ANEXO 13

OTRAS ESPECIFICACIONES RESPECTO AL MODELO GRAVITATORIO

1. LA REPARTICIÓN GRAVITATORIA DE LOS TRIÁNGULOS INTERMEDIOS

1.0. INTRODUCCIÓN

Como tendremos ocasión de ver posteriormente en el caso concreto catalán, la aplicación práctica del modelo de división territorial que aquí se propugna puede inducir la aparición, sobre el mapa del territorio, de espacios vacíos o complementarios de extensión variable y forma triangular, que, obviamente, no deben quedar al margen de la división geométrica resultante. Ello puede presentarse tanto en los procesos de comarcalización como en los de regionalización o municipalización.

Pues bien, en los siguientes epígrafes, desarrollaremos una teoría cuya praxis pueda ser eficiente para la resolución racional de este problema, siguiendo diferentes procedimientos analíticos.

1.1. JUSTIFICACIÓN METODOLÓGICA. ASIGNACIONES PARCIALES

1.1.1. Los problemas métricos mínimo-cuadráticos

La representación gráfica de un triángulo intermunicipal, intercomarcal o interregional cualquiera sobre un plano XOY de coordenadas cartesianas rectangulares o espacio afín euclídeo bidimensional E_2, siendo P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2) y P_3 (x_3, y_3) sus tres vértices conocidos y G (x_0, y_0) su baricentro, centro de gravedad o "centro de masas", puede verse en la página siguiente.

Se desea, en dicho plano, al objeto de proceder a la repartición de la superficie geográfica de dicho triángulo o figura plana entre sus tres comarcas o regiones colindantes A, B y C, resolver un doble problema métrico mínimo-cuadrático, a saber:

1.º) Hallar un punto tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a los tres lados o fronteras geométricas comarcales o regionales sea mínima. O bien:

2.º) Hallar el punto o lugar geométrico del plano tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a los tres vértices del triángulo sea mínima.

1er. PROBLEMA

a) Ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$, o bien, en forma implícita o general:

$$r_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0.$$

Distancia del punto G (x_0, y_0) a dicha recta:

$$d_1 (G,r_1) = \frac{|a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

b) Ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_3:

$$\frac{x - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_3 - y_1}$$, o bien, en forma implícita o general:

$$r_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

Distancia del punto G (x_0, y_0) a dicha recta:

$$d_2 (G,r_2) = \frac{|a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

c) Ecuación de la recta que pasa por los puntos P_2 y P_3:

$$\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_3 - y_2}$$, o bien, en forma implícita o general:

$$r_3 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 = 0.$$

Distancia del punto G (x_0, y_0) a dicha recta:

$$d_3\ (G,r_3) = \frac{|a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3|}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}$$

Se trataría, pues, de minimizar la expresión cuadrática:

$$D = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \sum_{i=1}^{3} d_i^2$$

, que adquiere cierta complejidad.

2.º PROBLEMA

Mayor interés puede tener, en nuestro caso, la resolución de este segundo problema métrico, habida cuenta de la sencilla obtención de dicho punto por métodos estrictamente geométricos (FRANQUET, 1990/91).

En este caso, se tendrían:

a) Distancia del punto G (x_0, y_0) al punto P_1 (x_1, y_1):

$$d'_1\,(P_1, G) = \left|\overrightarrow{P_1G}\right| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \quad .$$

b) Distancia del punto G (x_0, y_0) al punto P_2 (x_2, y_2):

$$d'_2\,(P_2, G) = \left|\overrightarrow{P_2G}\right| = \sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2} \quad .$$

c) Distancia del punto G (x_0, y_0) al punto P_3 (x_3, y_3):

$$d'_3\,(P_3, G) = \left|\overrightarrow{P_3G}\right| = \sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2} \quad .$$

Con ello, la expresión a minimizar se convertirá en:

$$D' = d'^2_1 + d'^2_2 + d'^2_3 = \sum_{i=1}^{3} d'^2_i = \sum_{i=1}^{3} \left(\sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}\right)^2$$

Genéricamente, la expresión que hay que minimizar será del tipo:

$$Z = S(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right) \ ;$$

tratándose del mínimo relativo (local) no condicionado de una función real de dos variables reales. La condición necesaria o de primer grado para la existencia de extremo relativo, será:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta Z}{\delta x} = S'_x = 2\sum_{i=1}^{3}(x - x_i) = 2\big((x - x_1) + (x - x_2) + (x - x_3)\big) = 0 \\ \dfrac{\delta Z}{\delta y} = S'_y = 2\sum_{i=1}^{3}(y - y_i) = 2\big((y - y_1) + (y - y_2) + (y - y_3)\big) = 0 \end{cases}$$

de dónde se obtienen las coordenadas buscadas:

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad e \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}}$$ que,

como es sabido, corresponden al baricentro del triángulo dado.

Así mismo, la condición suficiente, o de 2º grado, será:

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta x^2} = S''_{x^2} = 2\sum_{i=1}^{3}(1) = 6 \quad .$$

$\dfrac{\delta^2 Z}{\delta x \cdot \delta y} = \dfrac{\delta^2 Z}{\delta y \cdot \delta x}$ = (según el lema de Schwärtz) = 0 .

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta y^2} = S''_{y^2} = 2\sum_{i=1}^{3}(1) = 6 \quad .$$

El determinante funcional hessiano, ofrecerá:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} S''_{x^2} & S''_{xy} \\ S''_{xy} & S''_{y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0 \quad ,$$

y, por otra parte, el menor principal de 1er. orden o primer elemento del determinante anterior, ofrece:

$S''_{x^2} = 6 > 0$, luego se trata de un **mínimo relativo o local** en el punto:

G (x_0, y_0).

COMPROBACIÓN: CENTRO DE LAS MASAS SOCIOECONÓMICAS DEL TRIÁNGULO INTER-TERRITORIAL

Como comprobación de lo anteriormente expuesto, determinemos las coordenadas del centro de gravedad del triángulo intermunicipal, intercomarcal o interregional en función de las coordenadas de sus vértices.

Al punto medio M (p,q) del lado $\overline{P_2P_3}$, corresponde:

$$\overrightarrow{MP_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{MP_3} \quad (1) \quad .$$

Si multiplicamos escalarmente los dos miembros de esta igualdad por el versor o vector unitario correspondiente al vector $\overrightarrow{P_2P_3}$ y representamos por (MP_2) y (MP_3) los productos correspondientes, resulta el parámetro:

$$\frac{(MP_2)}{(MP_3)} = \lambda = -1 .$$

Ateniendo a dicha relación, se dice que el punto M(p,q) divide al segmento orientado $\overline{P_2P_3}$ en la razón: $\lambda = -1$. Evidentemente, este valor resulta negativo al ser M un punto interior de dicho segmento, o sea, $M \in \overline{P_2P_3}$, pues los productos escalares (MP_2) y (MP_3) son de signos opuestos. En cambio, si M fuera exterior a dicho segmento (pero sí perteneciente a la recta que determinan los dos anteriores), entonces $\lambda > 0$, pues esos productos tendrían el mismo signo.

Multiplicando escalarmente por $\vec{i}$ y por $\vec{j}$ los dos miembros de la igualdad (1), se obtiene, respectivamente:

$$\begin{cases} (x_2 - p) = \lambda(x_3 - p) \\ (y_2 - q) = \lambda(y_3 - q) \end{cases}$$

de dónde se deducen las coordenadas del punto M:

$$p = \frac{x_2 - \lambda \cdot x_3}{1 - \lambda}; \quad q = \frac{y_2 - \lambda \cdot y_3}{1 - \lambda} \quad ; (2)$$

que, en nuestro caso, con $\lambda = -1$, ofrece:

$$p = \frac{x_2 + x_3}{2}; \quad q = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

y como sabemos que el baricentro del triángulo se encuentra, sobre una mediana cualquiera, a los 2/3 del vértice y a 1/3 de la base, dividirá a la mediana $\overline{P_1M}$ en la razón:

$$\lambda = \frac{-2/3}{1/3} = -2 \quad ,$$

con lo que, aplicando nuevamente las expresiones (2), se obtendrá:

$$x_0 = \frac{x_1 + 2p}{1+2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{3}$$

$$y_0 = \frac{y_1 + 2p}{1+2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i}{3}$$

, *luego las coordenadas del baricentro del triángulo inter-territorial son la media aritmética de las coordenadas correspondientes de los tres vértices del mismo,* como queríamos comprobar.

De hecho, el triángulo en cuestión puede descomponerse en franjas paralelas a sus lados, cada una de ellas asimilable a un segmento cuyo centro de gravedad individual se encuentra en su punto medio y, por lo tanto, el centro de gravedad de todo el triángulo se hallará en el baricentro o punto de intersección de sus tres medianas. Dicho centro, además, coincide con el centro de gravedad de tres masas económicas puntuales iguales colocadas en sus vértices (FRANQUET, 1990/91).

Precisamente, una ampliación analítica a lo expuesto en el presente epígrafe, puede efectuarse a partir de la consideración del baricentro como punto de intersección de las tres medianas. Sus ecuaciones serán:

- Recta mediana $\mathbf{m_1}$ que pasa por los puntos P_1 y G:

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} \quad \text{; esto es:}$$

$$x\,(y_0 - y_1) - x_1\,(y_0 - y_1) - y\,(x_0 - x_1) + y_1\,(x_o - x_1) = 0 \quad ,$$

que desarrollado ofrece:

$$xy_0 - xy_1 - x_1y_0 - x_1y_1 - yx_0 - yx_1) + y_1x_o - y_1x_1) = 0 \quad ,$$

y agrupando términos y simplificando:

$$(y_0 - y_1)\,x \;+\; (x_1 - x_0)\,y - x_1 y_0 + y_1 x_o = 0 \quad ,$$

$$\boxed{A_1} \qquad\qquad \boxed{B_1} \qquad\qquad \boxed{C_1}$$

con ecuación implícita o general:

$$A_1\,x + B_1\,y + C_1 = 0 \ .$$

- Recta mediana $\mathbf{m_2}$ que pasa por los puntos P_2 y G:

$$\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_0 - y_2} \quad \text{; esto es:}$$

$$x\,(y_0 - y_2) \;-\; x_2\,(y_0 - y_2) \;-\; y\,(x_0 - x_2) \;+\; y_2\,(x_o - x_2) = 0 \quad ,$$

que desarrollado ofrece:

$$xy_0 - xy_2 - x_2y_0 + x_2y_2 - yx_0 + yx_2 + y_2x_o - x_2y_2 = 0 \ ,$$

y agrupando términos y simplificando:

$$(y_0 - y_2)\,x \;+\; (x_2 - x_0)\,y - x_2 y_0 + y_2 x_o = 0 \quad ,$$

$$A_2 \qquad\qquad B_2 \qquad\qquad C_2$$

con ecuación implícita o general:

$$A_2\,x + B_2\,y + C_2 = 0 \ .$$

- Recta mediana $\mathbf{m_3}$ que pasa por los puntos P_3 y G:

$$\frac{x - x_3}{x_0 - x_3} = \frac{y - y_3}{y_0 - y_3} \quad \text{; esto es:}$$

$$x\,(y_0 - y_3) \;-\; x_3\,(y_0 - y_3) \;-\; y\,(x_0 - x_3) \;+\; y_3\,(x_o - x_3) = 0 \quad ,$$

que desarrollado ofrece:

$$xy_0 - xy_3 - x_3y_0 + x_3y_3 - yx_0 + yx_3 + y_3x_o - x_3y_3 = 0 \ ,$$

y agrupando términos y simplificando:

$$\underbrace{(y_0 - y_3)}_{\boxed{A_3}} x + \underbrace{(x_3 - x_0)}_{\boxed{B_3}} y \underbrace{- x_3 y_0 + y_3 x_o}_{\boxed{C_3}} = 0 \quad ,$$

con ecuación implícita o general:

$$A_3 x + B_3 y + C_3 = 0 \quad .$$

Evidentemente, la búsqueda analítica del baricentro se limitará a la del punto de intersección de dichas medianas, tomadas dos a dos. En concreto, para la primera y la segunda, se tendrá:

$$\begin{cases} m_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ m_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Como aplicación del Teorema de Rouché-Frobenius-Krönecker, se tratará de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, no homogéneo, compatible y determinado, cuya resolución puede efectuarse por aplicación de la Regla de Cramer, del método de la inversión de la matriz o de la triangularización de Gauss.

Llamando (M) a la matriz de los coeficientes de las incógnitas y (A) a la matriz orlada o ampliada con los términos independientes, se tiene:

$$(M) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}; \quad (A) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

Los rangos o características de dichas matrices son iguales a 2, por lo que su solución única vendrá dada por:

$$x = x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{|M|} \quad ; \quad y = y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{|M|}$$

siempre y cuando el determinante del denominador sea tal que:

$|M| \neq 0$, o sea, cuando (M) es una matriz regular (no singular).

Operaremos del mismo modo con las medianas m_1 y m_3, así como con m_2 y m_3.

Respectivamente, para las tres medianas se tendrán las siguientes ecuaciones en forma continua:

$$m_1 \longrightarrow -\frac{x - x_1}{B_1} = \frac{y - y_1}{A_1} \quad ;$$

Vector de dirección, director o asociado:
$\vec{V}_1\ (-B_1, A_1) = (x_0 - x_1\ , y_0 - y_1)$.

$$m_2 \longrightarrow -\frac{x - x_2}{B_2} = \frac{y - y_2}{A_2} \quad ;$$

Vector de dirección, director o asociado:
$\vec{V}_2\ (-B_2, A_2) = (x_0 - x_2\ , y_0 - y_2)$.

$$m_3 \longrightarrow -\frac{x - x_1}{B_1} = \frac{y - y_1}{A_1} \quad ;$$

Vector de dirección, director o asociado:
$\vec{V}_3\ (-B_3, A_3) = (x_0 - x_3\ , y_0 - y_3)$.

1.1.2. La asignación o afectación de superficies

A su vez, el triángulo intercomarcal o interregional $\overset{\triangle}{P_1P_2P_3}$ quedará descompuesto, a partir de la determinación de su centro de gravedad, en otros tres subtriángulos que se adjudicarán a cada una de las comarcas o regiones colindantes, con sus áreas respectivas de:

$$\overset{\triangle}{G\,P_1\,P_2} \text{ ——— } S_A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\triangle}{G\,P_1\,P_3} \text{ ——— } S_B = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\triangle}{G\,P_2\,P_3} \text{ ——— } S_C = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

La suma algebraica de dichas áreas nos ofrece la del triángulo inicial, a saber:

$$\overset{\triangle}{P_1 P_2 P_3} \text{———} \; S = S_A + S_B + S_C = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Estas expresiones nos permitirán el cálculo de la superficie de dichos triángulos a partir del conocimiento de las coordenadas geográficas o UTM de sus vértices y de su baricentro. De hecho, el área de los triángulos hallados por las anteriores fórmulas podrá ser positiva o negativa, según el orden en que se hayan tomado los vértices. En general, consideraremos el área como una magnitud esencialmente positiva y emplearemos dichas fórmulas para hallar el número de unidades cuadradas, con independencia del signo (FRANQUET, 1990/91).

1.1.3. Criterio de subdivisión en partes proporcionales

En este caso, puede considerarse perfectamente aceptable la repartición del triángulo problema intermunicipal, intercomarcal o interregional P_1 P_2 P_3 en partes proporcionales a tres números dados **m, n** y **p,** cuyo valor resulta conocido o se halla prefijado de antemano (que pudieran ser, paradigmáticamente, las superficies de las tres comarcas o regiones colindantes, sus respectivas poblaciones o rentas totales, etc...). Esta división o afijación proporcional (que no es la utilizada en nuestro trabajo, basada, como ya se ha explicado, en la determinación del centro de masas, pero que sí puede revestir interés práctico en ciertas ocasiones) tendría lugar mediante líneas rectas que, partiendo de los tres vértices, concurran en un cierto punto 0 (x_0 , y_0).

Véase, para una mejor comprensión gráfica del presente ejercicio, la figura A-13.1.

Llamando S_A S_B y S_C a las áreas de los tres triángulos que estamos buscando, y S a la del triángulo principal, podemos establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{m+n+p}{S} = \frac{m}{S_A} = \frac{n}{S_B} = \frac{p}{S_C}$$

De aquí, resultará que:

$$S_A = \frac{m \times S}{m + n + p}$$, con una altura de valor: $\overline{P_2 a}$.

Pero, observando la figura, tenemos que:

$$S_A = \overline{P_1 P_2} \text{ x } \frac{1}{2} \overline{P_2 a}$$, luego:

$$\frac{m \times S}{m + n + p} = \frac{\overline{P_1 P_2} \times \overline{P_2 a}}{2}$$, de dónde:

$$\overline{P_2 a} = \frac{2 \times m \times S}{\overline{P_1 P_2} \times (m + n + p)} .$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$S_B = \frac{n \times S}{m + n + p} = \frac{\overline{P_1 P_2} \times \overline{P_2 a}}{2}$$; de dónde:

$$\overline{P_3 b} = \frac{2 \times n \times S}{\overline{P_1 P_3} \times (m + n + p)}$$

Podemos, pues calcular $\overline{P_2 a}$ y $\overline{P_3 b}$, y trazando a esas distancias sendas rectas paralelas a $\overline{P_1 P_2}$ y $\overline{P_1 P_3}$, el punto $O(x_0,y_0)$ en que se encuentran, unido con los vértices P_1, P_2 y P_3, resuelven el problema planteado.

Complementariamente, la resolución gráfica de este problema parte de la división del lado $\overline{P_2 P_3}$ en tres partes: $\overline{P_2 D}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EP_3}$ proporcionales, respectivamente, a las cantidades **m, n** y **p**. Uniendo estos puntos con el vértice P_1 obtendremos tres triángulos cuyas áreas son proporcionales a los números **m**, **n** y **p**, puesto que se trata de triángulos de la misma altura, cuyas superficies serán, en consecuencia, directamente proporcionales a la magnitud de sus bases.

Trazando, ahora, por el punto D (x_4 , y_3), una recta DO paralela a $\overline{P_1 P_2}$ y por el punto E (x_5 , y_5) otra recta paralela a $\overline{P_1 P_3}$, el punto de intersección de ambas rectas O (x_0 , y_0) resuelve gráficamente el problema.

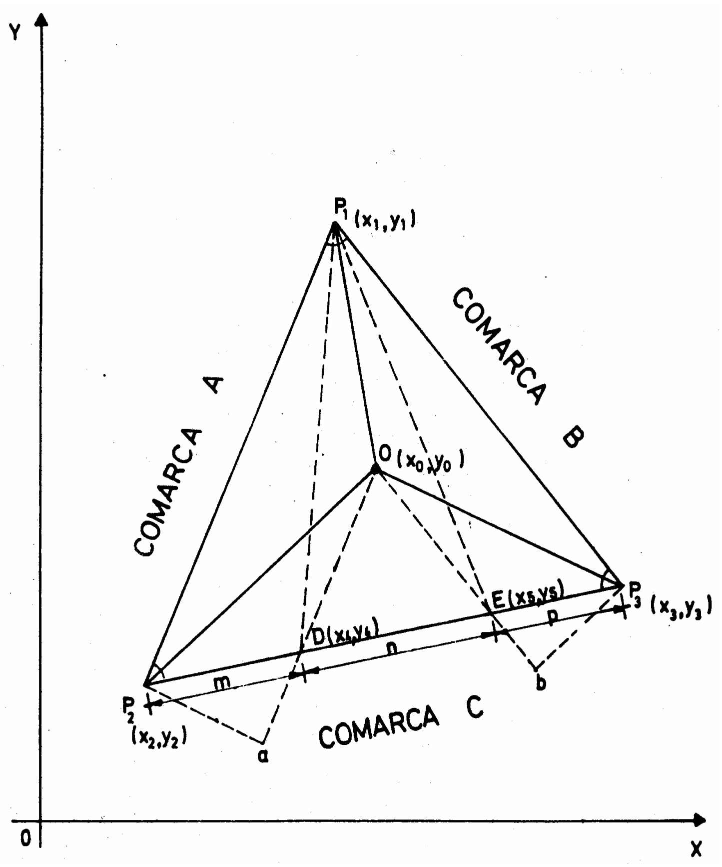

Fig. A-13.1. Criterio de subdivisión del triángulo en partes proporcionales a tres números prefijados.

En efecto, el triángulo O $\overset{\triangle}{P_1 P_2}$ es equivalente al triángulo D $\overset{\triangle}{P_1 P_2}$ por tener la misma base $\overline{P_1 P_2}$ así como la misma altura, que es la distancia entre las rectas paralelas DO y P_1 P_2, de valor:

$$\text{Recta } P_1 P_2 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \ldots \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\text{Recta D O} \equiv a_4 x + b_4 y + c_4 = 0 \ldots \frac{x - x_0}{x_4 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_4 - y_0}$$

$$d\,(r_1\,,\,r_4) \;=\; d\,(O,\,r_1) \;=\; \frac{\left|a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

Igualmente, el triángulo $\overset{\triangle}{O P_1 P_3}$ es equivalente al triángulo $\overset{\triangle}{E P_1 P_3}$ por las mismas razones que en el caso anterior y, por tanto, los terceros triángulos serán también equivalentes. Y como los segundos triángulos hemos visto que son proporcionales a las cantidades prefijadas **m**, **n** y **p**, también los primeros lo serán y, además, resuelven eficazmente las condiciones del problema original.

1.2. ASIGNACIÓN TOTAL DE LA SUPERFICIE

Veamos, por último, que la asignación o afectación objetiva del triángulo intermunicipal, intercomarcal o interregional entre sus tres territorios colindantes puede efectuarse también globalmente a uno cualquiera de ellos, previo el cálculo de los correspondientes momentos territoriales estáticos y de inercia de dicho triángulo o porción del territorio en relación a ejes o puntos concretos del mismo (como pudieran ser, por ejemplo, los lados del propio triángulo, sus vértices o las capitales de los territorios vecinos), lo que nos sugerirá, de algún modo, el grado de atracción que dichas referencias espaciales ejercen sobre el triángulo intermedio problema. La definición de dichos conceptos se realiza en algunos epígrafes siguientes de nuestro estudio (FRANQUET, 1990/91).

Para el logro de mayores especificaciones y detalles sobre este particular, véase el siguiente anexo de nuestro trabajo, donde se desarrolla la teoría correspondiente y algunas aplicaciones numéricas de interés.

2. EL CENTRO TERRITORIAL DE MASAS

2.1. LA CONCEPCIÓN FÍSICO-ESTÁTICA DEL PROBLEMA

2.1.1. Introducción

La determinación del punto de aplicación de la fuerza-peso de un cuerpo cualquiera -que, en nuestro caso, asimilaremos a la comarca o a la región- puede realizarse como resultante de los "pesos" de todas y cada una de las partes en que aquél se supone descompuesto, o sea, los municipios. En este caso, el baricentro recibirá el nombre de "centro de gravedad comarcal o regional".

Desde un punto de vista puramente teórico y simplificativo, la determinación de la posición del "centro de gravedad territorial" podría resultar un problema sencillo si se supone que dicha unidad territorial (comarca, región o nación) es homogénea y posee un centro de simetría, por lo que su centro de gravedad debe coincidir con aquél, dado que la resultante de todos los pesos elementales de las partículas simétricas del territorio estudiado pasará por dicho centro de simetría. Si la comarca o región sólo poseyeran eje de simetría, su centro de gravedad, por razones análogas, debería hallarse situado sobre el expresado eje. No obstante, ni la homogeneidad en la distribución de las masas de población o de renta ni la configuración espacial simétrica constituyen características tradicionales de las unidades territoriales que nos ocupan.

Otro procedimiento, que contempla la posibilidad de la aparición de masas elementales diferentes en el territorio, como son los propios municipios, conllevaría la descomposición en fragmentos municipales cuyo centro de gravedad resulta fácil de determinar (suponiéndolo concentrado, v.gr., en el centro urbano del municipio). Posteriormente, por una simple composición de fuerzas aplicadas en el centro de gravedad de aquellos fragmentos, podría llegarse a determinar la posición exacta del centro de gravedad del conjunto comarcal o regional que, desde luego, *no tiene por qué coincidir con las coordenadas geográficas de la capital de la comarca o de la región.*

Del mismo modo, el centro de masas o centro de gravedad de una región puede encontrarse también determinando primeramente los centros de gravedad comarcales, en los cuales se imaginan reunidas, a su vez, las masas de los grupos de puntos municipales y, estableciendo el centro de gravedad para éstos, se hallaría el centro de gravedad de todo el sistema regional. Ello se deduce, desde luego, de la propia ecuación definitoria del centro de gravedad, dado que en la suma de los momentos se reúnen distintas sumas parciales que pueden ser reemplazadas por los momentos de sus masas reunidas en el centro de gravedad. Puesto que la suma de los momentos de varias componentes puede sustituirse por el momento de su resultante, podremos enunciar que **no se altera el centro de gravedad de un territorio sustituyendo algunas de las masas por su suma concentrada en el mismo.**

Así, imaginemos un sistema de puntos materiales o municipios con las masas: m_1, m_2, ..., m_i, ..., m_n, que serían las rentas familiares disponibles estimadas en el MODELO ESTRUCTURAL por procedimientos directos o indirectos (ver anterior Capítulo 3º), y cuya masa total comarcal es la siguiente:

$$m = m_1 + m_2 + ... + m_i + ... + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad .$$

También dichas masas podrían representar poblaciones, depósitos bancarios o cualquiera otra variable de interés geo-económico para nuestro estudio (FRANQUET, 1990).

Dicho sistema determina, por la posición relativa de sus puntos materiales, el "centro comarcal de masas", que quedará definido por la siguiente ecuación:

$$m \cdot \vec{s} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_i \vec{r}_i + \dots + m_n \vec{r}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \ ,$$

en donde $\vec{s}$ el es radio vector dirigido hacia el centro de masas comarcal S desde un punto cualquiera del espacio 0, mientras que $\vec{r}_i$ es el radio vector desde el mismo punto del espacio 0 dirigido hacia el punto material o municipio m_i. La suma se extenderá, obviamente, a la totalidad de los municipios de la comarca.

Véase, al respecto, la figura siguiente:

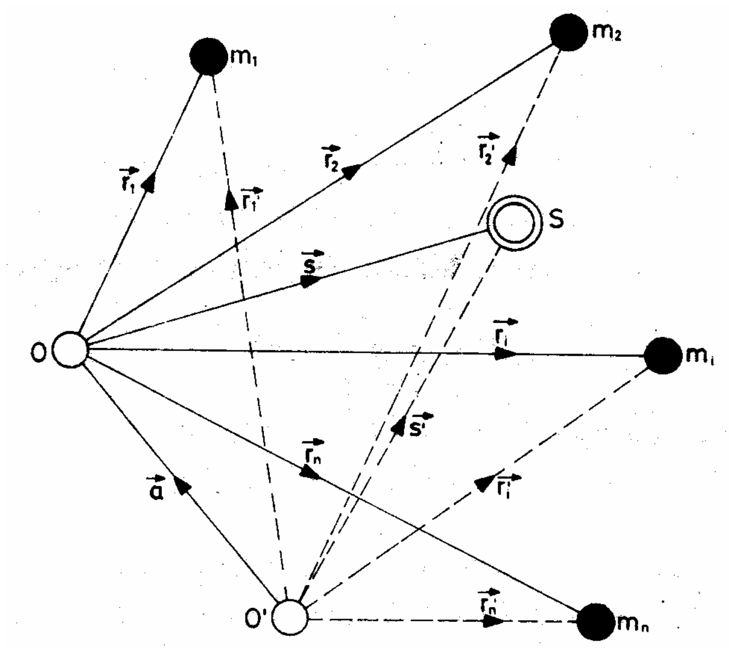

Fig. A-13.2. Sistema municipal (elemental) de masas de renta.

Si aplicamos la anterior ecuación de definición del centro de masas, que representa una masa centrada, a otro cierto punto O' en el espacio, desde el cual se trazan los radios vectores:

$$\vec{r}\,'_i = \vec{a} + \vec{r}_i \text{ , se verificará:}$$

$$m.\ \vec{s}\,' = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}\,'_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{a} + \vec{r}_i) = m(\vec{a} + \vec{s}) \ ,$$

con lo cual queda demostrado que el extremo de $\vec{s}\,'$ determina de nuevo el mismo punto S que el extremo del vector $\vec{s}$. *El centro de masas comarcal es, por lo tanto, independiente de la elección del punto de referencia,* y tan sólo queda determinado por las propias masas municipales m_i y por su posición recíproca. Es decir, en todo cambio de ejes, las coordenadas geográficas del centro de masas sufren la misma transformación que las coordenadas de los demás puntos, con lo que el mencionado centro de masas es un punto independiente del sistema de ejes elegidos.

A la expresión m. $\vec{s}$ la denominaremos "momento estático de m referido al punto O". Correlativamente, $m_i\ \vec{r}_i$ será el "momento estático de m_i referido al punto O". Si el punto de referencia coincidiera con el centro comarcal de masas, se verificará la nulidad: $\vec{s}$ = 0, por lo que también:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ \vec{r}_i = 0\ .$$

Si ahora suponemos, simplificativamente, que el territorio en estudio constituye una espacio continuo y no discreto (lo que no acostumbra a suceder en la realidad), la repartición de las masas municipales en él será homogénea, con lo que, en lugar de la suma de los momentos de los distintos puntos materiales aislados, se tendría la integral:

$$m\ .\vec{s} = \int \vec{r}\ .\ dm\ ,$$

en la cual r representa el radio vector desde el punto común de referencia O hacia el elemento infinitesimal de masa dm.

Si nos encontrásemos en el sencillo supuesto de que todo el sistema regional se considera constituido por sólo 2 comarcas c_1 y c_2 , con los centros de gravedad respectivos S_1 y S_2 , se verificará que:

$$m\ .\ \vec{s} = c_1\ \vec{s}_1 + c_2\ \vec{s}_2\ .$$

Tomando el centro de masas como punto de referencia, se deduce de ello que:

$$0 = c_1\ \vec{s}_1 + c_2\ \vec{s}_2\ ,$$

es decir, que el centro regional de masas de renta se encuentra en la línea de unión de S_1 y S_2, a la que divide en relación inversa a la de masas c_1 y c_2 (la misma relación existe entre 2 fuerzas paralelas de igual sentido P_1 y P_2 y su resultante o componente: $R = P_1 + P_2$, que pasa siempre por un punto situado sobre la línea que une los puntos de aplicación A_1 y A_2 de las fuerzas, y divide al segmento $A_1\ A_2$ en razón inversa a la de ambas fuerzas, de manera que aún en el caso de que giren las fuerzas alrededor de sus puntos de aplicación conservando el paralelismo, la resultante girará de igual modo alrededor del suyo).

En definitiva, la ecuación de definición del centro de gravedad de un territorio F, en representación vectorial, se deducirá de la expresión (que utilizaremos, posteriormente, para definir el "momento territorial estático"):

$$m \cdot \vec{s} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i = \int \vec{r} \cdot dm$$

Así mismo, se pueden también establecer tres ecuaciones componentes. Si (x_S, y_S, z_S) representan las coordenadas del centro de masas y (x_i, y_i, z_i) las coordenadas de los distintos municipios (bien de sus centros urbanos, bien de sus propios centros municipales de masas estáticamente determinados), se tendrá:

$$\boxed{\begin{aligned} m \cdot x_S &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i = \int x \cdot dm \\ m \cdot y_S &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i = \int y \cdot dm \\ m \cdot z_S &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i = \int z \cdot dm \end{aligned}}$$

, donde la 3.ª coordenada representaría, efectivamente, la cota o altitud relativa de cada municipio (sobre el plano de comparación XOY) o la altitud absoluta del mismo (medida sobre el nivel medio del mar, tal como se ofrece en los resultados de la aplicación del modelo gravitatorio que acabamos de ver). En cualquier caso, creemos justificable el prescindir de esta tercera coordenada en los estudios usuales de ordenación territorial, para evitar complicaciones hasta cierto punto innecesarias en el proceso de cálculo.

En esta tesitura, tienen lugar las siguientes particularidades:

- Si $x_S = 0$, es decir, si el plano YOZ pasa por el centro de gravedad territorial (plano de gravedad), se verificará que:

$$\int x \cdot dm = 0 \ .$$

En general, la distancia x_S del centro de gravedad comarcal o regional a un plano YOZ se deduce de la expresión anteriormente contemplada:

$$m \cdot x_S = \int x \cdot dm \ .$$

- Si $\int x \cdot dm = \int y \cdot dm = 0$, el eje de las Z es una línea de gravedad que pasa por el centro de gravedad territorial.

2.1.2. Momento territorial estático

A la vista de la figura A-13.2, veamos que dada una distribución discreta de masas municipales m_i, aplicadas en los puntos del territorio A_i, y en un punto o lugar geográfico cualquiera, se define el "momento territorial estático de la distribución de masas socioeconómicas", respecto al punto O, por la expresión anteriormente enunciada:

$$\overrightarrow{M_0} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i \quad \text{, en dónde:} \quad \vec{r}_i = OA_i$$

En el caso de una distribución continua de la masa económica, de densidad: $\gamma = \gamma(\vec{r})$, se tendrá:

$$M_0 = \iiint_F \vec{r} \cdot dm = \iiint_F \vec{r} \cdot \gamma \cdot dV \ .$$

Para hallar, ahora, la relación existente entre los momentos territoriales estáticos respecto a dos puntos distintos O y O', comenzaremos por calcular el segundo de ellos, a saber:

$$\overrightarrow{M_{O'}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{O'A_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{OA_i} =$$

$$= \overrightarrow{O'O} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i + M_0 \ ;$$

es decir:

$$\overrightarrow{M_{O'}} = \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{O'O} \cdot m \quad \text{, siendo:} \quad \begin{cases} \overrightarrow{O'O} = \vec{a} \\ \\ \overrightarrow{O'A} = \vec{r}\,'_i \end{cases} ,$$

que podríamos enunciar diciendo que *"el momento territorial estático de una distribución de masas económicas respecto a un punto O', es igual al momento territorial estático respecto a otro punto O, más el momento de la masa económica total **m** supuestamente aplicada en el punto O".*

Como consecuencia de ello, si $m \neq 0$, el momento territorial respecto de cada punto es distinto, y en el caso de que exista uno, S, en el que $\overrightarrow{M_S} = 0$, a dicho punto S se le considerará como el centro de las masas económicas municipales m_i. Precisamente, tratándose de una distribución continua de las masas, el momento será:

$$\vec{M} = \iiint \vec{r} \cdot dm$$

y siendo la densidad económica del territorio: $\gamma = \gamma(\vec{r})$, se tiene que:

$$\vec{M} = \iiint \vec{r} \cdot \gamma \cdot dV \quad ,$$

que, en el caso particular de considerar γ = cte, quedará (por la propiedad de linealidad):

$$\vec{M} = \gamma \iiint \vec{r} \cdot dV$$

Siendo constante o no la densidad económica, definiremos como "momento geométrico del territorio F" al valor:

$$\vec{M} = \iiint_F \vec{r} \cdot dV \, ,$$

en el que se han sustituido las masas por volúmenes (o por áreas, en el caso corriente del Análisis Territorial, al considerar la densidad económica expresable en: €/Km^2), lo que equivale a suponer la densidad constante e igual a la unidad.

Interés especial reviste la consideración del momento estático respecto de una recta o eje territorial cualquiera (infraestructural, geográfico, administrativo o imaginario). En efecto, dado un cierto eje **e**, un versor o vector unitario **u**, de la misma dirección, y un punto O del eje territorial en cuestión, se define el momento estático respecto de este eje como la proyección sobre un plano perpendicular a **e**, que pase por O, del momento estático respecto a O. Vectorialmente, se cumple que:

$$\vec{M} = (\vec{u} \Lambda \vec{M_O}) \Lambda \vec{u} = (\vec{u} \Lambda \sum_{i=0}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i) \Lambda \vec{u} = \sum_{i=0}^{n} m_i (\vec{u} \Lambda \vec{r}_i) \Lambda \vec{u}$$

Resulta equivalente el tomar el momento estático respecto a O y proyectarlo sobre el plano, que considerar cada una de las proyecciones $\vec{\rho}_i$ de los vectores $\vec{r}_i$ sobre dicho plano (es decir, suponer proyectadas las masas económicas municipales m_i), quedando la expresión del momento estático:

$$\vec{M_e} = \sum_{i=0}^{n} m_i \cdot \vec{\rho}_i \quad .$$

De hecho, la anterior concepción del momento estático respecto de un eje territorial resulta mucho más intuitiva. La equivalencia citada puede probarse sin más que considerar que:

$\vec{\rho}_i = (\vec{u} \wedge \vec{r}_i) \wedge \vec{u}$, y sustituirlo en los sumatorios.

Intuitivamente, se observa que, en la anterior expresión, $\overrightarrow{\mathbf{M_e}}$ no depende del punto de referencia considerado. Efectivamente, siendo O y O' dos puntos del eje territorial, se cumplirá, como ya se ha visto antes:

$\overrightarrow{M_{O'}} = \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{O'O} \cdot m$, y, de aquí, se obtiene:

$$(\vec{u} \wedge \overrightarrow{M_{O'}}) \wedge \vec{u} = (\vec{u} \wedge \overrightarrow{M_O}) \wedge \vec{u} + (\vec{u} \wedge \overrightarrow{O'O}) \wedge \vec{u} \ . \ m = (\vec{u} \wedge \overrightarrow{M_O}) \wedge \vec{u} \ ,$$

pues, al ser los vectores u y $\overrightarrow{O'O}$ colineales, el segundo sumando es cero.

Siguiendo este proceso, conocido el momento territorial estático $\overrightarrow{M_e}$ podríamos deducir el momento respecto de otro eje territorial paralelo e' II e (como pudiera ser un meridiano o un paralelo geográfico respecto a otro), aunque obviaremos dicha determinación por comprensibles razones de espacio.

2.2. DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE MASAS TERRITORIAL

2.2.1. En el espacio discreto

Con una repartición de masas municipales (de renta, de población, ...) teóricamente homogénea (cosa difícil, habida cuenta de las notorias desigualdades que tienen lugar en la realidad, no ya sólo entre municipios más o menos próximos o colindantes, sino incluso en el interior de un mismo municipio), podríamos valernos para efectuar la determinación del centro de masas del procedimiento analítico basado en las ecuaciones componentes, pudiendo tenerse en cuenta relaciones especiales de simetría. Sin embargo, tal método podría llegar a resultar inaplicable, dada la considerable dificultad de las integraciones subsiguientes.

Para la determinación práctica del centro de gravedad de una repartición de masas municipales que considerásemos homogénea a efectos reales, se descompondría la masa total (regional) de un modo apropiado, al objeto de que los centros de gravedad parciales (comarcales) puedan hallarse fácilmente, determinando después gráficamente el centro de gravedad S del sistema de los n municipios así obtenido por medio de la ecuación:

$$m.\vec{s} = \sum_{i=0}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i$$

, que define el "momento territorial estático" de la distribución de las masas económicas, respecto al punto O, anteriormente definido.

Si reducimos nuestro problema al de una superficie plana, bastará con descomponerla en fajas paralelas y, a continuación, *efectuar la determinación del centro de gravedad valiéndonos del correspondiente polígono funicular,* aplicando a los centros de gravedad parciales (comarcales) de las distintas secciones fuerzas paralelas cuya resultante se determina. Finalmente, haciendo esto para dos direcciones perpendiculares entre sí, se obtiene el centro de gravedad buscado como punto de intersección de ambas resultantes. En la figura que sigue, puede verse el procedimiento seguido para la determinación del centro de gravedad de la superficie de una comarca o región en forma asimilable a una semielipse. El eje de simetría de la semielipse es una línea de gravedad; la otra dirección, que no es más que la resultante del sistema de fuerzas comarcal o regional, se ha construido por medio del polígono funicular. Así:

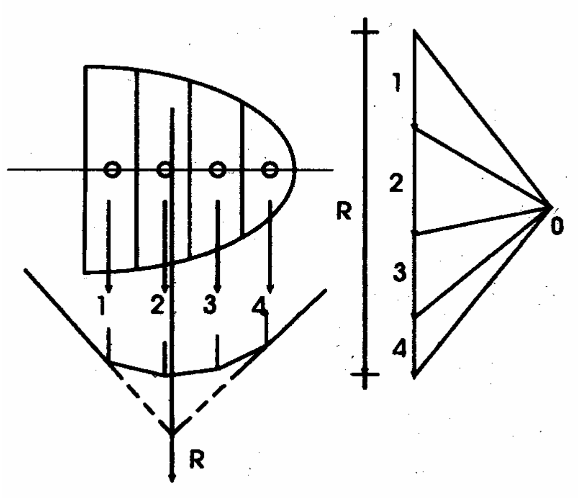

Fig. A-13.3. Centro de masas de un territorio semielíptico.

La determinación práctica del centro de masas de renta territorial la llevaremos a cabo analíticamente, determinando sus coordenadas con respecto a un sistema de ejes auxiliares y estableciendo un símil estático-gravitacional que nos ayudará a comprender mejor el problema planteado.

Supongamos que un territorio cualquiera (municipio, comarca, región, nación) es un cuerpo plano como el representado en la figura A-13.4, referido a 2 ejes coordenados, y dividido en **n** porciones elementales municipales (puntos pesados en el límite) de masas de renta: m_1, m_2, ..., m_i, ..., m_n . Apliquemos el teorema de Varignon ("el momento de la suma de varios vectores concurrentes es igual a la suma de los momentos de los vectores componentes") al sistema de fuerzas-peso de cada una de estas masas. Como dichas fuerzas valen:

$$P_i = m_i \cdot g$$

(g sería la aceleración de la gravedad, de valor medio 9,8062 m./seg^2), tendremos, llamando P al peso total o resultante de todo el territorio:

$$P = m_1\, g + m_2\, g + ... + m_i\, g + ... + m_n\, g = g \sum_{i=0}^{n} m_1 = g \cdot m\ .$$

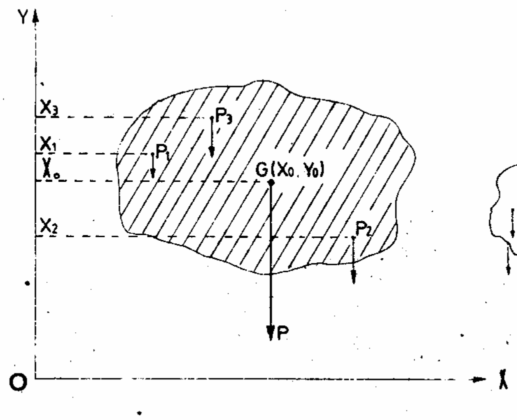

Fig. A-13.4. Determinación del c. d. g. de un territorio.

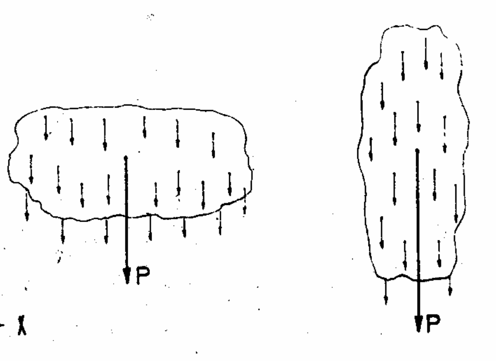

Fig. A-13.5. Centro de gravedad de un territorio.

El citado teorema de Varignon nos permite escribir, tomando como centro de momentos el origen de coordenadas:

$$x_1 m_1 g + x_2 m_2 g + ... + x_i m_i g + ... + x_n m_n g = x_0 g \sum_{i=0}^{n} m_i = x_0 g m = g \sum_{i=0}^{n} x_i m_i\ ;$$

de dónde se obtendrá el valor de la abscisa:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i m_i}{m}\ .$$

Análogamente, podría demostrarse que las coordenadas restantes (ordenada y cota taquimétrica) del centro de masas buscado vienen dadas por:

$$y_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i m_i}{m} \quad ; \quad z_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n} z_i m_i}{m}\ .$$

En el campo continuo, como tendremos ocasión de comprobar posteriormente, las coordenadas correspondientes al centro territorial de masas vendrían dadas por:

$$x_0 = \frac{\int x \cdot dm}{m} \quad ; \quad y_0 = \frac{\int y \cdot dm}{m} \quad ; \quad z_0 = \frac{\int z \cdot dm}{m} \quad .$$

Así pues, la distancia desde dicho centro de masas a una recta o eje territorial es la media ponderada de las distancias a que se encuentran, de dicho eje, cada una de las masas económicas o sociales que componen el sistema territorial en estudio, siendo el "peso" de cada sumando la masa de cada punto del territorio. Como consecuencia inmediata de ello, resultará que si estas distancias son todas ellas positivas, la media resultante será también positiva; es decir, que si todas las masas económicas se hallan en el mismo semiplano determinado por un eje, el centro territorial de masas estará en este mismo semiplano, y tomando varios ejes que encierren al conjunto de las masas económicas, dicho centro se hallará en el interior de la mínima figura convexa que encierre a las masas.

Obsérvese que, dadas las relaciones anteriores, las coordenadas del centro de gravedad de una unidad territorial cualquiera (municipio, comarca, región, nación) son independientes de su presencia o no en un campo gravitatorio, puesto que en ellas no aparece el valor de la constante **g,** y, por ello, juzgamos más correcto denominarle "centro de masas".

2.2.2. En el espacio continuo

Determinemos, ahora, las coordenadas del centro de masas de población o de renta de un territorio cualquiera A. Dividámoslo en los dominios parciales Δs_i muy pequeños (podrían ser, v. gr., los municipios). Si suponemos que la densidad superficial es igual a 1, la masa del dominio parcial será igual a su área. Si convencionalmente, suponemos que toda la masa de población o de renta de Δs_i está concentrada en alguno de sus puntos $P_i(\xi_i,\eta_i)$, podemos considerar el territorio como sistema de puntos materiales. En este caso, en virtud de las fórmulas anteriores, las coordenadas del centro de gravedad de este territorio serán determinadas, aproximadamente, por las igualdades:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i} \quad ; \quad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i \cdot \Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i} \quad .$$

Pasando al límite, cuando $\Delta s_i \rightarrow 0$, las sumas integrales en los numeradores y los denominadores de las fracciones se transforman en las integrales dobles, con lo que obtenemos las fórmulas exactas para calcular las coordenadas del centro territorial de masas de renta o de población:

$$x_0 = \frac{\iint_A x \cdot dx \cdot dy}{\iint_A dx \cdot dy} \qquad y_0 = \frac{\iint_A y \cdot dx \cdot dy}{\iint_A dx \cdot dy} \quad .$$

Estas fórmulas, deducidas para un territorio de densidad superficial igual a 1, son válidas, también, para otro territorio, que tenga otra densidad γ cualquiera, constante en todos los puntos.

Si la densidad superficial es variable:

$$\gamma = \gamma\,(x\,,\,y)\,,$$

las fórmulas correspondientes toman, entonces, la forma:

$$x_0 = \frac{\iint_A \gamma(x\,,\,y)\cdot x \cdot dx \cdot dy}{\iint_A \gamma(x\,,\,y)\cdot dx \cdot dy} \quad ; \quad y_0 = \frac{\iint_A \gamma(x\,,\,y)\cdot y \cdot dx \cdot dy}{\iint_A \gamma(x\,,\,y)\cdot dx \cdot dy} \quad .$$

Las expresiones de los numeradores respectivos:

$$M_y = \iint_A \gamma(x,\, y) \cdot x \cdot dx \cdot dy \qquad y \qquad M_x = \iint_A \gamma\,(x,\, y) \cdot y \cdot dx \cdot dy$$

se llaman "momentos territoriales estáticos" del territorio A respecto a los ejes coordenados Oy y Ox, como veremos posteriormente en el epígrafe correspondiente del siguiente Anexo de nuestra tesis, y son de tipo másico o ponderal.

La integral del denominador: $m = \iint \gamma(x,\, y)\cdot dx\cdot dy$ expresa la magnitud de la masa de población o de renta del territorio que nos ocupa.

Añadiendo una 3ª coordenada (de hecho, cualquier punto del territorio viene determinado por sus tres coordenadas UTM), y suponiendo el territorio como un volumen homogéneo, referido a ejes cartesianos rectangulares, las coordenadas del centro territorial de las masas socio-económicas vendrán dadas, análogamente, por:

$$x_0 = \frac{\iiint_F x \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint_F dx \cdot dy \cdot dz}\; ; \; y_0 = \frac{\iiint_F y \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint_F dx \cdot dy \cdot dz}\; ; \; z_0 = \frac{\iiint_F z \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint_F dx \cdot dy \cdot dz}$$

que resultan válidas para un territorio de densidad socioeconómica constante. Si la densidad fuera variable, por generalización del caso anterior, se tendría que:

$$\gamma = \gamma\ (x, y, z) \quad ,$$

con lo que las fórmulas anteriores tomarán la configuración:

$$x_0 = \frac{\iiint_F \gamma(x,y,z)\cdot x \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint_F \gamma(x,y,z)\cdot dx \cdot dy \cdot dz} \; ; \quad y_0 = \frac{\iiint_F \gamma(x,y,z)\cdot y \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint_F \gamma(x,y,z)\cdot dx \cdot dy \cdot dz}$$

$$z_0 = \frac{\iiint_F \gamma(x,y,z)\cdot z \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint_F \gamma(x,y,z)\cdot dx \cdot dy \cdot dz}$$

mientras que la integral de los denominadores:

$$m = \iiint_F \gamma\ (x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \ ,$$

expresará la magnitud de la masa socioeconómica del territorio en cuestión (FRANQUET, 1990/91).

2.2.3. Territorio de contorno poligonal

Podemos primero buscar el punto medio de cada lado A_1, A_2, A_3 que es el centro de gravedad de cada uno de ellos; y aplicarle un vector proporcional a la longitud, P_1, P_2, P_3 y encontrar la resultante por medio de un polígono funicular y sobre esta resultante habrá de estar el centro de gravedad. Si variamos la dirección de los vectores P_1, P_2, P_3 convirtiéndolos en P'_1, P'_2, P'_3, sobre la nueva resultante R', también debe de encontrarse el centro de gravedad pues es invariable, cuando varía la dirección; la intersección será el centro de gravedad.

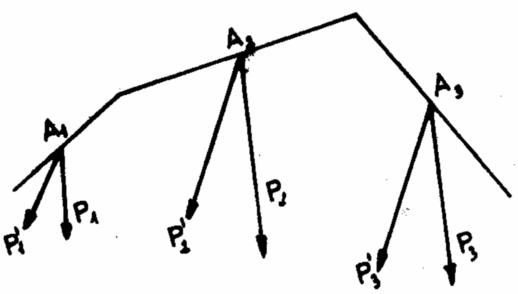

Fig. A-13.6. Contorno poligonal irregular.

Si fuese un contorno poligonal regular procederíamos de la manera siguiente: Unamos los extremos A y E, por el centro O del círculo; tracemos el eje OY paralelo a esa cuerda y bajemos la OI perpendicular: OX es el eje de simetría; así pues en él estará el centro de gravedad. Sean x_1, x_2 y x_3 las coordenadas del centro de gravedad de los lados del polígono, y teniendo un número de elementos proporcionales a ella, tendremos para abscisa x_0 del centro de gravedad la que se expresa a continuación.

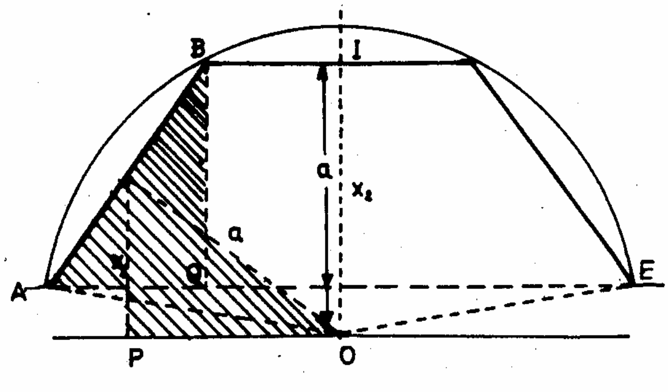

Fig. A-13.7. Contorno poligonal regular.

$$x_0 = \frac{1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + \ldots}{1+1+1+\ldots} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

, siendo **n** el número de lados del polígono territorial en estudio.

Unamos ahora **O** con el punto medio de un lado cualquiera AB; la apotema OM es igual para todos los lados, llamémosla **a**. Proyectemos AB sobre AE. Los triángulos ABQ y MPO nos dan:

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{AB}} = \frac{a}{l}; \overline{MP} = x_1; \frac{x_1}{\overline{AQ}} = \frac{a}{l}; x_1 = \frac{a \times \overline{AR}}{l}$$

Como obtendríamos lo mismo para las diferentes abscisas, la suma de todas ellas: $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ será igual a la relación constante a/l por la suma total de las proyecciones, que es AE, y tendremos, para valor de x_0:

$$x_0 = \frac{\overline{AE}}{nl} a$$

o sea, una cuarta proporcional entre la apotema, la cuerda y el perímetro. Si el contorno excediese de una semicircunferencia, algunas abscisas serían negativas, pero la fórmula general sería la misma. Si AE = 0, es decir, si se cerrase el contorno x_0= 0, se confundirían el centro de gravedad y el de la figura. La expresión de OG la podemos construir fácilmente haciendo un triángulo rectángulo MM'B cuya altura MM' = a y la hipotenusa M'E = L. Si llevamos sobre la hipotenusa BC = AE y trazamos una paralela, ésta será igual a x_0.

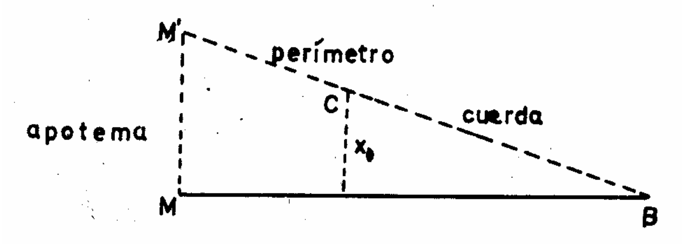

Fig. A-13.8. Triángulo auxiliar de cálculo.

Una extensión del caso anterior nos llevaría a la determinación del centro de masas de un territorio cuya planta fuera asimilable a la de un arco de círculo. En efecto, como que un círculo no es más que un polígono de infinito número de lados, puede aplicarse la fórmula anterior. La apotema se habrá convertido en radio y la proyección de todos los lados será la cuerda, de manera que:

$$x_0 = (r \cdot \text{cuerda})/L$$

Alternativamente, también puede encontrarse de la manera que sigue: Sobre la tangente en I del arco llevemos una longitud igual al semi-arco rectificado; unamos B' y O; en el punto B levantemos una perpendicular a BA hasta que encuentre en C a OB'; por último, desde C bajemos la perpendicular CG sobre OI, G es el centro de gravedad del territorio que nos ocupa, pues:

$$\frac{\overline{OG}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{IB'}};\ \frac{\overline{OG}}{r} = \frac{1/2\overline{AB}}{1/2L};\ \overline{OG} = \frac{r \times \overline{AB}}{L}$$

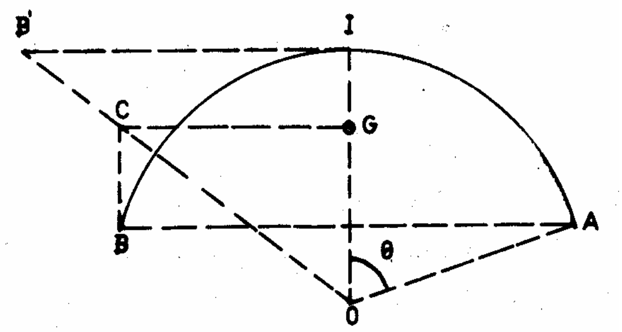

Fig. A-13.9. Centro de masas de un territorio circular.

Analíticamente, tendremos que la longitud del arco será: $2r\theta$ y la longitud de la cuerda: $2r$ x senθ; la fórmula será:

$$x_0 = \frac{2r^2 x\mathrm{sen}\ \theta}{2r\theta} = \frac{r x\mathrm{sen}\ \theta}{\theta}$$

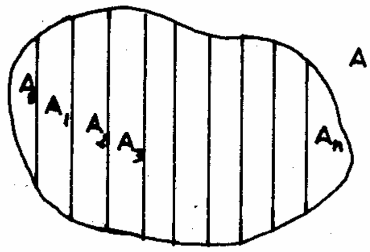

Fig. A-13.10. Territorio de configuración irregular.

Cuando se trate de una superficie territorial irregular podemos descomponerla en trapecios: A_0, A_1, A_2, A_3, ... A_n, si bien conviene a veces hacer las fajas más estrechas y considerarlas como rectángulos: B_0, B_1, B_2 ... cuyos centros de gravedad ya veremos más adelante cómo se hallan.

2.3. EJEMPLOS GENERALES DE APLICACIÓN

2.3.0. Simplificación operativa en la determinación del centro territorial de masas

Sin entrar en el detalle de los diversos procedimientos matemáticos, geométricos o analíticos -u otros artificios más o menos aproximados- que pueden emplearse en la determinación del centro de gravedad de un territorio cualquiera, que resultan sobradamente conocidos o que, en todo caso, pueden hallarse en numerosos formularios y textos de consulta, admitiremos, en el Análisis Territorial, el siguiente convenio práctico:

1.º) El centro de gravedad de la superficie de un territorio se supondrá siempre situado sobre el eje longitudinal del mismo, tanto si se trata de un territorio simple como compuesto por varios sub-territorios o cuadriláteros.

2.º) En un territorio simple, si sus lados menores son paralelos, el centro de gravedad se hallará, evidentemente, en el eje longitudinal. Si estos no son paralelos (convergentes o divergentes), se tomará como centro del territorio la proyección ortogonal, sobre dicho eje, del verdadero centro de gravedad de la superficie del territorio.

3.º) En el caso de un territorio compuesto por varios cuadriláteros, se determinará separadamente el centro de gravedad de cada porción, según se acaba de indicar. En cada uno de ellos, se aplicará un peso equivalente a la superficie del sub-territorio correspondiente y se determinará el centro de gravedad de la totalidad del territorio tomando momentos respecto al origen del eje longitudinal, suponiendo a éste rectificado.

Sea, por ejemplo, el territorio (región) compuesto por tres cuadriláteros (comarcas) siguiente (FRANQUET, 1990):

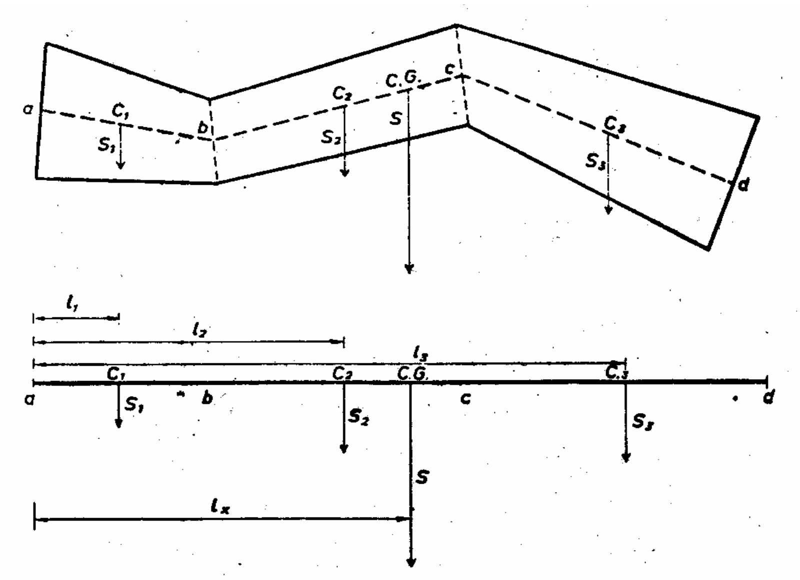

Fig. A-13.11. Territorio poligonal irregular.

Tomando momentos con respecto al punto **a**, origen del eje longitudinal del territorio, tendremos:

$$S \cdot l_X = S_1 \cdot l_1 + S_2 \cdot l_2 + S_3 \cdot l_3 \text{ , de dónde:}$$

$$l_X = (S_1 \cdot l_1 + S_2 \cdot l_2 + S_3 \cdot l_3)/S$$

Generalizando al caso de un territorio compuesto por **n** porciones cuadrangulares, se utilizará la siguiente fórmula aproximada:

$$l_X = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i \cdot l_i}{S} \text{ , siendo } S = \sum_{i=1}^{n} S_i \text{ , en la que:}$$

l_x =distancia del centro de gravedad o de masas al comienzo del eje longitudinal, situado en el lado transversal tomado como origen o cabecera del territorio.
l_i =distancia del centro de gravedad o de masas de cada sub-territorio al mismo punto o lugar geográfico origen.
S_i=superficie del sub-territorio correspondiente.
S =superficie total del territorio.

Todas las distancias se entenderán tomadas a lo largo del desarrollo del eje longitudinal y se expresarán, normalmente, en Km, mientras que las superficies lo serán en Km^2. También podrán usarse el Mm y el Mm^2.

El procedimiento analítico descrito es el que consideramos más práctico y aconsejable. No obstante, puede seguirse cualquier otro sistema, como el de la estática gráfica al que también nos hemos referido anteriormente, en el que se determina la línea de aplicación de la resultante mediante el polígono de fuerzas y el correspondiente polígono funicular, así:

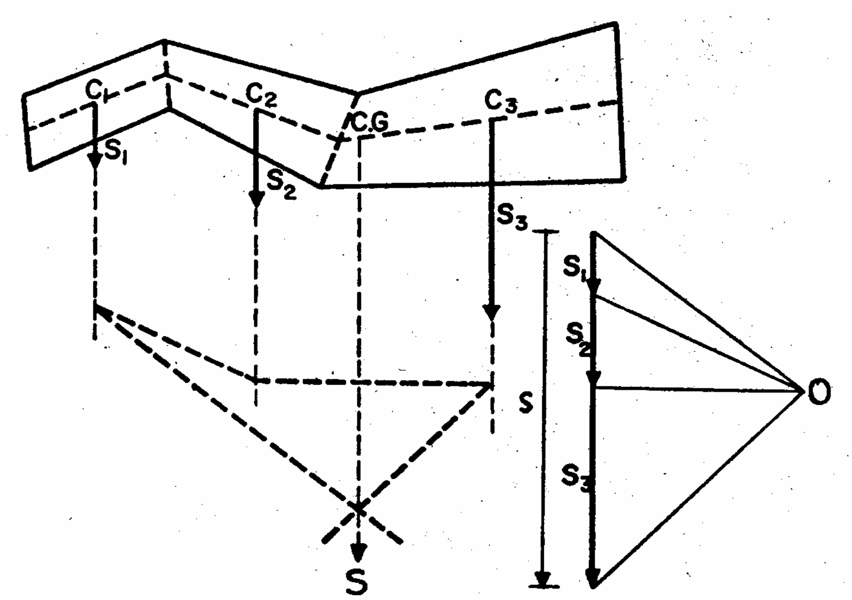

Fig. A-13.12. Polígonos de fuerzas y funicular.

2.3.1. Masas no homogéneas en el campo discreto

Se trata de hallar el centro de masas de las rentas de una cierta región compuesta por tres comarcas: C_1, C_2 y C_3, cuya configuración planimétrica se ha simplificado en la figura siguiente, y con los siguientes datos de población de derecho, renta "per capita" y distancias:

P_1 = 351.000 habitantes	a = 60 Km.
w_1 = 7.150 €/hab.	b = 30 Km.
P_2 = 408.000 habitantes	c = 50 Km.
w_2 = 7.970 €/hab.	r = 20 Km.
P_3 = 192.000 habitantes	
w_3 = 8.620 €/hab.	

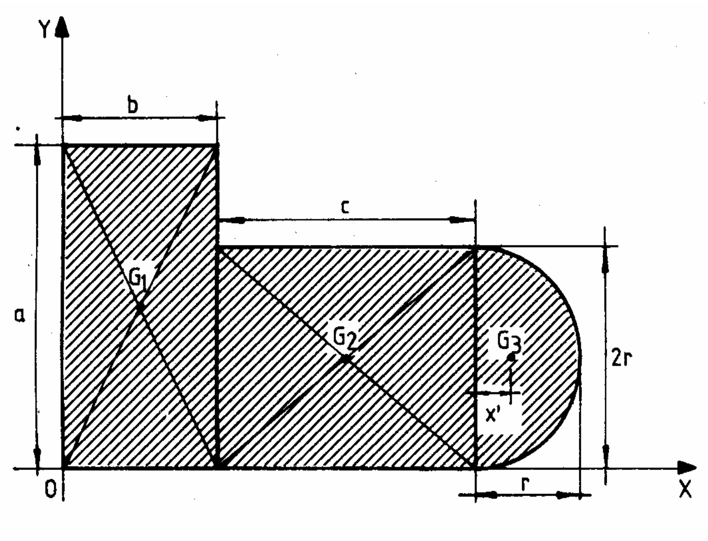

Fig. A-13.13. Región compuesta de tres comarcas.

Solución:

Los centros de gravedad G_1, G_2 y G_3 de cada comarca son conocidos, puesto que se trata de los centros geométricos de los respectivos rectángulos por intersección de sus diagonales, en el caso de los dos primeros; en cuanto a G_3, lo calcularemos aplicando el 2º teorema de Guldin o de Pappus, a saber: "El volumen engendrado por una superficie que gira alrededor de un eje que no la corta y que se halla situado en su plano, es igual al área de aquélla multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita por su centro de gravedad" (FRANQUET, 1990).

En nuestro caso, el semicírculo engendra, al girar alrededor de su diámetro, una esfera de volumen:

$V = S\cdot 2\cdot\pi\cdot x'$; luego, desarrollando esta expresión:

$(4/3)\cdot\pi\cdot r^3 = (\pi\cdot r^2/2)\cdot 2\cdot\pi\cdot x'$, de donde se tiene el valor de la abscisa parcial que hemos representado o acotado en la figura anterior:

$$x' = 4r/3\pi$$

Pues bien, tomemos el punto O como centro u origen de coordenadas de 2 ejes ortogonales OX y OY, respecto de los cuales tomaremos momentos como aplicación del teorema de Varignon, así:

$R_1 = P_1 \cdot w_1 = 351 \cdot 7.150 = 2.509.650$
$R_2 = P_2 \cdot w_2 = 408 \cdot 7.970 = 3.251.760$
$R_3 = P_3 \cdot w_3 = 192 \cdot 8.620 = 1.655.040$

R (total)= ....= 7.416.450

que son, respectivamente, las rentas totales de las 3 comarcas que constituyen la región en estudio, y la renta total regional, expresadas en 10^3 €.

Así mismo, se tendrá:

$$\begin{cases} R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_3 = R_{total} \cdot x_0 \\ R_1y_1 + R_2y_2 + R_3y_3 = R_{total} \cdot y_0 \end{cases}$$

con lo que, sustituyendo términos, se tiene para la abscisa:

$$x_0 = \frac{R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_3}{R_{Total}} =$$

$$= \frac{R_1\frac{b}{2} + R_2(b + \frac{c}{2}) + R_3(b + c + \frac{4r}{3\pi})}{R_{Total}} =$$

$$= \frac{2.509.650 \times \frac{30}{2} + 3.251.760 \times (30 + \frac{50}{2}) + 1.655.040(30 + 50 + \frac{4 \times 20}{3\pi})}{7.416.450} =$$

= 48’94 Km.

Del mismo modo, se tendrá para la ordenada:

$$y_0 = \frac{R_1y_1 + R_2y_2 + R_3y_3}{R_{Total}} == \frac{R_1\frac{a}{2} + R_2r + R_3r}{R_{Total}} =$$

$$= \frac{2.509.650 \times \frac{60}{2} + 3.251.760 \times 20 + 1.655.04020}{7.416.450} =$$

= 23’38 Km.

, luego el centro regional de masas de renta será el punto del territorio de coordenadas:

G(48’94, 23’38)

El resumen de las características de la región estudiada sería el siguiente:

-Población total = 351.000 + 408.000 + 192.000 = 951.000 habitantes.
-Superficie comarcal $C_1 = a \cdot b = 60 \cdot 30 = 1.800$ Km^2.
-Superficie comarcal $C_2 = c \cdot 2 \cdot r = 50 \cdot 2 \cdot 20 = 2.000$ Km^2.
-Superficie comarcal $C_3 = (\pi \cdot r^2)/2 = (\pi \cdot 20^2)/2 = 628$ Km^2.
-Superficie total regional = 1.800 + 2.000 + 628 = 4.428 Km^2.
-Densidad de población = 951.000/4.428 = 214’8 hab./Km^2.
-Densidad de renta media regional = $(7.416.450 \cdot 10^3)/4.428$ = =1.674.898’4 €/km^2.
-Renta “per capita” media regional = $(7.416.450 \cdot 10^3)/(951 \cdot 10^3)$ = =7.798’58 €/hab.

2.3.2. Masa de renta homogénea en el campo continuo

Si la masa de renta por unidad superficial es la misma en todo el territorio estudiado, decimos que su densidad de renta es constante. Sabemos, por otra parte, que el momento de un área plana con respecto a una línea es el producto de dicha área por la distancia directa de su centro de masas a la línea en cuestión. Pues bien, acumulativamente, el momento de un área compuesta (región) con respecto a la línea vendrá dada por la suma de los momentos de las áreas parciales (comarcas) con respecto a dicha línea.

Para un territorio cualquiera de área A y de centro de masas $G(x_0, y_0)$, los momentos con respecto a los ejes coordenados serán:

$$\begin{cases} M_x = A \cdot y_0 \\ M_y = A \cdot x_0, \end{cases}$$

a los que, posteriormente, denominaremos “momentos territoriales estáticos” superficiales o geométricos.

a) En el siguiente ejemplo, trataremos de determinar el centro de masas de las rentas de una cierta comarca que supondremos homogénea, cuya configuración planimétrica puede verse en la figura siguiente:

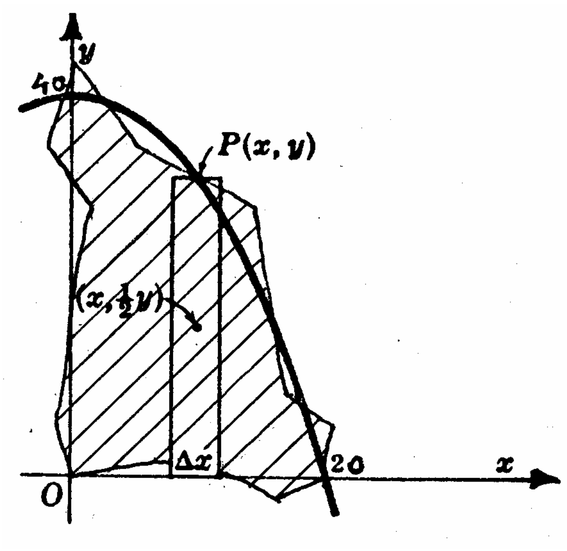

Fig. A-13.14. Comarca de asimilación parabólica.

Como puede observarse, puede asimilarse con gran aproximación el área o superficie de esta comarca con la que determina la parábola de ecuación = y = 4 - x^2, en el primer cuadrante.

El centro del rectángulo aproximado o genérico tendrá de coordenadas: (x, y/2). Para el logro de una mayor simplicidad operativa, se han expresado las distancias en miriámetros (1 Mm. = 10 Km.), con lo que se tendrá la siguiente superficie comarcal, en base al propio concepto de integral definida:

$$A = \int_0^2 y \cdot dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx = (4x - x^3/3)_0^2 = 16/3 \text{ Mm.}^2 = 533 \text{ Km}^2$$

También, se tendrá el momento comarcal estático:

$$M_x = \int_0^2 1/2 y \cdot y \cdot dx = 1/2 \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = 1/2 \int_0^2 (16 + x^4 - 8x^2) dx =$$
$$= 1/2 (16x + x^5/5 - 8x^3/3)_0^2 = 1/2 (32 + 32/5 - 64/3) = 128/15 \text{ Mm.}^3 =$$
$$= 8.533 \text{ Km}^3.$$

Del mismo modo:

$$M_y = \int_0^2 x \cdot y \cdot dx = \int_0^2 x(4 - x^2) \cdot dx = \int_0^2 (4x - x^3) \cdot dx =$$
$$= (4x^2/2 - x^4/4)_0^2 = 4 \text{ Mm.}^3 = 4.000 \text{ Km.}^3$$

, con lo que las coordenadas del centro comarcal de masas G, serán:

$$\begin{cases} x_0 = M_y/A = 4.000/533 = 7'50 \text{ Km.} \\ y_0 = M_x/A = 8.533/533 = 16'00 \text{ Km.} \end{cases}$$

Complementariamente, si conocemos que dicha comarca tiene una población de derecho de: P = 160.000 habitantes, con una renta familiar disponible “per capita” de 8.500 €/Hab., se tendrán las siguientes características comarcales:

-Renta total = P · w = 160 · 8.500 = 1.360.000 €
-Densidad de población = 160.000/533 = 300’0 hab./Km^2.
-Densidad de renta comarcal = 1.360.000/533 = 2.551’59 €/Km^2.

b) En el presente ejemplo, determinaremos las coordenadas del centro O de las masas de renta de una región homogénea, cuya configuración planimétrica se asemeje al área encerrada, en el primer cuadrante, por la elipse de ecuación reducida o canónica:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

(expresando los semiejes territoriales **a** y **b** en Mm.).

En este caso, aplicaremos las fórmulas deducidas en el epígrafe correspondiente, con lo que se tendrá la abscisa:

$$x_0 = \frac{\iint_A x \cdot dx \cdot dy}{\iint_A dx \cdot dy} = \frac{M_y}{A} = \frac{\int_0^a \left(\int_0^{b/a\sqrt{a^2-x^2}} x \cdot dy\right) \cdot dx}{\int_0^a \left(\int_0^{b/a\sqrt{a^2-x^2}} dy\right) \cdot dx} = \frac{b/a \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot x \cdot dx}{\pi \cdot a \cdot b / 4} =$$

$$= \frac{-\,b/3a \left[(a^2 - x^2)^{3/2}\right]_0^a}{\pi \cdot a \cdot b / 4} = \frac{4a}{3\pi} \text{Mm}.$$

Operando del mismo modo, obtendremos la ordenada:

$$y_0 = \frac{\iint_A y \cdot dx \cdot dy}{\iint_A dx \cdot dy} = \frac{M_x}{A} = \frac{\int_0^a \left(\int_0^{b/a\sqrt{a^2-x^2}} y \cdot dy\right) \cdot dx}{\pi \cdot a \cdot b / 4} = \frac{4b}{3\pi} \text{Mm}.$$

, siendo el valor de los momentos regionales estáticos con respecto a ambos ejes coordenados:

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= \frac{4b}{3\pi} \cdot \frac{\pi \cdot ab}{4} = \frac{a \cdot b^2}{3} Mm^3. \\ M_y &= \frac{4a}{3\pi} \cdot \frac{\pi \cdot ab}{4} = \frac{a^2 \cdot b}{3} Mm^3. \end{aligned}}$$

Veamos, en fin, que el área o superficie de la región podría haberse determinado aplicando el propio concepto de integral definida. Efectivamente, de la ecuación de la elipse, se deduce que:

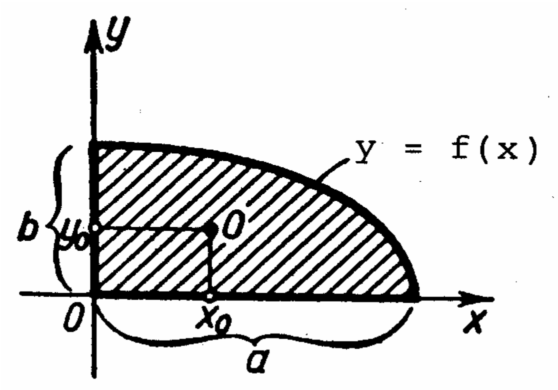

Fig. A-13.15. Región de configuración elíptica.

$$y^2 / b^2 = 1 - x^2 / a^2 = (a^2 - x^2)/a^2 \; ; \; y^2 = b^2/a^2 \cdot (a^2 - x^2)$$, de dónde:

$$y = b / a \sqrt{a^2 - x^2} = f(x)$$. O sea:

$$A = \int_0^a b / a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = b / a \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$$

que es la integral de una función irracional, por lo que efectuaremos la sustitución o cambio de variable independiente:

$$\boxed{\begin{array}{c} x = a \cdot \operatorname{sen} t \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos t \\ dx = a \cdot \cos t \cdot dt \end{array}}$$

y los nuevos límites de integración serán:

$$\begin{cases} x = 0 \ldots & \operatorname{sen} t = 0 \ldots \quad t = 0 \\ x = a \ldots & \operatorname{sen} t = 1 \ldots \quad t = \pi / 2 \end{cases}$$, con lo que:

$$A = b / a \int_0^{\pi/2} a \cdot \cos t \cdot a \cdot \cos t \cdot dt = a \cdot b \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot dt =$$

$$= a \cdot b \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} \cdot dt = \frac{a \cdot b}{2}\left(t + \frac{\text{sen} 2t}{2}\right)_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{4} \text{ Mm.}^2$$, como se quería demostrar.

c) Veamos, así mismo, cómo este tipo de problemas, en el Análisis Territorial, pueden enfocarse y resolverse a partir de la aplicación del concepto de integral curvilínea. Por ejemplo, en el caso que nos ocupa, se trataría de calcular el área del territorio encerrada por una elipse en el primer cuadrante del círculo, viniendo expresada la ecuación de dicha sección cónica por sus coordenadas paramétricas, a saber:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \text{sen } t \end{cases}$$

En efecto, sabiendo que el área total del territorio encerrada por una curva viene dada por la expresión de una integral continua del tipo :

$1/2 \int_c (x \cdot dy - y \cdot dx)$, se tendrá una superficie de:

$$A = 1/4 \cdot 1/2 \int_c (x \cdot dy - y \cdot dx) = 1/8 \int_0^{2-\pi} (ab \cdot \cos^2 t + ab \cdot \text{sen}^2 t) \cdot dt =$$

$$= \frac{a \cdot b}{8} \int_0^{2-\pi} dt = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{4} \text{ Mm.}^2$$, c. s. q. d.

d) En este mismo orden de ideas, si se tratara de un territorio de configuración planimétrica asimilable a una curva hipocicloide de 4 puntas, cuyas ecuaciones paramétricas fueran:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos^3 t \\ y = r \cdot \text{sen}^3 t \end{cases}$$

el área de territorio encerrado por la misma vendría dada por:

$$\begin{cases} dx = -3\, r \cdot \cos^2 t \cdot \text{sen } t \cdot dt \\ dy = 3\, r \cdot \text{sen}^2 t \cdot \cos t \cdot dt \end{cases}$$

, con lo que se tendrá una superficie contenida de:

$$A = 1/2 \int_c (x \cdot dy - y \cdot dx) =$$

$$= 1/2 \int_c (3\, r^2 \cdot \cos^4 t \cdot \text{sen}^2\, t + 3\, r^2 \cdot \text{sen}^4\, t \cdot \cos^2 t)\, dt =$$

$$= 3\, r^2 / 2 \int_c \cos^2 t \cdot \text{sen}^2\, t \cdot dt$$

De hecho, la hipocicloide en cuestión será la curva:

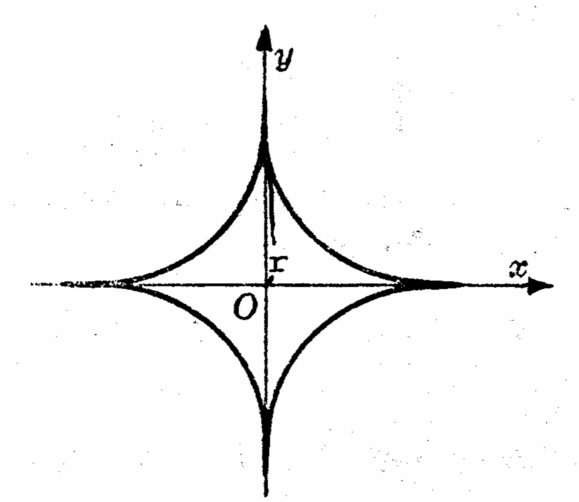

Fig. A-13.16. Territorio de planta en hipocicloide.

, luego los límites de integración serán: 0 y $\pi/2$, con lo que:

$$A = \frac{3r^2}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot \text{sen}^2\, t \cdot dt = 6\, r^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}^2\, 2\, t}{4}\, dt =$$

$$= 6r^2/4\, [\, t/2 - \text{sen}\, 4\, t/8\,]_0^{\pi/2} = \frac{6 \cdot \pi \cdot r^2}{16} = \frac{3 \cdot \pi \cdot r^2}{8}\ Mm^2 .$$

2.3.3. Masa de renta de densidad variable en el campo continuo

a) Si la masa de renta por unidad superficial es distinta a lo largo y ancho del territorio estudiado, tendremos que su densidad de renta es también variable. Este supuesto puede considerarse perfectamente real, dado que es fácil sospechar que dicha densidad de renta es mayor con frecuencia en las proximidades de la capital municipal, comarcal o regional, disminuyendo progresivamente con el alejamiento físico de dicho centro urbano (FRANQUET, 1990/91).

b) En el siguiente ejemplo, trataremos de hallar las coordenadas del centro de masas de una comarca cuya densidad de renta disminuye continuamente, punto a punto, con la distancia a la capital comarcal. Su configuración planimétrica puede verse en la figura siguiente:

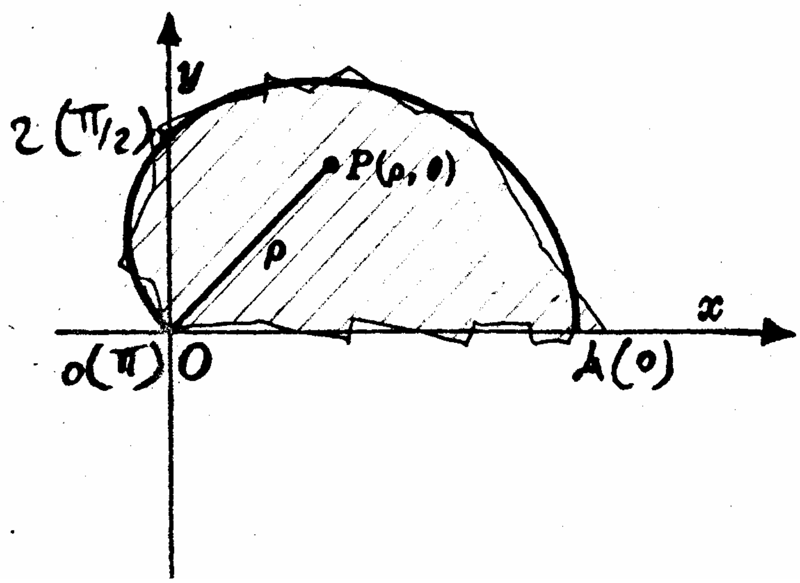

Fig. A-13.17. Comarca con masa de renta de densidad variable.

En este caso, el contorno o perímetro comarcal ha sido asimilado a la curva semicardioide correspondiente a las ordenadas positivas (1º y 2º cuadrantes del círculo), de ecuación expresada en coordenadas polares:

$$\rho = 2\ (1 + \cos\theta)$$

y la densidad de la renta varía con la distancia desde el polo o capital comarcal. (A la vista de su planta en forma de medio corazón, es lícito sospechar que se trataría de una comarca "romántica").

Al efectuar el cambio de variable en la integral doble para pasar de coordenadas cartesianas rectangulares a coordenadas polares, se tiene:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

, tal como puede comprobarse de la contemplación de la figura siguiente:

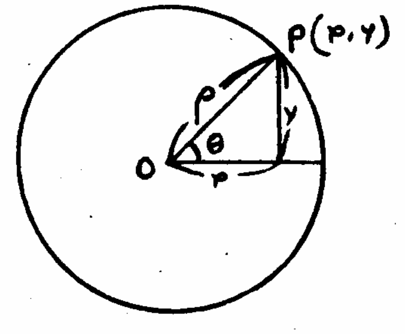

Fig. A-13.18. Coordenadas polares de un enclave territorial.

El determinante funcional jacobiano IJI de la transformación, que deberá tomarse siempre en valor absoluto, vendrá dado por:

$$|J| = \frac{\delta(x,y)}{\delta(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \delta x/\delta\rho & \delta x/\delta\theta \\ \delta y/\delta\rho & \delta y/\delta\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\cdot\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cdot\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \rho\cdot\cos^2\theta + \rho\cdot\operatorname{sen}^2\theta = \rho \neq 0\,,\quad \forall(\rho,\theta)\neq(0,0)$$

(que es el jacobiano de las variables x e y con respecto al módulo ρ y al argumento θ), luego el nuevo elemento infinitesimal de superficie, será:

$$dA = dx\cdot dy = |J|\cdot d\rho\cdot d\theta = \rho\cdot d\rho\cdot d\theta\ ;$$

Se ve que el elemento de área en coordenadas polares corresponde al área de un recinto plano limitado por las dos circunferencias con centro en el origen y radios: ρ, $\rho + d\rho$, y las dos semirrectas que parten del origen y forman con el eje OX los ángulos: θ, $\theta + d\theta$.

La masa de renta, será:

$$m = \iint_R \delta(\rho,\theta)\cdot dA = \int_0^\pi\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\cdot\rho\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\theta = k\int_0^\pi\int_0^{2(1+\cos\theta)} \rho^2\cdot d\rho\cdot d\theta =$$
$$= k\int_0^\pi \left(p^3/3\right)_0^{2(1+\cos\theta)} d\theta = 8/3\cdot k\cdot\int_0^\pi (1+\cos\theta)^3\cdot d\theta = (20/3\cdot\pi\cdot k)\text{ euros}$$

Del mismo modo, se tendrán los momentos estáticos comarcales de tipo ponderal o másico, a saber:

$$M_x = \iint_R \delta(\rho,\theta)\,y\,dA = \int_0^\pi\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\cdot\rho\cdot\rho\cdot sen\,\rho\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\theta =$$
$$= k\int_0^\pi\int_0^{2(1+\cos\theta)} \rho^3\cdot sen\,\theta\cdot d\rho\cdot d\theta = k\int_0^\pi \left(p^4/4\right)_0^{2(1+\cos\theta)} sen\,\theta\cdot d\theta =$$
$$= 4k\int_0^\pi (1+\cos\theta)^4\cdot sen\,\theta\cdot d\theta = (128/5k)\text{ euros}\cdot\text{Mm} = (256\cdot k)\ euros\cdot\text{Km.}$$

y el otro momento estático comarcal será:

$$M_y = \iint_R \delta(\rho,\theta)x\ dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\cdot\rho\cdot\rho\cdot\cos\theta\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\theta =$$
$$= k\int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} \rho^3\cdot\cos\theta\cdot d\rho\cdot d\theta = k\int_0^{\pi}\left(p^4/4\right)_0^{2(1+\cos\theta)}\cos\theta\cdot d\theta =$$
$$= 4k\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\cdot\cos\theta\cdot d\theta = (14\cdot\pi\cdot k)\ \text{euros}\cdot\text{Mm} = (140\cdot\pi\cdot k)\ euros\ \cdot\text{Km.}$$

Así mismo, la superficie comarcal vendrá dada por la siguiente integral definida (de hecho, es conocido que dicha área equivaldrá a seis veces la del semicírculo generador de diámetro igual a 2 Mm. = 20 Km.):

$$A = 1/2\int_{\theta_2}^{\theta_1} p^2\cdot d\theta = 1/2\int_0^{\pi} 4(1+\cos\theta)^2\cdot d\theta =$$
$$= 2\int_0^{\pi}(1+\cos^2\theta + 2\cos\theta)\cdot d\theta = (por\ \text{descomposición}) =$$
$$= 2\int_0^{\pi} d\theta + 2\int_0^{\pi}\cos^2\theta\cdot d\theta + 4\int_0^{\pi}\cos\theta\cdot d\theta =$$

= (por aplicación sucesiva de la regla de Barrow) =

$$= 2\cdot(\theta)_0^{\pi} + 2(\theta/2 + \text{sen } 2\theta/4)_0^{\pi} + 4\cdot(\text{sen } \theta)_0^{\pi} =$$
$$= 2\cdot\pi + 2\cdot\pi/2 + 4\cdot 0 = 3\cdot\pi\ \text{Mm.}^2 = 942\ \text{Km.}^2.$$

$$(\text{Nótese que}: \int\cos^2\theta\cdot d\theta = \int\left(\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}\right)^2\cdot d\theta =$$
$$= \int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = 1/2\int(1+\cos 2\theta)\cdot d\theta =$$

= $\theta/2$ + sen $2\theta/4$ + C , como queríamos demostrar).

Con ello, las coordenadas del centro comarcal de masas de renta G, vendrán dadas por las expresiones:

$$\begin{cases} x_0 = M_y / m = \dfrac{14\cdot\pi\cdot k}{20/3\cdot\pi\cdot k} = 2'100\ \text{Mm.} = 21'00\ \text{Km.} \\ \\ y_0 = M_x / m = \dfrac{128/5\cdot k}{20/3\cdot\pi\cdot k} = 1'222\ \text{Mm.} = 12'22\ \text{Km.} \end{cases}$$

Si conocemos que dicha comarca tiene una población de derecho de 290.000 habitantes, con una renta familiar disponible "per capita" de 8.350 €/habitante, se tendrán las siguientes características comarcales:

- Renta total = P x w = 290 x 8.350 = 2.421.500 x 10^3 €
- Densidad de población = 290.000/942 = 307'8 hab./Km^2.
- Densidad media de renta comarcal = 2.421.500 x 10^3/942 = =2.570.594'5 €/Km^2.

2.3.4. Generalizaciones

Una generalización del problema presentado en el anterior epígrafe al espacio tridimensional (agregando la variable "cota taquimétrica" o "altitud topográfica" del territorio estudiado) nos conduciría a considerar el elemento infinitesimal de masa:

$$dm = \delta\ (x, y, z) \cdot dV \quad ,$$

puesto que la masa de un cuerpo homogéneo de volumen V y densidad δ viene dada por la expresión: $m = \delta \cdot V$.

En nuestro caso, por tratarse de una masa de densidad variable, se tendrá que:

$$m = \iiint_R \delta(x,y,z)\overbrace{\cdot dx \cdot dy \cdot dz}^{dV} = \int_{x_1}^{x_2} dx \overbrace{\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} dy}^{x=cte.} \overbrace{\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \delta(x,y,z)dz}^{\substack{x=cte.\\ y=cte.}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i)\cdot\Delta V_i \quad ,$$

siendo R un dominio de integración en el espacio tridimensional, limitado por una superficie, y siendo: δ (x, y, z) una función real de tres variables reales, continua en el dominio de definición R.

Del mismo modo, podemos realizar el cambio de variable a **u**, **v** y **w**, relacionadas con las coordenadas cartesianas **x**, **y**, y **z** mediante las fórmulas:

$$\begin{cases} x = h_1\ (u, v, w) \\ y = h_2\ (u, v, w) \\ z = h_3\ (u, v, w) \end{cases}$$

donde las variables **x**, **y** y **z** están definidas en los puntos (u, v, w) de un recinto V' y admiten derivadas primeras continuas, con lo que (PUIG, 1970):

$$\iiint_V \delta\ (x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz =$$

$$= \iiint_{V'} \delta\ [h_1 (u,v,w),\ h_2 (u, v, w),\ h_3 (u, v, w)] \cdot \mathrm{I\ J\ I} \cdot du \cdot dv \cdot dw \quad ,$$

siendo IJI el determinante funcional jacobiano distinto de cero para todo (u, v, w) $\in$ V', expresado así:

$$\mathrm{IJI} = \begin{vmatrix} \delta x / \delta u & \delta x / \delta v & \delta x / \delta w \\ \delta y / \delta u & \delta y / \delta v & \delta y / \delta w \\ \delta z / \delta u & \delta z / \delta v & \delta z / \delta w \end{vmatrix} = \delta(x,y,z) / \delta(u,v,w), \text{ y también:}$$

$$V \xrightarrow{\text{Transform.}} V'$$

mientras que: IJI · du · dv · dw , representa el elemento infinitesimal de volumen expresado en coordenadas curvilíneas.

Si generalizamos al caso de una función de **n** variables, definida en un dominio n-dimensional, es decir, en un conjunto convexo, denso y cerrado de puntos del espacio métrico n-dimensional que tales variables definen, en la que se incorporarían nuevas variables o características a las estrictamente geográficas del territorio estudiado, se tendría la integral múltiple:

$$\iiint \underset{n}{\underline{\ldots\ldots}} \int_T \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{dx_1 \cdot dx_2 \ldots dx_n}{\pi_{i=1}^{n} dx_i}$$

con las mismas especificaciones teóricas que en los casos anteriores.

En el caso particular de realizar el cambio de variable en la integral triple para pasar de coordenadas cartesianas rectangulares a coordenadas semipolares o cilíndricas, se tendrán las fórmulas:

$$x = \rho \cdot \cos\varphi\ ,\quad y = \rho \cdot \mathrm{sen}\varphi\ ,\ z = z\ ,$$

o bien las correspondientes para la transformación inversa:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \varphi = \mathrm{arc\ tag}\ y/x\ ,\ z = z\ .$$

Véase, al respecto, la figura siguiente:

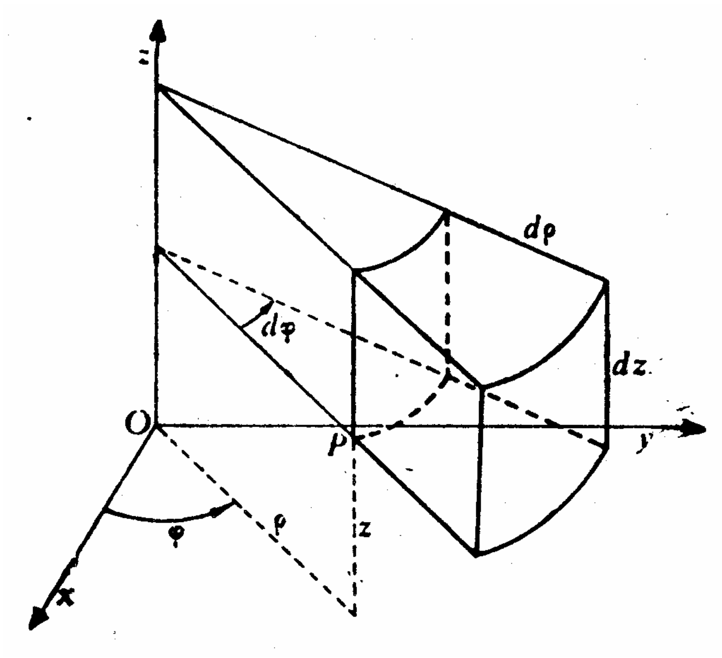

Fig. A-13.19. Coordenadas semipolares o cilíndricas.

A partir de ellas, se calcula el jacobiano de la transformación:

$$|J| = \delta(x,y,z) / \delta(\rho,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\cdot\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \rho\cdot\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \;;$$

luego el elemento de volumen en dichas coordenadas es:

$$\rho \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot dz \;.$$

Contemplando la figura A-13.19 a partir del triedro de referencia Oxyz, veamos que este volumen corresponde al de un recinto limitado por dos cilindros de eje Oz y cuyos radios son: ρ y $\rho + d\rho$, los dos semiplanos limitados por el eje Oz y que forman con el plano Oxz los ángulos φ y $\varphi + d\varphi$, y los dos planos paralelos al plano Oxy por los puntos de cotas z y z + dz.

Así mismo, el paso de coordenadas cartesianas rectangulares a coordenadas polares o esféricas, se regirá por las fórmulas:

$$x = r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\varphi \;,\quad y = r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi \;,\quad z = r \cdot \cos\theta$$

, para cuya transformación inversa se tiene:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \;,\quad \theta = \text{arc tg } \sqrt{x^2 + y^2} / z \;,\quad \varphi = \text{arc tg } y/x$$

A partir de ellas, se deduce el jacobiano (PUIG, 1970):

$$|J| = \delta(x,y,z) / \delta(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \text{sen}\theta\cdot\cos\varphi & r\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta & -r\cdot\text{sen}\theta\cdot\text{sen}\varphi \\ \text{sen}\theta\cdot\text{sen}\varphi & r\cdot\text{sen}\varphi\cdot\cos\theta & r\cdot\text{sen}\theta\cdot\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\cdot\text{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \cdot \text{sen}\theta$$

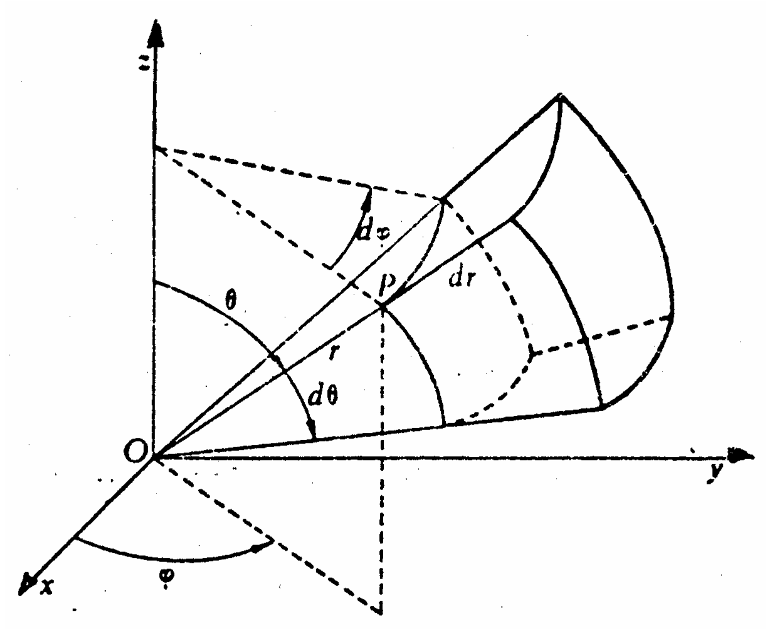

Fig. A-13.20. Coordenadas polares o esféricas.

De este modo, el elemento de volumen en estas coordenadas se expresará por: $r^2 \cdot \text{sen}\ \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$.

Este volumen, según puede verse en la figura A-13.20, corresponde al de un cuerpo limitado por dos esferas de centro en el origen de coordenadas y radios r y r + dr, los dos conos de revolución que tienen por eje Oz y cuyos semiángulos cónicos son θ y $\theta + d\theta$, y los dos semiplanos limitados por el eje Oz que forman con el plano Oxz los ángulos φ y $\varphi + d\varphi$.

Por otra parte, también el área de una superficie territorial (municipio, comarca, región, nación) puede ser perfectamente determinada por una integral de superficie, tanto si logramos deducir su ecuación en forma paramétrica o explícita.

En general, las integrales de campo encuentran numerosas e importantes aplicaciones en el Análisis gravitatorio territorial, a saber:

a) Si T es un territorio homogéneo, esto es, de densidad constante, y P (x,y,z) representa un punto genérico del mismo, las coordenadas (α,β,γ) de su centro de gravedad o de masas vienen dadas por las siguientes relaciones:

$$\alpha = 1/C \int_T x \cdot dT\ ,\quad \beta = 1/C \int_T y \cdot dT\ ,\quad \gamma = 1/C \int_T z \cdot dT\ ,$$

donde C representará la medida (longitud, área, volumen) de dicho territorio.

b) Si T no fuera homogéneo, sino que la densidad de población o de renta en cada uno de sus puntos (núcleos urbanos, municipios, ...) fuera una función: δ (x, y, z), su masa **m** se expresará mediante la integral:

$$m = \int_T \delta \cdot dT.$$

2.3.5. Aplicación de la integral de Riemann-Stieltjes

Veamos, a continuación, la aplicabilidad de esta conocida integral a la determinación del centro de las masas socioeconómicas de un territorio.

Sea f(x) una función continua, $\varphi(x)$ una función monótona creciente con una discontinuidad no evitable de 1ª especie (esto es, que carece de límite por ser diferentes ambos límites laterales) en los puntos del territorio: c_1, c_2, ..., c_k, ..., que pueden llegar a constituir una infinidad numerable, y sean s_1, s_2, ..., s_k,... los saltos correspondientes. Definiendo la función (MARTÍNEZ, 1975):

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c_1 \ , \\ s_1 & \text{si } c_1 \leq x < c_2 \ , \\ s_1 + s_2 & \text{si } c_2 \leq x < c_3 \ , \text{etc.} \end{cases}$$

encontramos que esta función es monótona creciente, ya que por serlo □(x) todos los saltos son positivos, así como que la función:

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

resulta continua y monótona creciente; admitiendo que sea derivable (las circunstancias en que esto no sucede se presentarán raramente en las aplicaciones territoriales) podemos escribir:

$$\int_a^b f \ d\varphi = \int_a^b f \ d\Phi + \int_a^b f \ d\psi \ ;$$

pero, al ser f continua y tener Φ una derivada continua Φ', la integral de Stieltjes se reducirá a la de Riemann, con lo que:

$$\int_a^b f \ d\Phi = \int_a^b f \ \Phi' \, dx \quad ,$$

mientras que la integral $\int_a^b f \ d\psi$ se reduce a la suma (o serie):

$$\Sigma_k \, f(c_k) \, s_k \ ,$$

ya que se anulan todas las diferencias $\psi(x_{i+1}) - \psi(x_i)$ cuando los puntos del territorio x_i y x_{i+1} están comprendidos entre c_k y c_{k+1}.

Por tanto, queda la expresión:

$$\int_a^b f \; d\varphi = \int_a^b f \;\; \Phi' \, dx \; + \Sigma_k \, f\,(c_k)\, s_k \quad . \qquad (1)$$

Se ve, pues, que una suma finita, o una serie, o una integral en el sentido de Riemann, pueden considerarse casos particulares de un proceso más general como es la integral de Stieltjes; así se comprende su utilidad en problemas donde se consideren distribuciones de masas, de probabilidades, etc., en parte continuas y en parte discretas, como podrán presentarse en el Análisis Territorial.

EJEMPLO: propongamos hallar el centro de gravedad de una distribución de masas socioeconómicas repartidas en el intervalo territorial [0, 1] Mm. y definida por la función:

$$\varphi(x) = x + 1/\,2^k \quad , \quad \text{si} \quad 1/2^k < x < 1/2^{k-1}$$

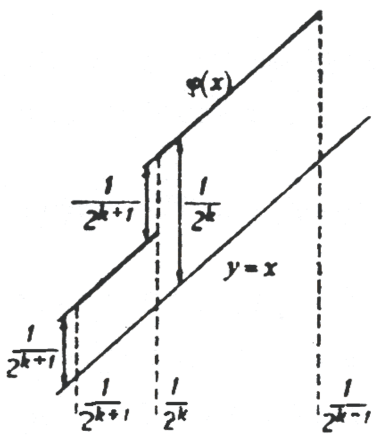

Fig. A-13.21. Centro de masas según Riemann-Stieltjes.

SOLUCIÓN: Haciendo f(x) = 1 en la anterior expresión (1), se observará que, en este caso, resulta:

$$\Phi(x) = x \quad ; \quad c_k = 1/2^k \quad ; \quad s_k = 1/2^{k+1} \quad .$$

Se trata de determinar la suma de la serie: $1/2^{k+1}$ .Vamos, en primer lugar, a determinar el carácter de esta serie numérica, por aplicación del criterio de D'Alembert o del cociente, a saber:

$$\lim_{k \to \infty} . \, a_k \,/\, a_{k-1} = \lim_{k \to \infty} . \frac{1/2^{k+1}}{1/2^k} = \lim_{k \to \infty} . \; 2^k \,/\, 2^{k+1} = 1/2 < 1 \qquad ,$$

luego es convergente.

En realidad, consiste en una serie geométrica:

$$S_k = 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots + 1/2^{k+1} + \ldots ,$$

cuyo valor absoluto de la razón es:

$$|r| = 1/2 < 1$$

, luego su suma es una cantidad finita y determinada, a saber:

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k = \frac{a}{1-r} = \frac{1/4}{1-1/2} = 1/2 \ .$$

La masa socioeconómica total del territorio será igual a:

$$\int_0^1 d\varphi(x) = \int_0^1 dx + \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^{k+1} = 1 + 1/2 \equiv (3/2)\cdot k \text{ euros} \ .$$

Así pues, procede, solamente, el cálculo de la integral de Stieltjes:

$$I = \int_0^1 x \cdot d\varphi(x) \ .$$

Para ello, deberá tenerse en cuenta que, ahora f(x) = x, y además:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k \cdot 1/2^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^{2k+1} \ ,$$

cuyo carácter también es convergente, habida cuenta de que:

$$\lim_{k\to\infty} a_k / a_{k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1/2^{2k+1}}{1/2^{2(k-1)+1}} = \lim_{k\to\infty} 2^{k-1}/2^{k+1} = 1/4 < 1 \qquad ,$$

En realidad, trátase de la serie geométrica:

$$S_k = 1/8 + 1/32 + 1/128 + \ldots + 1/2^{2k+1} + \ldots ,$$

cuyo módulo de la razón es:

$|r| = ¼ < 1$, con una suma finita y determinada, de valor:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1/8}{1-1/4} = 1/6 \ .$$

Volviendo a aplicar la fórmula (1), se tendrá:

$$I = \int_0^1 x\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^{2k+1} = \left(x^2/2\right)_0^1 + 1/6 = 1/2 + 1/6 = (2/3)\cdot k \text{ euros}\cdot \text{ Mm.}$$

Consecuentemente, la abscisa del centro de las masas socioeconómicas del territorio estudiado, será:

$$\boxed{x_0 = \frac{2 \cdot k/3}{3 \cdot k/2} = 4/9 \text{ Mm.} = 4'44 \text{ Km.}}$$

En la mayoría de las aplicaciones concretas que se pueden presentar en el Análisis Territorial, al igual que en el presente ejemplo, el cálculo de la integral de Riemann-Stieltjes que resuelve el problema planteado se lleva a cabo mediante el cálculo de integrales simples y de sumas finitas o series.