ANEXO 11

UNA TEORÍA ACERCA DE LOS FLUJOS ECONÓMICOS TERRITORIALES

1. LA NATURALEZA DINÁMICA DE LOS FLUJOS TERRITORIALES

1.1. CONCEPTOS PREVIOS Y CONSTANCIA DEL FLUJO ECONÓMICO

Es bien conocido cómo, en la realidad territorial, los bienes económicos, los servicios y el dinero o las órdenes de pago se desplazan desde unos núcleos territoriales a otros a través de las redes de transporte, de telecomunicación y de teleproceso. En este sentido, podemos considerar a Q (expresable en €/hora) como el **caudal económico**, o sea, la masa económica por unidad de tiempo, que fluye con cierta regularidad desde un territorio T a otro territorio T' o, más concretamente, entre sus capitalidades, sedes institucionales o centros de masas respectivos. La masa económica de recursos a conducir desde T a T' fluirá, en buena medida, debido a que en el extremo T la energía económica potencial es mayor que en el T', produciéndose el flujo bien de un modo natural o forzado.

Obviamente, todo ello implicará la consideración de una cierta **sección o capacidad económica** S (expresable en €/km.) de la vía comunicativa que constituye su nexo de unión, así como de una **velocidad** física o real v (km./hora) de desplazamiento de los recursos, volumen o masa económica V (euros) desde T hasta T'. De este modo, en dos puntos cualesquiera de dicha vía de comunicación o eje territorial 1 y 2, el caudal económico mantiene su constancia e imperturbabilidad, con lo que se cumplirá que:

$$Q = S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 = \text{cte.},$$

y ello en el triple supuesto de que:

a) No se produzcan ganancias, pérdidas o devaluaciones incontroladas del mismo a lo largo de su trayectoria por el tramo del eje comunicativo territorial $\overline{TT'}$.
b) La densidad $\delta = \rho$ de la masa económica sea la misma en todos los puntos del eje. Ello resulta ciertamente hipotético habida cuenta de que el precio de las mercancías o servicios circulantes es diferente, a salvo de la consideración de su valor promedio para un período de tiempo suficientemente largo.

c) La hipótesis expresada de constancia del caudal económico entre los diferentes puntos o lugares geográficos de un eje comunicativo territorial, debe entenderse como coyuntural o referida a un período determinado de tiempo y para unas concretas fuerzas económicas de demanda y oferta de la masa desplazable de bienes y servicios. Se trata, pues, de un modelo más bien estático que dinámico.

De la anterior ecuación de continuidad se deduce, así mismo, que las velocidades medias en una corriente económica son inversamente proporcionales a las secciones o capacidades económicas respectivas del eje de comunicación. Esto es:

$$\boxed{v_1 / v_2 = S_2 / S_1}$$

Desde luego, debemos suponer que los flujos económicos territoriales que nos ocupan se hallan en un régimen que podríamos calificar como teóricamente "estacionario", es decir, que su velocidad de desplazamiento no depende del tiempo. De este modo, un tramo cualquiera de un eje comunicativo podría representarse, esquemáticamente, así:

$$\begin{array}{ccccc} & & \delta = \text{cte.} & & \\ \Phi \text{ entrante} & \rightarrow & \boxed{\quad \rightarrow \quad} & \rightarrow & \Phi \text{ saliente} \\ & & 1 \qquad\qquad 2 & & \end{array}$$

El flujo económico que entra por un extremo es igual al flujo económico saliente por el otro extremo del eje. Con ello, se cumplirá que:

$$Q = \int_{\text{sección}} v \cdot dS = \text{cte.}$$

Al ser el flujo estacionario, implicará que Q = cte., y si las secciones o capacidades económicas son suficientemente pequeñas, tiene lugar que:

$$Q = \int_{S_1} v_1 \cdot dS_1 = \int_{S_2} v_2 \cdot dS_2 \quad \text{, de dónde:}$$

$$v_1 \cdot dS_1 = v_2 \cdot dS_2 \text{ , llegándose, en definitiva, a:}$$

$$\boxed{v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 \ ,}$$

tal y como pretendíamos demostrar.

1.2. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD DEL FLUJO ECONÓMICO

Una generalización conceptual de los conceptos expuestos al espacio tridimensional (TORRES, 1970), conduciría a la consideración de que en el movimiento de una masa económica de bienes y servicios las velocidades de sus distintas partes dependen, en general, de cuatro variables independientes, a saber, de su posición geográfica expresable en coordenadas UTM (x,y,z) y del tiempo t. Sean, pues:

$$\boxed{u\,(x, y, z, t) \quad ; \quad v\,(x, y, z, t) \quad ; \quad w\,(x, y, z, t)}$$

las componentes del vector velocidad de desplazamiento $\vec{v}$ de la partícula de masa económica que ocupa la posición espacial (x,y,z) en el instante t, y sea $\rho(x,y,z,t)$ la densidad de la masa económica en dicho instante y lugar (usaremos esta tipología y no la δ, para no confundirla con la simbología comúnmente empleada en la representación de las derivadas parciales en el cálculo infinitesimal de funciones de varias variables).

Consideremos (en una región o tramo de un eje comunicativo entre dos territorios, sin fuentes ni sumideros) un recinto espacial R, con una sección o capacidad económica S, y calculemos la masa económica que penetra en dicho recinto por unidad de tiempo. De una parte, será igual al flujo económico territorial entrante por la cara exterior, en dicha unidad de tiempo, o sea (aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradski):

$$-\iint_S \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = -\iiint_R \mathrm{div}.(\rho \cdot \vec{v}) \cdot dV$$

Esto es: la integral de la divergencia del vector velocidad $\vec{v}$ en todo el recinto o dominio de definición R es igual al flujo o caudal económico total, siendo $d\sigma$ el elemento infinitesimal de sección o capacidad económica del eje comunicativo y siendo dV el elemento infinitesimal de masa o volumen económico.

Pero también podremos formular en función de la variación de la densidad de la masa económica por unidad de tiempo $\delta\,\rho\,/\,\delta\,t$, en cada lugar geográfico de coordenadas (x,y,z), dando:

$$\iiint_R (\delta\,\rho\,/\,\delta\,t) \cdot dV$$

Igualando ambas expresiones, resultará:

$$\iiint_R \;[\,(\delta\,\rho\,/\,\delta\,t) + \mathrm{div}\,(\rho \cdot \vec{v})] \cdot dV \;=\; 0 \qquad ,$$

cualquiera que sea el recinto R o tramo del eje comunicativo considerado, lo cual exige la anulación idéntica del integrando anterior, a saber:

$$\boxed{\delta\,\rho\,/\,\delta\,t + \delta\,(\rho\cdot u)\,/\,\delta\,x + \delta\,(\rho\cdot v)\,/\,\delta\,y + \delta\,(\rho\cdot w)\,/\,\delta\,z \;=\; 0}$$

que sería la ecuación de continuidad del movimiento de la masa económica. En particular, si consideramos a la ρ = cte., dicha ecuación de continuidad quedaría reducida a:

$$\delta u / \delta x + \delta v / \delta y + \delta w / \delta z = 0 .$$

En las aplicaciones propias del Análisis Territorial, la velocidad $\vec{v}$ dependerá exclusivamente de la posición, con lo que el flujo territorial que pasa o transcurre por un mismo lugar geográfico de un eje comunicativo lo hará siempre con la misma velocidad (en un determinado espacio de tiempo), con lo que no hallamos en presencia de un régimen "permanente" o "estacionario". Las componentes de $\vec{v}(u,v,w)$ serán sólo funciones de las coordenadas UTM x, y, z. Si, además, derivasen de un cierto potencial económico U (movimiento irrotacional), la ecuación que debe satisfacer este potencial de velocidades es también la ecuación de Laplace[1], esto es:

$$\delta^2 U / \delta x^2 + \delta^2 U / \delta y^2 + \delta^2 U / \delta z^2 = 0 \quad ; \quad \Delta U = 0 \ ,$$

puesto que u, v, w son las derivadas parciales primeras de U con respecto de x, y, z.

1.3. MOMENTOS TERRITORIALES DE INERCIA DE LOS EJES COMUNICATIVOS

En el Análisis Territorial, en fin, puede revestir cierto interés la determinación del momento territorial de inercia de un eje comunicativo AB con respecto a los ejes coordenados que puedan haberse fijado en el territorio. Con respecto a ambos ejes, los momentos respectivos vendrían dados por:

$$I_x = \int_{AB} y^2 \cdot ds \qquad ; \qquad I_y = \int_{AB} x^2 \cdot ds \quad ,$$

mientras que las coordenadas del centro del arco que forma el eje territorial AB, de ecuación F(x,y) = 0, o bien:

$$x = f(u) \qquad ; \qquad y = g(u) \quad ,$$

deberán satisfacer las relaciones (PÉREZ, 1976):

$$\begin{cases} \bar{x} \cdot s = \bar{x} \cdot \int_{AB} ds = \int_{AB} x \cdot ds \\ \bar{y} \cdot s = \bar{y} \cdot \int_{AB} ds = \int_{AB} y \cdot ds \end{cases}$$

Considérese, otrosí, que la circulación de la masa económica por un mismo eje comunicativo puede efectuarse, casi siempre, en los dos sentidos, razón por la que el estudio pormenorizado de estos flujos exigirá, bien sea su análisis por separado, bien la consideración resultante de su balance económico final en uno u otro sentido.

[1] Matemático, astrónomo y físico francés cuya obra es reconocida en la actualidad por la importancia de sus aportaciones a la Ciencia en campos tan diversos como: Astronomía, Análisis Matemático, Álgebra, Teoría de Probabilidades, Electromagnetismo, Termoquímica, Estudio del movimiento, Teoría de los gases, Capilaridad,...

2. LAS PÉRDIDAS DE CARGA ECONÓMICA

En la práctica, se producirán **pérdidas de carga o energía económica** al circular las masas de bienes y servicios por dichos ejes, que se hallan en campos económicos NO CONSERVATIVOS, a causa de los inconvenientes, desgastes, retrasos y carestía de los procesos de transporte de las personas, mercancías e información, que serán tanto mayores cuanto mayor sea también la distancia $\overline{TT'}$ o menor sea la capacidad económica S del eje comunicativo, y que explican por qué la atracción o influencia socio-económica de unos núcleos territoriales sobre otros decrece ostensiblemente con su alejamiento geofísico así como con la estrechez o precariedad de sus vías de comunicación e información. Seguirá siendo válido, no obstante, el axioma o principio de conservación de la energía económica, de tal modo que entre dos secciones de flujo cualesquiera, la suma de todas las diferentes formas de energía permanecerá constante, aunque deberán incluirse, en el balance, las pérdidas de carga económica habidas entre ambas secciones o enclaves territoriales. Esto es:

$$E_1 = E_2 + \Delta H \quad \text{, siendo:}$$

$$\begin{cases} E_1 = \text{carga económica en la sección 1 (€*)} \\ E_2 = \text{carga económica en la sección 2 (€*)} \\ \Delta H = \text{pérdida de carga económica entre 1 y 2 (€*)} \end{cases}$$

Al respecto, podríamos enunciar que en un sistema territorial económicamente aislado (esto es, que no recibe ni proporciona energía económica alguna al sistema exterior), la energía económica total permanece constante. Esto equivaldría a un cierto "principio de conservación de la energía económica", que señalaría que la energía económica no se crea ni se destruye, sólo se transforma.

Desde una perspectiva o visión estrictamente física o mecanicista de los fenómenos económicos[2], la unidad de medida de la carga o energía económica y de sus pérdidas será: €*km., y la de J (pérdida de carga económica unitaria), lógicamente, será: €* (euros-fuerza).

La pérdida de carga económica así definida podrá ser uniforme a lo largo de la trayectoria del eje territorial, o bien variar al alza en algunos puntos singulares del mismo (por ejemplo, en los "cuellos de botella" que presentan las ciudades incluidas en el trayecto), y para su determinación será necesario recurrir a la experimentación. Por cierto, un método que puede resultar

[2] Tal como se contempla en el capítulo 10: "Una interpretación mecanicista de los desplazamientos de las masas económicas" del libro del mismo doctorando titulado: *Análisis Territorial. División, Organización y Gestión del Territorio*, en *CADUP (Estudios)*, Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 1990/91. Citado en la bibliografía.

conveniente y simplificativo para valorar dichas pérdidas de carga accidentales consistiría en expresarlas en la forma de una longitud equivalente del eje viario que produzca idéntica pérdida de energía económica.

Desde luego, las pérdidas uniformes o continuas a lo largo de dicho eje podrán evaluarse en función de una "pérdida de carga económica unitaria" (pendiente económica) y de la propia distancia $\overline{TT'}$ = l (longitud del eje comunicativo). Así:

$$J = \Delta H / l \text{ (€/Km.)}$$, o bien con más precisión:

$$J = \lim_{\Delta l \to 0} (\Delta H / \Delta l) = dH/dl \quad ; \qquad dH = J \cdot dl \quad ;$$

$$H = \int_0^1 J \cdot dl = J \cdot [\, l \,]_0^1 = J \cdot l$$

de conocerse la función real de variable real: J = f (l), en el eje territorial en estudio. También podría denominársele "pendiente motriz", y al depender de la capacidad económica de cada tramo del eje, habrá que calcularla separadamente para cada uno de ellos y sumarlos todos: $H = \Sigma\, J \cdot \Delta l$, pasando del campo continuo al discreto.

Utilizando un conocido símil hidráulico, podría ser posible cuantificar dichas pérdidas de carga, en función del caudal económico circulante, mediante una expresión del tipo:

$$\mathbf{J = n \cdot Q^2 \;\; , \;\; (\text{o, más genéricamente, } J = n \cdot Q^m)}$$

similar a la expresión de la fórmula simplificada de Darcy para el cálculo de las conducciones forzadas o tuberías a presión. Así pues, podríamos enunciar, por ejemplo, que *"la pérdida de carga económica en un eje comunicativo entre dos territorios T y T' es directamente proporcional al cuadrado del caudal económico circulante por él".* En general, será fácil deducir la influencia preponderante de la sección económica S sobre la pérdida de carga J y sobre el caudal Q, observándose que una pequeña variación de aquélla, en un eje territorial de comunicación, repercute notablemente en J, por lo que resultará más conveniente, en la praxis de la Planificación Territorial, actuar sobre la S con medidas infraestructurales (ampliando las vías de comunicación o creando otras nuevas) que actuar sobre la J (reduciendo las "fricciones" o los costes de transporte).

La última expresión puede conducirnos a otras fórmulas útiles para el cálculo o dimensionamiento económico óptimo de los ejes territoriales comunicativos, puesto que:

$$Q = \sqrt{J / n} = \beta \cdot \sqrt{J} = \beta \cdot \sqrt{\Delta H / I} \quad ,$$

$$Q^2 / \beta^2 = n \cdot Q^2 = \Delta H / I \quad , y: \quad \Delta H = n \cdot Q^2 \cdot I \quad .$$

Llegados a este punto, conocido ya el significado de las magnitudes: **S, Q, v** y **J**, veamos que, a partir del conocimiento de dos cualesquiera de ellas, podremos determinar las dos restantes. Por consiguiente, los problemas que se presenten en la práctica del Análisis Territorial pueden resumirse en los seis grupos que indicamos a continuación:

PROBLEMA	DATOS	INCÒGNITAS
I	S y J	v y Q
II	S y Q	v y J
III	S y v	Q y J
IV	Q y J	S y v
V	J y v	S y Q
VI	Q y v	S y J

Para el establecimiento de la fórmula general del movimiento uniforme de los flujos económicos territoriales por los ejes comunicativos, habrá que configurar empíricamente las relaciones que ligan entre sí aquellas cuatro variables, basándose en las siguientes consideraciones o hipótesis de partida que provocarán una simplificación del problema:

a) La pérdida de carga económica puede ser independiente de la carga o energía económica total (renta o producto total de los territorios), dependiendo esencialmente de la sección o capacidad económica del eje comunicativo, así como de la propia naturaleza de la corriente económica de bienes y servicios (que determine su mayor o menor grado de "viscosidad" o rozamiento interno).

b) Cuando la sección o capacidad económica portante de dicho eje es constante, la velocidad media de circulación es también constante y el movimiento de la masa o volumen económico será permanente y uniforme, o estacionario, para un caudal económico determinado.

3. EL MOVIMIENTO Y LA ENERGÍA ECONÓMICA DE LOS FLUJOS TERRITORIALES

3.1. CONCEPTOS PREVIOS

Denominaremos **potencia de la corriente económica**, en una sección dada del eje territorial, *a la energía económica total que lleva el flujo a través de dicha sección en la unidad de tiempo.* Expresaremos la potencia así definida como el producto de la energía económica por el caudal económico, con lo que:

$dQ = v \cdot dS$ (caudal económico instantáneo que transcurre por dS en un instante dado)

$dN = E \cdot v \cdot dS$, o sea:

$$N = \int_Q E \cdot dQ = \int E \cdot v \cdot dS$$

Veamos, en fin, que para variar interesada o artificialmente la velocidad de circulación de una corriente económica, en dirección o magnitud, será necesario suministrar al sistema, como variable de acción, una fuerza económica adicional. De acuerdo con el principio universal de acción y reacción, la masa económica ejercerá una fuerza igual y opuesta sobre el cuerpo físico o administrativo que provoque dicho cambio de velocidad, a la que denominaremos "fuerza económica dinámica" para distinguirla de las fuerzas debidas a la carga económica estática configurada por la masa de renta o de recursos.

Por otra parte, utilizando un símil mecánico, veamos que siendo **m** la masa o volumen económico comprendido, en un instante determinado, entre las secciones 1 y 2, para evaluar la variación de la "cantidad de movimiento económico" o "momento territorial cinético" de esta masa en el intervalo infinitesimal de tiempo dt, sólo será necesario tener en cuenta la cantidad de movimiento entrante en el punto 2 y saliente del punto 1, siendo ello así puesto que el producto: $G = m \cdot v$, en cada punto del eje territorial, no varía, mientras que el valor de su "energía económica cinética" (debida a la velocidad de desplazamiento de la masa económica) vendrá dado por la expresión (TORRES, 1970):

$$\mathbf{E_c = (1/2) \cdot m \cdot v^2}$$

, según se explica por el doctorando en anteriores estudios y propuestas suyas sobre el tema[3].

Desde luego, puesto que **m** es una magnitud escalar, el vector $\vec{G}$ tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{\mathbf{v}}$ (cuyas componentes quedarán multiplicadas por **m**), expresándose, normalmente, en € · km./hora. Considerando, ahora, a **m** compuesta por **n** submasas o partículas económicas, tal que, $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, $\forall i \in (1, 2, ..., n)$; veamos que la "energía económica cinética total del sistema económico" vendrá dada por la suma de las energías cinéticas de todas las partículas económicas que integran el sistema, con lo que:

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} (1/2) \cdot m_i \cdot \overrightarrow{v_i^2}$$

La variación experimentada -entre dos instantes de tiempo cualesquiera- de la E_C así definida, será la suma de los trabajos económicos realizados por todas las fuerzas económicas exteriores e interiores que actúan sobre el sistema económico.

3.2. FORMULACIÓN VARIACIONAL DE LAS LEYES QUE REGULAN EL MOVIMIENTO DE LOS FLUJOS ECONÓMICOS TERRITORIALES

3.2.1. Conservación de la energía económica

Siguiendo con nuestro símil dinámico y basándonos en el Cálculo de Variaciones clásico -que tiene por objeto la determinación de curvas extremales en el plano, en el espacio o en variedades de orden superior, y, análogamente, de superficies extremales que hacen máximas o mínimas ciertas integrales extendidas sobre ellas, con determinadas condiciones de contorno- es lógico suponer que el movimiento de un punto material de masa económica **m**, situado en un campo de fuerzas de atracción económica de componentes X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z), viene regido por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de 2º orden:

$$\boxed{m \cdot d^2x / dt^2 = X(x, y, z, t, x', y', z') = m \cdot x''}$$

[3] *Vide* el capítulo 10, epígrafe 2: "Una interpretación mecanicista de los desplazamientos de las masas económicas" del libro del mismo doctorando titulado: *Análisis Territorial. División, Organización y Gestión del Territorio*, en *CADUP (Estudios)*, Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 1990/91. Citado en la bibliografía.

$$m \cdot d^2y / dt^2 = Y(x, y, z, t, x', y', z') = m \cdot y''$$

$$m \cdot d^2z / dt^2 = Z(x, y, z, t, x', y', z') = m \cdot z''$$

, cuya integración nos ofrece:

$$x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = x(t, C_i)$$

$$y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = y(t, C_i)$$

$$z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = z(t, C_i)$$

, que son las ecuaciones generales del movimiento del punto de masa económica **m**. Las 6 constantes de integración las determinaremos por las condiciones de contorno; por ejemplo, la posición y la velocidad del punto en un instante determinado ($\vec{r}_0$ y $\vec{v}_0$ en el instante t_0), serán:

$$\vec{r}_0 \begin{cases} x_0 = x_0(t_0, C_i) \\ y_0 = y_0(t_0, C_i) \\ z_0 = z_0(t_0, C_i) \end{cases} \qquad \vec{v}_0 \begin{cases} x'_0 = x'_0(t_0, C_i) \\ y'_0 = y'_0(t_0, C_i) \\ z'_0 = z'_0(t_0, C_i) \end{cases}$$

, que es un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, que quedarán así determinadas. Integrando, ahora, el sistema de ecuaciones diferenciales inicial, obtendremos ecuaciones de la forma: $f(x,y,z,t,x',y',z') = C$, que son integrales primeras (PUIG, 1965).

En el caso más general, las componentes X, Y, Z, de la fuerza de atracción económica serían funciones de la posición geográfica o coordenadas UTM del punto (x,y,z), de su velocidad de desplazamiento (x',y',z') en el caso de resistencia del medio, y del tiempo (en el caso de campo variable). Pero en el enfoque del Análisis Territorial, admitiremos simplificativamente que X, Y, Z son funciones sólo de x, y, z que, además, admiten una función potencial económica U(x,y,z), tal que:

$$U_x = X \quad ; \quad U_y = Y \quad ; \quad U_z = Z \, .$$

En este caso, se obtiene fácilmente una integral primera multiplicando las ecuaciones, respectivamente, por:

$$x' \cdot dt = dx \quad ; \quad y' \cdot dt = dy \quad ; \quad z' \cdot dt = dz \quad ,$$

y sumando queda la expresión:

$$m\,(x'' \cdot x' + y'' \cdot y' + z'' \cdot z')\,dt = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz \quad \text{, o sea:}$$

$$(1/2) \cdot m \cdot d\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) = dU \quad ,$$

ecuación diferencial que integrada ofrece:

$$(1/2) \cdot m\;[\,(dx / dt)^2 + (dy / dt)^2 + (dz / dt)^2\,] - U = C \;\; \text{(constante)}$$

, que se traducirá en el que denominaremos **teorema de la conservación de la energía económica,** abreviadamente expresado por:

$$E_c + E_p = E = \text{cte.} \;\; ,$$

en que, como ya hemos visto:

$$E_c = 1/2 \cdot m \cdot v^2 = 1/2 \cdot m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

constituirá la llamada "energía económica cinética", y:

$E_p = - U$, es la "energía económica potencial",

siendo la suma de ambas una constante denominada "energía económica total" del punto o lugar geográfico del territorio en cuestión. El movimiento de los flujos territoriales se verificará, pues, manteniéndose constante dicha energía económica total.

3.2.2. La "acción económica" en el territorio

Ahora bien, el sistema de ecuaciones diferenciales relacionado al comienzo del presente epígrafe se obtiene, asimismo, al tratar de hacer mínima la integral:

$$\int (E_c - E_p) \cdot dt \quad ,$$

puesto que al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange[4] (ecuaciones diferenciales de 2º orden) a la expresión:

[4] *Euler (1707-1783)*: Matemático suizo, nacido en Basilea. Allí fue discípulo del gran matemático Johan Bernouilli. Pasó la mayor parte de su vida en Berlín y San Petersburgo trabajando incesantemente en la enseñanza y en la investigación, a pesar de haber quedado casi completamente ciego los diecisiete últimos años de su vida. Analista, ante todo, cuidó de substituir cada vez más el simbolismo algebraico a las consideraciones geométricas. El nombre de Leonhard Euler va unido a un gran número de fórmulas y de teorías matemáticas y es sinónimo de forma concreta y elegante, de análisis sagaz y profundo. Dejó, a su muerte, doscientos tratados manuscritos, que publicó sucesivamente la Academia de San Petersburgo.
Lagrange (1736-1813): Descendiente de una familia de la Turena (Francia), nació y estudió en Turín (Italia). Su talento matemático no se reveló hasta los 16 años. Entonces comenzó a estudiar las obras de los antiguos geómetras, y sólo dos años le bastaron para ponerse al corriente de ellas. En 1774 fue nombrado profesor de la Escuela de Artillería de Turín, y poco después inventaba el cálculo de variaciones. Euler fue el primero en comprender su genio matemático, nombrándole miembro de la

$$(E_c - E_p) ,$$

en la que E_c sólo depende de las derivadas primeras: x', y', z', y E_p sólo depende de las coordenadas UTM: x, y, z, se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} -\delta E_p / \delta x - d/dt \cdot (\delta E_c / \delta x') &= 0 \\ -\delta E_p / \delta y - d/dt \cdot (\delta E_c / \delta y') &= 0 \\ -\delta E_p / \delta z - d/dt \cdot (\delta E_c / \delta z') &= 0 \end{aligned}}$$

, es decir:

$$\begin{cases} X - (d/dt) \cdot m \cdot x' = 0 \\ Y - (d/dt) \cdot m \cdot y' = 0 \\ Z - (d/dt) \cdot m \cdot z' = 0 \end{cases}$$

, que coinciden con el sistema de ecuaciones diferenciales de referencia.

La expresión $(E_c - E_p) \cdot dt$, que tiene las dimensiones del producto de una energía económica por un tiempo (v. gr., €.hora, o bien, €*hora.Km.) se denominará **acción económica elemental**, y su integral será la **acción económica total**. Los movimientos óptimos o deseables de una partícula económica **m** en un campo de fuerzas de atracción económica de componentes:

$$X(x,y,z) \quad ; \quad Y(x,y,z) \quad ; \quad Z(x,y,z) \quad ,$$

son, pues, *aquellos que hacen mínima la acción económica total entre dos puntos cualesquiera del territorio*, lo que constituye una adaptación al Análisis Territorial de los principios de Hamilton y de Maupertius, que se generalizan en la dinámica de los sistemas y medios continuos a través de la Mecánica Analítica (PUIG, 1965).

Como durante el movimiento es:

$$E_c + E_p = E = \text{cte.}$$

podemos considerar que: $E_c - E_p = 2E_c - E$

y todo movimiento que haga mínima la integral que representa la "acción económica total", esto es:

Academia de Berlín. En 1764 desarrolló la teoría de la *libración de la Luna* y, dos años más tarde, la de los satélites de Júpiter. En 1787 trasladó su residencia a París. Durante la Revolución Francesa de 1789 fue Presidente de la Comisión encargada de establecer el sistema métrico decimal de unidades. Napoleón I le colmó de honores y le nombró profesor de la Escuela Politécnica. Su principal contribución al Álgebra está en su memoria sobre la "resolución de las ecuaciones numéricas". Su obra más importante es la denominada "Mecánica Analítica".

$$\int (2\,E_C \;-\; E)\cdot dt \quad ,$$

y constante la E, hará mínima la integral:

$$\int 2\,E_C \cdot dt \;=\; m \int v^2 \cdot dt \quad .$$

Recíprocamente, veamos que los movimientos de los flujos económicos territoriales que minimizan la integral:

$$\int v^2 \cdot dt \;=\; \int v \cdot dl \qquad \text{(puesto que: } v = dl/dt\text{)}$$

haciendo, simultáneamente, E = cte., son movimientos posibles de las masas económicas de bienes y servicios en sus desplazamientos por el territorio.

Al cabo de este breve recorrido sobre la aplicación del Cálculo de Variaciones al estudio del movimiento de los flujos económicos territoriales, conviene recapacitar un poco acerca de sus dificultades en comparación con los problemas de extremos ordinarios (máximos y mínimos absolutos y relativos o locales) de la teoría de las funciones reales. En éstos, se piden los valores numéricos de una o de varias variables independientes que hacen máxima o mínima una determinada función o variable dependiente de ellas, con un campo numérico -en el que hay que buscar estos valores- de propiedades perfectamente conocidas. Por el contrario, *en el cálculo de variaciones se busca la función o funciones que optimizan una determinada* integral, que depende de ellas; las incógnitas son aquí infinitas y el campo funcional en el que se buscan las soluciones resulta de un grado de arbitrariedad tan amplio que se impone restringirlo para hacerlo analíticamente manejable. Se comprende, así mismo, la dificultad de hallar condiciones suficientes que aseguren la existencia de la solución sin un estudio previo del campo funcional en que se opere.

3.3. ANÁLISIS DE LOS PEQUEÑOS MOVIMIENTOS DE LAS MASAS ECONÓMICAS ALREDEDOR DE POSICIONES DE EQUILIBRIO

Consideremos, ahora, para fijar las ideas, un sistema de primer orden de la forma (PUIG, 1965):

$$\boxed{\begin{gathered} V_x = dx/dt = f(x, y, z) = x' \;;\; V_y = dy/dt = f(x, y, z) = y' \\ V_z = dz/dt = f(x, y, z) = z' \end{gathered}} \tag{1}$$

en el que la variable tiempo t suponemos que no figura en los segundos miembros de las anteriores ecuaciones. Se comprueba inmediatamente que toda terna de números: α, β, γ, que satisfaga el sistema:

$$\begin{cases} f(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \\ \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \\ \psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

proporciona soluciones **estacionarias** o constantes del sistema, a saber:

$$x = \alpha \quad ; \quad y = \beta \quad ; \quad z = \gamma . \qquad (3)$$

Estos puntos del territorio α, β, γ designan, en consecuencia, posiciones de **equilibrio** de una partícula de la masa económica móvil cuyas ecuaciones de movimiento viene dadas por (1). Con objeto de averiguar si dicho equilibrio es o no estable, estudiemos las soluciones del sistema en un entorno diferencial de dichos puntos. Para ello, pongamos:

$$x = \alpha + \xi \quad ; \quad y = \beta + \eta \quad ; \quad z = \gamma + \zeta$$

donde ξ, η, ζ, van a ser ahora las nuevas variables (supuestas infinitesimales) y el sistema (1) se transformará en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineal en ξ, η, ζ, de coeficientes constantes:

$$\boxed{\begin{aligned} d\xi / dt &= f(\alpha + \xi, \beta + \eta, \gamma + \zeta) = f_\alpha \xi + f_\beta \eta + f_\gamma \zeta = \xi' \\ d\eta / dt &= \varphi(\alpha + \xi, \beta + \eta, \gamma + \zeta) = \varphi_\alpha \xi + \varphi_\beta \eta + \varphi_\gamma \zeta = \eta' \\ d\zeta / dt &= \psi(\alpha + \xi, \beta + \eta, \gamma + \zeta) = \psi_\alpha \xi + \psi_\beta \eta + \psi_\gamma \zeta = \zeta' \end{aligned}}$$

, cuyas soluciones son de la forma: $\Sigma\, a_i \cdot e^{s_i \cdot t}$, donde las s_i son raíces de la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} f_\alpha - s & f_\beta & f_\gamma \\ \varphi_\alpha & \varphi_\beta - s & \varphi_\gamma \\ \psi_\alpha & \psi_\beta & \psi_\gamma - s \end{vmatrix} = 0$$

Si los coeficientes de esta ecuación cumplen la condición de Hurwitz, la parte real de todas las s_i es negativa, es decir, que x, y, z, tenderán respectivamente a α, β, γ, y este punto o lugar geográfico del territorio o de un eje comunicativo marcará una posición de **equilibrio estable** de la partícula de masa económica de bienes o servicios (FRANQUET, 1990/91).

Obsérvese que del sistema de ecuaciones (1) se desprende el sistema diferencial que define las trayectorias de las partículas económicas, a saber:

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{\varphi(x,y,z)} = \frac{dz}{\psi(x,y,z)} = dt$$

Los puntos del territorio α, β, γ, son puntos singulares en la congruencia de tales trayectorias, puesto que anulan los tres denominadores. El sistema expuesto en (4), en definitiva, nos definirá paramétricamente dicha congruencia en las inmediaciones de tales puntos.

Para la consecución de mayores especificaciones respecto del concepto de "equilibrio territorial", más en relación a un territorio considerado en su conjunto que referido exclusivamente a una cierta partícula económica (tal como se define aquí), puede verse el apartado 2 del Anexo 15 de la presente tesis doctoral.

4. LAS VELOCIDADES MEDIAS MÁXIMAS DE CIRCULACIÓN DE LA MASA ECONÓMICA

Prescindiendo, por el momento, de las pérdidas de carga en la ecuación de continuidad económica a lo largo de un eje, a saber:

$$Q = S \cdot v = \text{cte.} \quad ,$$

deducimos que, para conducir, por una vía de comunicación entre dos territorios, un caudal económico determinado Q (€/hora), puede operarse, bien aumentando la capacidad de transporte de dicha vía **S** (con lo que disminuiremos la velocidad media de desplazamiento **v** de dicho caudal), o bien recíprocamente.

También parece, a primera vista, que por simples razones de economía o de coste de las infraestructuras, nos convendría más escoger la segunda opción, o sea, disminuir la capacidad o sección S de la vía de enlace; pero debemos tener en cuenta que, con ello, aumentaríamos peligrosamente el valor de la velocidad media **v** de circulación por encima de los límites deseables establecidos por razones de seguridad e, incluso, de coste unitario del transporte (al aumentar el consumo de carburante de los vehículos, así como el riesgo de sufrir accidentes). De este modo, fijados "a priori" determinados criterios económicos y legales limitativos de dicha velocidad (que quedaría en v'_0 km./h.), la capacidad económica de la vía en estudio quedará prefijada por la expresión:

$$S = Q / v'_0 \text{ (€/Km.)} \; ,$$

en función del caudal económico a transportar.

En cualquier caso, para proceder a una determinación más exacta de la sección o capacidad económica óptima, habrá que empezar calculando el coste global de la infraestructura proyectada incluyendo la cuantificación económica de su impacto ambiental (de resultar posible hacerlo), el valor de las expropiaciones, ocupaciones temporales de los terrenos y servidumbres de paso por los mismos, sus gastos de mantenimiento y explotación, así como los costes financieros, amortizaciones técnicas y demás, todo ello al objeto de minimizar el conjunto de los gastos anuales; se tratará, en definitiva, de hallar el mínimo de la curva de costes totales en función de la sección económica. Pueden, incluso, emplearse variantes de los métodos clásicos empleados en Hidráulica (TORRES, 1970), como los de Labye, Girette u otros. En este sentido, la fórmula de M. Clément ofrece:

$$Q = p \cdot n_0 \cdot q \left(1 + U \sqrt{1/p \cdot n_0 - 1/n_0}\right)$$

siendo, para nuestro caso:

- Q = caudal económico para el cálculo de un tramo que alimenta $\mathbf{n_0}$, derivaciones de caudal **q**.
- p = probabilidad de demanda de una derivación.
- U = valor de la función de Gauss acumulativa de la distribución teórica de probabilidad normal, para una determinada probabilidad de fallo de servicio (para un 99% se tiene: U = 2'326, y para un 95% se tiene: U = 1'645).

El empleo conjunto de estos métodos permitirá resolver, casi matemáticamente, la optimización de la red en estudio.

Por otra parte, como ya vimos, las pérdidas de carga económica continuas pueden expresarse de la forma (utilizando el símil hidráulico):

$$h_r = J \cdot l = n \cdot Q^2 \cdot l \quad ,$$

mientras que las pérdidas de carga accidentales o coyunturales vendrían dadas por:

$$h_s = n' \cdot Q^2 \cdot k \quad ,$$

siendo k un cierto "coeficiente de resistencia en la singularidad" cuyo valor debería ser determinado empíricamente en cada caso, al igual que los parámetros **n** y **n'**. De este modo, la pérdida total de carga económica en un eje comunicativo, sería:

$$h_t = h_r + h_s = n \cdot Q^2 \cdot l + n' \cdot Q^2 \cdot k = Q^2 (n \cdot l + n' \cdot k) \ .$$

Si pretendemos exponer, como ya se ha dicho, la expresión de las pérdidas accidentales h_s en forma de una longitud equivalente l' de eje comunicativo que produzca la misma pérdida de energía económica, se tendrá:

$$h_s = h_r \quad \text{; o sea:}$$

$$n' \cdot Q^2 \cdot k = n \cdot Q^2 \cdot l' \quad \text{, de dónde:}$$

$$l' = n' / n \cdot k$$

5. CAUDAL ECONÓMICO DE DISTRIBUCIÓN UNIFORME

5.1. CASO CONTÍNUO

Hagamos, aquí, el supuesto teórico de la existencia de un eje territorial de comunicaciones OB, de longitud **l** y capacidad económica **S**, con "servicio en ruta" de espaciamiento uniforme y con derivaciones de fracciones del caudal económico inicial idénticas a los diferentes enclaves o municipios por los que transcurre. Si el número de estas derivaciones o salidas es suficientemente grande, se puede efectuar, con gran aproximación, el cálculo de la sección o capacidad económica necesaria del eje suponiendo que se distribuye un caudal uniformemente repartido a lo largo del trayecto, el cual se obtiene sumando todos los caudales de las derivaciones y dividiendo dicha suma por la longitud total o distancia: l = OB. Se tratará, en definitiva, de un caudal económico por unidad de longitud del eje territorial.

En estos casos, puede asimilarse el movimiento de los bienes y servicios circulantes por el eje comunicativo a una sucesión de movimientos uniformes infinitesimales de ley variable con el caudal económico -o con la capacidad económica del eje si ésta no es constante- debido a la proximidad de los cambios y a la pequeña variación del caudal. Si bien sería preciso, para la intachable resolución de este problema, el conocimiento exacto de dicha ley de variación del caudal, podríamos admitir, con buena aproximación, que el servicio en el trayecto se reparte uniformemente en toda la longitud del eje, disminuyendo el caudal económico en una cantidad **q** por unidad de longitud del eje; *es decir, que se gasta o consume un caudal económico **q** por unidad de longitud del eje.*

Utilizando la siguiente notación (TORRES, 1970):

Q_o = caudal económico en el origen O.

q = caudal económico derivado por unidad de longitud del eje.

Q = caudal económico disponible en un punto genérico A del eje, situado a una distancia del origen: $\overline{OA} = x$.

Evidentemente, se verificará la formulación:

$$Q = Q_o - q \cdot x \qquad (1) ,$$

siendo $(q \cdot x)$ el caudal ya distribuido en el trayecto $\overline{OA}$.

Expresamos la pérdida de carga económica continua, en el tramo $\overline{OA}$, mediante la fórmula:

$$z = n \cdot \int_0^x Q^2 \cdot dx = n \cdot \int_0^x (Q_o - q \cdot x)^2 \cdot dx =$$

$$= n \cdot \int_0^x (Q_o^2 - 2 \cdot q \cdot x \cdot Q_o + q^2 \cdot x^2) \cdot dx =$$

$$= n\,(Q_o^2 \cdot x - q \cdot Q_o \cdot x^2 + 1/3 \cdot q^2 \cdot x^3) =$$

$$= n \cdot [\,(Q + q \cdot x)^2 \cdot x - q\,(Q + q \cdot x) \cdot x^2 + 1/3 \cdot q^2 \cdot x^3\,] =$$

$$= n\,(Q^2 \cdot x + Q \cdot q \cdot x^2 + 1/3 \cdot q^2 \cdot x^3) \quad (2) ,$$

que es la ecuación de una parábola cúbica o función polinómica de tercer grado (FRANQUET, 1990/91).

Si llamamos Q_e al caudal económico residual o extremal que llega al punto B del territorio, tendremos, según la ecuación anterior:

$$h_r = n\,(Q_e^2 \cdot l + Q_e \cdot q \cdot l^2 + 1/3 \cdot q^2 \cdot l^3) \qquad (3)$$

En el caso concreto de que a B ya no llegue ningún caudal económico procedente de O, dado que todo el caudal se derivase uniformemente a lo largo del eje de comunicación, se tendrá (TORRES, 1970):

$$Q_e = 0 \quad , \quad \text{y, por tanto:} \;\; Q_o = q \cdot l \quad .$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3), resultará:

$$h_r = n/3 \cdot q^2 \cdot l^3 = n/3 \cdot (q \cdot l)^2 \cdot l = n/3 \cdot Q_0^2 \cdot l \quad (4)$$

o bien: $$J = h_r / l = n \cdot Q_0^2 / 3$$

expresiones éstas que nos indican que la pérdida de carga económica es la tercera parte de la que se produciría si el caudal económico Q_o inicial recorriera todo el eje comunicativo hasta llegar intacto al punto B.

La ecuación (4) también puede expresarse así:

$$h_r = 1/3 \cdot n \cdot Q_0^2 \cdot l = n \cdot Q'^2 \cdot l \quad \text{, de dónde:}$$

$$Q' = Q_0 / 3^{1/2} = 0'577 \cdot Q_0 \quad (5)$$

lo que significa que la pérdida de carga económica es equivalente a la que se produciría si por el eje comunicativo circulara un caudal económico constante e igual a:

$Q_0 /3^{1/2}$, o sea, apenas un 58% del caudal inicial Q_o .

Estudiaremos, a continuación, el procedimiento que se utilizará para determinar la capacidad económica conveniente del eje, al objeto de que pueda distribuir el caudal económico uniformemente repartido en la forma anteriormente indicada.

La ecuación (3) equivale a:

$$h_r = n\,(Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + 1/3 \cdot q^2 \cdot l^2) \cdot l = n \cdot Q_l^2 \cdot l = J_l \cdot l \;;$$

introduciendo, ahora, un caudal económico ficticio Q_1 que, al circular por el eje de comunicación de manera constante, produzca una pérdida de carga **h**, se tendrá:

$$Q_l^2 = Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + 1/3 \cdot q^2 \cdot l^2 \quad .$$

Pero si tenemos en cuenta que:

$$(Q_e + 1/2 \cdot q \cdot l)^2 = Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + ¼ \cdot q^2 \cdot l^2 < Q_l^2$$

$$(Q_e + 1/3^{½} \cdot q \cdot l)^2 = Q_e^2 + 2/3^{1/2} \cdot Q_e \cdot q \cdot l + 1/3 \cdot q^2 \cdot l^2 > Q_l^2$$

resultando el valor del caudal ficticio Q_1 acotado entre los límites:

$$Q_e + (1/2) \cdot q \cdot l < Q_1 < Q_e + (1/ 3^{½}) \, q \cdot l \quad \text{, o lo que es lo mismo:}$$

$$Q_e + 0'5 \cdot q \cdot l < Q_1 < Q_e + 0'577 \cdot q \cdot l$$

luego puede tomarse con suficiente aproximación, como valor de Q_1, para el cálculo de la capacidad económica del eje comunicativo:

$$Q_1 = Q_e + 0'55 \cdot q \cdot l + Q''$$

siendo Q'' un caudal económico fijo para imprevistos, circunstancias excepcionales, etc.

Conociendo ya: Q_1 y $J = h_r / l$, se halla fácilmente el valor de la S objeto del problema.

Si al punto B no llegara ningún caudal económico (TORRES, 1970), deberá tomarse como valor de Q_1, según hemos demostrado:

$$Q_1 = 0'577 \cdot q \cdot l \approx 58\% \text{ de } Q_0 .$$

5.2. CASO DISCRETO

5.2.1. Concepción general

Por otra parte, en un caso discreto y no continuo de servicio o distribución del caudal económico, la pérdida total de carga económica que se producirá en una arteria de comunicación entre dos territorios que presente $\mathbf{n_o}$ derivaciones con caudal económico similar a intervalos regulares, vendrá dada por una expresión del tipo:

$$H = J \cdot l \cdot F$$

siendo $F = f(n_o)$ un coeficiente experimental de reducción por salidas o servicios, a estimar en cada caso. Por último, el cálculo de un tramo de eje comunicativo de estas características, pero que se continúe en otro eje de diferente capacidad económica, puede efectuarse prolongando ficticiamente el tramo a calcular con otro tramo imaginario de similares características, que tenga también derivaciones análogas a intervalos regulares hasta agotar completamente el caudal económico. Se calculan las pérdidas de carga económica conjuntas de ambas tramos: el real y el ficticio. A continuación, se calculan las pérdidas de carga del tramo ficticio; se restan ambas y el resultado final ofrece las pérdidas buscadas.

En cualquier caso, el cálculo de la pérdida de carga económica en un eje comunicativo territorial, con distribución discreta del caudal económico desde un territorio inicial T (origen) a otro final T' (destino último), de cuantía constante por derivación o salida y con salidas supuestamente equidistantes, para el caso en que la primera derivación estuviera a una distancia l_o del territorio T (o del centro de gravedad de sus masas económicas) igual al espaciamiento entre las derivaciones l, presenta un grado de dificultad no excesivo (FRANQUET, 1990/91).

5.2.2. Determinación del coeficiente reductor y aproximación de funciones

Como ya sabemos, la expresión que ofrece las pérdidas de carga económica totales **h** en este tipo de distribución, con un eje territorial de sección o capacidad económica constante y longitud total L, será del tipo:

$$h = J \cdot L \cdot F = n_o \cdot Q^m \cdot L \cdot F \text{ , siendo:}$$

n_o = número de derivaciones o salidas.
F = f(n_o,m) coeficiente experimental de reducción por salidas.
m = coeficiente empírico en función de la sección económica y características infraestructurales del eje comunicativo, utilizado en la fórmula empleada para el cálculo de las pérdidas de carga económica (anteriormente, hemos supuesto: m = 2'00).
L = longitud total del eje comunicativo.
Q = caudal económico que fluye inicialmente desde el territorio T.

Matemáticamente, no resulta difícil demostrar que el valor de F responderá a la expresión:

$$F = 1 / n_0^{1+m} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m = f(n_0) \quad (6) \ ,$$

para cuyo cálculo puede emplearse la función aproximada:

$$F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2} = g(n_0) \qquad (7)$$

En definitiva, el problema que se plantea (FRANQUET, 2003) consiste en obtener la aproximación de la función g(x) a la función f(x) con el mínimo error posible, en un entorno del punto de abscisa: x = n_0, o dicho de otro modo, que dada la función real de variable real: F = f(x), definida en x = n_0, se pretende encontrar otra función real de variable real: F = g(x) lo más “sencilla” posible y que se “aproximase” suficientemente a f(x) en un entorno de radio suficientemente pequeño del punto considerado, hasta el punto que en x = n_0, también se cumple que: f(n_0) = g(n_0). En este caso, el error que se comete en un entorno del punto $x = n_0$, cuando en vez de f(x) se toma la función g(x), vendrá dado por:

$$E = \left| f(n_0 + dx) - g(n_0 + dx) \right|$$

Por otra parte, la *medida de la aproximación* de g(x) a f(x) es un cierto número **r**, tal que el límite siguiente existe, es finito y distinto de 0:

$$\lim_{dx \to 0} \frac{E}{dx^r} = \lim_{dx \to 0} \frac{\left| f(n_0 + dx) - g(n_0 + dx) \right|}{dx^r}$$

De alguna manera las funciones que llamamos “elementales” como sen x, cos x, log x, e^x, ..., etc., no resultan, en realidad, nada elementales; por ejemplo, si deseamos calcular sen x, encontramos que, salvo para unos pocos valores: $x = 0$, $x = \pi/4$, $x = \pi/2$, ..., etc., el cálculo directo de sen x es imposible. No ocurre así con las funciones polinómicas:

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

donde las operaciones a realizar son simplemente aritméticas. Por ello, tiene gran interés obtener fórmulas que permitan **aproximar** las funciones irracionales o trascendentes mediante polinomios, con el fin de calcular de manera aproximada los valores de aquéllas. Como es natural, en toda aproximación es preciso obtener estimaciones fidedignas del error cometido. Obviamente, no podemos esperar un conocimiento exacto del error, puesto que ello supondría también un conocimiento preciso de la magnitud que aproximamos y haría innecesaria la aproximación. Lo que deseamos, en cualquier caso, es **acotar**, de manera que al realizar la aproximación tengamos la seguridad de que el error cometido no supera cierta cantidad.

Recordemos que en el Análisis matemático, el concepto de diferencial supone una aproximación lineal de la función en un entorno del punto en consideración. Diríamos que si f(x) es una función derivable en el punto n_0, la función afín g(x) es tal que:

$$g(x) = f(n_0) + f'(n_0) \cdot (x - n_0)$$

y aproxima los valores de f(x) en un entorno de n_0. Puede verse gráficamente así:

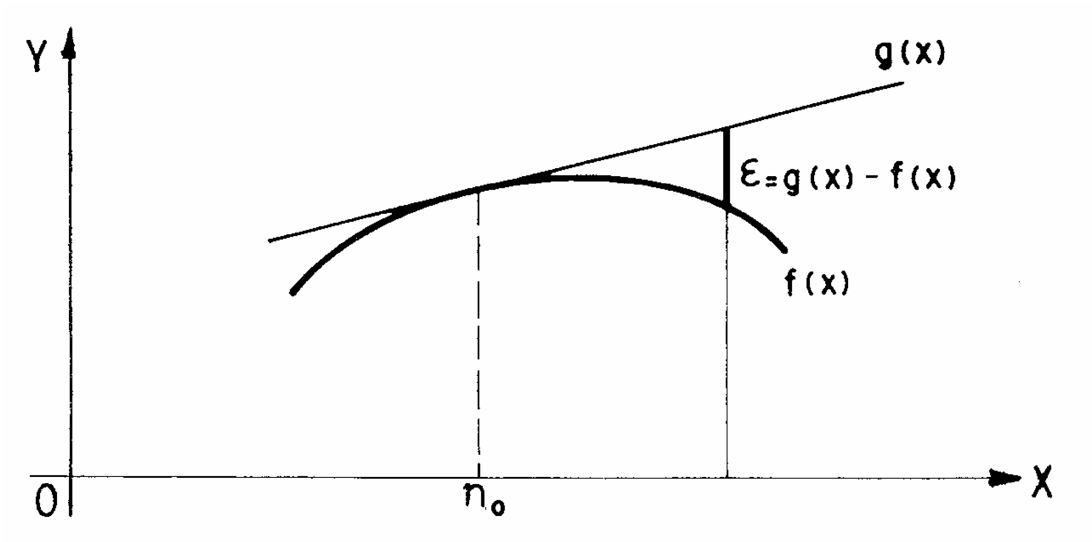

Fig. A-11.1. Aproximación entre las funciones f(x) y g(x) en el punto: $x = n_o$

No obstante, el sentido de la palabra “aproxima”, en la afirmación anterior, resulta, a nuestro juicio, excesivamente vago. Podemos precisarlo más si decimos que:

$$\lim_{x \to n_0} [g(x) - f(x)] = 0 \quad (7')$$

pero, aunque esa igualdad sugiere que f(x) y su aproximación g(x) son más y más parecidos cuánto más próximo está x de n_0, no nos proporciona una idea precisa de la magnitud del error cometido al sustituir f(x) por g(x) para un valor particular de **x**.

Siguiendo este camino podemos afirmar, aún más, que:

$$\lim_{x \to n_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - n_0} = \lim_{x \to n_0} \left(\frac{f(x) - f(n_0)}{x - n_0} - f'(n_0) \right) = f'(n_0) - f'(n_0) = 0 \quad (7'')$$

Esta afirmación contenida en la expresión (7”), aunque sigue siendo imprecisa, resulta más fuerte que la anterior (7’), y nos garantiza, no solamente que el error $|g(x)\text{-}f(x)|$ se hace más y más pequeño al acercarnos a n_0, sino también que esa cantidad comparada con ($x\text{-}n_0$), que es una magnitud que decrece hacia cero, tiende también a cero; esto lo resumiremos diciendo que $|g(x)\text{-}f(x)|$ tiende a cero más rápidamente que ($x\text{-}n_0$). Con símbolos, las aseveraciones anteriores se expresan escribiendo:

$$g(x) - f(x) = o(x - n_0)$$

que se lee g(x)-f(x) es un infinitésimo (una cantidad infinitamente pequeña) comparado con ($x\text{-}n_0$). Esta notación, que se corresponde con la “o pequeña” de Landau[5] resulta muy útil en el cálculo de límites y para describir términos cuya expresión exacta puede ser complicada, pero cuyo comportamiento en el límite nos es conocido. Para precisarla mejor, damos la definición siguiente (FRANQUET, 2003):

"Decimos que la función h(x) es $o((x-a)^n)$, $h(x) = ((x-a)^n)$, si se cumple que:

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^n} = 0 \text{ ''}$$

Así pues, la notación infinitesimal: $o((x-a)^n)$ nos permite ofrecer una información **cualitativa** más que cuantitativa sobre el error cometido en la aproximación funcional.

Por otra parte, podemos esperar que si una función posee en un punto varias derivadas, sea posible aproximar los valores de la función en un entorno de ese punto por funciones, más que lineales, polinómicas.

En algunos puntos de la recta real, la aproximación de ambas funciones puede ser total e incluso coincidente el valor que toman $f(n_0)$ y $g(n_0)$. Y así, veamos cómo en un ejemplo práctico cualquiera, si hubiéramos supuesto, v. gr., un exponente de la velocidad de m = 2'00 y n_0 = 54 salidas o derivaciones de una autopista o autovía), habríamos obtenido un coeficiente teórico de reducción por salidas de:

$$F = f(n_0) = \frac{(n_0+1)\cdot(2n_0+1)}{6n_0^2} = \frac{2n_0^2+3n_0+1}{6n_0^2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2n_0}+\frac{1}{6n_0^2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 54}+\frac{1}{6\cdot 54^2} = 0'343$$

y, también, la aplicación estricta de la fórmula aproximada conduciría a la obtención exacta del mismo resultado, puesto que:

$$F = g(n_0) = \frac{1}{1+2}+\frac{1}{2\cdot n_0}+\frac{\sqrt{2-1}}{6\cdot n_0^2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 54}+\frac{1}{6\cdot 54^2} = 0'343$$

con lo que el error cometido en la aproximación sería nulo (E = 0).

Recordemos, por último, que al principio del presente epígrafe de nuestro estudio se decía que se pretendía hallar una cierta función g(x) "lo más

[5] Dada una cierta función f(x), con la notación o(f), se designa cualquier función φ(x) tal que se cumpla que: $\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0$. La condición anterior puede sustituirse por la siguiente: ∀ε >0, corresponde un entorno: ε*(a) donde: $|\varphi(x)| \leq \varepsilon |f(x)|$. Una ecuación de la forma: φ = o(f) equivale, pues, a la relación anterior.

sencilla" posible y que se aproximara "lo suficiente" a la función problema. Anteriormente, ya hemos indicado cómo medir el grado de aproximación en cuestión; ahora bien, al objeto de no perdernos en subjetivismos, ¿qué debemos entender por la expresión "lo más sencilla posible"?.

En general, tomaremos como tales funciones las polinómicas o parabólicas (a partir del 2º grado), esto es, las de configuración analítica del tipo:

$$g(x) = a + b\cdot x + c\cdot x^2 + d\cdot x^3 + ...$$

cuyo grado nos vendrá determinado por la aproximación que deseemos obtener y donde las constantes (a, b, c, d, ...) se hallarán con la condición de que la nueva función g(x) se aproxime lo más posible a la f(x).

La aproximación más sencilla, o sea, la de primer grado, es la lineal ofrecida por la ecuación de la recta tangente a la curva dada f(x) en el punto de abscisa $x = n_0$. Las aproximaciones de orden superior podrán obtenerse por aplicación del conocido teorema de Taylor para el desarrollo de la función f(x) en dicho punto. En cualquier caso, el problema eficazmente resuelto por Christiansen alcanzó una mayor complejidad, sin que, por razones desconocidas por quien suscribe, dicho autor quisiera publicitar, en su día, la deducción matemática de su famosa fórmula, cuestión ésta que constituye, precisamente, el objeto fundamental del presente capítulo de nuestro estudio (FRANQUET, 1990/91).

En el caso concreto en que: m = 2'00, tal como hemos supuesto anteriormente utilizando el símil hidráulico correspondiente a la aplicación de la fórmula simplificada de Darcy para el cálculo de tuberías, y teniendo presente el valor de la suma de la serie numérica en cuestión[6] resultará en la expresión (6):

$$F = \frac{1}{n_0^{1+2}} \cdot \frac{n_0(n_0+1)\cdot(2n_0+1)}{6} = \frac{(n_0+1)\cdot(2n_0+1)}{6\cdot n_0^2} =$$

$$= \frac{2n_0^2 + 3n_0 + 1}{6\cdot n_0^2} = 1/3 + 1/2\,n_0 + 1/6\,n_0^2$$

, que, como puede comprobarse, coincide exactamente con lo que resulta de la expresión (7), sustituyendo el valor: m = 2'00. De hecho, dicha expresión

[6] *Vide* el libro del autor "Cinco temas de hidrología e hidráulica", cap. II, pp. 168 y ss. Citado en la bibliografía.

aproximada fue dada por Christiansen en 1942 para el cálculo de las tuberías a presión con distribución discreta, caudal constante por derivación y salidas equidistantes, si bien su justificación teórica ha sido omitida en la bibliografía especializada existente al respecto.

Pues bien, vamos a tratar, aquí, de explicar o justificar matemáticamente la mencionada aproximación de Christiansen, basándonos, inicialmente, en el concepto de suma integral.

En efecto, veamos que la expresión:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m = 1^m + 2^m + 3^m + ... + n_0{}^m$$

representa la suma o adición de las áreas de los rectángulos yuxtapuestos de alturas: 1^m, 2^m, 3^m, 4^m, 5^m, ..., y de base igual a la unidad.

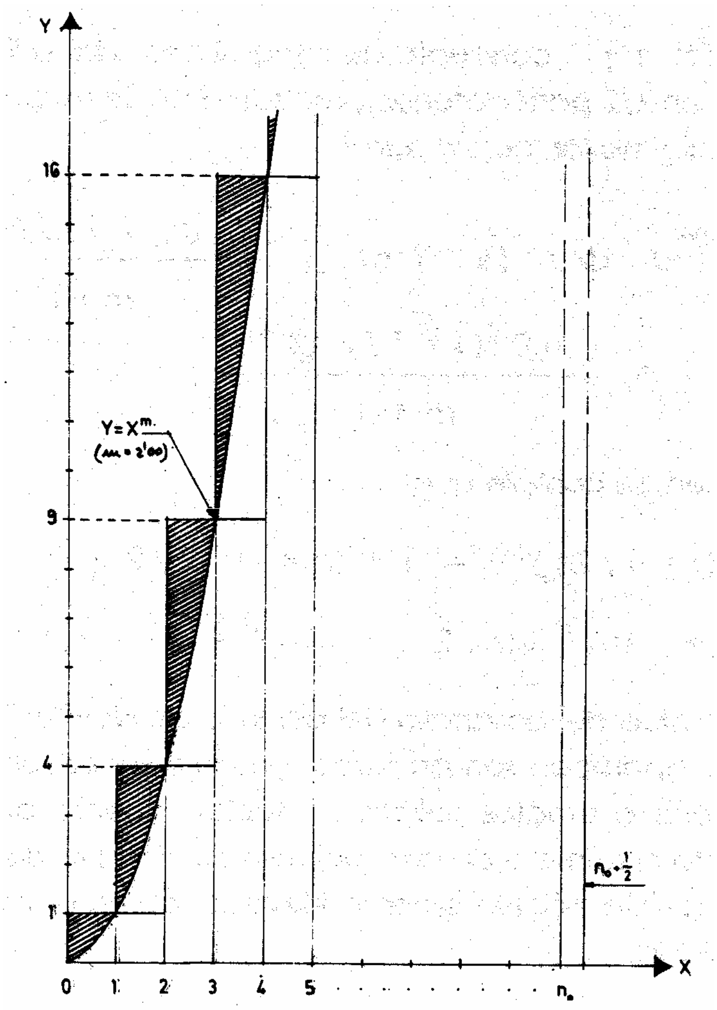

Fig. A-11.2. Representación gráfica de la función: $y = x^m$

Como puede verse en la representación gráfica adjunta (realizada, v. gr., para m = 2'00), la curva o función potencial $y = x^m$, encierra, entre ella y el eje de abscisas OX, un área que difiere de la buscada en aproximadamente la mitad del área del rectángulo mayor, puesto que, efectivamente, la zona representada en la figura anterior por la superficie rayada , puede considerarse equivalente a la mitad de la superficie de dicho rectángulo.

Desde luego, se obtendrá una buena aproximación a dicha determinación tomando para la expresión:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m \quad ,$$

el área existente debajo de la curva y sobre el eje de abscisas, pero entre los límites u ordenadas extremas:

$$x = 0 \qquad y \qquad x = n_0 + 1/2 \quad ,$$

por aplicación del propio concepto de integral definida. El límite superior se incrementará en 1/2 para obtener, precisamente, la mitad de la superficie del rectángulo mayor, con lo que:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m \int_0^{n_0+1/2} x^m \cdot dx = [\, x^{m+1}/ m+1 \,]_0^{n_0+1/2} = \frac{(n_0 + 1/2)^{m+1}}{m+1} =$$

$$= \frac{n_0^{m+1}(1 + 1/2n_0)^{m+1}}{m+1} \quad .$$

Ahora bien, se cumple que:

$$(1 + 1/2n_0)^{m+1} = 1 + (m + 1) \cdot 1/2\, n_0 +$$

$$+ (m + 1) \cdot m/2 \cdot 1/4\, n_0^2 + \ldots \quad ,$$

por la fórmula clásica del desarrollo del binomio de Newton-Tartaglia. Los términos que no aparecen son de tercer grado y sucesivos en $1/n_0$ y se pueden despreciar a efectos prácticos, habida cuenta de su bajísima magnitud cuando el número de derivaciones o salidas $\mathbf{n_0}$ del eje comunicativo territorial resulta suficientemente elevado, como acostumbra a suceder en la realidad (FRANQUET, 2003).

Así pues, el coeficiente experimental de reducción por salidas, anteriormente definido, tomará el valor:

$$F = 1 / n_o^{1+m} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m =$$

$$= \frac{n_0^{m+1}\left[(1 + (m+1) \cdot 1/2n_0 + (m+1) \cdot m/2 \cdot 1/4n_0^2\right]}{n_0^{m+1} \cdot (m+1)} =$$

$$= 1 / m+1 + 1 / 2\, n_o + m / 8\, n_o^2 \ .$$

Con ello, ya hemos obtenido los dos primeros términos de la fórmula aproximada cuya deducción es objeto de nuestro estudio, a saber:

$$1 / m+1 + 1 / 2\, n_o \ .$$

Ahora bien, el tercero de ellos: $m/8n_o^2$, no coincide con el $(m-1)^{1/2}/ 6n_o^2$, que encontramos en dicha fórmula. Sin duda, ello se debe a que este tercer término ha sido cambiado o alterado expresamente (lo cual resultaría lícito puesto que, en definitiva, nos hallamos ante un proceso de aproximación) con el único objetivo de que la fórmula sea válida para los casos particulares: m = 1, 2, 3.

Veamos, a continuación, lo que sucede con cada uno de ellos:

Para m = 1, se tendrá:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i = n_o(n_o + 1) / 2 = 1 + 2 + 3 + ... + n_o \ ,$$

puesto que es la suma de los n_o primeros términos consecutivos de una progresión aritmética de razón igual a la unidad. Así:

$$F = n_o(n_o + 1) / 2\, n_o^2 = n_o+1 / 2\, n_o = 1 / 2 + 1 / 2\, n_o \ .$$

A este nivel, hay que cambiar el término $m/8n_o^2$ por otro como, por ejemplo, $m-1/8n_o^2$, para que se obtenga 0 cuando m = 1.

Para m = 2, se tendrá:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^2 = [n_o\,(n_o + 1) \cdot (2\, n_o + 1)] / 6 = 1 + 2^2 + 3^2 + ... + n_o^2 \quad ;$$

en efecto, ello puede demostrarse por inducción, dado que la igualdad anterior se cumple, evidentemente, para $n_o = 1$, puesto que:

$$[1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1+1)] / 6 = 1 \ .$$

Supongámosla también cierta para n_o. Entonces, se tendrá:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n_o^2 = n_o (n_o + 1) \cdot (2n_o + 1) / 6 \ ,$$

y sumando $(n_o + 1)^2$ a los dos miembros, resultará:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n_o^2 + (n_o + 1)^2 = n_o(n_o + 1) (2n_o + 1) / 6 + (n_o + 1)^2 =$$

$$= (n_o + 1) \ [n_o(2n_o + 1) + 6(n_o + 1)] / 6 =$$

$$= (n_o + 1) \ [n_o(2n_o + 3) + 4n_o + 6] / 6 =$$

$$= (n_o + 1) [n_o (2n_o + 3) + 2(2n_o + 3)] / 6 =$$

$$= (n_o + 1) (n_o + 2) (2n_o + 3) / 6 \ ,$$

luego la igualdad resulta cierta para $(n_o + 1)$, tal como pretendíamos demostrar. Así pues, el coeficiente de reducción por salidas adoptará el valor:

$$F = [(n_o + 1) \cdot (2n_o + 1)] / 6 n_o^2 = (2 n_o^2 + 3 n_o + 1) / 6 n_o^2 =$$

$$= 1 / 3 + 1 / 2 n_o + 1 / 6 n_o^2 \ .$$

A este nivel, habrá que cambiar el término m-1/8n_o^2 por otro tal como m-1/6 n_o^2 , para que adopte el valor 0 cuando m = 1, y valga 1/6n_o^2, cuando m = 2.

Para m = 3, se tendrá:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^3 = n_o^2 (n_o + 1)^2 / 4 = 1 + 2^3 + 3^3 + ... + n_o^3 \ ;$$

en efecto, al igual que en el caso anterior, veamos que esta identidad cúmplese para $n_o = 1$. Siguiendo el mismo método de inducción, supongámosla también cierta para n_o. Entonces:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n_o^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n_o)^2 \ ,$$

y sumando $(n_o + 1)^3$ a los dos primeros miembros de esta igualdad, resulta:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n_o^3 + (n_o + 1)^3 =$$

$$(1 + 2 + 3 + ... + n_o)^2 + (n_o + 1) \cdot (n_o + 1)^2 =$$

$$(1 + 2 + 3 + ... + n_o)^2 + n_o (n_o + 1)^2 + (n_o + 1)^2 .$$

Pero, según hemos visto en el primer caso (para m = 1), se cumple que:

$$n_o (n_o + 1) = 2 (1 + 2 + 3 + ... + n_o) \quad ,$$

luego también:

$$n_o (n_o + 1)^2 = 2 (1 + 2 + 3 + ... + n_o) \cdot (n_o + 1) \quad \text{, y, por lo tanto:}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n_o^3 + (n_o + 1)^3 =$$

$$= (1 + 2 + 3 + ... + n_o)^2 + 2 (1 + 2 + 3 + ... + n_o) \cdot (n_o + 1) + (n_o + 1)^2 =$$

$$= [1 + 2 + 3 + ... + n_o + (n_o + 1)]^2 \quad ,$$

lo que prueba que la igualdad es cierta para $(n_o + 1)$, tal como pretendíamos demostrar. Luego el coeficiente reductor de las pérdidas de carga económica, adoptará el valor:

$$F = 1/n_o^4 \cdot [n_o^2 (n_o + 1)^2]/4 = (n_o^4 + 2n_o^3 + n_o^2)/4 n_o^4 = 1/4 + 1/2n_o + 1/4 n_o^2$$

A este nivel, hay que cambiar el término $(m-1)/6n_o^2$ por otro que siga valiendo 0 para m = 1, que valga $1/6n_o^2$ para m = 2 y que valga $1/4n_o^2$ para m = 3. En este orden de ideas, veamos que resulta útil su substitución por el término $(m-1)^{1/2} /6n_o^2$, pues dicha expresión vale 0 para m = 1, vale $1/6n_o^2$ para m = 2, y, para m = 3 no vale $1/4n_o^2$ en sentido estricto, pero sí toma un valor próximo que es: $2^{½} / 6 n_o^2$, y $2^{½} /6$ = 0'2357022 es aproximadamente igual a: 1/4 = 0'2500000 (concretamente, el primer valor es un 94'28% del segundo), lo que satisface, de hecho, nuestras exigencias prácticas (FRANQUET, 2003).

Siendo la fórmula así obtenida válida para los valores del exponente m = 1, m = 2, m = 3, o sea: $m \in (1, 2, 3)$, resultará también válida para los números reales no enteros del tipo: $m \in (1, 4)$, esto es: 1'..., 2'..., 3'..., y también, aunque con menor grado de aproximación, para los valores supuestos: 4'..., 5'..., etc., que pudiera adoptar el coeficiente utilizado en la fórmula empleada en el cálculo de las pérdidas de carga económica del eje comunicativo, según los casos.

Así pues resultará, en definitiva, un coeficiente reductor de la pérdida de carga económica de:

$$\boxed{F = 1 / (1+m) + 1 / 2n_o + (m-1)^{½} / 6n_o^2 \quad \text{c. s. q. d.}}$$

Dicha fórmula resultará válida para el caso concreto de que la primera salida esté del comienzo del eje comunicativo territorial a una distancia $\mathbf{l_o}$ igual a **l** (r = 1).

Es obvio, por otra parte, que cuando el número de derivaciones o salidas crece indefinidamente (el caudal económico se reparte a lo largo de todo el eje comunicativo), la expresión anterior se convertirá en:

$$\lim_{n_o \to \infty} F = 1 / (1+m) \quad ,$$

que constituye, en estas circunstancias, el valor al que tiende el coeficiente experimental de reducción que nos ocupa.

5.2.3. Expresión generalizada del coeficiente reductor

Hace falta, por último, efectuar alguna otra consideración. En el caso particular de que $l_o = l/2$ (primera salida de masa económica a una distancia de T igual a la mitad del espaciamiento existente entre las restantes salidas del eje comunicativo), la expresión (6) tomará la configuración siguiente:

$$F = 1 / n_o^m \cdot (n_o - 1/2) \cdot (n_o^m / 2 + \sum_{i=1}^{n_0} i^m) \quad ,$$

que, como ya se ha dicho, se cumplirá exclusivamente para la relación:

$$r = l_o / l = 1 / 2 \quad .$$

Sea, ahora, el caso general de un eje comunicativo de longitud total **L**, con servicio en ruta, provisto de $\mathbf{n_o}$ derivaciones de caudal constante **q,** espaciamiento entre salidas **l** y hallándose la 1ª derivación a una distancia $\mathbf{l_o}$ del territorio origen T. Así:

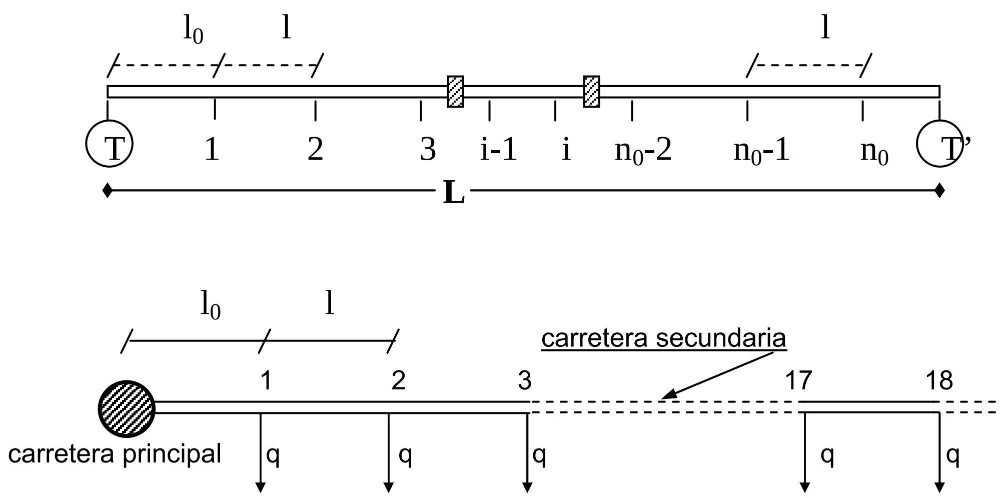

Fig. A-11.3. Eje comunicativo con servicio en ruta y derivaciones equidistantes de caudal económico constante **q**.

que se cumplirá $\forall$ l / $l_1 = l_2 = ... = l_i = l$.

Pues bien, el caudal económico de salida de T, que se agota en T', será:

$$Q = n_o \cdot q \quad , \quad (8)$$

y la longitud total del eje territorial, teniendo en cuenta que:

$$l_o = r \cdot l \quad \text{, es:}$$

$$L = l_o + (n_o - 1) \cdot l = (r + n_o - 1) \cdot l \quad (9)$$

Las pérdidas continuas de carga económica en el tramo genérico **i** del eje, comprendido entre las derivaciones **i-1** e **i**, son:

$$h_i = n \cdot l \cdot Q_i^m$$

y puesto que el caudal económico circulante por el tramo **i** es:

$$Q_i = (n_o - i + 1) \cdot q \quad ,$$

las pérdidas de carga económica en el tramo **i** podrán expresarse también como:

$$h_i = n \cdot l \cdot (n_o - i + 1)^m \cdot q^m \quad .$$

De este modo, las pérdidas de carga económica continuas en todo el eje comunicativo, serán:

$$h = \sum_{i=1}^{n_0} h_i = n \cdot q^m \sum_{i=1}^{n_0} l_i(n_o - i + 1)^m = n \cdot q^m \, [\, l_o \cdot n_o^m + \sum_{i=2}^{n_0} (n_o - i + 1)^m \,] \;;$$

y como, a la vez, se cumple que:

$$\sum_{i=2}^{n_0} (n_o - i + 1)^m = \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m \quad ,$$

quedará la siguiente expresión para las pérdidas de carga económica:

$$h = n \cdot q^m \cdot l(r \cdot n_o^m + \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m) = n \cdot Q^m \cdot L \cdot F$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las relaciones (8) y (9), se obtiene:

$$q^m \cdot l\,(r \cdot n_o^m + \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m) = n_o^m \cdot q^m \cdot (r + n_o - 1) \cdot l \cdot F \quad \text{; de dónde:}$$

$$r + 1 / n_o^m \cdot \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m = (r + n_o - 1) \cdot F \quad ,$$

con lo que despejando el coeficiente de reducción F (que representaremos por F_r, para cualquier valor que pueda adoptar la relación **r**), se tiene:

$$\boxed{F_r = \frac{r + 1 / n_0^m \cdot \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m}{r + n_0 - 1}} \quad (10) \;,$$

que constituye la expresión generalizada del coeficiente de reducción por salidas, para cualesquiera valores de los parámetros **r, n_o** y **m.**

A continuación, se han tabulado expresamente los valores de F_1(r = 1) y de $F_{1/2}$ (r = 1/2), para diferentes valores de **n_o** y de **m**, a saber:

n_0	m = 1,75	m = 1,80	m = 1,85	m = 1,90	m = 2,00
1	1, 000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	0,532	0,525	0,518	0,512	0,500
3	0,455	0,448	0,441	0,434	0,422
4	0,426	0,419	0,412	0,405	0,393
5	0,410	0,403	0,397	0,390	0,378
6	0,401	0,394	0,387	0,381	0,369
7	0,395	0,388	0,381	0,375	0,363
8	0,390	0,383	0,377	0,370	0,358
9	0,387	0,380	0,374	0,367	0,355
10	0,384	0,378	0,371	0,365	0,353
11	0,382	0,375	0,369	0,363	0,351
12	0,380	0,374	0,367	0,361	0,349
13	0,379	0,372	0,366	0,360	0,348
14	0,378	0,371	0,365	0,358	0,347
15	0,377	0,370	0,364	0,357	0,346
16	0,376	0,369	0,363	0,357	0,345
17	0,375	0,368	0,362	0,356	0,344
18	0,374	0,368	0,361	0,355	0,343
19	0,374	0,367	0,361	0,355	0,343
20	0,373	0,367	0,360	0,354	0,342
22	0,372	0,366	0,359	0,353	0,341
24	0,372	0,365	0,359	0,352	0,341
26	0,371	0,364	0,358	0,351	0,340
28	0,370	0,364	0,357	0,351	0,340
30	0,370	0,363	0,357	0,350	0,339
35	0,369	0,362	0,356	0,350	0,338
40	0,368	0,362	0,355	0,349	0,338
50	0,367	0,361	0,354	0,348	0,337
100	0,365	0,359	0,353	0,347	0,335
200	0,365	0,358	0,352	0,346	0,334
∞	0,364	0,357	0,351	0,345	0,333

Tabla A-11.1. Coeficiente de reducción F (r = 1/2)

A continuación, puede verse que cuando r = 1 se producen ligeras variantes en relación a la tabla anterior. Así:

n_0	m = 1.00	m = 1.75	m = 1.80	m = 1.85	m = 1.90	m = 2.00
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	0.750	0.650	0.644	0.639	0.634	0.625
3	0.667	0.546	0.540	0.535	0.528	0.518
4	0.625	0.497	0.491	0.486	0.480	0.469
5	0.600	0.469	0.463	0.457	0.451	0.440
6	0.583	0.451	0.445	0.435	0.433	0.421
7	0.571	0.438	0.432	0.425	0.419	0.408
8	0.563	0.428	0.422	0.415	0.410	0.398
9	0.556	0.421	0.414	0.409	0.402	0.391
10	0.550	0.415	0.409	0.402	0.396	0.385
11	0.545	0.410	0.404	0.397	0.392	0.380
12	0.542	0.406	0.400	0.394	0.388	0.376
13	0.538	0.403	0.396	0.391	0.384	0.373
14	0.536	0.400	0.394	0.387	0.381	0.370
15	0.533	0.397	0.391	0.384	0.379	0.367
16	0.531	0.395	0.389	0.382	0.377	0.365
17	0.529	0.393	0.387	0.380	0.375	0.363
18	0.528	0.392	0.385	0.379	0.373	0.361
19	0.526	0.390	0.384	0.377	0.372	0.360
20	0.525	0.389	0.382	0.376	0.370	0.359
22	0.523	0.387	0.380	0.374	0.368	0.357
24	0.521	0.385	0.378	0.372	0.366	0.355
26	0.519	0.383	0.376	0.370	0.364	0.353
28	0.518	0.382	0.375	0.369	0.363	0.351
30	0.517	0.380	0.374	0.368	0.362	0.350
32	0.516	0.379	0.373	0.367	0.361	0.349
35	0.514	0.378	0.371	0.365	0.359	0.347
40	0.513	0.376	0.370	0.364	0.357	0.345
50	0.510	0.374	0.367	0.361	0.355	0.343
60	0.508	0.372	0.366	0.359	0.353	0.342
80	0.506	0.370	0.363	0.357	0.351	0.340
100	0.505	0.369	0.362	0.356	0.350	0.338
150	0.503	0.367	0.360	0.354	0.348	0.337
300	0.502	0.365	0.359	0.353	0.346	0.335
∞	0.500	0.364	0.357	0.351	0.345	0.333

Tabla A-11.2. Coeficiente de reducción F (r = 1)

No obstante, dado el infinito número de valores posibles de **r**, resulta más práctico que tabular la ecuación anterior (10) basarse en los correspondientes valores para r = 1 para el cálculo del resto de los valores de F. En efecto, puesto que se cumple la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} i^m = \sum_{i=1}^{n_0} i^m - n_o^m \quad ,$$

y además de la ecuación (6) se deduce que:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m = F \cdot n_o^{1+m} \quad ,$$

también deberá satisfacerse la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} i^m = F \cdot n_o^{1+m} - n_o^m \quad ,$$

que introducida en la expresión (10), la transforma en:

$$F_r = [r + 1 / n_o^m \cdot (F \cdot n_o^{1+m} - n_o^m)] /(r + n_o - 1) = (r + n_o \cdot F - 1) / (r + n_o - 1)$$

,

que permite la obtención del valor de F_r para cualquier valor de **r**, en función del correspondiente a F_1 (r = 1), para los mismos valores de los restantes parámetros $\mathbf{n_o}$ y **m**. Obviamente, para n_o = 1, también F_r = 1'00, con independencia de los valores de la relación: $r = l_o/l$.

Finalmente, hay que hacer notar que, al ser posible en la práctica del Análisis Territorial cualquier valor del parámetro **r**, este coeficiente generalizado permite el cálculo directo de las pérdidas de carga económica en un eje comunicativo de característica única, formado por un tramo inicial de cualquier longitud en régimen permanente y uniforme o estacionario y de un tramo final con distribución discreta del caudal económico y servicio en ruta.

EJEMPLO: Se trata de un eje comunicativo (autopista o autovía) con 22 salidas de la masa económica de bienes y/o servicios a otros tantos núcleos urbanos e industriales, espaciadas a un promedio de 8'5 km., estando la primera salida a 3'6 km. del centro de masas del territorio origen T.

Admitiendo, como venimos haciendo, que: m = 2'00, de la ecuación (7) resulta:

$$F = 1 / 3 + 1 / 44 + 1 / 6{\cdot}22^2 = 0'3564 \approx 0'357$$

como también puede comprobarse en la tabla correspondiente para r = 1.

En este caso, $r = l_o / l = 3'6 / 8'5 = 0'42353$, con lo que:

$$\mathbf{F_r} = (0'42353 + 22 \cdot 0'357 - 1) / (0'42353 + 22 - 1) = 7'27753 / 21'42353 = \mathbf{0'340}$$

,

que es el valor que pretendíamos hallar.

También, en este caso, se tendrá una longitud total del eje comunicativo de:

$$L = 21 \cdot 8'5 + 3'6 = 182'1 \text{ km.} \quad ,$$

con lo que, para una sección o capacidad económica de dicha infraestructura de 10^6 €/km. y una velocidad media de 65 km./hora, se tendrá un caudal económico inicialmente circulante de:

$$Q = S \cdot v = 65 \times 10^6 \text{ €/hora} \quad ,$$

lo que implica unas pérdidas de carga totales entre los territorios T y T' de:

$$h = n \cdot Q^2 \cdot L \cdot F = n \cdot (65 \times 10^6)^2 \cdot 182'1 \cdot 0'340 =$$

$$= 261.586'65 \cdot 10^{12} \cdot n \ (€^{*}.km) \ ,$$

quedando el resultado final del problema propuesto a expensas de la determinación empírica del valor del parámetro o coeficiente **n**.

6. EJE COMUNICATIVO DE CAPACIDAD VARIABLE

6.1. MÉTODO DEL EJE EQUIVALENTE

Sea el caso, por ejemplo, de un eje territorial de comunicación entre dos territorios T(A) y T'(B), con k secciones o capacidades diferentes: S_1, S_2, ..., S_k, de longitudes respectivas: l_1, l_2, ..., l_k. Las ecuaciones de continuidad y energía, anteriormente expuestas, establecen las dos siguientes relaciones que deben ser satisfechas simultáneamente (TORRES, 1970):

$$\begin{cases} Q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_k \\ h = h_1 + h_2 + \dots + h_k = \sum_{i=1}^{k} h_i \end{cases}$$

Para un caudal económico dado de valor Q, la pérdida de carga total en la conducción será, despreciando las pérdidas accidentales en los puntos singulares de la misma:

$$h = J_1 \cdot l_1 + J_2 \cdot l_2 + \dots + J_k \cdot l_k = \sum_{i=1}^{k} J_i \cdot l_i \ .$$

Pues bien, puede resultar práctico el procedimiento de sustituir -a los efectos del cálculo- el eje territorial de comunicación entre ambos territorios por un único eje equivalente, de sección o capacidad económica constante. *Diremos, pues, que un eje territorial es "equivalente" a otro cuando la pérdida de carga económica, para un caudal económico dado, es la misma que la del conjunto de sub-ejes a los que sustituye.*

Siendo **l** y **S** las dimensiones del eje equivalente al eje mixto real con **k** secciones diferentes anteriormente definido, vamos a demostrar que si para un caudal económico Q se cumple la condición: h = H, siendo H la pérdida de carga del caudal económico Q en el eje equivalente, esta condición se seguirá verificando para las pérdidas correspondientes a cualquier otro caudal Q'.

Por hipótesis, se tendrá:

$$h = \sum_{i=1}^{k} h_i = H \quad ,$$

e introduciendo en ambos ejes comunicativos un nuevo caudal económico arbitrario:

$$Q' = \alpha \cdot Q \ ,$$

resultará que la pérdida de carga económica total en el sistema valdrá, ahora:

$$h' = h_1' + h_2' + ... + h'_k = \sum_{i=1}^{k} h_i' = H' \ .$$

Ahora bien, según el símil hidráulico establecido por la fórmula simplificada de Darcy (símil hidráulico), se obtiene:

$$\begin{cases} h_1 = n_1 \cdot l_1 \cdot Q^2 & ; \quad h_1' = n_1 \cdot l_1 \cdot (\alpha \cdot Q)^2 \ ; \\ h_2 = n_2 \cdot l_2 \cdot Q^2 & ; \quad h_2' = n_2 \cdot l_2 \cdot (\alpha \cdot Q)^2 \ ; \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . & \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ h_k = n_k \cdot l_k \cdot Q^2 & ; \quad h_k' = n_k \cdot l_k \cdot (\alpha \cdot Q)^2 \ ; \end{cases}$$

y dividiendo ordenadamente, resultará:

$$h_1' / h_1 = h_2' / h_2 = ... = h_k' / h_k = h' / h = \alpha^2 \ , \text{ y también:}$$

$$h' = \sum_{i=1}^{k} h_i' = \alpha^2 (h_1 + h_2 + ... + h_k) = \alpha^2 \cdot h \ ,$$

y como: $H' = \alpha^2 \cdot H$, quedará también demostrado que: $H' = h'$.

En consecuencia, el problema del estudio o análisis de los ejes comunicativos de capacidad económica variable (carreteras de diferente anchura o categoría, vías férreas sencillas, dobles o de alta velocidad, sistemas convencionales de telecomunicación por cable coaxial o fibra óptica, etc.) puede reducirse al de un sólo eje de sección económica prefijada y de una cierta longitud. Puede ser conveniente, en fin, la fijación de la sección o capacidad económica del eje equivalente igual a la del sub-eje más largo del sistema territorial en estudio, quedando reducido el problema a la determinación de la longitud **l** del eje equivalente. En la práctica del Análisis Territorial, el valor de **l** podrá calcularse fácilmente introduciendo un caudal económico arbitrario cualquiera Q en el sistema real en estudio y determinando el valor correspondiente de **h**. Entonces, como sabemos que dicho caudal Q ha de producir la misma pérdida **h** en el eje equivalente de capacidad económica prefijada **S**, con los valores de **Q** y **S** se calculará la pérdida de carga económica unitaria J, con lo que:

$$I = h / J .$$

Supuesto de aplicación:

Así, dado un eje comunicativo entre dos territorios, de capacidad económica variable, se desea saber cuál es el caudal económico Q' capaz de producir una pérdida de carga económica total h'.

- Datos del problema: $I_1, I_2, \ldots, I_k$; $S_1, S_2, \ldots, S_k$; h' .

- Incógnita del problema: Q' .

Pues bien, sustituyendo el eje real por un eje equivalente de capacidad económica prefijada S, calcularemos **I** por el procedimiento anteriormente indicado. Por fin, en el eje equivalente, con:

J' = h' / I y S, podremos hallar el valor buscado del caudal económico Q'.

6.2. MÉTODO DE LOS PORCENTAJES

En un eje comunicativo de capacidad variable, se verifica que la pérdida de carga económica se reparte en porcentajes constantes, para cada tramo, independientemente de la cuantía del caudal económico circulante. Dichos porcentajes pueden, por tanto, determinarse haciendo circular, por el sistema territorial, un caudal económico arbitrario. Debe tenerse en cuenta, no obstante, que según la naturaleza de la masa de bienes y servicios constitutiva del flujo territorial en cuestión (tipos de mercancías o servicios profesionales, etc.) las pérdidas de carga económica también podrán ser diferentes. Ello ya ha sido expuesto en el anterior epígrafe 2.

Si hacemos circular, sucesivamente, dos caudales cualesquiera: Q y Q' = $\alpha \cdot Q$, según hemos visto anteriormente, se tendrá que (TORRES, 1970):

$$h_1' / h_1 = h_2' / h_2 = \ldots = h_k' / h_k = h' / h = \alpha^2 \quad ,$$

o, lo que es lo mismo:

$$\begin{cases} h_1 / h = h_1' / h' = a & ; \\ h_2 / h = h_2' / h' = b & ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ h_k / h = h_k' / h' = s & ; \quad \text{c.s.q.d.} \end{cases}$$

Así pues, si pretendemos resolver el ejercicio del epígrafe anterior por el presente método, partiremos de un caudal económico arbitrario Q, hallándose: $h_1, h_2, \ldots, h_k$, h, con lo cual conoceremos los porcentajes:

$$h_1' / h' = a \quad ; \quad h_2' / h' = b \quad ; \quad \ldots\ldots\ldots \quad ; \quad h_k' / h' = s \quad ,$$

y con uno de los valores: h_1', h_2', ... , h_k', y la capacidad económica correspondiente: S_1, S_2, ... , S_k, se halla el caudal económico Q' que andamos buscando. Como comprobación del método expuesto, puede hallarse el Q' en otro tramo del sistema territorial en estudio.

7. EJES COMUNICATIVOS EN PARALELO

7.1. MÉTODO GENERAL

Un caso que usualmente podrá presentarse en el Análisis Territorial, será aquél en que la comunicación entre dos núcleos territoriales A y B no es única (a través de un sólo eje) sino múltiple o compleja, mediante diversas carreteras, vías férreas o redes de telecomunicación de diferentes características dimensionales. La ligazón entre ambos polos o núcleos tendrá lugar, pues, mediante **k** ejes comunicativos. Desde luego, en este análisis pueden excluirse los enlaces marítimos o aéreos, por razones obvias de asentamiento espacial.

También puede suceder, en la práctica de la creación de nuevas infraestructuras de transporte o de telecomunicación, que cuando una vía ya existente resulte insuficiente para atender las necesidades motivadas por una ampliación o incremento del caudal económico circulante, sea más interesante el duplicar en parte o en su totalidad la longitud del eje existente mediante la creación de otro nuevo, que sustituirle por otro de mayor sección o capacidad económica. Ello se viene haciendo, por ejemplo, mediante el "doblado" de las vías férreas, o bien mediante el trazado de una autopista o autovía paralela a una carretera nacional o comarcal de tráfico sobresaturado.

A diferencia de los ejes comunicativos estudiados hasta ahora, en los que el mismo caudal económico fluye a través de todos ellos y las pérdidas de energía económica son acumulativas, en los ejes comunicativos dispuestos en paralelo las pérdidas de energía económica pueden ser las mismas o diferentes en cualquiera de ellos y los caudales son acumulativos.

Puesto que las cargas económicas y sociales (rentas familiares, depósitos bancarios, población, ...) en A y B son comunes a todos los ejes territoriales de comunicación que en ellos convergen, el caudal económico total se distribuirá en dichos ejes de acuerdo con las cargas económicas actuantes en las conexiones o núcleos territoriales. Las ecuaciones de continuidad y de energía, que deberán satisfacerse de modo simultáneo, serán las siguientes (TORRES, 1970):

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 \dots + Q_k = \sum_{i=1}^{k} Q_i \\ h = h_1 = h_2 = \dots = h_k \end{cases}$$

(y ello suponiendo iguales las pérdidas de carga económica en los ejes comunicativos paralelos).

Si se conoce la pérdida de carga económica **h** entre los núcleos territoriales A y B, el caudal económico total circulante puede hallarse directamente sumando los caudales parciales:

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_k$$

de los diversos ejes comunicativos, entre ambos puntos.

7.2. MÉTODO DE LOS PORCENTAJES

En los ejes comunicativos en paralelo, también puede resultar práctico el resolver el problema anterior mediante el método de los porcentajes, que se basa en la circunstancia de que en un sistema de ejes en paralelo, los caudales económicos se repartirán en porcentajes constantes para cada eje, independientemente de la pérdida de carga económica que exista entre los núcleos territoriales. Dichos porcentajes, por tanto, pueden ser determinados suponiendo entre los núcleos A y B una pérdida de carga económica arbitraria.

En efecto, al circular por el sistema un caudal económico cualquiera Q se produce una pérdida de carga económica **h**, y para otro cierto caudal Q' la pérdida es: $h' = \alpha \cdot h$.

Evidentemente, se verificará:

$$\begin{cases} h = n_1 \cdot l_1 \cdot Q_1^2 = n_2 \cdot l_2 \cdot Q_2^2 = \dots = n_k \cdot l_k \cdot Q_k^2 \quad ; \\ \alpha \cdot h = n_1 \cdot l_1 \cdot Q'^2_1 = n_2 \cdot l_2 \cdot Q'^2_2 = \dots = n_k \cdot l_k \cdot Q'^2_k \end{cases}$$

Dividiendo ordenadamente y extrayendo la raíz cuadrada, resulta:

$$Q_1' / Q_1 = Q_2' / Q_2 = \dots = Q_k' / Q_k = Q' / Q = \alpha^{1/2} \quad \text{, luego:}$$

$$\begin{cases} Q_1 / Q = Q_1' / Q' = a \quad ; \\ Q_2 / Q = Q_2' / Q' = b \quad ; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_k / Q = Q_k' / Q' = s \quad ; \end{cases}$$

estando: a, b, ..., s, expresados en tantos por uno (TORRES, 1970).

Supuesto de aplicación:

Sea, por ejemplo, el caso de tres ejes territoriales dispuestos en paralelo, que enlazan los núcleos territoriales A y B.

- Datos del problema: I_1, I_2 y I_3 ; S_1, S_2 y S_3 ; Q

- Incógnitas del problema: Q_1, Q_2, Q_3 y h.

Supongamos entre los núcleos territoriales A y B una pérdida de carga arbitraria h' y tendremos las correspondientes pérdidas de carga unitaria en cada eje:

$$J_1' = h' / I_1 \quad ; \quad J_2' = h' / I_2 \quad ; \quad J_3' = h' / I_3$$

Con estos valores y las respectivas secciones económicas: S_1, S_2 y S_3, hallaremos los correspondientes caudales económicos: Q'_1, Q'_2 y Q'_3, los cuales nos darán los porcentajes (expresados, en realidad, en tantos por uno):

$$Q_1'/ (Q_1' + Q_2' + Q_3') = a \; ; \; Q_2'/ (Q_1' + Q_2' + Q_3') = b \; ; \; Q_3'/ (Q_1' + Q_2' + Q_3') = c \; ;$$

$$a + b + c = 1$$

Repartiendo ahora el caudal económico total Q con arreglo a estos porcentajes para cada eje territorial, tendremos:

$$Q \cdot a = Q_1 \; ; \; Q \cdot b = Q_2 \; ; \; Q \cdot c = Q_3$$

y ya en uno cualquiera de los ejes, por ejemplo en el primero, conociendo Q_1 y S_1 obtendremos J_1 y, finalmente: $h = J_1 \cdot I_1$.

Como comprobación a lo expuesto, se pueden calcular las pérdidas totales: J_2 y J_3, y ver que se cumple la expresión:

$$h = J_1 \cdot I_1 = J_2 \cdot I_2 = J_3 \cdot I_3 \; .$$

7.3. MÉTODO DEL EJE EQUIVALENTE

Puede presentarse dicha situación ante la conveniencia, por ejemplo, de construir una moderna infraestructura de comunicación o de transporte en substitución de otra u otras ya existentes y obsoletas (aprovechando, a veces, el mismo trazado en todo o en parte del recorrido).

Para sustituir un sistema de ejes territoriales en paralelo por un nuevo eje equivalente de sección económica prefijada S, se procederá del siguiente modo (TORRES, 1970):

- Datos del problema: l_1, l_2 y l_3 ; S_1, S_2, S_3 y S

- Incógnitas del problema: l.

Se supone entre los núcleos territoriales A y B una pérdida de carga económica arbitraria h' y se opera como en la aplicación del apartado anterior, hasta obtener los caudales económicos: Q'_1, Q'_2 y Q'_3.

Con $Q' = Q'_1 + Q'_2 + Q'_3$, y la sección S, se halla J', y el valor correspondiente de **l**, será:

$$l = h' / J' \ .$$

Un problema de ejes comunicativos en paralelo puede, pues, reducirse al de un eje sencillo y único, de capacidad económica prefijada y de una cierta longitud, pudiendo resolverse según los procedimientos ya conocidos (TORRES, 1970).

8. EJES COMUNICATIVOS RAMIFICADOS

Este caso se halla representado en la figura siguiente, en el que las ramificaciones 1-2 y 3-4 del eje principal 0-5 están constituidas por otros ejes territoriales. El problema que se planteará en la práctica será el de dimensionar los diferentes tramos para que el sistema en conjunto distribuya los caudales económicos previstos.

La representación gráfica sería la siguiente:

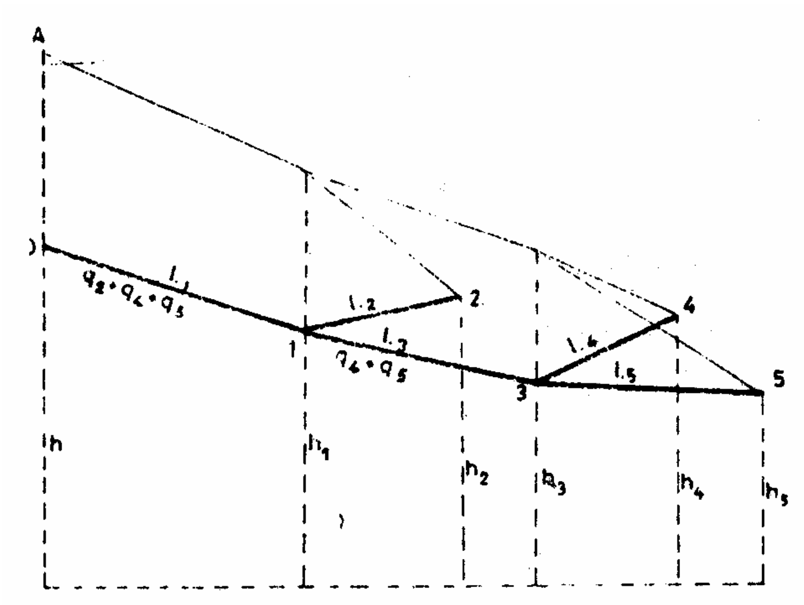

Fig. A-11.4. Eje comunicativo ramificado.

Sea O el origen del eje territorial y sea O-1 el tramo principal del mismo, que dispone de una carga económica inicial: OA + h. Numerando los elementos de cada ramal con el subíndice correspondiente al número que lleva en su extremo, y representando por las letras **h** la parte de la carga total económica comprendida entre cada punto del territorio y el plano o nivel económico de comparación, tendremos el siguiente problema:

- Datos del problema: h, h_2, h_4, h_5 ; q_2, q_4, q_5 ; l, l_2, l_3, l_4, l_5

- Incógnitas del problema: h_1, h_3 ; S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

pudiendo plantearse las cinco ecuaciones siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{c} h - h_1 = n_1 \cdot l_1(q_2 + q_4 + q_5)^2 \\ h_1 - h_2 = n_2 \cdot l_2 \cdot q_2^2 \\ h_1 - h_3 = n_3 \cdot l_3 \cdot (q_4 + q_5)^2 \\ h_3 - h_4 = n_4 \cdot l_4 \cdot q_4^2 \\ h_3 - h_5 = n_5 \cdot l_5 \cdot q_5^2 \end{array}}$$

Los valores de los n_i , $\forall\ i \in (1, ..., 5)$, serán función de las correspondientes S_i, de acuerdo con las fórmulas empíricas establecidas al caso. De este modo, el anterior sistema de 5 ecuaciones con 7 incógnitas es compatible indeterminado, por lo que tiene infinitas soluciones. No obstante, es posible su resolución fijando las cargas económicas h_1 y h_3 o bien la velocidad de circulación en alguno de los ramales (TORRES, 1970). En nuestro ejemplo:

$$\mathbf{h_1} : h \; ; h_2 \; ; h_3 \quad , \quad \mathbf{h_3} : h_4 \; ; h_5$$

El problema puede, pues, resolverse mediante aproximaciones sucesivas, o bien con el auxilio de un programa adecuado de ordenador. Al tantear la carga económica en los núcleos territoriales, debe seguirse el criterio de obtener capacidades económicas ajustadas, y que los valores de la velocidad media sean aceptables, basándose en razones de orden técnico y legal. Así mismo, se procurará que el régimen de velocidades en el sistema sea lo más uniforme posible, es decir, que no se produzcan diferencias substanciales de velocidad al pasar de un tramo del eje territorial al siguiente (lo que conllevaría desajustes, retenciones o inadaptaciones diversas).

Una generalización del problema expuesto, en la que se conocen de antemano los valores de los caudales económicos máximos que pueden circular entre los diversos núcleos territoriales (en base, claro está, a las correspondientes capacidades económicas de los tramos y a valores limitativos de las pérdidas de carga), se acomete en el epígrafe siguiente.

9. CAUDAL O FLUJO ECONÓMICO MÁXIMO A TRAVÉS DE UNA RED

9.1. LA FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DEL PROBLEMA

Si en vez de considerar, como hasta ahora, el caso de dos únicos puntos del territorio T(A) y T'(B) unidos entre sí por uno o varios ejes comunicativos, contemplamos el caso de diversos puntos del territorio (por ejemplo, un conjunto de ciudades pertenecientes a la misma comarca) unidos por varios ejes de diferentes características dimensionales, nos hallaremos en presencia del caso bien real de una malla o red territorial que no es más que un grafo finito y sin bucles, en el que cada arco o eje se le asocia un caudal económico máximo $c\,(u) \geq 0$, al objeto de no rebasar ciertos valores límites preestablecidos de las pérdidas de carga económica, y en el cual:

- existe un vértice x_0 y uno solo, tal que: $\Gamma^{-1} x_0 = \phi$. Este vértice x_0 se llamará "entrada de la red" o "fuente".

- existe un vértice z y uno solo, tal que: $\Gamma\, z = \phi$. Este vértice z se llamará "salida de la red" o "sumidero".

Por otra parte, un cierto flujo o caudal económico φ de la red es una cantidad $\varphi\,(u)$ asociada a cada arco **u** de la red, tal que:

$$\varphi\,(u) \geq 0, \; \forall\, u \in U \; ,$$

además:

$$\sum_{u \in U_x} - \varphi\,(u) - \sum_{u \in U_x} + \varphi\,(u) = 0 \quad \text{, si:} \quad x \neq x_0 \quad \text{y} \quad x \neq z$$

y también: $\varphi\,(u) \leq c\,(u)$,

habiendo representado por U_x^- el conjunto de arcos que inciden interiormente en x, y por U_x^+ el conjunto de arcos que inciden exteriormente en x.

Por φ_z, se representa la cantidad de bienes y/o servicios que llega al vértice z, o sea, el "valor del flujo φ".

Buscar el flujo máximo en una red equivale a hacer llegar el máximo flujo económico al vértice z. El conocido algoritmo de Ford-Fulkerson (DESBAZEILLE, 1969) permite resolver este problema, operando sucesivamente del siguiente modo:

1.º Se hace pasar por la red cualquier flujo compatible teniendo en cuenta las propiedades de los grafos.

2.º Se busca un *flujo completo.* Un flujo es completo si todo camino que va de x_0 a z contiene al menos un arco saturado, es decir, tal que $\varphi(u) = c(u)$.

3.º Sea $\varphi(x, y)$ un flujo completo; por un procedimiento iterativo se van a marcar, sucesivamente, todos los vértices del grafo a donde se puede hacer llegar una unidad de flujo suplementaria.

Se marca x_0 con el coeficiente 0.

Si x_i es un vértice marcado, se marca con el coeficiente +i todo vértice **y** no marcado, tal que:

$$(x_i, y) \in U \;\; \text{y} \;\; \varphi(x_i, y) < c(x_i, y) \;\; .$$

Si x_i está marcado, se marca con el índice -i todo vértice **y** sin marcar, tal que:

$$(y, x_i) \in U \quad \text{y} \quad \varphi(y, x_i) > 0 \; .$$

Si, con este procedimiento, se llegase a marcar el vértice z, existirá entre x_0 y z una cadena μ de la cual todos los vértices son distintos y marcados con el índice del vértice precedente (al signo próximo). Pongamos:

$$\varphi'(u) = \varphi(u) \;, \quad \text{si } u \notin \mu \;; \quad \text{además:} \quad \varphi'(u) = \varphi(u) + 1 \;,$$

si u $\in$ μ y u está orientado en el sentido de la cadena que va de x_0 a z; también:

$$\varphi'(u) = \varphi(u) - 1$$

si u $\in$ μ y u está orientado en el sentido inverso de la cadena μ que va de x_0 a z.

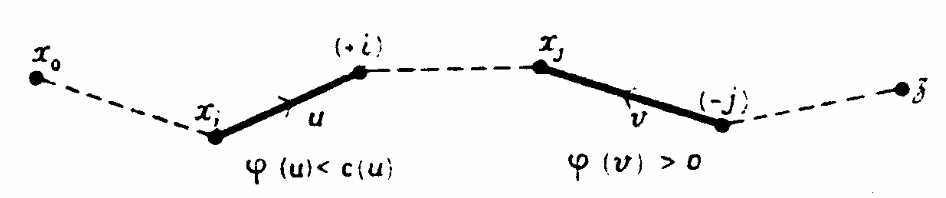

Fig. A-11.5. Cadena y flujo económico.

Es evidente que $\varphi'(u)$ es también un flujo y como $\varphi'_Z = \varphi_Z + 1$, se habrá mejorado el valor del flujo económico territorial.

4.º Si para un flujo φ^0 no se puede mejorar más el valor por el método anterior, es decir, si no se puede marcar el vértice z, el flujo φ^0 ha alcanzado su valor máximo (cf. Teorema de Ford-Fulkerson).

Recordemos, en fin, que en la Teoría de los Grafos, que es una técnica de la Investigación Operativa, se denomina "cadena" a una sucesión ordenada de arcos adyacentes con una orientación cualquiera (DESBAZEILLE, 1969).

9.2. ALGUNOS SUPUESTOS DE APLICACIÓN

Veamos, a continuación, después de operar del modo señalado, los resultados ofrecidos por tres redes diferentes de transporte entre 9, 10 y 11 puntos del territorio, respectivamente, que podían ser, por ejemplo, capitales de comarca, unidos entre sí por ejes comunicativos cuyos caudales económicos circulantes máximos vienen dados por las cifras que figuran sobre los arcos del grafo correspondiente, que se expresan en 10^6 €/hora.

Caso 1.º:

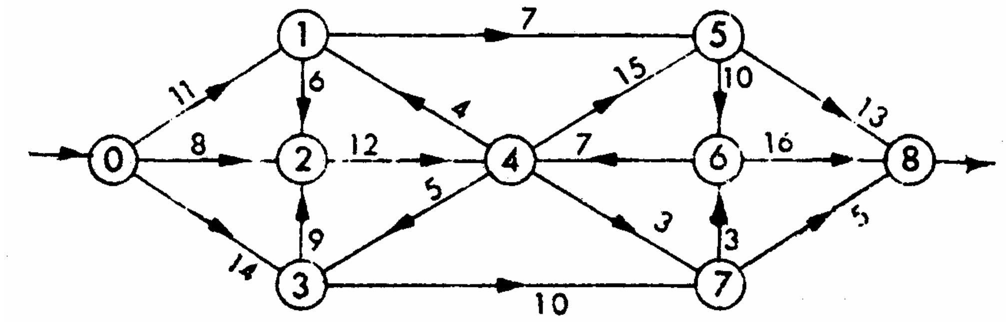

Fig. A-11.6. *Solución:* Flujo máximo = 27 millones de €/hora.

Caso 2.º:

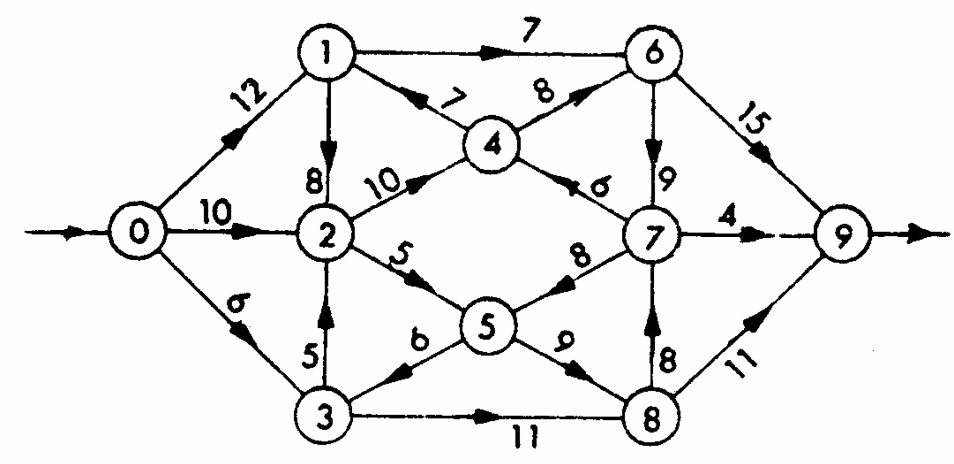

Fig. A-11.7. *Solución:* Flujo máximo = 26 millones de €/hora.

Caso 3.º:

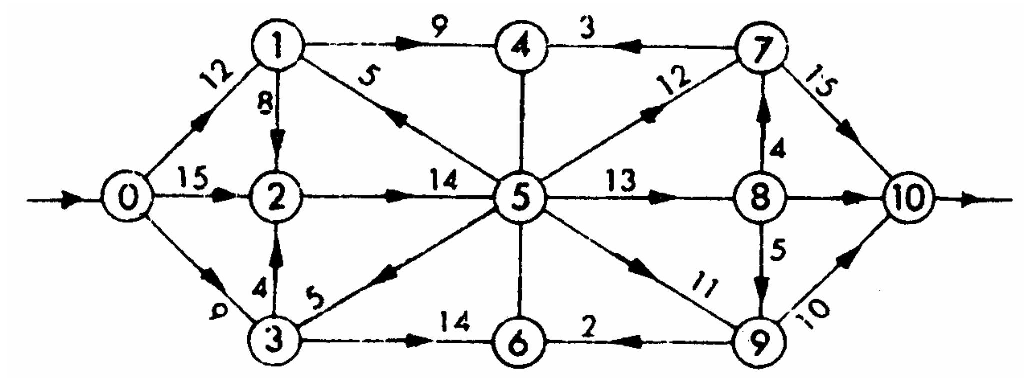

Fig. A-11.8. *Solución:* Flujo máximo = 31millones de €/hora.

Veamos, en fin, que a los efectos de nuestra discusión, supondremos que el flujo económico se puede "crear" en la fuente y "eliminar" en el sumidero. En el análisis de algunos autores, se introduce, a veces, un arco ficticio desde el sumidero hasta la fuente denominado "arco de retorno", que permite reintroducir de nuevo en la red el flujo que llega al sumidero y posibilita un tratamiento homogéneo de todos los nudos de la red en algunos algoritmos de obtención del flujo máximo. Nosotros, sin embargo, no lo consideraremos en nuestro enfoque del problema, sin que excluyamos totalmente su aplicabilidad en el Análisis Territorial (retorno de mercancías, ...).

Si denotamos por $\varphi(x_i, x_j)$ al valor del flujo económico que circula por el arco o eje territorial (x_i, x_j), y se admite que dicho flujo se puede dividir indefinidamente (habida cuenta de su propia naturaleza, esto es, formado por multitud de partículas económicas de bienes y/o servicios), y que en cada nudo o núcleo del territorio, excluyendo la fuente y el sumidero, se verifican las leyes de conservación del flujo (esto es, que el flujo de entrada es igual al de salida), se puede proceder, entonces, a la resolución del problema planteado por medio del algoritmo descrito.

También el flujo máximo por una red puede no ser único (DESBAZEILLE, 1969), en el sentido de que pueden existir diferentes esquemas de flujo que proporcionen dicho máximo. En particular, si entre dos núcleos territoriales x_i y x_j existen ejes comunicativos en ambas direcciones (x_i, x_j) y (x_j, x_i), se puede proponer un esquema óptimo de flujos para el que, o bien $\varphi(x_i, x_j) = 0$, o bien $\varphi(x_j, x_i) = 0$.

Así, por ejemplo, el flujo máximo correspondiente a la figura A-11.9. supone la circulación de un flujo por los arcos (2, 3) y (3, 2) dado por:

$$\varphi(x_2, x_3) = 2 \;\; ; \;\; \varphi(x_3, x_2) = 4 \quad .$$

Si definimos, entonces:

$$\varphi(x_2, x_3) = 0 \;\; ; \;\; \varphi(x_3, x_2) = 2 \quad ,$$

se obtiene un nuevo flujo, compatible con las restricciones, que mantiene el mismo valor del flujo total, esto es, un nuevo flujo máximo en la red, pero con la particularidad de que ahora el flujo económico por el eje territorial (2, 3) es nulo.

El problema planteado puede verse en la siguiente figura:

Caso 4.º:

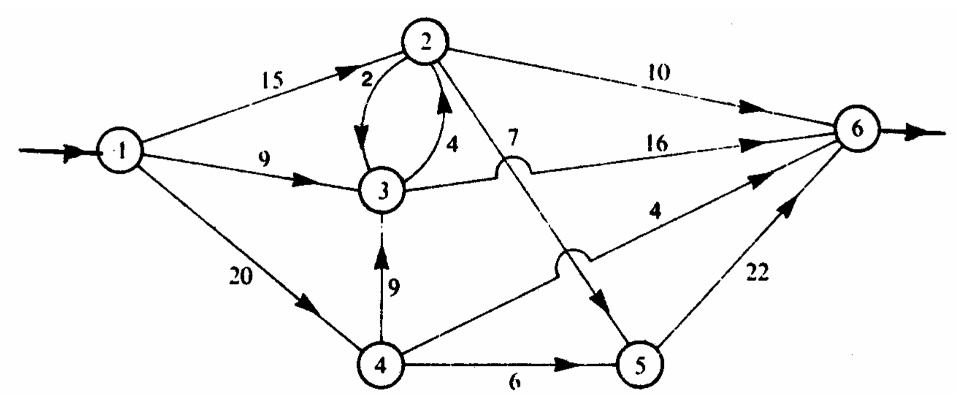

Fig. A-11.9. *Solución:* Flujo máximo = 43 millones de €/hora.

9.3. GENERALIZACIÓN Y CONCLUSIONES

De hecho, el proceso de redefinición de un esquema de flujo máximo en dos arcos o ejes en sentidos opuestos entre dos núcleos territoriales, no es más que un caso particular de la redefinición de un esquema de flujos económicos en cualquier "circuito" de la red, mediante la sustracción de un número arbitrario a los flujos que circulan por los arcos del circuito, siempre y cuando no resulten de ello flujos negativos.

En definitiva, el problema del flujo máximo consistirá en encontrar la mayor cantidad posible de caudal económico que puede pasar desde el vértice "fuente" de la red territorial al vértice "sumidero", cuando algunos -si no todos- los ejes comunicativos tienen su capacidad de flujo limitada. Para ello, habrá que buscar cuál es la sección que deja pasar menos flujo, pues, aunque otras posibles secciones de la red dejen circular mayor cantidad de flujo económico, éste no podrá llegar hasta el punto de destino, por no poder atravesar dicha mínima sección "de mínimo corte".

Hasta ahora, hemos visto cómo hallar el máximo flujo económico que puede circular por una red o grafo territorial, sin imponerle ninguna condición externa al sistema. Pudiera ocurrir, no obstante, que más de un camino ofreciera máximo flujo; si, en este caso, pudiéramos conocer los costes de los distintos arcos (costes de las infraestructuras), podríamos acometer el problema de la obtención del máximo flujo al mínimo coste, para lo que aplicaríamos el algoritmo correspondiente cuya exposición se obvia aquí por razones de espacio.

Observemos, por último, que un caso bastante general que podrá presentarse, en la práctica del Análisis Territorial, cuando se trate del estudio del paso de un flujo o caudal económico de bienes y/o servicios a través de una red territorial más o menos compleja, será el siguiente:

"existen **m** localidades productoras de la masa económica, que debe transportarse a los mercados de **n** ciudades consumidoras (o bien recíprocamente, circulando el flujo económico en sentido contrario). De cada localidad productora salen ejes territoriales comunicativos directos hasta algunas de las **n** ciudades consumidoras, pero, naturalmente, no hasta todas ellas, conociéndose la capacidad o caudal económico máximo que puede circular por cada arco o eje c(u), en base a su propia capacidad infraestructural o sección económica, así como a los valores límites preestablecidos de las pérdidas de carga económica. El sistema territorial contemplado debe organizarse racionalmente, esto es, de modo que pueda transportarse la mayor cantidad posible de masa económica, pero sin exceder nunca la demanda de cada mercado ni la sección o capacidad económica máxima de cada eje comunicativo" (FRANQUET, 1990/91).

10. APLICACIÓN NUMÉRICA DE LA DETERMINACIÓN DEL FLUJO ECONÓMICO MÁXIMO

10.1. ALGORITMO DE FORD-FULKERSON

Ya ha sido descrito en el apartado anterior. Vamos a aplicarlo a una malla o red territorial compuesta por 12 ciudades o núcleos territoriales, unidos entre sí por ejes comunicativos cuyas capacidades de transporte o caudales económicos máximos se conocen de antemano. A saber:

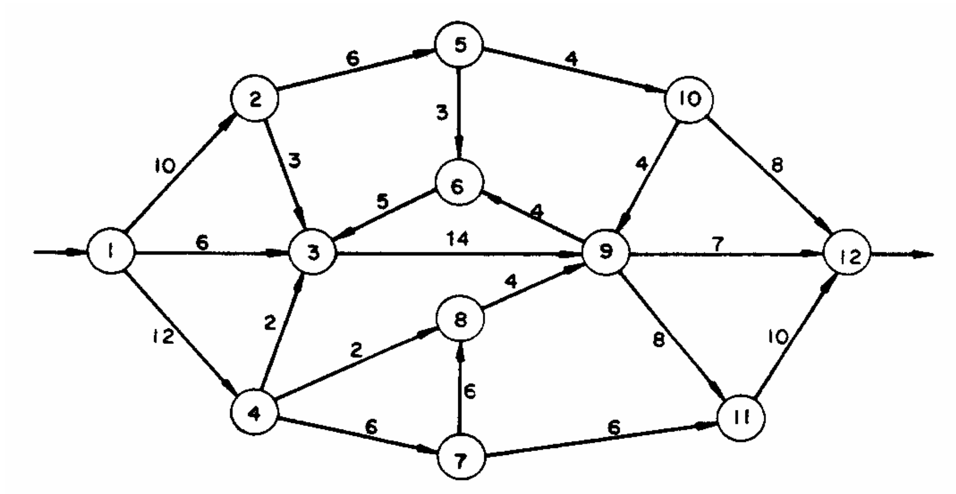

Fig. A-11.10. Algoritmo de Ford-Fulkerson (I)

donde el coste de pasar una mitad de flujo por cada arco viene dada entre paréntesis.

1.º Hacemos pasar por el camino 1-2-5-10-12 un flujo de 4.

Hacemos pasar por el camino 1-2-5-6-3-9-12 un flujo de 2, y queda:

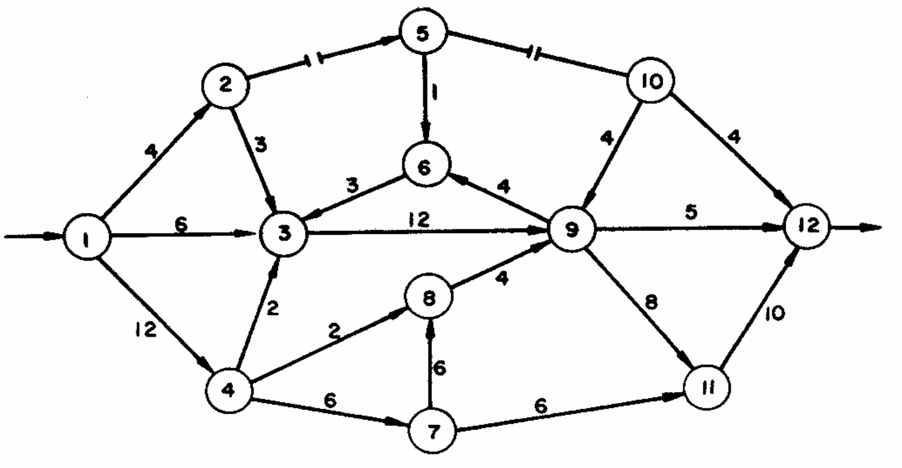

Fig. A-11.11. Algoritmo de Ford-Fulkerson (II)

2.º Si ahora se hace pasar por el camino 1-3-9-12, un flujo de 5.

Si ahora se hace pasar por el camino 1-4-7-11-12, un flujo de 6.

Si ahora se hace pasar por el camino 1-4-8-9-11-12, un flujo de 2.

Si ahora se hace pasar por el camino 1-4-3-9-11-12, un flujo de 2, queda:

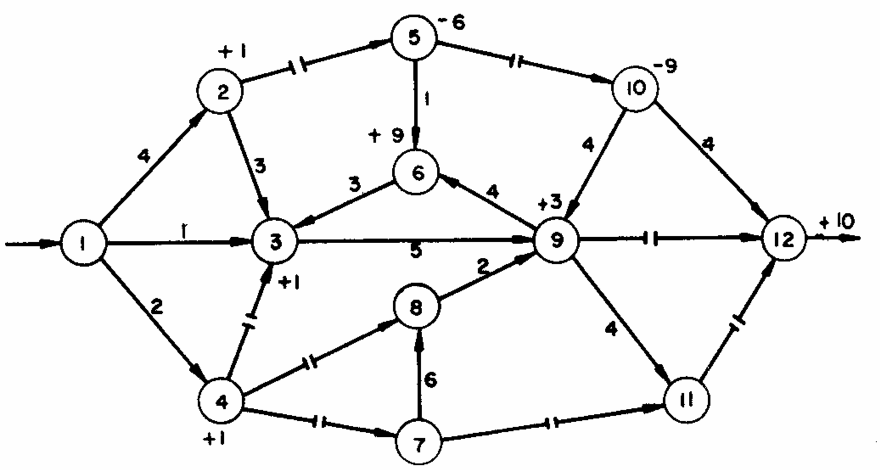

Fig. A-11.12. Algoritmo de Ford-Fulkerson (III)

El flujo ahora es completo. Por eso aparecen las señalizaciones, y con ellas, un camino: 1-3-9-10-12.

3.º Aumentando en él, el flujo en 1, queda:

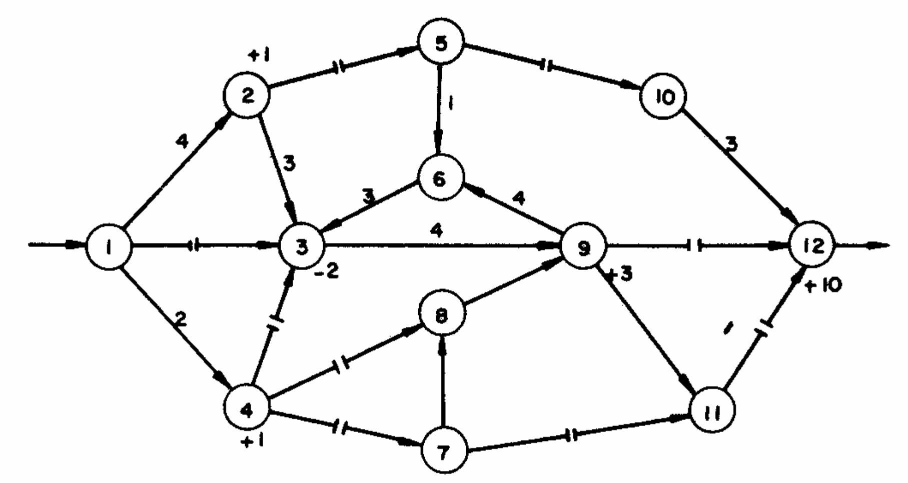

Fig. A-11.13. Algoritmo de Ford-Fulkerson (IV)

Notemos que en el arco 10-9 el flujo ha aumentado debido a su orientación.

Ya aparecen las señalizaciones y un nuevo camino:

1-2-3-9-10-12, por el que pueden circular 3 unidades. Veamos, a continuación, el siguiente grafo:

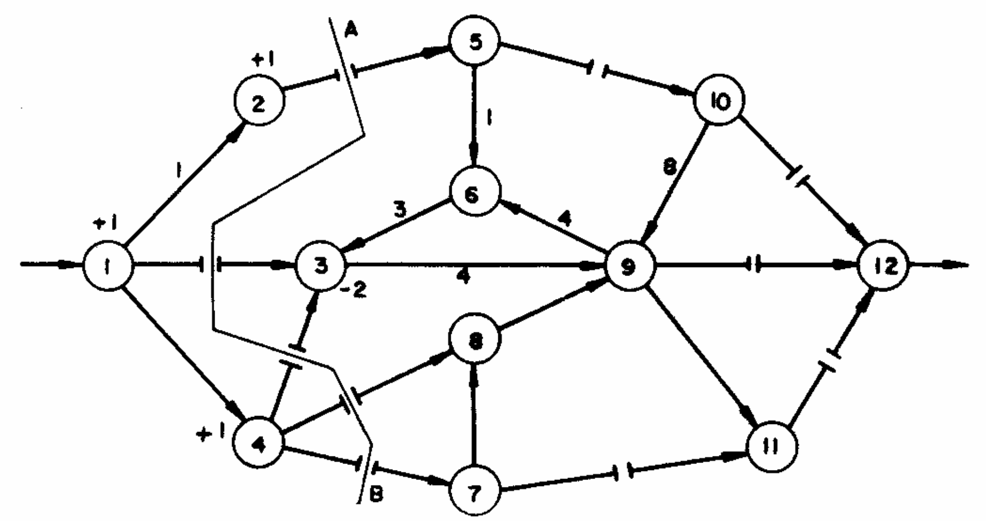

Fig. A-11.14. Algoritmo de Ford-Fulkerson (V)

donde aparecen saturados todos los caminos.

4.º El flujo circulante ha sido de:

4 + 2 + 5 + 6 + 2 + 2 + 1 + 3 = 25

Asimismo, aparece la línea de corte AB, a través de los arcos:

2 - 5 de capacidad 6

2 - 3 de capacidad 3

1 - 3 de capacidad 6

3 - 2 de capacidad 2

4 - 7 de capacidad 6

4 - 8 de capacidad 2

lo cual ofrece un corte total de 25 millones de €/hora, que representa el flujo territorial máximo que puede circular por la red en estudio.

10.2. NUEVA PROPUESTA DE RESOLUCIÓN

a) Por parte de este doctorando, surge una nueva propuesta de resolución de los problemas de obtención de flujo máximo, basada en el conocido procedimiento de la clasificación u ordenación en niveles de los vértices de un grafo, en aquellos casos en que se trata de un grafo conexo y sin circuitos, o bien resulte cómodo, por reducción, llegar fácilmente a él.

En el caso de la malla o red que venimos estudiando, vemos que existe un circuito formado por los vértices ③, ⑥ y ⑨, que constituye un subgrafo fuertemente conexo. El grafo reducido, será el siguiente (en el que sustituimos dicho circuito por el nuevo vértice Ⓐ):

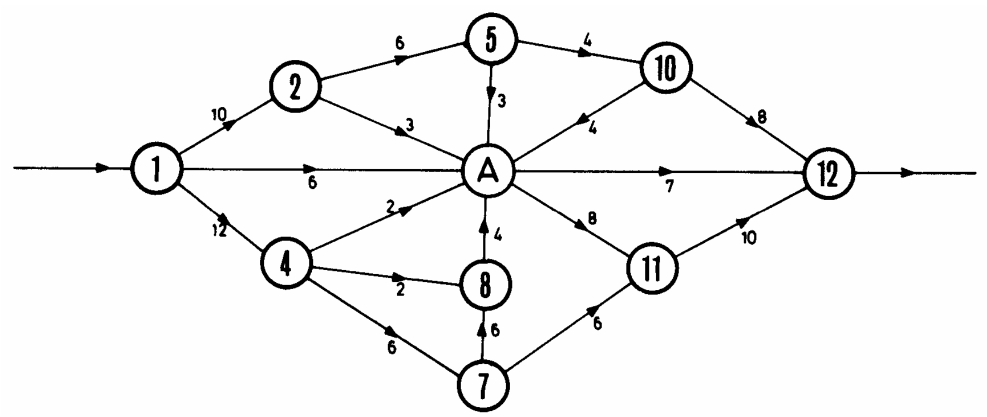

Fig. A-11.15. Substitución del circuito.

Su ordenación de vértices *hacia la antibase*, por el método también conocido como de "eliminación de descendientes", conduce a lo siguiente (FRANQUET, 1990/91):

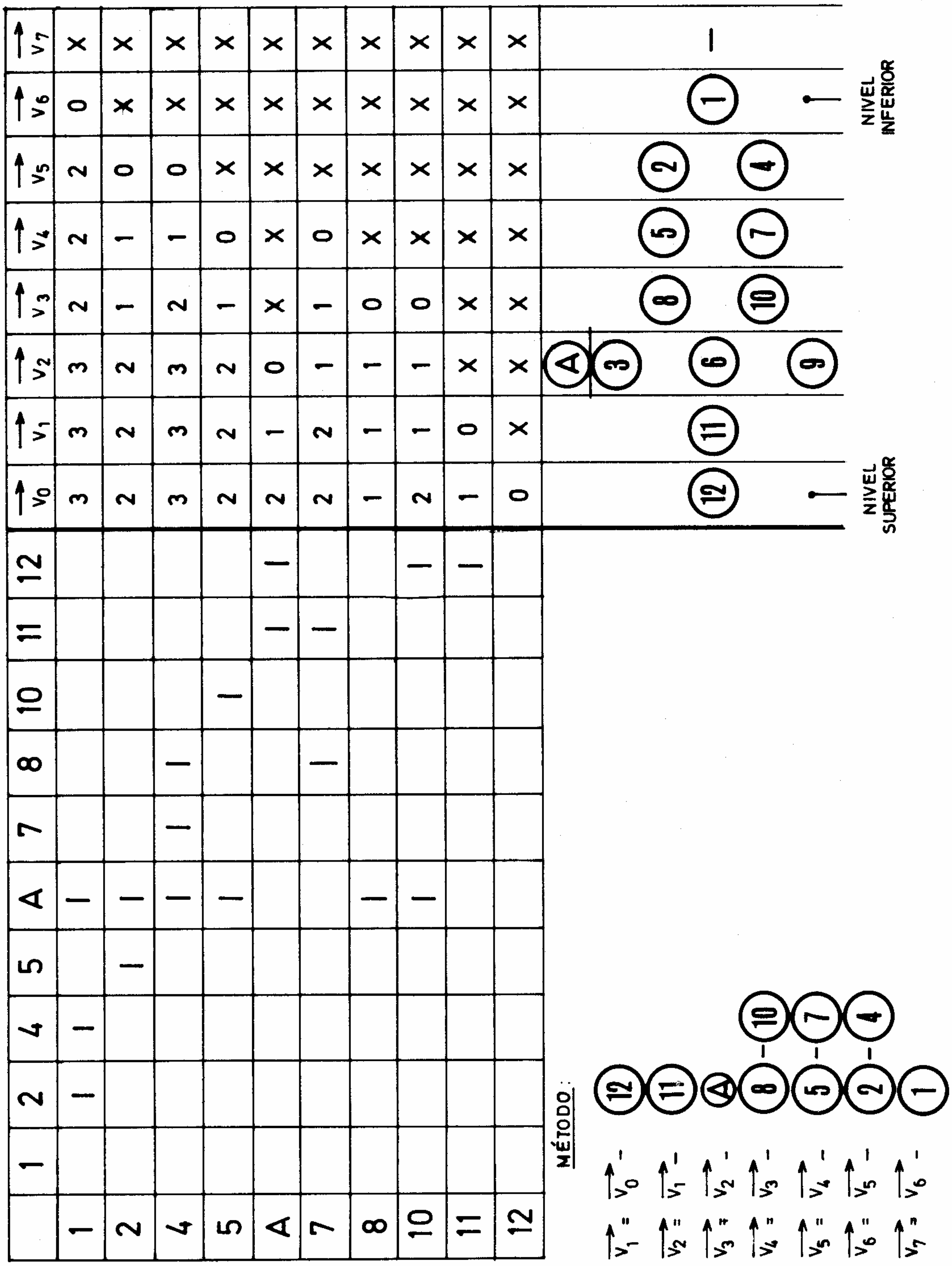

Fig. A-11.16. Ordenación de vértices hacia la antibase.

Se tiene la siguiente clasificación por etapas y niveles:

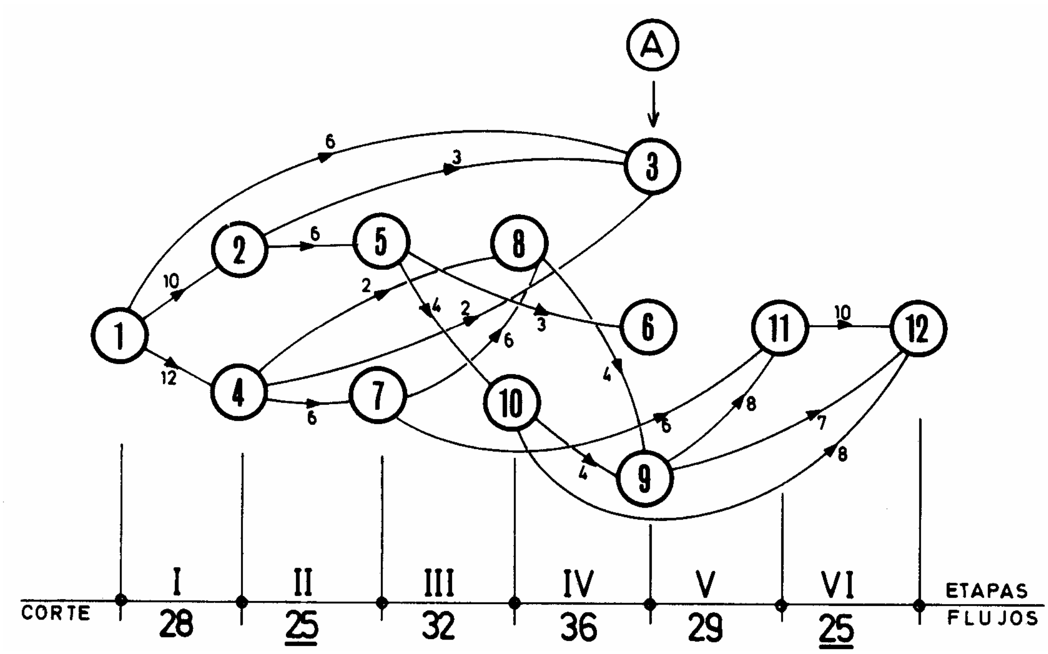

Fig. A-11.17. Clasificación por etapas y niveles.

El corte mínimo da **25** (en las etapas II y VI), luego el flujo máximo es **25**.

A través de la clasificación anterior, se ha puesto de manifiesto una prelación bien clara entre las diversas etapas del esquema de flujos económicos entre los diversos núcleos territoriales. En cualquier caso, deberá cumplirse que:

1.º) Todos los núcleos territoriales de un mismo nivel no deben poseer "ascendientes" en el nivel siguiente.

2.º) El orden de los vértices o núcleos territoriales de un mismo nivel, es independiente.

3.º) El flujo máximo que puede circular por la red territorial, vendrá dado por el de la etapa (o etapas) de flujo mínimo. En este caso, la II y la VI, con 25 millones de €/hora.

b) Del mismo modo, si tratamos, ahora, de resolver por el método aquí propuesto el grafo del caso 4º planteado en el apartado anterior, vemos que existe un circuito, formado por los vértices: ② y ③ El grafo reducido consecuente, substituyendo, v. gr., en la figura A-11.9, el circuito o camino cerrado ② - ③ por el nuevo vértice Ⓐ, ofrece:

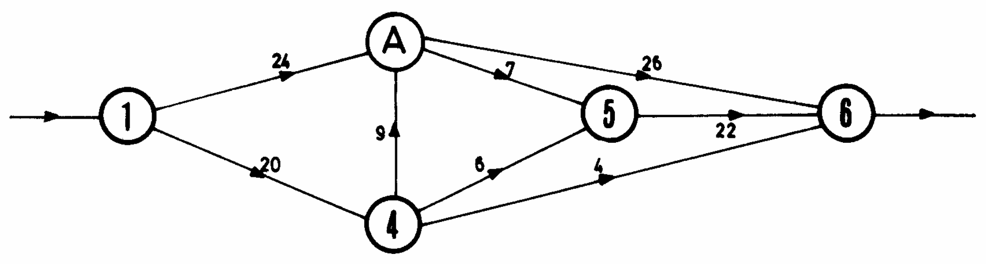

Fig. A-11.18. Grafo reducido.

Su ordenación de vértices en niveles, hacia la antibase, se realiza del siguiente modo, tratándose ya de un grafo territorial conexo y sin circuitos:

	1	A	4	5	6	$\vec{V_0}$	$\vec{V_1}$	$\vec{V_2}$	$\vec{V_3}$	$\vec{V_4}$	$\vec{V_5}$
1		1	1			2	2	2	1	0	X
A				1	1	2	1	0	X	X	X
4		1		1	1	3	2	1	0	X	X
5					1	1	0	X	X	X	X
6						0	X	X	X	X	X
						6	5	A	4	1	—

NIVEL SUPERIOR   NIVEL INFERIOR

MÉTODO:

$\vec{V_1} = \vec{V_0} - 6$

$\vec{V_2} = \vec{V_1} - 5$

$\vec{V_3} = \vec{V_2} - A$

$\vec{V_4} = \vec{V_3} - 4$

$\vec{V_5} = \vec{V_4} - 1$

Fig. A-11.19. Ordenación de vértices hacia la antibase.

La clasificación por etapas y niveles resultante, será la siguiente:

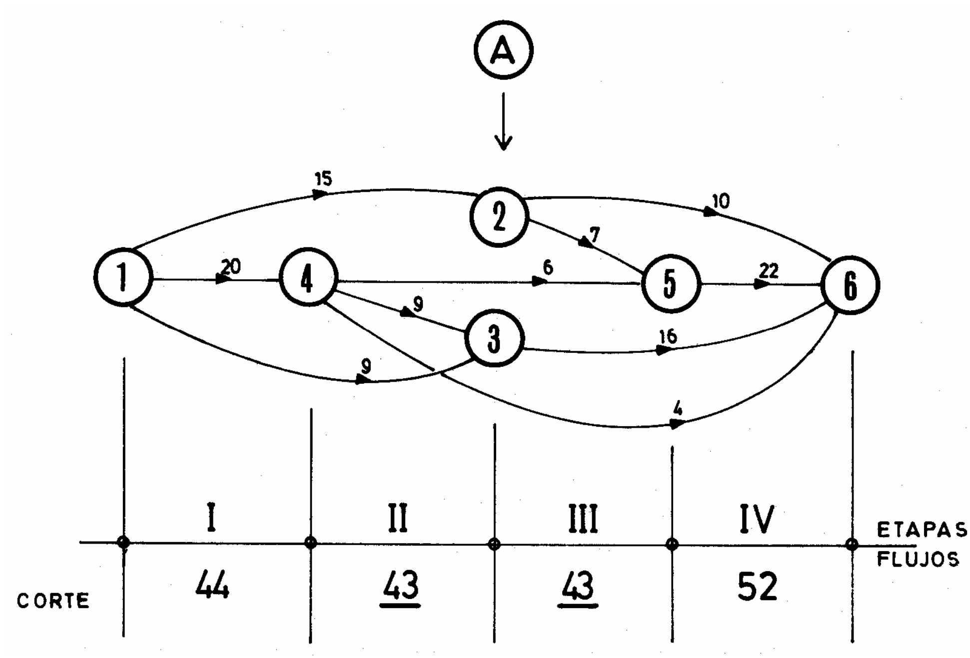

Fig. A-11.20. Clasificación por etapas y niveles.

luego, efectivamente, el corte mínimo ofrece un flujo máximo de 43 millones de €/hora, en las etapas II y III, coincidente con el resultado obtenido en el expositivo anterior.

11. LAS "PERCUSIONES" ECONÓMICAS

Puede resultar interesante, en el Análisis Territorial, el estudio de las "percusiones" en el movimiento de los flujos económicos territoriales. En este sentido, diremos que un sistema económico sufre o experimenta una "percusión" cuando sus partículas económicas componentes (bienes y/o servicios) cambian su velocidad de desplazamiento por un eje comunicativo en un tiempo extremadamente corto, sin variar sensiblemente de posición, con lo que dichas partículas se moverán, en lo sucesivo, de forma diferente (FRANQUET, 1990/91). Por tanto, el problema a resolver consistirá en calcular el $\Delta \vec{v}$ para obtener información fidedigna acerca del movimiento económico que tendrá lugar a partir del instante posterior a la "percusión". Su representación gráfica sería la siguiente, en un diagrama I - t:

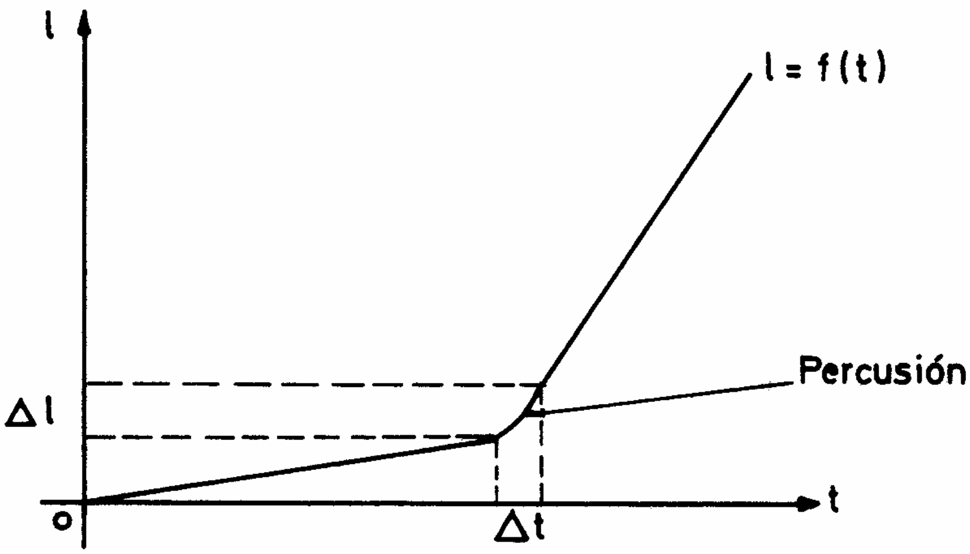

Fig. A-11.21. Percusión económica.

Supondremos, en todo momento, que dichas percusiones son originadas por fuerzas económicas muy grandes que actúan en un tiempo muy corto.

A partir de ahí, podríamos enunciar diversos teoremas cuya demostración obviaremos por razones de espacio, a saber:

1) La variación de la cantidad de movimiento económico de una partícula económica, durante un cierto intervalo de tiempo, es igual a la percusión aplicada en ese intervalo, o bien a la resultante de todas las percusiones actuantes sobre la misma. Ello resulta aplicable, así mismo, a un sistema más o menos complejo de partículas económicas.

2) La variación de la proyección de la cantidad de movimiento económico de una partícula económica sobre un eje territorial es igual a la suma de las proyecciones, sobre dicho eje, de todas las percusiones actuantes sobre ella.

3) La variación del momento económico cinético de una partícula económica es igual al momento resultante de las percusiones que actúan sobre ella, lo que también resulta extensible a un sistema de partículas económicas.

4) La variación de la cantidad de movimiento económico total de un sistema es igual cantidad de movimiento económico de su centro territorial de masas, supuesta concentrada en él la masa económica total del sistema y aplicadas -también en él- todas las percusiones exteriores.

5) Si consideramos, ahora, un flujo económico territorial como un conjunto de masas económicas aisladas y en movimiento, sometidas exclusivamente a las percusiones interiores producidas por sus propias fricciones de transporte o concurrencia en el mercado, podremos enunciar que: "la pérdida total de energía económica cinética del flujo es igual a la adición de las energías económicas cinéticas de las masas que lo componen si cada una de ellas estuviese animada de la velocidad de desplazamiento que ha perdido". Ello explica la aparición de las "viscosidades" o "rozamientos internos" a los que también nos hemos referido anteriormente en el estudio del movimiento uniforme de los flujos económicos territoriales por los ejes comunicativos, como agentes causantes de las pérdidas de carga económica entre los diferentes puntos de aquellos.

12. FLUJO ECONÓMICO DE SUCESOS

12.1. CONCEPTUALIZACIÓN GENERAL

Si en vez de suponer -como venimos haciendo hasta el momento- que el caudal económico fluye por los ejes comunicativos de un modo permanente y "continuo", contemplamos el flujo de un modo "discreto" habrá que abandonar la concepción hidrodinámica del fenómeno para enfocarlo desde la perspectiva poissoniana de los fenómenos de espera o de la Teoría de Colas.

De este modo, entenderemos por "flujo económico de sucesos" a una sucesión de éstos (llegadas de bienes, servicios o información) a intervalos aleatorios o determinados; supondremos que estos sucesos son entre sí homogéneos, por lo que el flujo se denominará así y se representará por la sucesión de puntos indicativos de los instantes temporales en que aquellos sucesos se producen: t_1, t_2, ..., t_r, ..., t_n, ... El flujo económico se dirá **regular** si los sucesos acaecen en intervalos de tiempo determinados, y **aleatorio** en caso contrario; es obvio que este supuesto parece el primero, por lo que a él nos referiremos. A tal efecto, estableceremos las siguientes definiciones:

1. *Flujos estacionarios:* Un flujo económico se dirá "estacionario" cuando la probabilidad de que en un intervalo de tiempo τ se produzca un cierto número de sucesos depende exclusivamente de la amplitud de ese intervalo y no de su posición relativa en el tiempo. Esto equivale a decir que el flujo posee una densidad constante, expresada como el número medio de demandas (o llegadas al sistema) por unidad de tiempo.

2. *Flujos autónomos:* Son aquellos en que el número de sucesos que se producen en un intervalo no depende del que acaece en los restantes intervalos, si éstos son disyuntos entre sí y respecto del primero. Esta

condición entraña que los accesos al sistema se verifican con independencia entre sí.

3. *Flujos ordinarios:* Se caracterizan porque la probabilidad de que en un intervalo de tiempo elemental Δt se produzcan dos o más sucesos es despreciable con relación a la de que acaezca uno solo. Es decir, en este tipo de flujos, la llegada al sistema, en cada intervalo elemental de tiempo, tendrá lugar elemento a elemento.

Pues bien, cuando un flujo económico reúne estas tres condiciones simultáneamente, se denomina **flujo simple** o **flujo estacionario de Poisson** (debido a que el número de sucesos que puede producirse en un intervalo fijo cualquiera sigue el proceso estocástico de Poisson). Paralelamente, notemos que este tipo de flujos posee una notable importancia en la teoría de los fenómenos de espera, tanto por su directa aplicación a las cuestiones que ésta aborda, cuanto por la posibilidad de que, en condiciones no muy restrictivas, los flujos económicos territoriales no simples pueden reducirse a los de este carácter.

12.2. EL DESPLAZAMIENTO MEDIANTE "ONDAS ECONÓMICAS"

Veamos, ahora, cómo a través de los ejes comunicativos territoriales se producen desplazamientos de la energía económica; si estos tienen lugar de forma inconstante o "discreta", como por medio de unas ciertas "ondas económicas", se enfocará su estudio desde la perspectiva poissoniana o de la teoría de los fenómenos de espera (FRANQUET, 1990/91). En efecto, imaginemos que en el instante **t** la "onda económica" ha llegado a la distancia **x**, medida desde el origen del eje comunicativo, y que en el instante **t + dt** ha sobrepasado la posición **x** alcanzando la distancia **x + dx**. Desde luego, las "densidades de energía" en dicho eje, debidas al paso de la onda económica, serán:

Instante	**Distancia desde el origen**	
	X	x + dx
t	ρ_{en}	0
t + dt	0	ρ_{en}

, de modo que se ha producido una propagación de la energía económica a una distancia **dx** en un tiempo **dt**, con una velocidad de desplazamiento:

$$v = dx/dt \quad .$$

A partir de estas consideraciones, podremos definir, para este tipo de flujos "discretos" de los sucesos económicos, el concepto de "intensidad de la onda económica": será la energía económica que atraviesa, en la unidad de tiempo, la unidad de sección económica considerada normalmente a la dirección de propagación del flujo económico discontinuo por el eje comunicativo territorial.

En efecto, consideramos un tramo cualquiera de dicho eje y pretendemos determinar la cantidad de energía económica que transcurre por un punto cualquiera o lugar geográfico de dicho eje, en un cierto tiempo **dt**.

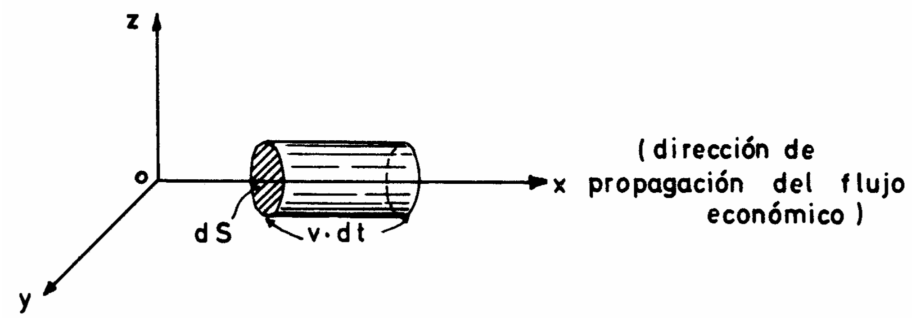

Fig. A-11.22. Cilindro de masa económica.

En un tiempo **dt**, la onda económica se habrá desplazado y la cantidad de energía económica que ha cruzado por la sección dS será la contenida en el cilindro de volumen o masa económica:

$$V (€) = v \cdot dt \cdot dS = m$$

Obviamente, la "energía económica" vendrá dada por el producto de dicho volumen económico por la "densidad de energía económica", esto es:

$$dE = v \cdot dt \cdot dS \cdot \rho_{en} = V \cdot \rho_{en} \quad ,$$

y la "intensidad de la onda económica", que será la energía económica por unidad de sección económica y por unidad de tiempo, vendrá dada por la expresión:

$$I = \frac{dE}{dS \cdot dt} = \frac{v \cdot dt \cdot dS \cdot \rho_{en}}{dS \cdot dt} = v \cdot \rho_{en}$$

Si representamos, ahora, la intensidad de una onda económica con respecto al tiempo, obtendremos una gráfica del tipo:

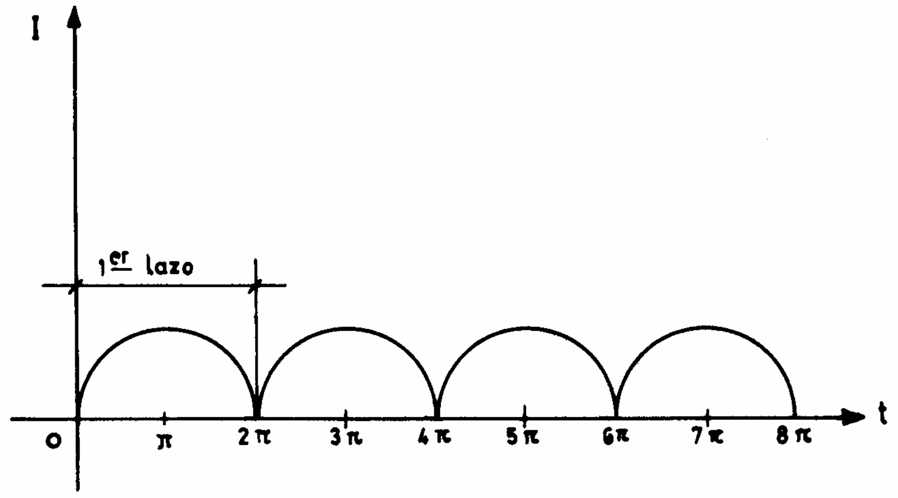

Fig. A-11.23. Representación gráfica de la función cicloide I(t).

Obsérvese, pues, que una onda económica transporta la energía "a golpes" o “pulsaciones” y no de un modo continuo. A esta intensidad de la onda, sería posible asignarle un cierto "vector radiante", cuyo significado físico fuera el que representa la intensidad instantánea de la onda económica, siendo su dirección y sentido los de propagación de la onda económica por el eje comunicativo territorial (eje viario, de telecomunicación o de teleproceso).

12.3. ALGUNAS APLICACIONES DE INTERÉS

A) Si suponemos, por ejemplo, que la figura anterior A-11.23 es una curva cicloide de ecuación (expresada en coordenadas paramétricas):

$$\begin{cases} t = a\cdot(\theta - \text{sen}\,\theta) = g(\theta) \\ I = a\cdot(1 - \cos\theta) = h(\theta) \end{cases}$$

, y tratásemos de calcular, a lo largo de un lazo de dicha curva, la integral curvilínea:

$$\int_C (t^2 + I^2)\cdot dl \quad \text{, se tendría lo siguiente:}$$

$$\int_C (t^2 + I^2)\cdot dl = \int_C \left[a^2(\theta - \text{sen}\,\theta)^2 + a^2(1 - \cos\theta)^2\right]\cdot a\cdot \text{sen}\,\theta\cdot d\theta =$$

$$= a^3\int_0^{2\pi} (\theta^2\cdot \text{sen}\,\theta - 2\,\theta\cdot \text{sen}^2\,\theta + 2\,\text{sen}\,\theta - 2\cos\theta\cdot \text{sen}\,\theta)\cdot d\theta =$$

= hemos hallado, los límites de integración, ya que: $I = a(1 - \cos\theta) = 0$; pero $a \neq 0$; luego: $1 = \cos\theta \rightarrow$ (2 soluciones) $\theta = 0$ y 2π

Integrando por partes, se tendrá:

$$\int \theta^2 \cdot \text{sen}\,\theta \cdot d\theta = \boxed{\begin{array}{c} u = \theta^2 ; du = 2\theta \cdot d\theta \\ dv = \text{sen}\,\theta \cdot d\theta \\ v = -\cos\theta \end{array}} = -\theta^2 \cdot \cos\theta + \int 2\,\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta =$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} u = \theta \;\; ; du = d\theta \\ dv = \cos\theta \cdot d\theta \\ v = \text{sen}\,\theta \end{array}} = -\theta^2 \cdot \cos\theta + 2\,\theta \cdot \text{sen}\,\theta - 2\int \text{sen}\,\theta \cdot d\theta =$$

$$= -\theta^2 \cdot \cos\theta + 2\,\theta \cdot \text{sen}\,\theta + 2 \cdot \cos\theta + C$$

$$= a^3 \cdot [-\theta^2 \cdot \cos\theta + 2\,\theta \cdot \text{sen}\,\theta + 2\cos\theta]_0^{2\pi} + \ldots = \mathbf{-\,6\pi^2 a^3}\ .$$

B) Considérese, así mismo, las notables aplicaciones que, en el Análisis Territorial, puede tener la integral definida para el cálculo de longitudes de tramos de ejes comunicativos, de fronteras o distancias interterritoriales, etc. (FRANQUET, 1990/91). Y así, veamos que para la curva cicloide que nos acaba de servir de ejemplo, la longitud de un arco de la misma (suponiéndolo asimilable, v. gr., a una frontera municipal o comarcal) se desprenderá de las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} dt = a\,(1 - \cos\theta) \cdot d\theta \\ dl = a \cdot \text{sen}\,\theta \cdot d\theta \end{cases}$$

y por lo tanto: $dS = a\sqrt{2 - 2\cos\theta} \cdot d\theta - 2a \cdot \text{sen}\,\theta/2 \cdot d\theta$.

Un arco cualquiera, por ejemplo el primero, varía entre los valores extremos: $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$, con lo que la longitud o distancia pedida, vendrá dada por:

$$\mathbf{S} = 2a\int_0^{2\pi} \text{sen}\,\theta/2 \cdot d\theta = 4\,a\,[-\cos\theta/2]_0^{2\pi} = \mathbf{8\,a}\ .$$

En cualquier caso, para una curva expresada en forma paramétrica, se tendrá, como es sabido:

$$S = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sqrt{g'(\theta)^2 + h'(\theta)^2} \cdot d\theta\ .$$

En el caso de que la ecuación de la línea o curva territorial que nos ocupa venga expresada en forma explícita, en coordenadas cartesianas rectangulares, siendo y = f(x) una función real, uniforme, continua y derivable, la distancia, siguiendo dicha línea, entre dos puntos del territorio A y B, vendrá dada por la integral definida:

$$S_{\overline{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx = \int_a^b \sqrt{d^2x + d^2y}$$

, y con la representación gráfica:

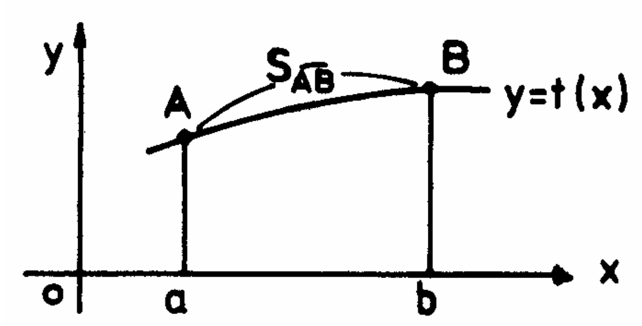

Fig. A-11.24. Distancia entre dos puntos del territorio.

integral que existirá por haber supuesto la continuidad de y'(x), pues, en este caso, es asimismo continua (y por ende integrable) la función:

$$\sqrt{1 + y'^2}$$

Sea, por ejemplo, un eje comunicativo territorial de ecuación:

$$y = x^{3/2} \ ,$$

y se trata de hallar la longitud del tramo de eje comprendido entre los puntos del territorio de abscisas: x = 0 Mm. y x = 5 Mm.

$$dy / dx = 3/2 \cdot x^{1/2} \ ;$$

$$\mathbf{S} = \int_a^b \sqrt{1 + (dy / dx)^2} \cdot dx = \int_0^5 \sqrt{1 + 9x/4} \cdot dx =$$

$$= 8/27 \left[(1 + 9x/4)^{3/2}\right]_0^5 = (335/27) \text{ Mm.} = \mathbf{124'07\ Km.}$$

Por último, tratándose de curvas planas expresadas en coordenadas polares: $\rho = \rho(\omega)$, dónde: $x = \rho \cdot \cos \omega$; $y = \rho \cdot \text{sen } \omega$,

siendo:

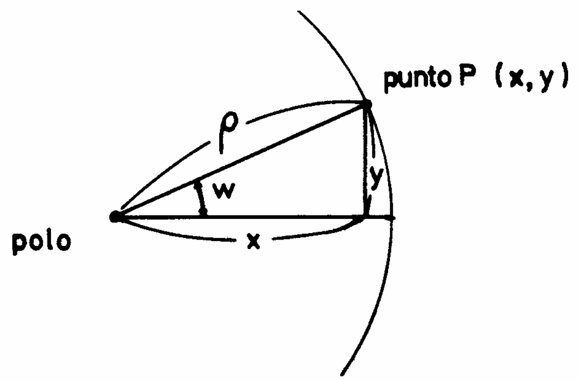

Fig. A-11.25. Transformación de coordenadas cartesianas rectangulares a coordenadas polares.

, se tendrá:

$$S_{AB} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \cdot d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sqrt{\rho^2 \cdot d^2\omega + d^2\rho} \;;$$

es decir: $$dS = \sqrt{(\rho \cdot d\omega)^2 + d^2\rho} \,.$$

Sea por ejemplo un territorio encerrado por la cardioide:

$$\rho = a\,(1 - \cos\omega) \quad ,$$

y tratamos de hallar el perímetro territorial correspondiente.

Obviamente, la cardioide en cuestión quedará trazada cuando ω varíe entre 0 y 2π, con lo que:

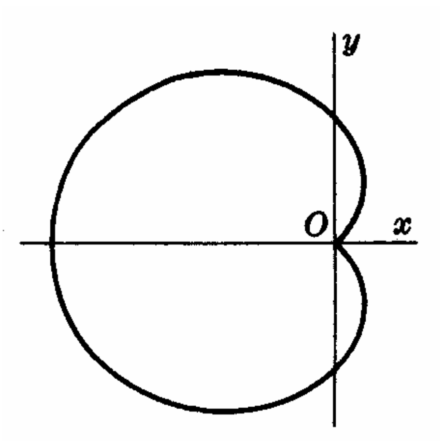

Fig. A-11.26. Territorio de planta de cardioide.

$$\rho^2 + (d\rho / d\omega)^2 = a^2\,(1 - \cos\omega)^2 + (a \cdot \text{sen}\,\omega)^2 = 4\,a^2 \cdot \text{sen}^2\omega/2 \;.$$

El perímetro buscado vendrá dado por:

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + (d\rho / d\omega)^2} \cdot d\omega = 2\,a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \omega/2 \cdot d\omega =$$

$$= -4\,a\,[\cos \omega/2]_0^{2\pi} = -4\,a \cdot (-2) = (8\,a) \text{ unidades de longitud.}$$

C) Otra aplicación interesante -que mejor encaja, de hecho, en el posterior Anexo 14-, siguiendo con el mismo ejemplo, sería *la determinación de la superficie del territorio supuestamente encerrado por un arco o lazo de dicha curva y al eje de abscisas OX.* Si consideramos el primer lazo, se tendrá: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, con lo que:

$$\begin{cases} g(\theta) = x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta) \\ h(\theta) = y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

y el área buscada vendrá dada por:

$$\mathbf{A} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} h(\theta) \cdot g'(\theta) \cdot d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} a(1 - \cos \theta) \cdot a(1 - \cos \theta) \cdot d\theta =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 \cdot d\theta = a^2 \ (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta) \cdot d\theta =$$

$$= a^2 \left[\theta - 2 \operatorname{sen} \theta + \int \cos^2 \theta \cdot d\theta\right]_0^{2\pi} .$$

Los valores de las coordenadas correspondientes a los diferentes valores del parámetro θ, serán los siguientes:

θ	**X**	**y**
0	0	0
$\pi / 2$	$a (\pi / 2 – 1)$	a
π	$\pi \cdot a$	2 a
$3 \pi / 2$	$a (3 \pi / 2 + 1)$	a
2π	$2 \pi a$	0

Teniendo, ahora, en cuenta que:

$$\int \cos^2 \theta \cdot d\theta = \int (1 + \cos 2\theta /2) \cdot d\theta = \theta / 2 + \operatorname{sen} 2\,\theta / 4 + C$$

, se tendrá que:

$$\mathbf{A} = a^2 \left[\theta - 2 \text{ sen } \theta + \theta / 2 + \text{sen } 2\theta / 4\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \mathbf{3 \pi a^2} \text{ unidades de superficie.}$$

(normalmente, en el Análisis Territorial, serán Mm^2 ó Km^2).

* * * * *

(*) El tema de las "pérdidas de carga económicas" aquí planteado no es más que una generalización del concepto de "factor de fricción" frecuentemente empleado en los estudios de Análisis Territorial. Pueden, incluso, plantearse submodelos gravitatorios en otros modelos de simulación espacial y prospectivos de la demanda de transporte de mercancías, que contemplen provechosamente la existencia de dichos "factores de fricción" (ALMIRALL, J. Y PARELLADA, M. Revista de Estudios Territoriales, 17: pp. 145-167, 1985). Para ello, debe partirse del conocimiento de una matriz cuadrada que indique los tonelajes (o valores monetarios) desplazados internamente y con el exterior de un territorio, y que se obtendrá por elaboración y expansión de los datos de intercambios de mercancías por carretera y en ferrocarril, conjuntamente con indicadores de la relevancia de cada subdivisión territorial calculados específicamente para el estudio. También se dispondrá de las matrices de tiempos de desplazamiento empleados por carretera en las diferentes zonas, y de distancias a lo largo de las vías principales de comunicación.

Para simular esta matriz base, se preferirá un modelo gravitatorio al más clásico de FRATAR u otro similar basado en factores de crecimiento zonal, debido principalmente a la insensibilidad de estas categorías de modelos a las aperturas de nuevas vías de comunicación, y a su tendencia a perpetuar inalterable un modelo porcentual de desplazamientos prefijado.

El modelo gravitatorio adoptado en el estudio mencionado, tiene la formulación:

$$T_{ij} = G_i = A_j F_{ij} K_{ij} / \Sigma_\alpha F_{i\alpha} K_{i\alpha} A\alpha$$

donde:

T_{ij}	= Toneladas/año transportadas entre las zonas i y j.
G_i y A_j =	Totales de la fila y de la columna i-ésima y j-ésima de la matriz, equivalentes respectivamente a la generación y atracción zonal.
F_{ij}	= Factor de fricción del viaje o impedancia del recorrido ("pérdida de carga económica").
K_{ij}	= Factor de ajuste de las desviaciones de la tendencia central.

Los factores de fricción están relacionados con las distancias y el tiempo de recorrido, esto es: $F_{ij} = \varphi (D_{ij}, T_{ij})$, y el criterio de ajuste consistirá en la igualdad del histograma de distancias de desplazamiento entre las matrices original y la simulada. Esta hipótesis será seleccionada tras computar diversas combinaciones distancia-tiempo, y no ser significativa la matriz de tiempos en vehículo particular.

El proceso de ajuste ha iterado las atracciones, al ser un modelo de Furness doblemente constreñido, mediante:

$$G_i = \sum_{\infty} T_{i\alpha}$$

$$A_{j\,(n+1)} = A_j \cdot (A_j\,(n) / \Sigma\, T_{\alpha j}\,(n))$$

donde A_j son los factores de atracción de la zona j en las iteraciones (n) y (n + 1).

Para los factores de fricción se efectuará un proceso de ajuste mediante estimadores de máxima probabilidad, determinando las nuevas estimaciones de los factores como:

$$F(L) = VT(L) / AT(L)$$

donde F (L) es el factor de fricción de los viajes separados por la impedancia L.

$$VT(L) = \sum_{i,j} t_{ij}$$

. $\forall$ i, j observados tales que la impedancia sea L.

Debe considerarse que AT (L) es la estimación n-ésima de VT(L).

Este proceso obtiene una matriz de desplazamiento con idéntica distribución de impedancia de recorrido que la original. La concordancia de histogramas, en el estudio mencionado, resultó ser de un 95'8%, y los coeficientes de correlación entre la matriz observada y la estimada fueron superiores al 95%.

La formulación final de los factores de fricción fue la siguiente:

$$F_{ij}(T) = 0'385\ (T^{-0'753}) \times \exp(-0'152T)$$

Puede verse que la impedancia de viaje es fuertemente disuasoria para el transporte de mercancías, incluso en valores superiores a los usuales para el transporte de viajeros.

Se utilizaron factores de ajuste interzonal específicos siempre que se cumpliesen, a la vez, las siguientes condiciones:

- Que la diferencia entre términos homólogos de las matrices observada y estimada fuese superior a 100.000 Tm/año.

- Que dicha diferencia superase el 20% del término correspondiente de la matriz observada.

Con estos criterios se obtuvieron 18 factores de ajuste, los cuales se explican básicamente por las deficientes comunicaciones, o bien por tratarse de parejas de comarcas unidas directamente por autopista.