de los conceptos, teoremas, estrategias y las operaciones que constituyen los procedimientos específicos según las condiciones del problema.

En este sentido, se propone que el profesor en la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje propicie que la actividad matemática del alumno se caracterice por:

- ❖ Resolver el problema como motivo de la actividad y que constituya un medio de socialización, tanto en la relación de los alumnos con el medio que le rodea, como con otros alumnos, en la búsqueda de vías de solución.
- ❖ Reconocer los métodos y procedimientos como las acciones y operaciones de la actividad de resolución de problemas.
- ❖ Construir modos de actuación que se estimulen, no sólo por lo cognitivo, también por su sistema de valores, actitudes y sentimientos, disposición y gusto por la actividad que realiza.

- ❖ Tener claridad de objetivos que se expresa en que el conocimiento matemático adquiera significación y objetividad, en tanto puede ser usado en la resolución de problemas.

El carácter procesal y estructural de la actividad matemática se expresa, no en un conjunto de acciones o pasos, sino en un proceso que tiene como resultado poder resolver un determinado problema.

### **2.1.3. Las habilidades matemáticas.**

El estudio de la habilidad como forma de asimilación de la actividad, sobre la base también de un enfoque procesal y estructural, permite ver al alumno como sujeto activo de su aprendizaje y, por tanto, en la formación y desarrollo de los modos de actuación y métodos necesarios.

Las habilidades matemáticas, son reconocidas por muchos autores (H. Hernández, H. González) como aquellas que se forman durante la ejecución de las acciones y operaciones que tienen un carácter esencialmente matemático. A partir del análisis realizado acerca del concepto de habilidad, del papel de la resolución de problemas en el aprendizaje de la Matemática y lo que caracteriza la actividad matemática del alumno consideramos **la habilidad matemática como la construcción y dominio, por el alumno, del modo de actuar inherente a una determinada actividad matemática, que le permite buscar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos matemáticos, emplear estrategias de trabajo, realizar razonamientos, emitir juicios y resolver problemas matemáticos.**

Las habilidades matemáticas expresan, por tanto, no sólo la preparación del alumno para aplicar sistemas de acciones (ya elaborados) inherentes a una determinada actividad matemática, ellas comprenden la posibilidad y necesidad de buscar y explicar ese sistema de acciones y sus resultados, de describir un esquema o programa de actuación antes y durante la búsqueda y la realización de vías de solución de problemas en una diversidad de contextos; poder intuir, percibir el posible resultado y formalizar ese conocimiento matemático en el lenguaje apropiado, es decir, comprende el proceso de construcción y el resultado del dominio de la actividad matemática.

Este concepto indica, que no es suficiente pensar en la preparación del alumno para multiplicar fracciones, demostrar un teorema o resolver una ecuación, también atiende a sus posibilidades para explicar el modo de actuar, proyectar el método o procedimiento a emplear, estimar las características del resultado que le permita comparar el objetivo con lo logrado y poder escribirlo en el lenguaje apropiado, en las diferentes formas de representación.

Un índice, que se destaca, es que la habilidad se ha formado cuando el sujeto es capaz de integrarla con otras en la determinación de vías de solución, cuando deja de ser un eslabón aislado para ubicarla en un contexto, cuando tiene significación y el estímulo, interés o gusto por la actividad que puede realizar, ya que, de lo contrario, sólo alcanza potencialidades muy limitadas que no permiten enfrentar una diversidad de situaciones dentro o fuera de la asignatura.

## **2.2. Caracterización de las habilidades en la asignatura matemática.**

Para estudiar el concepto de habilidad en su interdependencia sistémica es conveniente poder comprender el objeto de la actividad matemática y que el sistema de acciones para actuar, el sujeto, no puede desligarlo del uso de la terminología y simbología especializada que se define a través del contenido de los conceptos, de las relaciones, las propiedades, las inferencias lógicas, las representaciones geométricas, etc.

La actividad matemática, como tipo especial de actividad, se manifiesta cuando el individuo está en condiciones de plantearse, interpretar y resolver un problema o situación poniendo en movimiento los recursos de que dispone en cuanto al contenido de los conceptos, propiedades y procedimientos de carácter esencialmente matemáticos y la significación individual y social que ello tiene para interpretar el medio en que vive.

### **2.2.1. Habilidades matemáticas atendiendo al objeto de la actividad matemática.**

En el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática la actividad del alumno comprende, como premisas principales: la elaboración de conceptos, teoremas y sus demostraciones, procedimientos y la resolución de ejercicios; que constituyen, como se ha

señalado, **el objeto del sistema de conocimientos y habilidades** del contenido de la asignatura en la escuela.

El contenido de las acciones y operaciones que se ejecutan en la actividad matemática comprenden aquellos recursos de los que debe disponer el alumno así como las estrategias y métodos que le permitan desplegar ese modo de actuar. Teniendo en cuenta el objeto matemático sobre el que se ejecuta ese modo de actuación, de carácter complejo, se han reconocido los siguientes componentes del contenido de la actividad matemática:

- ◆ conceptos matemáticos y sus propiedades;
- ◆ procedimientos de carácter algorítmico;
- ◆ procedimientos de carácter heurístico;
- ◆ situaciones - problemas de tipo intra y extramatemáticas.

El estudio de las acciones y operaciones que se ejecutan en cualquier actividad matemática, especialmente su contenido descrito en los componentes señalados, permiten caracterizar y distinguir las habilidades matemáticas siguientes:

### **1. Habilidades matemáticas referidas a la formación y utilización de conceptos y propiedades.**

Son aquellas habilidades que comprenden, la elaboración, el reconocimiento, identificación de conceptos y propiedades matemáticas, su expresión en el lenguaje matemático (denominación con la terminología y simbología correspondiente) y viceversa, teniendo en cuenta las diferentes formas de representación gráfica o analítica; estas habilidades ofrecen recursos imprescindibles para el análisis y comprensión de un problema.

### **2. Habilidades matemáticas referidas a la elaboración y utilización de procedimientos algorítmicos a partir algoritmos conocidos.**

Son aquellas habilidades que comprenden el establecimiento, reproducción o creación de sucesiones de pasos u operaciones encaminadas al logro de un objetivo parcial o final en la solución de una clase de ejercicios o problemas, aparecen frecuentemente como pasos necesarios en la etapa de ejecución del plan de la solución de un problema.

### **3. Habilidades matemáticas referidas a la utilización de procedimientos heurísticos.**

Son aquellas que comprenden la identificación y utilización de principios, reglas y estrategias heurísticas para la búsqueda de vías de solución, que caracterizan técnicas específicas o generales para la solución de problemas matemáticos. Su papel fundamental lo tienen en el proceso de búsqueda de vías de solución, de establecimiento de un plan y la valoración de los resultados de su aplicación (interpretación de la solución y la vía de la solución), por lo que estas habilidades se proyectan como recursos metacognitivos en la actuación del alumno que le permite construir modelos de las situaciones planteadas.

#### **4. Habilidades matemáticas referidas al análisis y solución de situaciones problemáticas de carácter intra y extramatemáticas.**

Son aquellas que comprenden la utilización de estrategias para el análisis y comprensión de ejercicios y problemas **con textos o no** y que se estimulan a partir de una situación matemática o de la vida práctica, dada en el lenguaje común o en el lenguaje matemático, pero que no constituye un ejercicio formal con una orden directa. Estas habilidades se despliegan a partir de la búsqueda que la situación planteada genera, la que para su solución necesita poner en práctica, las habilidades de los tipos explicados anteriormente.

Las habilidades matemáticas así caracterizadas ofrecen un corte horizontal del modo de actuar esperado del alumno en un tema o sistema de clases dado, es decir, permite destacar los componentes principales del modo de actuar en función del contenido matemático, lo que debe saber hacer con los conceptos, propiedades, procedimientos y situaciones - problemas.

#### **2.2.2. Habilidades matemáticas atendiendo a los niveles de sistematicidad de la actividad matemática.**

De la caracterización de la actividad matemática y su estructura (actividad - acción - operación; modo de actuar - método - procedimiento) atendiendo a los tres niveles de sistematicidad (general, particular y singular) se ha podido diseñar un sistema de habilidades matemáticas en el que se definen las habilidades que se corresponden con cada nivel, tomando como referencia el papel de la resolución de problemas en la orientación y ejecución de dicha actividad.

Las habilidades matemáticas, en esos tres niveles de sistematicidad de la actividad matemática (general, particular y singular) las caracterizamos de la forma siguiente:

<b>Niveles de sistematicidad</b>		<b>Habilidades matemáticas</b>
<b>General</b>	-----	<b>Habilidad para resolver problemas matemáticos.</b>
<b>Particular</b>	-----	<b>Habilidades matemáticas básicas.</b>
<b>Singular</b>	-----	<b>Habilidades matemáticas elementales.</b>

La habilidad para resolver problemas expresa el objetivo central de la escuela cubana de preparar al hombre para la vida, "educarlo para servir a la humanidad participando desde la misma escuela en la construcción de la sociedad: es prepararlo para resolver problemas como resultado de que en su estancia en la institución docente aprenda a resolverlos"<sup>33</sup>. Este objetivo se propone lograr que el alumno enfrente la resolución de problemas "**como instrumento formativo fundamental**".

De ahí que la formación de habilidades matemáticas no se reduce al aspecto cognitivo de aprender conceptos, teoremas y procedimientos también se propone fomentar a través de la resolución de problemas la consolidación de un sistema de valores como la laboriosidad, responsabilidad, amor al trabajo, etc. y las actitudes, sentimientos, intereses, disposiciones que requiere la sociedad cubana.

La **habilidad para resolver problemas matemáticos** es la construcción y dominio, por el alumno, de los modos de actuar y métodos de solución de problemas utilizando los conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos, en calidad de instrumentos y las estrategias de trabajo heurístico para la sistematización de esos instrumentos en una o varias vías de solución.

La habilidad para resolver problemas matemáticos, en especial, no se puede formar a partir de la repetición de acciones ya elaboradas previamente sin atender a cómo se han asimilado y el nivel de significación que éstas tienen para los alumnos atendiendo a sus experiencias, su disposición hacia la actividad; de ahí la necesidad de enfocar como

---

<sup>33</sup> Alvarez, Carlos: La escuela integrada a la vida. Pedagogía` 93. Ciudad de la Habana. p. 3.

parte de la formación de esta habilidad la etapa en que transcurre la estructuración del sistema de conocimientos (conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos) a partir de situaciones - problemas.

El planteamiento de problemas se comprende como un medio para estimular en el alumno la interpretación de una determinada situación analizar las condiciones que se dan para luego discernir las vías de solución, partiendo de los conceptos, teoremas y procedimientos que son los instrumentos de que dispone y los modos de sistematizarlos en función de un objetivo (estrategias) según la interpretación realizada.

Considerar los instrumentos y las estrategias en el concepto de la habilidad para resolver problemas matemáticos y no considerar uno como parte del otro obedece a que los alumnos pueden dominar un modo actuar ante un problema y no disponer de los instrumentos necesarios y viceversa, tener la información y no poder estructurarla a través de una estrategia para cumplir el objetivo.

Pensar en la habilidad para resolver problemas matemáticos en los términos explicados precisa el proceso por el que transita el alumno en la búsqueda de conceptos, teoremas y procedimientos, en la concreción de estrategias de trabajo utilizando relaciones, inferencias, conclusiones, en el lenguaje matemático correspondiente.

Esta habilidad, en su carácter general, sistematiza también las habilidades docentes, lógicas o intelectuales; que guían el proceso de búsqueda y planteamiento de la solución. Así se destacan habilidades como identificar, observar, describir, denotar, separar, modelar, calcular, fundamentar, valorar, etc. que están presentes en la comprensión y búsqueda de vías de solución, en su descripción y finalmente en la valoración de los resultados.

Las **habilidades matemáticas básicas** son las que expresan la construcción y dominio de los métodos de solución o análisis de un problema matemático, constituyen objetivos parciales en la preparación para resolver problemas en un complejo de materia determinado. En ellas se pueden concretar métodos de solución para uno o varios tipos de problemas.

El contenido de esta habilidad matemática refleja la exigencia en cuanto a la sistematización de las habilidades referidas a la elaboración o utilización de conceptos, propiedades, procedimientos algorítmicos o heurísticos que posibilitan el desarrollo de la

habilidad general porque además brindan métodos de solución para el (o los) problema (s) que al alumno se plantean.

Los rasgos que caracterizan las habilidades matemáticas básicas son:

- responden a un eslabón o nivel de desarrollo parcial de la habilidad general.
- indican el nivel de aplicación exigido a conceptos, relaciones y procedimientos que se sistematizan en un método de solución;
- delimitan la acción a ejecutar (demostrar, calcular, construir, explicar, fundamentar, etc.);
- no tienen un carácter específico al ser aplicable en una diversidad de situaciones;
- expresan el nivel de profundidad con que se deben elaborar y utilizar los conceptos, teoremas y procedimientos que se sistematizan en el método de solución.

Las **habilidades matemáticas elementales** son las que expresan la construcción y dominio de procedimientos específicos derivados directamente del modo de operar con los conceptos, teoremas o procedimientos que al establecer las conexiones entre ellos constituyen la base de las habilidades matemáticas básicas.

Estas habilidades reflejan las condiciones concretas, particulares, que son necesarias en las habilidades referidas a la elaboración o utilización de los conceptos, propiedades, procedimientos algorítmicos o heurísticos que debe desarrollar el alumno.

Los rasgos que caracterizan las habilidades matemáticas elementales son:

- tienen un carácter específico con relación al modo de actuar dado en la habilidad general;
- se determinan de la acción a realizar directamente con conceptos, teoremas y procedimientos;
- indican las condiciones (previas o no) necesarias para desarrollar las habilidades matemáticas básicas.

Las habilidades matemáticas elementales se perfeccionan en la medida en que pueden ser empleadas en la diversidad de condiciones que cada situación propone.

Estas precisiones sobre las habilidades matemáticas ofrecen un corte vertical y favorecen la interpretación de los niveles de desarrollo del alumno, con la determinación de hasta donde puede o no llegar con relación a los problemas matemáticos que como objetivo de su aprendizaje tiene que aprender a resolver en un contexto determinado.

Las ventajas que, en primer lugar, se asocian a esta caracterización están en la etapa de diseño y planificación de la asignatura ya que se orienta hacia la determinación de

las habilidades en los niveles de sistematicidad del proceso docente educativo, para luego determinar las tareas docentes que guían la actividad del alumno en la conformación del modo de actuar correspondiente a cada etapa.

## **2.3. Estructura sistémica de las habilidades matemáticas.**

### **2.3.1. Enfoque de sistema.**

En la formación de habilidades matemáticas, como proceso orientado a la asimilación del modo de actuación inherente a una actividad específica, se manifiesta la orientación ideológica y filosófica según la interpretación de las categorías y diferentes formas en que transcurre el proceso, los principales cambios que den indicios de nuevas cualidades, de un nuevo estado en el desarrollo del alumno, sujeto de aprendizaje.

En este proceso, el cambio, el desarrollo o transición a estados o niveles que expresan nuevas cualidades no se produce de forma aislada a los restantes procesos pedagógicos y psicológicos, así como otros factores que intervienen en el alumno cuando ejecuta la actividad.

Las tareas que realiza el alumno para asimilar una o varias habilidades matemáticas se basan en un sistema de acciones que, como abstracción, puede describir en un modelo lo esencial del proceder o modo de actuar, pero que no desconoce las cualidades de la personalidad del alumno, sus condiciones previas, los métodos de enseñanza del maestro, las características de los materiales docentes, la influencia del colectivo estudiantil, etc.

El desarrollo en el proceso de formación de habilidades matemáticas como expresión de cambio regular, orientado, irreversible, que tiene como resultado un estado cualitativamente nuevo en su composición y estructura (habilidad para resolver problemas matemáticos), se refleja en cómo alcanzar un determinado estado o nivel que tiene su base en la claridad y conciencia de objetivo al que se llega a través de cambios cualitativos graduales (con la formación y desarrollo de las habilidades básicas que son sus componentes), pero que tienen una integración o sistematización para que se dé el cambio en el sentido progresivo (que el alumno aprenda a resolver problemas matemáticos).

El desarrollo de las habilidades constituye un movimiento en el que el alumno estructura y reestructura sistema de acciones cada vez más complejos y en esa reestructuración o transformación estructural alcanzan estados superiores lo que significa que cada nueva habilidad se incorpora al sistema ya formado, pero no como una habilidad más, sino como un elemento que aporta nuevas interpretaciones, racionaliza procesos y ofrecen otras variantes de solución que no borra los sistemas formados, sólo los enriquece.

El enfoque de sistema del proceso de formación de habilidades matemáticas orienta su estudio de forma integral a revelar las diversas relaciones, propiedades, componentes y cualidades que se manifiestan en el proceso de desarrollo, los estados o niveles por los que transita este proceso y que se materializan en la actuación del alumno.

El enfoque sistémico se sustenta en el principio de la sistematización, pero a diferencia de éste, significa que el objeto de estudio se estructura como un conjunto de invariantes, las cuales constituyen la expresión de lo esencial del contenido y guían el proceso de búsqueda de los restantes conocimientos que le dan precisión, profundidad y solidez.<sup>34</sup>

La variante propuesta para la estructuración del contenido a través del planteamiento, comprensión y solución de problemas determina el enfoque sistémico en las habilidades matemáticas, al determinarse, la habilidad general del sistema, en el modo de actuar necesario para resolver el **problema esencial como expresión de lo que debe saber hacer el alumno con el contenido que estudia** y esto constituye la base para el desarrollo de cada habilidad matemática básica y elemental y las habilidades generales (intelectuales y docentes) que conforman las acciones o sistemas de acciones u operaciones derivadas de los conceptos, teoremas y procedimientos concretos, que con su sistematización dan al alumno la posibilidad de comprender y resolver los problemas de forma independiente.<sup>35</sup>

La habilidad para resolver problemas matemáticos como hilo conductor se estructura a través de las habilidades matemáticas básicas (éstas a su vez de las elementales) y se perfecciona en la medida en que éstas últimas alcanzan un nivel superior de desarrollo.

---

<sup>34</sup> Talízina, N.: Psicología de la enseñanza. Editorial Progreso Moscú. 1988. p. 104.

<sup>35</sup> Ibid (31). P. 70.

Cada habilidad logra su óptimo desarrollo cuando el alumno es capaz de reconocer sus componentes, sus dependencias y relaciones, que son los que les permiten orientarse en el cumplimiento del objetivo general.

El que las habilidades matemáticas se formen bajo la orientación de la habilidad para resolver problemas matemáticos y que el alumno la forma a partir de los problemas concretos, que se plantean para su actividad de aprendizaje, debe conllevar a que cada parte se vea como componente del sistema y no como un proceder aislado.

La habilidad matemática general, como reflejo de lo que debe saber hacer el alumno en una unidad temática determina un enfoque sistémico de las habilidades matemáticas atendiendo a los siguientes aspectos:

- De ella se determina el objetivo central del sistema de conocimientos y habilidades;
- Se determinan objetivos parciales a través de los cuales se forma y desarrolla la habilidad general;
- Se establecen las relaciones de dependencia o no entre los conocimientos y habilidades matemáticas básicas y elementales que la conforman;
- Se logra que el contenido de la unidad no sea visto clase a clase, de habilidad en habilidad, sino como un todo más complejo que le da salida al objetivo central (habilidad general);
- El establecimiento de relaciones entre sistemas de habilidades de mayor y menor grado de complejidad se alcanza viendo cada unidad como un sistema que además se relaciona con otros de los diferentes grados y niveles de enseñanza;
- El establecimiento de las relaciones entre los elementos del sistema da la posibilidad de que el alumno observe modos alternativos de respuestas a los problemas esenciales (habilidad general).

Las posibilidades de este enfoque están, esencialmente, en la idea de que los conocimientos y las habilidades básicas y elementales sean instrumentos y no elementos aislados, sean elementos de un sistema y su sistematización determine estrategias de trabajo, modos de actuación generalizados, que es el objetivo a lograr con la disciplina Matemática en la escuela media.

Este modelo presupone que el alumno para formar la habilidad, desde el primer momento, se oriente por el sistema de acciones que le sirve para resolver el problema

esencial y el modo de actuar que requiere la búsqueda de su solución (habilidad para resolver problemas), con las condiciones previas que posee y cada eslabón del proceso de enseñanza contribuya a perfeccionar ese sistema de acciones.

La dirección del proceso de formación de la habilidad para resolver problemas, precisa del conocimiento de cada una de las acciones que orientan la búsqueda de una o varias vías de solución, tanto en la elaboración del nuevo conocimiento donde el problema esencial estimula la necesidad de buscar otros instrumentos para la solución y cuando el problema se propone la utilización de lo ya aprendido.

### **2.2.3. Estrategia para estructurar el sistema de habilidades matemáticas.**

En la estrategia para estructurar el sistema de habilidades matemáticas, desde el punto de vista metodológico organizativo de la asignatura, partimos de que la habilidad general de la unidad queda determinada por el problema esencial correspondiente y cada sistema de clases se determina por la habilidad matemática básica que responde a dicha habilidad general.

Las habilidades matemáticas básicas constituyen los principales componentes del modo de actuar más general y desde el punto de vista organizativo necesitan de varias clases en las que se realizan los eslabones didácticos del proceso docente para la asimilación del método o procedimiento por el alumno. En ellas se sistematizan todas las habilidades matemáticas del contenido de la actividad matemática que responden a objetivos de una o varias clases del sistema de clases.

La habilidad matemática básica precisa el objetivo del sistema de clases y se deriva para cada clase tomando en cuenta las condiciones previas de los alumnos, las habilidades matemáticas elementales ya formadas y las que se forman por primera vez, así como la imprescindible sistematización y aplicación en la resolución de ejercicios.

Las habilidades matemáticas básicas son eslabones de especial importancia porque a través de ellas se sistematizan las habilidades matemáticas elementales y son las que determinan los objetivos de las clases, o sea, el profesor determina y formula el objetivo de la clase guiado por la habilidad matemática básica que corresponde al sistema de clases.

La habilidad matemática elemental se determina como componente de la habilidad matemática básica y no necesariamente corresponde al objetivo de una o varias clases porque ella puede pertenecer a las condiciones previas del alumno o ser parte del nuevo contenido, pero de cualquier forma por su carácter específico no debe constituir el centro de la orientación hacia el objetivo, sino como elementos, pasos, procedimientos necesarios de un modo de actuar más completo y complejo que permite resolver los problemas.

Las habilidades referidas a la forma de operar con los conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos reciben un tratamiento especial en los momentos dedicados a la ejercitación, el repaso, la sistematización y profundización para que luego sean aplicados en condiciones diversas en la solución de otros problemas.

Los métodos y medios de enseñanza y las formas de organización del proceso se seleccionan y aplican en función de la estrategia para que el alumno forme y desarrolle el sistema de habilidades de acuerdo con sus condiciones previas. La actividad individual y grupal, como formas de organización, requieren del diseño de tareas, tanto para orientar hacia las habilidades generales y básicas, como para la ejercitación necesaria de todas las elementales.

El control y la evaluación del nivel de desarrollo del sistema de habilidades constituye un problema de necesario estudio, pero que debe aportar en cada etapa del proceso la preparación alcanzada, por los alumnos, en el dominio de métodos de solución de los problemas y de las habilidades elementales que en ellos se sistematizan.

Al estructurar el sistema de habilidades matemáticas de una unidad temática como parte del proceso de planificación del proceso de enseñanza aprendizaje se propone, en resumen, la siguiente estrategia:

- La habilidad general de la unidad se determina por el problema esencial a resolver. En su determinación y formulación expresa las características y exigencias del modo de actuar y métodos de solución más generalizados que el alumno debe construir y llegar a dominar en esa etapa del proceso. El programa de la asignatura debe revelar, con orientaciones metodológicas, los métodos de enseñanza y aprendizaje más apropiados y los conceptos, teoremas, procedimientos y estrategias de trabajo que constituyen el núcleo central del sistema de conocimientos y habilidades matemáticas, así como las cualidades que en el orden formativo aporta la resolución de problemas.

- El diagnóstico de las condiciones, que posee el alumno, para resolver problemas y otras habilidades matemáticas precedentes que aporta una caracterización del nivel de preparación del alumno y sus potencialidades para el análisis, comprensión y búsqueda de vías de solución de ejercicios y problemas, así como las bases para la selección de las situaciones prácticas e intramatemáticas a partir de las cuales se orientará a los alumnos hacia las habilidades general y básicas y se realizará la dosificación del contenido en los sistemas de clases.
- La determinación de las habilidades matemáticas básicas como métodos de solución inherentes a la habilidad general son las que determinan los sistemas de clases de la unidad temática. De la habilidad general se determinan los componentes fundamentales del modo de actuación a partir del diagnóstico de los alumnos y el tiempo necesario y conveniente para el desarrollo de cada habilidad básica.

El sistema de clases se planifica y dirige en función de la habilidad matemática básica, en el sistema se distingue tanto la etapa de construcción como de fijación de ese método de solución, en las que se garantiza, por tanto, el nivel de profundidad y sistematicidad necesarios.

- La derivación de las habilidades matemáticas elementales como los principales procedimientos que se sistematizan en las habilidades matemáticas básicas pueden constituir o no objetivos de una o varias clases del sistema. Significa que en la formación de las habilidades matemáticas básicas se introducen nuevos procedimientos específicos asociados al trabajo con conceptos, teoremas o procedimientos que requieren del espacio de una o varias clases, pero que la orientación ha de estar clara hacia los objetivos del sistema de clases. Las habilidades matemáticas elementales, que son condiciones previas, aparecen como acciones dominadas por el alumno por lo que ellas no constituyen objetivos de las clases dentro del sistema, aunque sí actividades de repaso para su reactivación y de sistematización de las nuevas habilidades.
- La derivación de la habilidad, para cada clase, a partir de la habilidad matemática básica debe precisar aquellas que corresponden al proceso de construcción del modo de actuar (elaboración del nuevo contenido) y cuáles se dirigen al dominio de ese modo de actuar a través de actividades de fijación y aplicación.

- Las actividades dirigidas a la orientación de los alumnos hacia el sistema de habilidades presupone la orientación hacia la habilidad matemática general y sus componentes a través de los problemas prácticos o matemáticos cuya solución justifica que se ocupen de construir métodos de solución y llegar a dominarlos para resolver sistemas de problemas con el contenido objeto de estudio.
- La formación y desarrollo del sistema de habilidades tendrá su expresión en la capacitación de los alumnos para la búsqueda de vías de solución a ejercicios y problemas, que revelen el dominio de un modo de actuación.

#### **2.4. Etapas del proceso de formación del sistema de habilidades matemáticas.**

La tarea del profesor es guiar al alumno partiendo de qué debe saber hacer y proporcionarle los recursos necesarios para que con una participación activa y consciente pueda responder a la exigencia de formar y aplicar el sistema de habilidades a la resolución de problemas matemáticos.

La formación del sistema de habilidades matemáticas es un proceso planificado y dirigido por el profesor, tiene su término en la actuación del alumno y es ahí donde, en última instancia, se evalúa la eficiencia de dicho proceso.

En este proceso se observan tres etapas que responden a los eslabones didácticos del proceso docente educativo y su dinámica que permiten describir la estructura del proceso de enseñanza aprendizaje sobre la base del papel de la resolución de problemas como eje de la formación matemática.

1. Etapa de planteamiento, comprensión y análisis de los problemas esenciales (orientación del sistema de habilidades matemáticas);
2. Etapa de elaboración, ejercitación y sistematización de las habilidades matemáticas (ejecución del sistema de habilidades);
3. Etapa de aplicación del sistema de conocimientos y habilidades a la resolución de problemas variados (perfeccionamiento de la ejecución del sistema de habilidades).

A la etapa 1 corresponde el momento durante el cual el alumno se apropia del sistema de problemas que son la expresión de las posibilidades de aplicación de la teoría matemática que estudia y con ellos construye una orientación inicial de los conceptos,

teoremas o procedimientos específicos y generales y las habilidades matemáticas correspondientes que le permiten comprender y fundamentar una o varias vías de solución.

El diagnóstico de las condiciones previas de los alumnos y sus potencialidades, en la caracterización de las individualidades, para proponer actividades dirigidas a completar, consolidar o activar el sistema de conocimientos y habilidades ya formados, de manera tal que la distancia entre el nivel de partida y las condiciones necesarias para resolver el problema esencial y los subproblemas de la unidad temática sea la menor posible.

De igual manera la motivación del alumno para que pueda atribuir significado al problema esencial, que participe activamente en su interpretación, análisis y solución se requiere para concientizar el motivo y los modos de ejecución de la actividad de resolución de problemas.

En esta etapa se crean las bases para la formación del sistema de conocimientos y habilidades con la estructuración del sistema de acciones de la habilidad para resolver problemas, cumple su función de preparación y orientación del alumno, cuando desde el inicio él se familiariza y comprende el modo de actuar que debe asimilar.

Particular interés, en su función orientadora, tiene esta etapa cuando a través del análisis de los problemas esenciales y sus soluciones el alumno se apropia del por qué se debe ocupar del contenido matemático correspondiente.

La segunda etapa da continuidad a la anterior al elaborar los conceptos, teoremas y procedimientos (se propone la formación de las habilidades referidas a la elaboración y utilización de conceptos, propiedades y procedimientos) a partir de la interpretación como instrumentos para la precisión de una u otra solución de los problemas (habilidades matemáticas básicas) y los procedimientos específicos que le sirven de base (habilidades matemáticas elementales). En esta etapa se proponen ejercicios que propicien el ordenamiento, integración y estructuración del sistema de conocimientos y habilidades.

En la tercera etapa, muy relacionada con la anterior, se parte de que el alumno se haya apropiado del sistema de conocimientos y habilidades matemáticas, es decir, los problemas, los instrumentos y estrategias para su solución y dispone de una amplia variedad de muestras, dadas en los ejemplos analizados y los ejercicios resueltos, que le permiten orientarse de forma independiente en la resolución de los problemas.

En esta etapa debe ocupar la atención del profesor la ayuda al alumno en la realización de reflexiones metacognitivas que le permitan evaluar sus logros e insuficiencias, especialmente poder realizar autovaloraciones sobre la preparación que ha alcanzado para resolver los problemas exigidos y establecer nuevas metas dirigidas al trabajo correctivo o a elevar los niveles de profundidad en el contenido. Este tipo de ayuda al alumno es conveniente que se realice de forma sistemática con el fin de fortalecer su autovaloración sobre qué hace, cómo lo hace y por qué lo hace.

Este momento debe dedicarse a que el alumno busque vías de solución suficientemente fundamentadas, aplique analogías, generalizaciones, particularizaciones. Las segunda y tercera etapas se entrelazan a lo largo de una unidad de acuerdo con la dosificación del contenido para el cumplimiento del objetivo de formar las habilidades en los tres niveles de sistematicidad planteados.

En estas etapas, la actividad de los alumnos se orienta a partir de:

- ❖ El (los) problema (s) que deben resolver,
- ❖ La búsqueda y conformación de métodos de solución,
- ❖ La ejercitación y sistematización de las habilidades básicas y elementales,
- ❖ La discusión a través del trabajo grupal,
- ❖ La comunicación de los resultados de forma oral, escrita o ambas en un lenguaje matemático exacto,
- ❖ La búsqueda de información en los libros de texto u otros materiales a través de tareas de investigación o de consolidación,
- ❖ La solución de problemas de forma individual, encaminados a la fijación y aplicación de métodos de solución.

Como se observa, deben seleccionarse aquellos problemas que le dan salida a la habilidad general y aquellos problemas y ejercicios variados en los que se pueda consolidar y evaluar la preparación de los alumnos para analizar las situaciones que se le dan y aplicar lo aprendido.

En estas etapas se reflejan funciones atribuidas al problema en el proceso de aprendizaje como medio y fundamento del aprendizaje y como medio para la fijación del saber y poder matemáticos, o sea, objetivo del aprendizaje.

El análisis de la estructura sistémica de las habilidades matemáticas y las etapas del proceso de su formación en una unidad temática se representa en la figura siguiente:

### ***CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO***

La relación entre el problema y la habilidad que se define a partir de la interacción entre la situación y el modo de actuar necesario para enfrentarla y resolverla y la noción de que la actuación siempre está motivada por la necesidad de satisfacer ese propósito es la premisa en la que se sustenta el modelo didáctico para la formación de habilidades matemáticas.

La estructura de la actividad matemática en los niveles de sistematicidad conocidos, en los planos psicológico, didáctico y metodológico conducen a señalar la resolución de problemas como su necesidad o motivo y la elaboración o aplicación de conceptos, teoremas, procedimientos y estrategias de trabajo como el contenido de las acciones que intervienen en el proceso.

La habilidad matemática queda definida como un proceso en el que el alumno construye y domina el modo de actuar inherente a una determinada actividad matemática, que le permite buscar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos, emplear estrategias de trabajo, realizar razonamientos, juicios que son necesarios para la resolución de problemas matemáticos.

Las habilidades matemáticas que se caracterizan atendiendo al objeto de la actividad matemática son las habilidades referidas a: la identificación y utilización de conceptos y propiedades, la elaboración y utilización de procedimientos algorítmicos, la utilización de procedimientos heurísticos y al análisis y solución de situaciones de carácter intra y extramatemáticas.

Las habilidades matemáticas que se caracterizan atendiendo a los niveles de sistematicidad de la actividad matemática (en lo general, particular y singular) son: la habilidad para resolver problemas matemáticos, las habilidades matemáticas básicas y las habilidades matemáticas elementales.

Se demuestra el carácter sistémico del proceso de formación de las habilidades matemáticas a partir de la habilidad para resolver problemas matemáticos.

El proceso de formación de las habilidades matemáticas en su carácter sistémico transcurre en tres etapas: de orientación hacia el sistema de habilidades matemáticas, de ejecución del sistema de habilidades y de perfeccionamiento de la ejecución del sistema de habilidades.

La labor del profesor constituye un aspecto de necesaria reflexión para la recomendación de vías que le permitan guiar el proceso de formación de habilidades, se resalta la realización del diagnóstico de los alumnos, la motivación, atención a las diferencias individuales, la propuesta de tareas y ejemplos en correspondencia con las condiciones para lograr una concepción de sistema en el alumno.

La caracterización de las habilidades matemáticas sirve de guía para el diseño curricular de la asignatura y para orientar el trabajo metodológico de los maestros y profesores.

### **CAPITULO III: APLICACIÓN DEL MODELO DIDÁCTICO AL TRATAMIENTO METODOLÓGICO DE LAS HABILIDADES MATEMÁTICAS EN UNIDADES TEMÁTICAS SELECCIONADAS.**

#### **INTRODUCCIÓN.**

La aplicación del modelo didáctico al tratamiento metodológico de las habilidades matemáticas se presenta en este capítulo a partir del planteamiento de un conjunto de acciones que el profesor puede seguir en las etapas de planificación del proceso y en la ejecución propiamente en clases, incluyendo precisiones para el diagnóstico y control de la formación del sistema de habilidades matemáticas a través de una escala valorativa que resulta necesaria para el análisis de los resultados de los alumnos.

La propuesta de ejemplos de sistemas de habilidades, en el complejo de materia de Geometría Plana, aportará un nivel de concreción al modelo teórico, que constata la caracterización hecha de las habilidades matemáticas y las posibilidades de ser aplicadas en las condiciones de la escuela media.

La intervención en la práctica escolar tiene el propósito de constatar las concepciones que prevalecen en el tratamiento de las habilidades matemáticas y la medida en que pueden ser superadas las dificultades detectadas con la aplicación del modelo teórico y el modelo concreto para la Geometría Plana en 7. Grado.

### **3.1 Metodología para la aplicación del modelo didáctico.**

Los eslabones del proceso docente educativo, como sistema, propician la sistematización de los conocimientos y de las habilidades.

La caracterización de las habilidades matemáticas debe verse a partir de las posibilidades de mostrar ese proceso de sistematización que se produce a lo largo de cada unidad temática, sistema de clases y clases.

La caracterización se podrá utilizar por el profesor en la precisión de las exigencias que cada período de organización del proceso docente debe satisfacer el alumno, partiendo del modo de actuar más general y cómo éste se deriva en habilidades que constituyen sus métodos y procedimientos componentes.

Estas precisiones ayudan en la determinación de las habilidades matemáticas de la unidad temática (habilidad matemática rectora, básica y elemental) donde el profesor refleja con exactitud la actuación esperada del alumno, la que queda expresada en el problema matemático concreto que motiva, estimula esa actuación.

En la estructuración del sistema de habilidades matemáticas se proyecta la actividad del profesor hacia las siguientes tareas:

1. Estudiar los problemas esenciales;
2. Estudiar la habilidad rectora de la unidad temática a partir de los problemas esenciales y sus subproblemas;
3. Determinar las habilidades matemáticas básicas y las habilidades elementales;
4. Dosificar el contenido de la unidad temática y cada sistema de clases en función de la formación del sistema de habilidades determinado y las etapas previstas para este proceso;
5. Concebir la motivación y la orientación hacia el objetivo de la unidad, sistema de clases y clases, según los niveles de sistematicidad de las habilidades matemáticas;

6. Determinar las ayudas que en cada eslabón didáctico serán necesarias para guiar el proceso de sistematización de las habilidades matemáticas y el modo de actuar que corresponde desarrollar en el alumno;
7. Seleccionar los ejercicios para la fijación del sistema de habilidades en cada eslabón del proceso de enseñanza aprendizaje;
8. Precisar los niveles para el control de los resultados en la formación del sistema de habilidades.

Con la ejecución de las tareas indicadas el profesor podrá aplicar el modelo teórico propuesto en la dirección del proceso de formación de las habilidades matemáticas, especialmente en la orientación del alumno para la comprensión y ejecución del modo de actuar que debe asimilar y apropiarse así del objetivo de su aprendizaje.

Para cada una de las etapas del proceso de formación de las habilidades se indica al profesor las tareas que le corresponde realizar.

#### **Tareas para la etapa de orientación.**

- Realizar el planteamiento, análisis y solución del problema esencial según las exigencias que corresponden a la unidad temática;
- Discutir cada problema como base para la orientación de las habilidades matemáticas básicas y elementales a desarrollar;
- Utilizar las ayudas pedagógicas que sean necesarias para activar la búsqueda de métodos y estrategias de trabajo en cada eslabón del proceso de enseñanza aprendizaje;
- Motivar y orientar hacia el objetivo como vías para señalar a los alumnos la habilidad matemática a formar como parte de todo el sistema.

#### **Tareas para la etapa de ejecución y perfeccionamiento.**

1. Elaborar los conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos que sirven de base para la formación de las habilidades matemáticas básicas y elementales;
2. Seleccionar los tipos de ejercicios según el nivel de sistematización de las habilidades básicas y elementales;
3. Seleccionar los problemas para la aplicación del sistema de habilidades formado.

La elaboración de los conceptos y teoremas, y en especial de los procedimientos de solución, continúa siendo el gran problema metodológico en la labor del profesor, por ser aquí donde se asegura la comprensión de lo esencial matemático, qué aporta cada uno al sistema de conocimientos formado y qué posibilidades brinda para resolver nuevos problemas o perfeccionar la solución de otros conocidos.

Las actividades destinadas a la fijación constituyen los momentos de perfeccionamiento constante a la actuación del alumno en la medida que se garantice que enfrente una variedad de problemas, utilice con flexibilidad y solidez las habilidades formadas en la determinación y realización de una o varias vías de solución.

### **3.2. Aplicación del modelo teórico a la formación de habilidades en las unidades de geometría plana en la secundaria básica.**

En la enseñanza de la Geometría en nuestro país se observan dificultades en que los alumnos comprenden de forma fragmentada los conceptos y teoremas y que por lo tanto su utilización en la resolución de problemas es muy limitada.

La introducción del concepto de problema esencial en la enseñanza de la Matemática tiene como objetivo lograr que los alumnos comiencen a utilizar los conceptos y teoremas fundamentales de forma estructurada, lo que para la enseñanza de la Geometría tiene sus particularidades.

Por ejemplo, en la unidad temática Geometría Plana de 7. grado se observa que el alumno utilizando como instrumentos de medición de segmentos y ángulos, la regla y el semicírculo, respectivamente, en el traslado de polígonos trae consigo dos tipos de limitaciones:

- el número de acciones a realizar para reproducir el polígono y,
- la inexactitud en la medición de un segmento o ángulo según sea el instrumento que se utilice.

La introducción de los nuevos conocimientos unidos a la utilización de nuevos instrumentos de medición debe estar dirigida a disminuir o eliminar las limitaciones antes

señaladas, mediante la comprensión y ejecución de un sistema de acciones por parte del alumno.

Los problemas esenciales se han caracterizado en su forma general para la enseñanza de la Matemática, no obstante, conviene distinguir una nueva característica para la Geometría que radica en que los nuevos conceptos o teoremas permiten resolver una limitación práctica ya sea en el orden de las operaciones como en el orden de la precisión. Quiere decir, que un instrumento de medición más un concepto o teorema determinan un nuevo sistema de acciones que le permite al sujeto perfeccionar las acciones que ha realizado anteriormente.

En la enseñanza de la Geometría en el nivel de Secundaria Básica se ha determinado el siguiente problema esencial y sus subproblemas:<sup>36</sup>

### **Problema esencial: Perfeccionamiento del movimiento y reproducción de polígonos.**

<b>Sub – Problemas</b>	<b>Aporte Teórico</b>
1. Reproducción de polígonos de un plano a otro	• Definición de igualdad de polígonos
2. Disminución del número de operaciones	• Teoremas sobre la descomposición de un polígono convexo en triángulos. • Teorema sobre la descomposición de un polígono no convexo en polígonos convexos. • Teorema sobre la igualdad de triángulos.
3. Mejorar la precisión en la medición de segmentos.	• Teorema sobre la determinación de los extremos de un segmento. Definición de circunferencia. (compás).
4. Mejorar la precisión en la reproducción de ángulos.	• Teorema sobre ángulos en la circunferencia.
5. Comparación de superficies poligonales.	• Concepto de superficies equivalentes. • Concepto de área.
6. Reproducción de un polígono a gran escala.	• Concepto de semejanza. • Propiedades generales de la semejanza. • Problemas de la experimentación a gran escala

---

<sup>36</sup> Ibid . p. 87.

El perfeccionamiento de la medición y la disminución del número de operaciones en el traslado de polígonos constituyen, desde el punto de vista práctico, aportes importantes en la formación matemática del alumno y las posibilidades de aplicación a situaciones concretas, ayudando a comprender los problemas y darle sentido a sus aplicaciones.

Así, la Geometría Plana en la secundaria básica, por ejemplo, según los programas vigentes, se encaminaría a que el alumno se prepare para **resolver problemas geométricos de construcción, de cálculo y de demostración a partir de las relaciones de igualdad de triángulos, en la circunferencia y la semejanza.**

En particular, la unidad Geometría Plana de 7. Grado, en los programas vigentes, se ocupa de plantear y resolver el problema esencial en las direcciones dadas en los dos primeros subproblemas fundamentalmente, dedicándose al estudio de la igualdad de triángulos, los cuadriláteros y sus propiedades.

El problema esencial debe expresar lo siguiente: **determina un polígono igual a un polígono dado.**

De este problema esencial para la unidad temática se deben distinguir las acciones que desde las primeras clases son necesarias para que el alumno pueda atribuir significado a la situación de la determinación de polígonos iguales:

- reconocer el papel de los movimientos del plano en la determinación de polígonos iguales en un mismo plano;
- interpretar el concepto de igualdad de polígonos para la determinación de polígonos iguales en diferentes planos;
- explicar la importancia de los triángulos en el estudio de los polígonos, en particular de la igualdad de triángulos;
- reconocer la aplicación de la igualdad de triángulos a la fundamentación de propiedades de los polígonos;
- reconocer la aplicación de la igualdad de triángulos para el traslado o reproducción de polígonos.

El tratamiento de estos conceptos en la solución del problema esencial posibilita la formación de una visión global inicial de las habilidades matemáticas de forma integrada partiendo de que la habilidad general de la unidad temática se propone:

**Resolver problemas geométricos de construcción, de cálculo y de demostración en triángulos y cuadriláteros, utilizando la relación de igualdad de triángulos.**

Para formar esta habilidad general son necesarias habilidades matemáticas básicas como las siguientes:

- \* Demostrar la igualdad de triángulos.
- \* Demostrar propiedades de los polígonos utilizando la igualdad de triángulos.
- \* Construir triángulos y cuadriláteros.
- \* Calcular longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos en situaciones dadas.
- \* Calcular área y perímetro de polígonos en situaciones intra y extramatemáticas.

Para la formación de estas habilidades matemáticas básicas son necesarias aquellas que están asociadas a los modos de operar directamente con los conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos que se han definido como habilidades matemáticas elementales, tales como:

- \* Construir triángulos iguales aplicando los movimientos del plano.
- \* Construir mediatrices, bisectrices, alturas y medianas en triángulos.
- \* Demostrar propiedades de las diagonales en los paralelogramos.
- \* Generalizar relaciones entre los cuadriláteros convexos.
- \* Comparar superficies aplicando el concepto de superficies equivalentes.
- \* Calcular el área del triángulo.
- \* Denotar figuras geométricas.
- \* Calcular longitudes de lados de triángulos y cuadriláteros.

En toda la unidad temática se forman habilidades matemáticas elementales que tienen una incidencia generalizada para toda la Geometría Plana, como son:

- reconocer las figuras geométricas y sus propiedades;
- denotar los objetos geométricos (segmentos, ángulos, rectas, triángulos, cuadriláteros, etc.), sus propiedades y relaciones;
- construir polígonos (con o sin instrumento);
- demostrar proposiciones sencillas;
- calcular longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos.

El tratamiento de conceptos como: igualdad de triángulos y superficies equivalentes debe ocupar la atención del alumno en esta unidad temática, desde el momento inicial, para familiarizarse con la idea central sobre la reproducción de polígonos iguales, la comparación de polígonos y el cálculo de áreas, que favorece la comprensión de los problemas extramatemáticos a que debe enfrentarse el alumno en la vida práctica, en los oficios como el de carpintero, plomero, sastre y otros, que se puedan ilustrar con suficiente claridad.

En 8. grado se continúa el tratamiento de la Geometría Plana con la unidad Circunferencia y círculo que tiene como base los conocimientos y habilidades precedentes sobre los movimientos del plano, la igualdad de triángulos y su aplicación en la obtención y demostración de propiedades de los polígonos, en particular los triángulos y cuadriláteros.

En esta unidad temática es fundamental comprender qué aporta el conocimiento de la circunferencia a la solución del problema esencial: perfeccionamiento del traslado y reproducción de polígonos. Para ello es útil responder a la pregunta siguiente: ¿Por qué es importante el estudio de la circunferencia?

La circunferencia permite diferenciar ángulos, así para trasladar o reproducir ángulos se toma la circunferencia como patrón donde uno de los rayos que parten del centro se fija para determinar el punto donde el otro lado corta la circunferencia.

De esta manera se establece una correspondencia biunívoca entre ángulos y puntos de la circunferencia, lo que significa que dos ángulos son iguales si coinciden con un mismo punto de la circunferencia.

Esto justifica la importancia del semicírculo como instrumento para medir ángulos y por tanto trasladar polígonos, pero que queda superado en precisión con la introducción de la relación entre el arco, la cuerda y el ángulo central.

A partir de estas reflexiones se plantea como problema esencial el siguiente: **determina un polígono igual a un polígono dado.**

Para que el tratamiento del problema esencial en las primeras clases de la unidad cumpla su objetivo de presentar el significado del nuevo contenido (relaciones en la circunferencia) se requiere que el profesor proponga actividades encaminadas a lo siguiente:

- Analizar las imprecisiones en la medición y comparación de segmentos y ángulos, con la regla y el semicírculo, respectivamente;
- Analizar las ventajas del compás en la precisión de la medición de segmentos;
- Introducir la relación entre el arco, la cuerda y el ángulo central correspondiente y su aporte a la construcción o reproducción de ángulos (se puede utilizar la medición de la cuerda como medio para la reproducción de ángulos iguales);
- Explicar las posibilidades del estudio de los elementos de la circunferencia y sus relaciones para profundizar el conocimiento de los polígonos.

La habilidad general que se propone formar por los alumnos en esta unidad temática es:

**Resolver problemas geométricos de construcción, demostración y cálculo en figuras planas (triángulos, cuadriláteros y circunferencia) utilizando las relaciones entre ángulos, cuerdas y arcos en la circunferencia**

Para esta habilidad general se proponen habilidades matemáticas básicas como las siguientes:

- Fundamentar relaciones entre ángulos, cuerdas y arcos en la circunferencia.
- Construir polígonos utilizando las relaciones en la circunferencia.
- Demostrar propiedades de figuras geométricas aplicando relaciones en la circunferencia.
- Calcular magnitudes (longitudes, amplitudes, área) en la circunferencia.

En el nivel de las habilidades elementales pueden encontrarse las siguientes:

- Relacionar ángulos, cuerdas y arcos en la circunferencia.
- Reconocer propiedades y relaciones en triángulos y cuadriláteros inscritos o circunscritos en una circunferencia.
- Construir polígonos regulares.
- Calcular amplitudes de ángulos en la circunferencia.
- Calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo.

En este caso aparecen habilidades que se desarrollan y consolidan a lo largo de toda la unidad y que coinciden con las señaladas para el 7. grado.

Con la unidad Semejanza de figuras en el 9. grado se completa el nivel básico de la formación en la Geometría Plana.

Esta unidad toma como base los conocimientos y habilidades de los alumnos sobre las proporciones, los movimientos del plano, las propiedades de los triángulos, cuadriláteros y los polígonos en general, incluyendo el aporte de la circunferencia y el círculo al estudio de propiedades de las figuras geométricas.

Lo esencial matemático para el alumno en esta unidad es que se apropie del concepto de Semejanza a partir del sistema de acciones necesario para encontrar una figura semejante a otra dada. Esto significa que desde el primer momento se recomienda que se introduzca el concepto de semejanza con el problema esencial siguiente:

**Construya un polígono de igual forma y diferente tamaño a un polígono dado.**

En este problema se pueden fijar las razones de proporcionalidad (por ejemplo:  $k = 1$  y  $k = 1/3$ ) donde el alumno reproduzca el polígono mediante acciones de medición y trazado de lados y ángulos. El tratamiento a la solución se debe orientar en las siguientes direcciones:

- Reconocer al alumno que los ángulos conservan sus amplitudes y las longitudes de los lados son proporcionales;
- Diferenciar cómo determinar polígonos iguales aplicando los movimientos del plano, el concepto de igualdad de polígonos y en particular la igualdad de triángulos;
- Precisar el nuevo problema de determinar un polígono que conserva la misma forma y se reduce o aumenta de tamaño;
- Explicar el concepto de semejanza para precisar la solución del problema;
- Explicar la utilidad práctica mediante ejemplos concretos en que es necesario la reproducción de figuras a mayor y menor escala;
- Interpretar el teorema de las transversales como medio para calcular con exactitud longitudes de segmentos en figuras semejantes y para fundamentar esta relación;
- Concluir que los teoremas de semejanza de triángulos operan de forma análoga a los de igualdad de triángulos.

Con la visión de estos aspectos debe iniciarse el estudio de la Semejanza de figuras geométricas para asegurar la comprensión de por qué se estudia y la significación de cada uno de los conceptos y teoremas que aquí aparecen.

La habilidad general que se propone formar, por el alumno, en esta unidad temática es la siguiente:

**Resolver problemas geométricos de construcción, de cálculo y de demostración en figuras geométricas utilizando la relación de semejanza y sus aplicaciones.**

Para la formación de esta habilidad general debe considerarse la formación de habilidades matemáticas básicas como las siguientes:

- Construir figuras semejantes.
- Demostrar la semejanza de figuras geométricas.
- Calcular en figuras semejantes.
- Calcular en triángulos rectángulos.

Las habilidades matemáticas elementales que se deben formar son, entre otras:

- \* Reconocer los movimientos del plano como transformaciones de razón 1.
- \* Construir figuras semejantes aplicando la homotecia.
- \* Establecer razones de proporcionalidad entre segmentos.
- \* Reconocer razones en triángulos rectángulos.
- \* Calcular longitudes de segmentos (lados, alturas).

La determinación de las habilidades matemáticas y la estructuración del sistema en las unidades correspondientes a la Geometría Plana en Secundaria Básica ofrece una orientación metodológica al profesor para la comprensión del contenido de la enseñanza y un criterio para la dirección del aprendizaje de los alumnos.

Lo más significativo es observar cómo el problema esencial para la Geometría Plana se resuelve en cada unidad temática a partir de un nuevo instrumento matemático y se delimita así lo que en cada momento el alumno tiene que saber hacer.

Estas precisiones sobre las habilidades matemáticas ayudan al profesor además a organizar el curso de Geometría en cuanto al fondo de tiempo a dedicar a cada eslabón del proceso de enseñanza aprendizaje en función de las habilidades a desarrollar.

### **3.3. RESULTADOS DE LA INTERVENCIÓN EN LA PRÁCTICA.**

El experimento realizado con el fin de valorar las posibilidades de aplicación del modelo propuesto en las condiciones de la escuela media se ejecutó en una primera etapa en el curso escolar 1992 - 1993 en tres momentos:

- Diagnóstico inicial para explorar y caracterizar la situación de los profesores de Matemática en el tratamiento metodológico de las habilidades matemáticas (planificación, dirección y control) en el municipio Santiago de Cuba.
- Aplicación del modelo teórico en la muestra seleccionada.
- Procesamiento, análisis y valoración de los datos obtenidos.

El plan previsto en la experiencia se propuso **comprobar que la aplicación del modelo teórico para el tratamiento metodológico de las habilidades matemáticas favorece, tanto la dirección del proceso de su formación por el profesor, como la apropiación por los alumnos del sistema de habilidades.**

Como se observa, se propone evaluar el efecto de la aplicación del modelo teórico tanto en la actuación del profesor como en el alumno, en el profesor a través de la planificación y desarrollo de las clases y en los alumnos mediante pruebas pedagógicas para la comprobación a través de un ejercicio escrito de su preparación para determinar una vía de solución y su representación escrita, como criterio de la sistematización de las habilidades matemáticas.

### **3.3.1. Resultados del diagnóstico inicial.**

Para explorar la situación con relación al tratamiento metodológico de las habilidades matemáticas por los profesores de Matemática de la enseñanza media del municipio Santiago de Cuba se observaron 76 clases (tomadas al azar y con el conocimiento previo del profesor), en 24 escuelas, de las cuales 16 son secundarias básicas y 8 preuniversitarios, que representaban el 48,4 % y el 80 %, respectivamente, y el 20 % del total de profesores del municipio.

A continuación se describen, según la guía elaborada (anexo 1), los resultados de las observaciones realizadas.

- En la determinación y formulación del objetivo de la clase aparece la habilidad matemática a desarrollar aunque en 41 (53,9%) no se precisa el nivel de asimilación de lo

que tiene que saber hacer el alumno y su relación con los objetivos del sistema de clases. Además, en la totalidad de las clases, no se exponen las condiciones en que se exige que el alumno ejecute las acciones previstas, ni se declaran las vías para su control.

- Sólo se observó la motivación con un ejercicio o situación problémica en 11 clases (14,4%), en 8 de nuevo contenido y en 3 de ejercitación.

- En ninguna clase de elaboración de nuevo contenido (23 clases) se presentaron ejemplos como base para la búsqueda y en 14 de ellas se presentaron ejemplos ilustrativos.

- En sólo 10 clases de ejercitación (18,8%) se presentaron ejemplos ilustrativos (de 53 clases).

- En 58 clases (81,6%) se utilizan los ejercicios que integran varios procedimientos, pero en la totalidad de ellas no se analizan a partir de lo que aportan a la sistematización de los conocimientos y habilidades, se destacan algunas habilidades específicas y no el objetivo general que con ellos se logra, se detalla más el análisis de las dificultades de los alumnos que el método de solución empleado y la valoración del nivel de generalidad de su aplicación.

- En todas las clases se sigue la estructura lógica del libro de texto.

- Prevalece en las clases la orientación parcial del profesor a los alumnos y la actividad independiente con ayuda del profesor.

- Las preguntas formuladas por el profesor se dirigen muy poco a establecer relaciones, sólo en 25 clases (32,8%) y a valorar lo realizado en 14 clases (18,4%); la tendencia es a formular preguntas para reconocer en 76 clases (100%) y reproducir características y propiedades en 74 clases (97,3%).

- En las clases observadas en las secundarias básicas predomina la resolución de ejercicios formales, no así en el preuniversitario donde en 9 clases se plantearon ejercicios con textos y problemas.

- En las entrevistas realizadas a los profesores al finalizar las clases se detectó que solamente dominan las habilidades matemáticas específicas que se están formando en la clase observada y no están en condiciones de determinar y justificar las habilidades del sistema de clases o la unidad temática.

- En las 49 clases observadas en las secundarias básicas se comprobó el objetivo planteado por el profesor a 1361 alumnos de los cuales demostraron comprender el ejercicio y

plantear una vía de solución correcta 599, para un 44%. En el preuniversitario se observaron 27 clases y se comprobó el objetivo de ellas a 594 alumnos, de los cuales demostraron comprender y plantear una vía de solución correcta 377 para un 63,4%.

Las comprobaciones incluían un ejercicio dirigido a evaluar el dominio de procedimientos específicos y la reproducción de propiedades y conceptos impartidos en las clases, según las exigencias determinadas por el profesor.

La situación encontrada en la labor de los profesores en la dirección del proceso de formación de las habilidades matemáticas evidencia una falta de estrategia para lograr una estructura sistémica del proceso, para aprovechar las potencialidades de los tipos de ayuda pedagógica como la motivación y orientación hacia el objetivo, así como de la ejemplificación y la formulación de preguntas en la transmisión de los métodos y procedimientos matemáticos, siendo limitadas las intenciones en la sistematización de habilidades en función del aprendizaje de métodos de solución de los problemas que constituyan modelos generales para el alumno.

En la determinación y orientación de los objetivos se manifiesta el tratamiento de las habilidades específicas solamente y no se domina una estrategia para precisar los objetivos más generales de los sistemas de clases y unidades temáticas.

Los métodos de enseñanza, aunque se proponen la actividad independiente del alumno con ayuda del profesor no logran niveles óptimos en la formación de las habilidades.

La situación que presenta el libro de texto es muy significativa dado que las clases se imparten a partir de la lógica con que este se estructura y es el medio fundamental del alumno en su actividad independiente.

El análisis de los libros de texto de Matemática de la secundaria básica arrojan las siguientes regularidades:

- Los ejemplos que se proponen no muestran estrategias o modelos de la actuación sobre el análisis y la búsqueda de vías, limitándose a la representación de las ideas esenciales de la solución.
- En los libros de texto no se ofrecen explicaciones sobre los métodos de solución de mayor o menor nivel de generalidad y su utilización para contribuir a la sistematización de las habilidades correspondientes.

- No se establece una relación clara entre los ejemplos propuestos y los ejercicios que para la actividad independiente se recomiendan.

Es importante resaltar la cualidad del libro de texto actual de describir los conceptos, teoremas y pasos principales de las demostraciones o soluciones de ejercicios y muy pobremente describir los métodos a ellos asociados que puedan ser transferidos a otras situaciones.

En resumen, el diagnóstico inicial destaca algunos rasgos de la situación encontrada en el tratamiento metodológico de las habilidades matemáticas que tienen una influencia directa en el alumno, especialmente aquellos que deben lograr su orientación hacia lo que debe saber hacer (motivación, orientación hacia los objetivos, la ejemplificación, el libro de texto) y que deben brindarles métodos para actuar.

Además se señala la insuficiente preparación de los profesores para determinar las habilidades matemáticas en los diferentes niveles de sistematicidad del proceso docente educativo y, por tanto, no trabajan para formar las habilidades generalizadas que respondan a procedimientos más generales, según se refiere en los programas y orientaciones metodológicas.

Se observa que la tendencia está en prestar más atención a que el alumno se apropie del contenido del concepto, teorema o procedimiento y, en menor medida, a la interpretación de sus posibilidades de utilización y las vías para aplicarlos, lo que constituye una importante limitación en la concepción del proceso de formación de las habilidades matemáticas.

Las dificultades valoradas se acentúan en las secundarias básicas, donde los alumnos manifiestan un desarrollo bajo en las habilidades matemáticas desde el nivel más elemental.

### **3.3.2. Resultados de la aplicación del modelo propuesto.**

La aplicación del modelo para su valoración se realizó en dos etapas: la de constatación a través de un experimento pedagógico y luego su generalización y perfeccionamiento con la participación activa de un grupo de profesores de Matemática del municipio Santiago de Cuba.

La constatación se realizó en el curso 1992 - 1993 con los profesores de 3 secundarias básicas del municipio Santiago de Cuba (Fe del Valle, José Antonio Echeverría y Camilo Cienfuegos) y la valoración de las posibilidades de aplicación a las unidades temáticas: números racionales, circunferencia y círculo, semejanza de figuras, geometría plana, trabajo con variables, funciones lineales y funciones cuadráticas.

En estos centros se aplicó total o parcialmente la experiencia y se controló todo el curso de la constatación en la ESBU "José Antonio Echeverría" que según la valoración de expertos (metodólogos municipales) contaba con un colectivo de profesores y estudiantes promedio de acuerdo con las condiciones del municipio, a diferencia de las otras dos escuelas que tenían resultados superiores, en un caso, e inferiores en el otro. Se señala como característica de la escuela seleccionada la heterogeneidad del colectivo estudiantil por su aprovechamiento docente y las condiciones previas en la formación matemática que se han reflejado en los diagnósticos y las comprobaciones realizadas.

La escuela seleccionada, a partir del muestreo opinático (opinión de expertos) y la exploración inicialmente realizada en todo el municipio, con la aplicación del modelo teórico para el tratamiento de las habilidades matemáticas, podrá brindar un comportamiento posible de su nivel de eficiencia, al menos, para la población del municipio Santiago de Cuba.

La experiencia docente de los 7 profesores de la escuela seleccionada es superior a los 15 años en este nivel de enseñanza con resultados favorables en su preparación matemática y metodológica. De ellos, 2 profesores ejecutaron la impartición de la Geometría Plana a los 162 alumnos de 7. grado distribuidos en 5 grupos.

Los resultados de la constatación se presentan en esta unidad como muestra del comportamiento que ha tenido la experiencia realizada, aunque se ha aplicado a otras unidades temáticas.

En el desarrollo del experimento un papel especial lo ocupó la preparación de los 17 profesores que serían ejecutores en las tres escuelas, según las tareas previstas en el epígrafe 3.1 que incluyó un sistema de actividades metodológicas (conferencia, seminarios y talleres metodológicos) con el fin de analizar el modelo teórico y el modelo didáctico concreto para el tratamiento de la Geometría Plana en la secundaria básica y especialmente

la unidad temática de 7. grado, según el epígrafe 3.2, que aparece en un material docente utilizado.

Las actividades metodológicas abordaron los siguientes temas:

- El concepto de habilidad matemática. Caracterización.
- El problema esencial en la determinación de la habilidad matemática general de la unidad temática.
- La determinación de las habilidades matemáticas básicas y elementales.
- La estrategia para la motivación y orientación hacia el objetivo. Papel de las habilidades matemáticas básicas.
- Tipos de ayuda pedagógica. La selección de los ejemplos como tipo de ayuda pedagógica en la formación del sistema de habilidades matemáticas.
- La derivación de las habilidades matemáticas básicas en el sistema de clases.
- Niveles para la medición y control de las habilidades matemáticas.

### **3.3.2.1. Resultados de las observaciones a clases.**

Como parte de la experiencia se llevó a cabo el control de la actuación de los profesores en 38 clases, de ellas 23 dedicadas a la elaboración del nuevo contenido y 15 a la fijación.

En la elaboración del nuevo contenido se observó la labor de los profesores en el planteamiento de la motivación a través de un problema en 21 clases (55,2%), con la intención de discutir la vía de solución y las posibilidades del nuevo concepto o teorema para su solución. En las clases de fijación se logró la motivación a través de un problema o situación concreta para destacar el método o procedimiento a emplear en 6 casos (15,6%), explicándose la habilidad que corresponde desarrollar. En la elaboración de la nueva materia prevalecieron ejemplos de desarrollo en 21 clases (55,2%), el problema seleccionado para la motivación sirvió de base para ello. Esto se relaciona con la idea de dar permanencia a los problemas esenciales y la vía para resolverlo.

En esta unidad se seleccionaron medios de enseñanza para la ilustración de las relaciones entre figuras geométricas, la igualdad de triángulos, las superficies equivalentes,

en el cálculo de áreas, los cuales se convirtieron en juegos didácticos para observar el papel de la igualdad de triángulos en la obtención y fundamentación de las propiedades de los triángulos y cuadriláteros.

Los ejemplos ilustrativos (con la función de mostrar o ilustrar una situación específica) se utilizaron en todas las clases de fijación del nuevo contenido, dadas las deficiencias encontradas en las condiciones previas de los alumnos. En 6 de las clases observadas los ejemplos no lograron la efectividad en la independencia de los alumnos al concentrar la atención, los profesores, más en las dificultades particulares del ejercicio seleccionado (según las condiciones de los alumnos) que en el procedimiento empleado para su solución, en su comprensión y análisis para poder transferirlo luego a situaciones más o menos similares como es el caso de los ejercicios geométricos.

En las clases se observó la regularidad en la propuesta de ejercicios que integran varios procedimientos de la unidad temática (29 clases; 76%) y ejercicios que sirven para obtener conclusiones sobre posibilidades de aplicación del contenido (26 clases; 65,6%).

En el caso de los ejercicios que integran varios procedimientos de la unidad temática aparecen los ejercicios de demostración, de cálculo geométrico y de construcción, en los que los alumnos utilizaron los conceptos y teoremas de uno o varios sistemas de clases que conforman la habilidad matemática básica determinada.

En la mayoría de las clases observadas (29 clases; 76%) no se siguió rígidamente el libro de texto, sino que se seleccionaron ejemplos y ejercicios para la motivación y búsqueda del nuevo contenido, así como para algunas clases de fijación atendiendo a la función didáctica.

En las restantes clases (9 clases; 23,6%) no se observó suficiente tratamiento por el docente de las relaciones esenciales a dominar por los alumnos como parte de la habilidad básica determinada, no aprovechando para ello los propios ejercicios integradores propuestos como ejemplos o para la actividad independiente.

En las 38 clases el nivel de independencia de los alumnos se manifestó como sigue:

- orientación total del profesor: 0
- orientación parcial del profesor a los alumnos: 14 (36,8%)
- actividad independiente del alumno con ayuda del profesor: 13 (34,4%)
- actividad totalmente independiente del alumno: 11 (28,9%)

En estas clases se presentaron ejemplos para la orientación de la actividad independiente con la declaración de las habilidades básicas y elementales a formar o aplicar, no obstante la heterogeneidad en las características individuales de los grupos requiere de la labor constante del profesor desde la dosificación del sistema de clases y el diagnóstico inicial de los alumnos.

En las 38 clases se identificaron los tipos de preguntas formuladas por el profesor en la orientación de los alumnos hacia las acciones a ejecutar, determinándose la siguiente frecuencia: las preguntas dirigidas a que el estudiante identificara, reconociera conceptos, propiedades procedimientos se observaron en 37 clases (97%) y a reproducirlas en 38 clases (100%), las preguntas que exigían el establecimiento de relaciones, inferencias, analogías, etc., se realizaron en 28 clases (73,6%) y a valorar los resultados o la vía a emplear en la solución en 26 clases (68,4%).

La frecuencia en la tipología de preguntas utilizadas en las clases apuntan hacia el estímulo del alumno a establecer relaciones y valoraciones en la resolución de ejercicios y problemas, tanto en la búsqueda del nuevo contenido como en su utilización, observándose una frecuencia superior, comparado con el comportamiento en el diagnóstico inicial.

El comportamiento que muestran los profesores en la experiencia realizada para aplicar el modelo teórico indica que se fortalecen importantes componentes de la base orientadora para la formación de habilidades como la motivación, la ejemplificación, la formulación de preguntas, la resolución de ejercicios integradores, la formulación de preguntas y la actividad independiente del alumno, que al alcanzar una regularidad en la dirección del proceso debe contribuir a un resultado superior en su asimilación por los alumnos.

### **3.3.2.2. Resultados de las pruebas pedagógicas aplicadas a los alumnos.**

Para el diagnóstico y control del nivel de sistematización de las habilidades matemáticas se tiene en cuenta como criterio o variable fundamental a medir: la preparación del alumno para determinar y representar una vía de solución a un problema o ejercicio dado. Con este fin se propone la siguiente escala valorativa para el control y la evaluación de la

actuación del alumno, en cualquier momento del proceso de enseñanza de una unidad temática:

Nivel 1: Nulo

El alumno no responde el ejercicio

Nivel 2: Bajo

El alumno reconoce lo dado, algunas condiciones, pero no es capaz de establecer correctamente relaciones o inferencias que lo conduzcan a una vía de solución. El alumno sólo demuestra dominar algunas habilidades elementales que no son suficientes para definir un método de solución.

Nivel 3: Promedio

El alumno es capaz de plantearse una vía de solución reconociendo propiedades y haciendo inferencias aunque presente imprecisiones o errores en alguna propiedad o su fundamentación. Quiere decir, que domina las habilidades matemáticas básicas y elementales que justifican una vía de solución aunque manifieste error o imprecisión en alguna habilidad elemental.

Nivel 4: Alto

El alumno es capaz de expresar la vía de solución aunque las respuestas no precisan todas las relaciones o inferencias lógicas en un lenguaje exacto. El nivel de sistematización de las habilidades le permite determinar con exactitud una vía de solución, pudiendo presentar sólo algunas imprecisiones en la terminología y simbología apropiada para describir el proceso de solución.

Nivel 5: Muy alto

El alumno plantea la vía de solución y la expresa con precisión en el lenguaje matemático, selecciona alguna vía especial para la solución. En este nivel el alumno demuestra un elevado desarrollo de las habilidades matemáticas necesarias para resolver el ejercicio.

Las pruebas pedagógicas se aplicaron a los alumnos en la unidad temática Geometría Plana en 7. grado, a lo largo del período de duración del curso (de la 1 a la 7) y 2 meses después (la 8 y la 9) con el fin de valorar el dominio de las habilidades matemáticas, su sistematización en una vía de solución y cómo evolucionan las insuficiencias detectadas en las habilidades básicas y elementales.

En las pruebas se propusieron ejercicios de demostración y de cálculo geométrico, por ser ésta la exigencia del programa actual. En ellas se evaluó la habilidad para aplicar la igualdad de triángulos a la fundamentación de propiedades de las figuras geométricas, en particular, los triángulos y cuadriláteros, donde intervienen las habilidades elementales indicadas en el epígrafe 3.2. Ver anexo 2.

La habilidad evaluada constituye una acción importante en la formación de la habilidad rectora determinada para esta unidad temática.

Los resultados de las comprobaciones se resumen como sigue: Anexo 3.

- Se observa la tendencia a que los alumnos mejoren en el dominio de la habilidad básica con un tránsito favorable hacia los niveles 3 y 4, además se incrementa significativamente el número de ellos que mejora en la precisión de las respuestas dadas (niveles 4 y 5).
- En los ejercicios de cálculo geométrico los alumnos fundamentan relaciones y las expresan con un adecuado nivel de precisión. Se observan los progresos en el establecimiento de relaciones y en la realización de inferencias para determinar la amplitud de ángulos utilizando las propiedades. Se destaca no sólo el resultado positivo en la búsqueda de una vía de solución (nivel 3), también poder expresar las ideas con un lenguaje apropiado (nivel 4).
- En los ejercicios de demostración, aunque el 25% de los alumnos se mantiene en los niveles 1 y 2, es evidente la mejoría que se alcanza en que aproximadamente el 70% manifiesta un desarrollo favorable en la determinación de vías de solución para realizar las demostraciones, seleccionar propiedades para fundamentar las relaciones y además poder establecer inferencias.

En este tipo de problema es importante señalar las acciones en las que se detectan avances significativos:

- la determinación de las premisas y las tesis (70,9%);
- el reconocimiento de propiedades en triángulos y cuadriláteros (63,5%);
- el reconocimiento de los teoremas de igualdad de triángulos como medio de demostración (82,1%);
- la realización de inferencias para probar la tesis (83,3%).

Asimismo, debe señalarse que los avances en el uso de la terminología y simbología, así como la descripción de la demostración resultan muy lentos siendo significativa la

similitud de las dificultades de los alumnos al denotar los objetos geométricos, lo cual debe recibir mayor atención mediante la ejemplificación.

Con los resultados de estas pruebas pedagógicas se pretende demostrar, con los instrumentos estadísticos señalados, que el nivel en la sistematización de las habilidades matemáticas mostrada por los alumnos en la determinación de vías de solución a los ejercicios manifiesta un desarrollo ascendente.

Con una confiabilidad del 99%, desde el punto de vista estadístico, es posible garantizar que en las tres primeras pruebas se observa un bajo desarrollo de las habilidades evaluadas por cuanto existe un alto por ciento de alumnos por encima de lo esperado en los niveles 1 y 2 y un bajo por ciento de ellos en los niveles 4 y 5, lo que significativamente arroja pobres resultados.

En las pruebas 6, 7 y 8 se aprecia una tendencia hacia los niveles 3 y 4 con un alto por ciento por encima de lo esperado, mientras que por debajo de lo esperado resaltan los niveles 1, 2 y 5. La última prueba realizada demuestra un buen desarrollo de las habilidades con casi el 50% de los alumnos en los niveles 4 y 5 y que significativamente está por encima de lo esperado probabilísticamente y muy por debajo en el nivel 1.

Análisis aparte merece la prueba 4 que posee un desajuste significativo por debajo de lo esperado en el nivel 4 y por encima en el nivel 5, manteniendo un buen ajuste en los niveles restantes.

La prueba 5 muestra un buen ajuste a lo esperado en cada nivel.

Podemos concluir entonces que en el desarrollo de las habilidades de cálculo geométrico existe una mejoría considerable hacia los niveles 3 y 4; mientras que en las habilidades de demostración la evolución fue más ascendente porque va desde el nivel 1 al 5, no obstante, al final (prueba 9) el 75,3% está distribuida en los últimos tres niveles.

Las fuentes de significación detectadas a partir de la técnica de HABERMAN (1973) mediante la aplicación de la prueba de independencia se muestran en el anexo 4.

### **3.3.2.3. Resultados de las entrevistas a profesores.**

Finalmente, con el propósito de conocer la valoración de los profesores que aplicaron la experiencia, se realizó la entrevista donde se recogen sus apreciaciones acerca de la

efectividad en la preparación de los alumnos para resolver los ejercicios matemáticos como resultado del proceso de formación de las habilidades matemáticas, su aporte a la preparación de los propios profesores para planificar y dirigir el proceso. En este sentido se destacaron las ventajas y desventajas del modelo propuesto.

Los 17 profesores entrevistados coinciden con que la estructuración del sistema de habilidades es un modelo comprensible y aplicable con los programas actuales destacando los siguientes aspectos:

- Aumenta la comprensión del contenido del programa, los objetivos a lograr y el control de los resultados en los alumnos;
- Se logra una visión más completa de las habilidades matemáticas para una clase, sistema de clases y unidad temática;
- La orientación a los alumnos para la formación de las habilidades es superior;
- Se fortalece la motivación de los alumnos hacia lo que deben saber hacer;

Al destacar las desventajas o aspectos negativos los profesores señalan las limitaciones al aplicarlos con los programas actuales que no fueron concebidos con tal estructura, lo que implica modificar las concepciones metodológicas aunque trabajen con el mismo programa y libro de texto. Además el orden en que aparecen los contenidos no siempre es el más favorable para el tratamiento de las habilidades según se ha propuesto.

También se señala que en la ejecución de la experiencia las principales dificultades se presentan en la planificación y dirección de la etapa introductoria para plantear y resolver el problema esencial y sus subproblemas y orientar hacia la habilidad general y que es, por tanto, donde se necesitan orientaciones metodológicas más detalladas.

### **Segunda etapa de la constatación.**

En una segunda etapa, entre los cursos 1993 - 1994, 1994 - 1995 y 1995 - 1996, con el propósito de continuar la valoración de las posibilidades de aplicación del modelo para la formación de habilidades matemáticas se siguió la siguiente secuencia metodológica en la actividad investigativa:

1. Desarrollar cursos de postgrado en los que se presentaron a los profesores los marcos teóricos en que se sustenta el modelo didáctico para la formación de habilidades matemáticas;

2. Concretar el modelo con el diseño de sistemas de habilidades matemáticas para las unidades temáticas del programa a los que se le incorporaron las experiencias, expectativas y sugerencias de los profesores participantes;
3. Establecer estrategias metodológicas para dirigir el proceso de formación de las habilidades, sus etapas y ayudas pedagógicas, se precisaron criterios para dosificar el contenido de una unidad temática, de sistemas de clases y las clases y las vías para orientar y fijar el sistema de habilidades;
4. Aplicar la propuesta teniendo en cuenta las particularidades de los alumnos y las posibilidades de cada profesor, lo que tuvo seguimiento a través de talleres con los profesores participantes y las preparaciones metodológicas de la escuela y del municipio;
5. Valorar los resultados de las experiencias realizadas, limitaciones y perspectivas a través de las entrevistas a los profesores y metodólogos, debates en reuniones metodológicas y la realización de un Taller Científico anual sobre formación de habilidades matemáticas en el que han sido presentados los resultados de los profesores participantes;
6. La generalización de la experiencia se realizó en la unidad Geometría Plana de 7. grado en todas las secundarias básicas del municipio Santiago de Cuba, con la incorporación de los 45 profesores que impartían el grado en el curso 1994 - 1995.

Durante el desarrollo de la unidad se aplicaron 4 comprobaciones a 480 alumnos de 12 escuelas seleccionadas (40 de cada escuela), de ellas 4 con resultados buenos, 4 con resultados promedio y 4 con resultados bajos, según la opinión de los expertos (metodólogos municipales).

Los resultados de esas comprobaciones manifestaron un comportamiento análogo a la etapa anterior al observarse, en todos los casos, un desarrollo ascendente en la búsqueda de las vías de solución a los ejercicios propuestos.

Los profesores de Matemática de las secundarias básicas del municipio, que fueron entrevistados (142), destacaron como positivo su mejor comprensión de los objetivos y la estructuración del contenido de la unidad a partir de la aplicación del modelo y la necesidad de que los libros de textos incluyan actividades para los alumnos que faciliten la dirección del proceso de formación de las habilidades.

Actualmente, más de 200 profesores de secundarias básicas, preuniversitarios, enseñanza técnica y profesional y de adultos han participado en los cursos y actividades metodológicas realizadas, así como profesores de otros Institutos Superiores Pedagógicos.

#### **3.3.2.4. Valoración de los resultados.**

Los profesores de Matemática aceptan el modelo y las posibilidades de ser aplicado aunque los programas actuales no siempre le facilitan la comprensión para la estructuración del sistema de habilidades matemáticas.

La preparación de los profesores de Matemática para dirigir el proceso de formación de habilidades se ve favorecida con una mejor comprensión del contenido de la asignatura lo que se refleja al diseñar los sistemas de habilidades de las unidades temáticas, al dosificar el contenido en función de las habilidades que debe formar el alumno y la claridad del papel de los problemas en la formación de esas habilidades; lo que se demuestra en su actuación en las clases, en las actividades metodológicas y su propia valoración en las entrevistas realizadas.

Los resultados de la constatación realizada, en sus dos etapas, demuestran que los alumnos logran progresos significativos en la formación de las habilidades matemáticas que le permiten resolver los ejercicios propuestos según los objetivos del programa de la asignatura.

La sistematización de las habilidades se mide y evalúa en la preparación de los alumnos para demostrar los conocimientos y su utilización en la determinación y ejecución de una estrategia de solución.

En la caracterización de los niveles para evaluar las habilidades matemáticas se presta atención, como criterio de la calidad, a la preparación de los alumnos para el uso de la terminología y simbología matemática.

Los resultados de las comprobaciones muestran un proceso de avance progresivo en la preparación de los alumnos para utilizar el sistema de conocimientos y habilidades, con tendencia a corregir las deficiencias iniciales y a mejorar en la orientación hacia la búsqueda de vías de solución.

## ***CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.***

La concreción del modelo didáctico para el tratamiento metodológico de las habilidades matemáticas, es presentada en este capítulo, a partir de la metodología que cada profesor puede seguir para su puesta en práctica y su ejemplificación en el complejo de materia de Geometría Plana en la Secundaria Básica.

El diseño del sistema de habilidades matemáticas en cada unidad temática se ejemplifica con la propuesta de la habilidad general y la determinación de algunas de las habilidades matemáticas básicas que son necesarias para formarlas así como algunas de las habilidades matemáticas elementales que deben desarrollar los alumnos.

La intervención en la práctica constata los avances en la comprensión y dirección del proceso de formación de habilidades matemáticas por los profesores y en la búsqueda de soluciones a ejercicios geométricos por los alumnos, aún cuando el modelo se ha aplicado en las condiciones que ofrecen los programas, orientaciones metodológicas y libros de textos vigentes.

## **CONCLUSIONES.**

De los resultados de la investigación realizada se concluye lo siguiente:

La resolución de problemas matemáticos, en sus funciones de medio y fin del aprendizaje, constituye una actividad compleja e integral que requiere de la formación de modos de actuación, métodos de solución y procedimientos específicos a partir de los cuales ha quedado estructurado un sistema de habilidades matemáticas así como una metodología para su aplicación práctica.

Las habilidades matemáticas se asumen como procesos de construcción de los modos de actuación, métodos de solución o procedimientos específicos inherentes a una actividad matemática determinada que transcurren en todos los eslabones didácticos del proceso docente educativo.

Las habilidades matemáticas que caracterizan el modo de actuar atendiendo a su contenido son: habilidades para elaborar y utilizar los conceptos y propiedades, la elaboración y utilización de los procedimientos algorítmicos, la utilización de procedimientos heurísticos y el análisis de situaciones de carácter intra y extramatemáticas.

La definición y caracterización de las habilidades matemáticas en los diferentes niveles de sistematicidad (general, particular y singular) permiten la precisión de los conceptos de habilidad para resolver problemas, habilidades matemáticas básicas y habilidades matemáticas elementales.

Las habilidades matemáticas tienen una estructura sistémica y la habilidad para resolver problemas constituye la expresión de lo esencial del contenido y guía el proceso de formación de las habilidades matemáticas básicas y elementales.

La caracterización de las habilidades matemáticas brinda condiciones favorables para la planificación y dirección del proceso de su formación en una unidad temática, sistema de clases y clases.

El modelo propuesto se orienta a la sistematización de las habilidades matemáticas básicas y elementales para la resolución de los problemas, lo que fue corroborado en las unidades temáticas en que se ejecutó la experiencia.

La ayuda pedagógica del profesor ha de propiciar que se sistematicen las habilidades matemáticas atendiendo a la precisión en la exigencia de lo que debe saber hacer el alumno y las condiciones reales que tiene para lograrlo.

La experiencia realizada constata que el modelo teórico es aplicable en las condiciones actuales de la escuela y que pueden lograrse niveles superiores en la formación de las habilidades matemáticas en los alumnos.

Los cambios introducidos en la estructuración del sistema de habilidades matemáticas en las unidades temáticas seleccionadas y las vías propuestas fortalecen la base orientadora con la definición del modo de actuar esperado del alumno que se expresa a partir de la habilidad para resolver problemas matemáticos, lo que contribuye al logro de mejores resultados en la formación matemática de los alumnos.

Los cambios propuestos en la estructuración del contenido de la enseñanza de la asignatura requieren que el programa y sus orientaciones metodológicas incluyan los problemas esenciales, la habilidad matemática general de cada unidad temática e indicaciones para la determinación de las habilidades matemáticas básicas, así como la inclusión en el libro de texto de las actividades y explicaciones necesarias para el alumno.

## **RECOMENDACIONES.**

Se recomienda:

- La divulgación de los resultados de la investigación para su aplicación en el tratamiento metodológico del proceso de formación de las habilidades matemáticas.
- La organización de cursos, talleres y seminarios metodológicos para la preparación de los profesores de la escuela media en la estructuración del sistema de habilidades en las unidades temáticas y las vías para planificar y dirigir el proceso de su formación en los alumnos.
- Profundizar en las posibilidades que brinda la caracterización de las habilidades matemáticas para el control y evaluación del aprendizaje de los alumnos.
- Incorporar a la disciplina Metodología de la enseñanza de la Matemática los resultados teóricos sobre la estructuración del sistema de habilidades matemáticas, sus fundamentos y aplicación que aporta esta investigación
- Generalizar los resultados a partir de la preparación del personal docente y la utilización de materiales docentes para la autopreparación.
- Tener en cuenta los cambios que se producen en la estructuración del contenido al aplicar este modelo didáctico a la concepción de la asignatura para la elaboración del programa, las orientaciones metodológicas y el libro de texto.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

1. Nota Editorial. En Educación Matemática. Vol 4 (3). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Diciembre. 1992. P. 5
2. Ribnikov, K.: Historia de las Matemáticas. Primera Edición en Español. Editorial MIR. Moscú. 1987. P. 12.
3. De Guzmán, M.: Tendencias innovadoras en educación matemática. Editorial Olímpica. Buenos Aires. 1992. P. 12.
4. Alvarez, C.: Fundamentos teóricos de la dirección del proceso de formación del profesional de perfil ancho. Ciudad de la Habana. 1984. p.130.
5. Ballester, S. y otros: Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomo 1. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1992. P. 407.
6. Campistrous L. y C. Rizo: Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1996. P. IX-X.
7. González, Fredy: Trascendencia de la Resolución de Problemas de Matemática. En Paradigma Vol. VIII (2). Venezuela. Diciembre, 1987. P. 252.
8. Ibid. P. 253.
9. Peltier, Marie Lise: Una Visión General de la Didáctica de las Matemáticas en Francia. En Educación Matemática. Vol.5 (2). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Agosto, 1993. P. 4.
10. Gascón, J. El papel de la Resolución de problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. En Educación Matemática. Vol. 6 (3). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Diciembre, 1994. P. 37-50.
11. Santaló, L. y otros: La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia. En Tratado de Educación Personalizada, dirigido por Víctor García Hoz. Ediciones RIALP. S. A. Madrid. 1994. P. 104-105.
12. Ibid. P. 105.
13. Brito, Héctor: Psicología general para los Institutos Superiores Pedagógicos. Tomo 2. Ciudad de la Habana. 1987. p. 51.
14. Brito, Héctor y otros: Psicología general para los Institutos Superiores Pedagógicos. Tomo 2. Ciudad de la Habana. 1987. p. 51.

15. Bermúdez, R. y M. Rodríguez: Teoría y Metodología del aprendizaje. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1996. P. 44.
16. Geissler, E. y otros: Metodología de la enseñanza de la Matemática. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 1975. P. 41.
17. Campistrous, L. y otros: Matemática. Orientaciones metodológicas 10. grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1989. p. 7.
18. Colectivo de autores: Metodología de la enseñanza de la Matemática en la escuela primaria. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1992 p. 88.
19. Ibid (5). P. 12.
20. González, H.E.: Un criterio para clasificar habilidades matemáticas. Educación Matemática. Vol. 5. (1). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Abril, 1993. P. 49.
21. Ibid (9). P.6.
22. Bruner, Jerome: Acción, pensamiento y lenguaje. Compilación. Alianza Editorial. Madrid. 1989. p.129.
23. Hidalgo Guzmán, José L.: Aprendizaje operatorio. Ensayos de teoría pedagógica. Casa de la cultura del maestro mexicano A. C. 1992. p. 115.
24. Coll, César: Acción, interacción y construcción del conocimiento en situaciones educativas. Revista Educación 279. p. 9-24. Madrid. Enero-abril 1986. p. 19.
25. Dubinsky, Ed: El aprendizaje cooperativo de las Matemáticas en una sociedad no cooperativa. En Revista Cubana de Educación Superior No 2-3. CEPES. Universidad de La Habana. 1996. P. 156.
26. Alvarez, C.: Didáctica de la Educación Superior. Material impreso. P.47.
27. Ibid. P.46.
28. Labarrere, A.: Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1988. P. 18.
29. Petrovski, A. V.: Psicología General. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1982. P. 468.
30. Rebollar, Alfredo: Estudio de la habilidad para resolver problemas matemáticos en la escuela media. Informe de investigación. Santiago de Cuba. 1993. p.29.

- 31.-----: Una variante para la estructuración del contenido de la Matemática en la escuela media cubana. Informe de investigación. ISP "Frank País García". Santiago de Cuba. 1994. P. 57.
32. Alvarez, Carlos: La escuela integrada a la vida. Pedagogía` 93. Ciudad de la Habana. p. 3.
33. Talízina, N.: Psicología de la enseñanza. Editorial Progreso Moscú. 1988. p. 104.
34. Ibid (31). P. 70.
35. Ibid. p. 87.

## **BIBLIOGRAFÍA.**

1. Lenin, V. I.: Cuadernos filosóficos. Editora Política. La Habana. 1979.
2. Castro, Fidel: Discurso pronunciado en el acto de graduación del Destacamento Pedagógico Manuel Ascunce Domenech, el 7 de julio de 1981. Editora de impresores gráficos.
3. Programa del Partido Comunista de Cuba. Editora Política. Ciudad de la Habana. 1987.
4. Aballí, Gudelia y otros: El desarrollo de habilidades previas de cálculo en 9. grado. Revista Educación # 67. Ciudad de La Habana. Octubre- Diciembre, 1987.
5. Abdulina, O. A.: La preparación pedagógica general del maestro en el sistema de instrucción superior pedagógica. Moscú. 1984. (Traducción).
6. Acuña Soto, Claudia: Por una Geometría más formativa, mostremos antes de demostrar en Matemática Educativa. México. 1989.
7. Aguayo, Alfredo y H. Amores: Pedagogía. 5. edición. La Habana 1945.
8. Alvarez de Zayas, Carlos M.: Fundamentos teóricos de la dirección del proceso de formación del profesional de perfil ancho. Ciudad de la Habana. 1984.
9. -----: La escuela integrada a la vida. Pedagogía` 93. Ciudad de la Habana. 1993.
10. -----: Didáctica de la Educación Superior. Material impreso.
11. -----: Fundamentos teóricos de la dirección del proceso docente educativo en la Educación Superior Cubana. Tesis Doctoral. Ciudad de la Habana. 1989.
12. Alvarez de Zayas, Rita M.: El sistema de habilidades profesionales en la Metodología de la enseñanza de la Historia. Revista Varona # 8. Ciudad de la Habana. 1982.
13. Amaya de Ochoa, Graciela: Dificultades del aprendizaje y el razonamiento matemático del niño en edad escolar. Revista Estudios educativos # 20. Medellín. Primer semestre, 1984 p. 9 - 28.
14. Andreiev, Y.: Problemas lógicos del conocimiento científico. Editorial Progreso. Moscú. 1984.

15. Arrieta Gallastegui, J.J.: La resolución de problemas y la educación matemática: Hacia una mayor interrelación entre investigación y desarrollo curricular. En Enseñanza de las Ciencias. 7(1). Febrero. España. 1989.
16. Ballester, Sergio: Cómo sistematizar los conocimientos matemáticos. Editorial Academia. Ciudad de la Habana. 1995.
17. Ballester, Sergio y C. Arango: Cómo consolidar conocimientos matemáticos. Editorial Academia. Ciudad de la Habana. 1995.
18. Ballester, S. y otros: Metodología de la enseñanza de la Matemática. Editorial Pueblo y Educación. Tomo 1. Ciudad de La Habana. 1992
19. Barrón Ruiz, A.: Aprendizaje por descubrimiento: principios y aplicaciones inadecuadas. En Enseñanza de las Ciencias. Vol. 11 (1). Barcelona. Marzo. 1993.
20. -----: Constructivismo y desarrollo de aprendizajes significativos. Revista Educación 294. Madrid. Enero-abril 1991.
21. Bassedas, Eulalia: El asesoramiento psico-pedagógico: una perspectiva constructivista. Cuadernos de Pedagogía # 159. p. 65 - 71.
22. Belmont, J.: Estrategias cognoscitivas y aprendizaje estratégico. Revista Acción Pedagógica. Vol. 2 No 1,2. 1991. p. 56 - 72.
23. Bermúdez, R. y M. Rodríguez: Teoría y Metodología del aprendizaje. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1996.
24. Blauberg, I. V. y otros: Systems theory, philosophical and methodological problems. Editorial Progreso. 1977. En inglés.
25. Brito, Héctor y otros: Psicología general para los Institutos Superiores Pedagógicos. Tomo 2. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1987.
26. -----: Capacidades, habilidades y hábitos. Una alternativa teórica, metodológica y práctica. Boletín informativo. CDIP, ISP "Frank País García". 1990.
27. -----: Capacidades, habilidades y hábitos. Una alternativa para su tratamiento psicológico y pedagógico. Material impreso.
28. -----: Habilidades y hábitos. Consideraciones psicológicas para su manejo pedagógico. Revista Varona # 20. Ciudad de la Habana. 1988.
29. Brueckner, L. y G. Bond: Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje. Edición revolucionaria. La Habana. 1968.

30. Bruner, Jerome: Acción, pensamiento y lenguaje. Compilación. Alianza Editorial. Madrid. 1989.
31. -----: Juego, pensamiento y lenguaje. Revista Perspectivas. Vol. XVI # 1. 1986. p. 79 - 85.
32. Burns, Cecile G.: Resolver problemas: el mejor componentes del curriculum. Revista Universitas 2000 # 4. Venezuela. 1987. p. 173 - 176. En inglés.
33. Campistrous, L. y otros: Matemática. Orientaciones metodológicas 10. grado. Editorial Pueblo y Educación. 1989.
34. Campistrous, L. y C. Rizo: Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1996.
35. -----:
36. Campistrous, L. y C. Rizo: Aprender a resolver problemas aritméticos. En Memorias de la 8. Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Costa Rica. 1994.
37. Colectivo de autores: Pedagogía. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1984.
38. Coll, César: Por una opción constructivista de la intervención pedagógica en el currículum escolar en Psicología y Educación. En Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica. Madrid. 1987.
39. -----: Acción, interacción y construcción del conocimiento en situaciones educativas. Revista educación 279. p. 9-24. Madrid. Enero-abril. 1986.
40. -----: De qué hablamos cuando hablamos de constructivismo. En Cuadernos de Pedagogía 221. p. 8-10. Barcelona. Enero 1994.
41. -----: Aprendizaje significativo y ayuda pedagógica. En Cuadernos de Pedagogía 168. 4. edición. Barcelona. 1990.
42. Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos de Norteamérica (NCTM): Estandares curriculares y de evaluación para la educación matemática. Edición de Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales". 1991.
43. Danilov, M. A. y M. N. Skatkin: Didáctica de la escuela media. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1978.

44. Davydov, V. V.: Tipos de generalización en la enseñanza. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1982.
45. -----: Contenido y estructura de la actividad de aprendizaje de los alumnos. En Educadores del mundo. Berlín. 1981.
46. -----: La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico. Editorial Progreso. Moscú. 1988.
47. Del Río Sánchez, J. y otros: Análisis comparado del currículo de Matemáticas en Iberoamérica (nivel medio). Mare Nostrum. Ediciones Didácticas. S. A. Madrid. 1992.
48. Diccionario de Filosofía. Editorial Progreso. Moscú. 1984.
49. Dubinsky, Ed: El aprendizaje cooperativo de las Matemáticas en una sociedad no cooperativa. En Revista Cubana de Educación Superior No 2-3. CEPES. Universidad de La Habana. 1996.
50. Dubinsky, Ed: Learning Abstrac Algebra with ISTELE. New York-Springer-Verlag. 1994
51. Dubinsky, Ed: Calculus, Concepts and Computers, 2nd edition. New York: McGraw-Hill. 1995
52. Dubinsky, Ed: ISETL: A Programming Language for Learning Mathematics. En Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol XLVIII, 1027-1051 (1995)
53. Echeita, G.: El aprendizaje significativo. En Infancia # 11. Barcelona. Enero-febrero. 1992.
54. Fortuny Aymery, Josep Ma.: Información y control en la educación matemática. Revista Educar # 17. Barcelona. 1990.
55. Friedman, L. M. y E. N. Turetski: ¿Cómo aprender a resolver problemas?. Editorial Instrucción. Moscú. 1989. En ruso.
56. Friedman, L. M.: Metodología para enseñar a resolver problemas matemáticos. En Matemática en la escuela # 5. Moscú. 1991. Traducido del ruso.
57. Fuentes González, Homero: Perfeccionamiento del sistema de habilidades de la disciplina Física para estudiantes de Ciencias Técnicas. Tesis de grado. 1989.
58. Galperin, P. Ya.: Sobre la posibilidad de una Psicología objetiva. Revista Cuestiones de Psicología # 6. Moscú. 1987. En ruso.

59. Galperin, P. Ya.: Sobre el método de formación por etapas de las acciones intelectuales. En Antología de la Psicología Pedagógica y de las edades. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1986.
60. García Venero, M.: Metodología para el logro de un aprendizaje significativo. En Tecnología y Comunicación Educativa. Año 4 (14). México. Octubre. 1989.
61. García-Vera, A.B.: Fundamentación de un método de enseñanza basado en la resolución de problemas. Revista de Educación # 282. 1987. p. 151 - 160.
62. Gascón, J.: El papel de la resolución de problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. Educación Matemática. Vol. 6. N0 3. Grupo Editorial Iberoamérica. México. Diciembre, 1994.
63. Gómez, I. y otros: La selección de contenidos en las ciencias. En Cuadernos de Pedagogía # 168. 4. edición. Barcelona. 1990.
64. González, Diego: Didáctica o dirección del aprendizaje. 5. edición. Cultural S. A.. La Habana. 1952.
65. González, F.E.: Trascendencia de la resolución de problemas de Matemática. Revista Paradigma, Vol. VIII, # 2 .Venezuela. Diciembre, 1987.
66. González, H.E.: Un criterio para clasificar habilidades matemáticas. Educación Matemática. Vol. 5. No 1. Grupo Editorial Iberoamérica. México. Abril 1993.
67. Greeno, J. G: El pensamiento. Desde una perspectiva alterna. Revista Acción Pedagógica. Vol 1 # 2. 1989. p. 51 - 69.
68. Guetmanova, A. y otros: Lógica: en forma simple sobre lo complejo. Diccionario. Editorial Progreso. Moscú. 1991.
69. Guzmán, M.: Tendencias innovadoras en educación matemática. Olimpiada Matemática Argentina. 1992
70. Hernández Báez, J.L.: La determinación del nivel básico común de los contenidos de educación general media. Revista Ciencias Pedagógicas # 12. Año VII. Enero-Julio. 1986.
71. Hernández Fernández, Herminia: El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Educación Superior Cubana, experiencias en el Álgebra Lineal. Tesis de grado. 1989.

- 72.Hidalgo Guzmán, José L.: Aprendizaje operatorio. Ensayos de teoría pedagógica. Casa de la Cultura del maestro mexicano, A. C. 1992.
- 73.Imaz Jahnke, C.: Qué es la Matemática educativa. En Pedagogía. p.5-8. Vol. 6 (17). México. D.F. Enero-marzo.1989.
- 74.Jungk, Werner: Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tres partes. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1982.
- 75.Kilpatrick, Jeremy: Lo que el constructivismo puede ser para la educación de la Matemática. Revista Educar # 17. Barcelona. 1990.
- 76.Klingberg, L.: Introducción a la Didáctica General. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1972.
- 77.Koliaguin, Yu. M.: Metodología de la enseñanza de la Matemática en la escuela media. Editorial Instrucción. 1975. En ruso.
- 78.Krutietski, V. A.: Cuestiones generales sobre la estructura de las capacidades matemáticas. En Antología de la Psicología pedagógica y de las edades. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1986.
- 79.Labarrere, Alberto: La formación de procedimientos generales para la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Revista Ciencia Pedagógicas # 14. Ciudad de la Habana. Enero - Junio, 1987.
- 80.-----:Bases psicológicas de la enseñanza de la solución de problemas en la escuela primaria. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 1987.
- 81.-----: Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 1988.
- 82.Labarrere, Guillermina y G. Valdivia: Pedagogía. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1985.
- 83.Leontiev, A. N.: Actividad, conciencia y personalidad. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1981.
- 84.Leontiev, A. N. y otros: Psicología. Editorial Grijalbo. México. 1975.
- 85.Lugve, A.: El desacuerdo constructivo: aprendiendo de los conflictos. Cuadernos de Pedagogía # 156. Barcelona. 1988.71 - 74.
- 86.Majmutov, M. I.: La enseñanza problémica. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1983.

87. Márquez Rodríguez, Aleida: Sistema teórico - metodológico para la formación de habilidades. Material impreso. ISP "Frank País García". 1991.
88. Martínez, Graciela: El tránsito de la formación de conceptos matemáticos primarios a la solución de problemas aritméticos en niños de edad preescolar mayor a edad escolar menor. Revista Cubana de Psicología. Vol. 1 # 2. 1984.
89. MINED: Metodología de la enseñanza de la Matemática. Editorial Pueblo y Educación. Primera Reimpresión. Ciudad de la Habana. 1982.
90. MINED: Estado actual y proyección de la enseñanza de la asignatura Matemática. Informe a la reunión de la Comisión Nacional de Matemática. Ciudad de la Habana. Octubre. 1993.
91. MINED: Informe del trabajo realizado por la Comisión de Matemática en el diagnóstico del estado de la enseñanza de la Matemática. Ciudad de la Habana. Abril - Junio. 1991.
92. MINED: Matemática. Proyecto. Concepción general de la asignatura en el subsistema de la educación general, politécnica y laboral. Folleto. 1987.
93. Mitjans, A.: Creatividad, Educación y Personalidad. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1995.
94. Montealegre, Rosalía: La actividad comunicativa y el papel regulador del lenguaje en el niño. Cuadernos de Psicología. Vol. 12, # 1. 1992. p. 71 - 90.
95. Moreno, L. G. Waldegg: Constructivismo y Educación Matemática. Educación Matemática. Vol. 4. No 2. Grupo Editorial Iberoamérica. México. Agosto, 1992.
96. Müller, Horst: El trabajo heurístico y la ejercitación en la enseñanza de la Matemática. Folleto. ISP "Frank País García". 1987.
97. Muñoz, Félix y otros: Matemática. 7. grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1989.
98. -----: Matemática. 8. grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1990.
99. -----: Matemática. 9. grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1991.
100. -----: Matemática. Orientaciones metodológicas. 7. grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1989.

101. -----: Matemática. Orientaciones metodológicas. 8. grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1990.
102. -----: Matemática. Orientaciones metodológicas. 9. grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1991.
103. Peltier, Merie-Lise: Una visión de la Didáctica de las Matemáticas en Francia. Educación Matemática. Vol. 5 (2). Grupo Editorial Iberoamérica. México. Agosto, 1993.
104. Pérez Martínez, L.: La formación de habilidades lógicas a través de la enseñanza de la Física General en Carreras de Ciencias Técnicas. Tesis de grado. Santiago de Cuba. 1992.
105. Pérez Piqueras, E.: Aprendizaje eficaz. En Comunidad escolar. Vol. 11 (414). Madrid. Junio. 1993.
106. Petrovski, A. V.: Psicología general. Editorial Progreso. Moscú. 1980.
107. Piaget, J.: La epistemología genética. Barcelona. 1970.
108. -----: La construcción de lo real en el niño. Editora revolucionaria. La Habana. 1967.
109. -----: La enseñanza de las Matemáticas. Madrid. 1968.
110. Polya, George: ¿Cómo plantear y resolver problemas?. Editorial Trillas. México. 1986.
111. Rebollar, A. y otros: Estudio de la habilidad para resolver problemas matemáticos en la escuela media. Informe de investigación. Santiago de Cuba. 1993.
112. Rebollar, A.: Una variante para la estructuración del contenido de la Matemática en la escuela media. Informe de investigación. Santiago de Cuba. 1994.
113. Rizo, Celia: La formación de habilidades y capacidades en la enseñanza de la Matemática. Revista Educación # 13. Enero - Junio. 1983. p. 46 - 55.
114. Roganovski, N. M.: Elementos de la actividad matemática como objetivo de la enseñanza. Revista Pedagogía Soviética # 7. Moscú. 1976. p. 67 - 71. En ruso.
115. Rodríguez Hung, Teresa: Enfoque sistémico en la dirección de la asimilación de los conceptos básicos de la disciplina Matemática. Tesis de grado. Ciudad de la Habana. 1991.
116. Rubinstein, S. L.: Psicología del pensamiento. Editora universitaria. La Habana. 1966.

117. -----: El principio de la actividad creativa. Cuestiones de Psicología # 4. 1986. p. 101 - 107. En ruso.
118. Ruzin, N. H.: El problema como objetivo y medio de la enseñanza de la Matemática. Revista Matemática en la escuela # 4. Moscú. 1980. p. 13 - 15. En ruso.
119. Santaló, L. y otros: La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia. Tratado de Educación Personalizada. Ediciones RIALP, S. A. Madrid, 1994.
120. Santos Marín, Norma: Sistema de habilidades lógicas relacionadas con los conceptos y los teoremas en la Matemática de las Ciencias Técnicas. Tesis de grado. Universidad Central de Las Villas. 1985.
121. Santos, L.M.: Resolución de problemas; El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las Matemáticas. En Educación Matemática. Vol. 4 (2). Agosto. 1992.
122. Sanz Cabrera, Teresa: Estudio de los procedimientos lógicos de identificación de conceptos y clasificación. Tesis de grado. Ciudad de la Habana. 1989.
123. Schoenfeld, A. H.: Ideas y tendencias en la resolución de problemas. Separata del libro "La enseñanza de la matemática debate". Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid. 1985.
124. -----: Learning to think mathematically. Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. Universidad de California. Octubre. 1991.
125. -----: Mathematical Problem Solving. Academic Press INC. California. Estados Unidos. 1985.
126. Silvestre Oramas, Margarita: Metodología y técnica que contribuyen a estimular el desarrollo intelectual. Proyecto cubano TEDI. 1993.
127. Spirin, L. F.: Formación de las habilidades profesionales pedagógicas del maestro. Traducción. ISP "Frank País G."
128. Talizina, N.: Psicología de la enseñanza. Editorial Progreso. Moscú. 1988.
129. -----: Conferencias sobre los fundamentos de la enseñanza en la Educación Superior. Universidad de La Habana. 1984.
130. Thomas A, Romberg: Características problemáticas del currículo escolar de Matemáticas. En Enseñanza de las Ciencias. Vol. 11 (1). Barcelona. Marzo. 1993.

131. Tomás Folch, Marina: Los problemas aritméticos de la enseñanza primaria. Estudio de dificultades y propuesta didáctica. Revista Educar # 17. Barcelona. 1990.
132. Torres, Paul: La enseñanza problemática de la Matemática de nivel medio general. Tesis de grado. Ciudad de la Habana. 1993.
133. Turner Martí, Lidia: Cinco preguntas acerca del Perfeccionamiento continuo del Sistema Nacional de Educación. Revista Educación # 66. Julio - Septiembre. 1987.
134. Ursul, A., M. Rodríguez y otros: La dialéctica y los métodos científicos generales de investigación. Tomo 1. Editorial Ciencias Sociales. Ciudad de la Habana. 1981.
135. Usova, A. V.: Acerca de los criterios y niveles para la formación de las habilidades cognoscitivas en los alumnos. Revista Pedagogía Soviética # 12. Moscú. 1980. p. 45 - 49. En ruso.
136. Valencia, Teresita: ¿Cómo contribuir al desarrollo del pensamiento durante la clase?. Revista Educación # 64. Enero - Marzo. 1987.
137. Velázquez de Castro, M.: Habilidades para el aprendizaje. En Comunidad escolar. Vol. 12 (450). Madrid. Abril 1994.
138. Vigotski, L. S.: Pensamiento y lenguaje. Edición revolucionaria. La Habana. 1968.
139. Zabala, A.: El enfoque globalizador. En Cuadernos de Pedagogía # 168. 4. edición. Barcelona. 1990.
140. Zankov, L.: La enseñanza y el desarrollo. Editorial Progreso. Moscú. 1984.

## **ANEXOS.**

### ***ANEXO 1: GUÍA DE OBSERVACIÓN DE CLASES.***

- 1.- ¿En la determinación y orientación del objetivo está precisa la habilidad matemática a formar por el alumno?
- 2.- ¿Se motiva la clase con un ejercicio o situación problémica?
- 3.- ¿Se presentan ejemplos de desarrollo para la elaboración de la nueva materia?
- 4.- ¿Se presentan ejemplos para la ilustración del contenido ya elaborado?.
- 5.- ¿Se proponen ejercicios que integran varios procedimientos y sirven para obtener conclusiones sobre las posibilidades de aplicación del contenido?.
- 6.- ¿Se sigue la estructuración lógica del libro de texto?
- 7.- ¿Qué forma de organización prevalece en la clase?
  - orientación total del profesor al alumno;
  - orientación parcial del profesor a los alumnos;
  - actividad independiente del alumno con ayuda del profesor;
  - actividad totalmente independiente del alumno.
- 8.- ¿Qué tipos de preguntas formula el profesor a sus alumnos?
- 9.- En el análisis de la clase con el profesor determinar:
  - su comprensión de las habilidades matemáticas;
  - cómo determina las habilidades matemáticas;
  - qué labor desempeña para la formación de las habilidades en sus alumnos.

**ANEXO 2. PRUEBAS PEDAGÓGICAS APLICADAS A LOS ALUMNOS EN LA UNIDAD TEMÁTICA GEOMETRÍA PLANA.**

1. En el triángulo ABC, equilátero, CD es altura. Demuestre que  $\angle ACD = \angle BCD$
2. Si el triángulo ABC es equilátero y CD es una mediatriz. Demostrar que  $\angle ACD = \angle CDB$ .
3. En el  $\triangle MOP$ . OR es la mediatriz relativa al lado MP. Calcula la amplitud del ángulo MOR, sabiendo que  $\angle MPO = 38^\circ$ .
4. ABCD es un paralelogramo y el ángulo  $B = 75^\circ$ . Calcula la amplitud de los ángulos D y A.
5. En el cuadrilátero ABCD, AC es la bisectriz del  $\angle BCD$  y  $\angle ABC = \angle ADC$ . Demuestre que  $BC = CD$ .
6. PQRS es un trapecio isósceles y el  $\angle P = 35^\circ$ . Calcula la amplitud del ángulo Q y la longitud de la paralela media si  $PQ = 6\text{ cm}$  y  $SR = 4\text{ cm}$ . Justifica.
7. En la figura, O es el punto medio de BD y AC. Demuestre que son iguales las áreas de los triángulos AOD y OBC.
8. PQRS es un paralelogramo, QT y SU son alturas, el  $\angle TPQ = 63^\circ$ . . Calcula la amplitud del ángulo PQR y compara los ángulos PQT y USR.
9. Si ABCD es un rectángulo y AC es la diagonal. Demuestre que el área del rectángulo es dos veces el área del triángulo ADC.

**ANEXO 3. RESULTADOS ( EN POR CIENTO ) DE LAS PRUEBAS APLICADAS A LOS ALUMNOS DE 7. GRADO.**

COMPROBACIONES	N I V E L E S				
	1	2	3	4	5
1	63	38	25	28	8
	38,88%	23,45%	15,43%	17,28%	4,94%
2	94	21	30	4	13
	58,02%	12,96%	18,51%	2,46%	8,02%
3	70	25	44	13	10
	43,2%	15,43%	27,1%	8,02%	6,17%
4	33	21	38	17	53
	20,37%	12,96%	23,4%	10,49%	32,71%
5	38	29	45	21	29
	23,4%	17,9%	27,77%	12,96%	17,9%
6	24	5	77	52	4
	14,81%	3,08%	47,54%	32,09%	2,46%
7	31	14	57	56	4
	19,13%	8,64%	35,18%	34,56%	2,46%
8	13	7	84	28	30
	8,02%	4,32%	51,88%	17,2%	18,51%
9	27	13	46	42	34
	16,66%	8,02%	28,39%	25,92%	20,98%

Tipos de comprobación:

Cálculo geométrico: 3, 4, 6 y 8.

Demostración: 1, 2, 5, 7 y 9.

**ANEXO 4. FUENTES DE SIGNIFICACIÓN DETECTADAS A PARTIR DE LA TÉCNICA DE HABERMAN (1973) MEDIANTE LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE INDEPENDENCIA.**

OBSERVACIONES POR ENCIMA DE LO ESPERADO.

PRUEBA #	NIVEL #	% DE ESTUDIANTES
1	1 y 2	62,4 %
2	1	58 %
3	1	43,2 %
4	5	32,7 %
6	3 y 4	79,6 %
7	4	34,6 %
8	3	51,9 %
9	4 y 5	46,9 %

OBSERVACIONES POR DEBAJO DE LO ESPERADO.

PRUEBA #	NIVEL #	% DE ESTUDIANTES
1	3 y 5	20,3 %
2	3 y 4	21 %
3	4 y 5	14,2 %
4	4	32,7 %
6	1,2 y 5	20,4 %
7	5	2,5 %
8	1 y 2	12,3 %
9	1	16,7 %