

ACTIVIDADES REVELADORAS DEL PENSAMIENTO QUE ACTIVAN LA REFLEXIÓN MATEMÁTICA EN UN GRUPO DE CÁLCULO DIFERENCIAL.

S. A. Alvarez Viramontes¹

RESUMEN

Este estudio tiene como objetivo presentar los resultados de realizar la actividad reveladora del pensamiento como una herramienta de enseñanza – aprendizaje para la formación del alumno. Este estudio se realizó en un curso de Cálculo Diferencial para Ingeniería. La actividad que se llevó a cabo es acerca de una situación en la cual el alumno aplica la derivada utilizando máximos y mínimos, en la que se plantea la construcción de un tanque de almacenamiento en la cual el estudiante tiene que diseñar las dimensiones del mismo. La actividad se realizó en dos sesiones de 50 minutos y se llevó a cabo en grupos colaborativos de cinco integrantes. Las soluciones que obtuvieron los equipos se comparan entre sí para conocer las diferentes estrategias que tienen los alumnos para la solución del problema, sirviendo esto para conocer las ideas y conocimientos que tienen los estudiantes.

ABSTRACT

The present study has the objective to present the results about a revealer activity of thought as a teaching tool. -learning for student's education-. The study realized during a differential calculus for engineering course. The activity was performed in a situation in which the student applied the derived using maximums and minimums, in which considers the construction of a storage tank in which student has to design the dimensions of them. The activity was realized in two sessions of 50 minutes and was conducted in groups of five members. the Solutions obtained by each team are compared in order to know the different strategies that students have for the solutions of the problem, serving this for knowing the ideas and knowledge that the students have.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación se basa en la estrategia de aprendizaje llamada “actividades reveladoras del pensamiento” (MEA, Model-eliciting activities, por sus siglas en inglés) y la influencia que lleva consigo el correcto razonamiento del alumno respecto a la materia de Cálculo Diferencial utilizando máximos y mínimos. Este estudio se basa en las investigaciones realizadas por Hamilton, Lesh, Lester y Brilleslyper (2008), Iversen y Larson (2006), Diefes-Dux, Follman, Imbrie, Zawojewski, Capobianco y Hjalmarson (2004). Principalmente en la investigación realizada por Domínguez (2009). El objetivo de este estudio es analizar la manera en que las actividades reveladoras del pensamiento influyen en las respuestas de los estudiantes en el proceso de las aplicaciones de la derivada utilizando máximos y mínimos para el desarrollo de un pensamiento matemático.

MARCO TEÓRICO

Las MEA según Hamilton, et al. (2008), es una actividad de aprendizaje en la que se simula una situación que se puede presentar en el trabajo laboral, es decir en el mundo real de los

¹ Profesor de Asignatura. Instituto Tecnológico Superior de Rioverde, sabrina_alvarezv@msn.com

alumnos. Iversen y Larson (2006) coinciden en el punto, ya que las MEA son de gran utilidad para medir el funcionamiento del estudiante en el mundo real.

En las MEA se trabaja en grupos de 3 a 5 integrantes en una o dos sesiones de clase. Las actividades reveladoras del pensamiento evocan el aprendizaje significativo, ya que relacionan nuevas ideas con aspectos de la estructura cognitiva. Para estos autores, lo fundamental en la solución de un problema que involucre actividades reveladoras del pensamiento es el expresar, probar y revisar modelos que permitan solucionar el problema.

Diefes-Dux, et al. (2004) mencionan que existen seis principios para aplicar actividades reveladoras del pensamiento:

- Asegurarse de que la actividad requiera la construcción de una descripción, de una explicación, o de un procedimiento explícito para una situación matemáticamente significativa.
- Presentado en un contexto realista de la ingeniería y ser diseñado de modo que los alumnos puedan interpretar la actividad usando diferentes niveles de capacidad matemática y de conocimiento general.
- Autoevaluarse para mejorar.
- Realización de la documentación de su trabajo.
- Revisar las soluciones que son comparables con otras y modificables para otras situaciones de la Ingeniería.
- Que el prototipo sea eficaz para los usos de la Ingeniería.

La estructura de las MEA consta de un artículo sobre un tema realista y un caso específico sobre ese tema (Hernández, F. 2011). En primer lugar se les da a los estudiantes el artículo y luego se les hace unas preguntas para ubicarlos en el tema. Posteriormente se les da el caso específico, el cual es el que tienen que resolver. La actividad cierra con la presentación de la solución de cada equipo. Para la solución y preparación de la presentación se sugiere se les ofrezca a los alumnos el material necesario para su realización.

“Optimizar algo significa maximizar o minimizar uno de sus aspectos” (Thomas, 2005, p. 278), para ello el Cálculo Diferencial es de gran utilidad para resolver problemas que requieran de minimizar o maximizar una función.

Las actividades reveladoras del pensamiento muestran las ideas que el alumno tiene al mostrar las estrategias de las que se auxilia al resolver el problema planteado. Esto permite al profesor fortalecer ideas que no estén muy claras o ideas de los alumnos para aplicarlas a nuevos conceptos.

METODOLOGÍA

Hipótesis:

Las actividades reveladoras del pensamiento utilizadas en un problema de aplicaciones de la derivada haciendo uso del tema de máximos y mínimos, son una herramienta que ayudan al desarrollo del pensamiento matemático en el alumno.

Por lo que en las actividades reveladoras del pensamiento se trabaja con personas, es decir, con alumnos, se considera la investigación de tipo cualitativo. Así mismo, se observa la conducta que el alumno muestra ante ésta actividad de aprendizaje al observar el razonamiento que tiene al desarrollarla. El tipo de investigación que tuvo el presente estudio se considera explicativa (Hernández, Collado y Baptista, 2006), puesto que establece relaciones entre conceptos, el interés se centra en explicar por qué ocurre dicho fenómeno y en qué condiciones se da éste.

En este estudio participaron 25 alumnos inscritos en el curso de Cálculo Diferencial de la carrera de Ingeniería en Informática ofrecida por un Tecnológico descentralizado ubicado en el centro de la República Mexicana. Este curso se imparte en sesiones diarias de 50 minutos de lunes a viernes. Se formaron muestras probabilísticas, ya que se realizaron grupos de cinco integrantes de forma aleatoria, es decir, no se colocaron a los más destacados en un grupo y en otros grupos a los alumnos que se les dificulte el aprendizaje, sino que se formaron grupos al azar por medio del procedimiento de tómbola (Hernández, et al., 2006). Las muestras estuvieron formadas por cinco grupos de cinco integrantes cada uno.

La actividad reveladora del pensamiento consta de tres partes: artículo y preguntas preliminares, solución del problema y presentación. La realización de ella se hizo en dos sesiones de clases, en la primera se expuso el artículo y preguntas preliminares, así como la solución del problema, en la segunda sesión se expusieron los datos que se obtuvieron y el por qué llegaron a esos resultados. Así como si el problema es aplicable a otras situaciones similares que se puedan presentar. Para los alumnos esta actividad fue su primera experiencia en este tipo de problemas, así también para la investigadora.

La primera parte de la actividad reveladora del pensamiento (artículo y preguntas preliminares, y solución del problema) se llevó a cabo en la biblioteca para que los alumnos tuvieran acceso a libros de Cálculo e Internet si así lo consideraban necesario, además de su cuaderno de apuntes. La segunda parte de la MEA (presentación) se llevó a cabo en el salón de clases, ya que cuenta con proyector para la explicación del problema, aunque los equipos eligieron la forma en cómo lo presentaron, ya sea en papel o con el proyector y poder auxiliarse del pintarrón.

La actividad consistió en ubicar al alumno con un Ingeniero egresado que trabaja en el área de diseño y se le ha solicitado construir un tanque rectangular de almacenamiento que tenga una capacidad de 500 ft^3 . sin tapa superior, diseñando dicho tanque con las dimensiones mínimas para que el costo del material sea mínimo. Para lo cual el alumno tuvo que aplicar los conocimientos de Cálculo que se estudiaron seis semanas antes a la aplicación de la MEA referentes a las fórmulas de derivación. El tema de máximos y mínimos se estudió dentro de la cuarta unidad, aproximadamente dos semanas antes de la aplicación del problema.

Los resultados que se esperan obtener son que el alumno encuentre por el método de máximos y mínimos las dimensiones óptimas, las cuales serían una base de 10 ft, y una profundidad de 5 ft. Los cuales los obtienen de la siguiente manera:

Primeramente proponer la fórmula que describe el volumen de dicho tanque de almacenamiento, la cual sería: $V = b^2 \times h$, después proponer el área superficial que describe el contenedor la cual es: $A = b^2 + 4bh$, sustituyendo el volumen de 500 ft^3 . y despejando la altura (h) de la fórmula del volumen y posteriormente sustituyendo en la fórmula del área, se obtiene la fórmula $A = b^2 + (200/b)$. Esta última, se deriva y se despeja la base (b) de donde se obtiene la cantidad de 10 ft, sustituyendo en $h = 500/b^2$, se obtiene $h = 5 \text{ ft}$.

Cabe hacer mención que éste es el resultado óptimo, sin embargo se pueden obtener otras dimensiones que también dan los 500 ft^3 ., lo que no se considera incorrecto, pero no es el resultado óptimo. Puesto que minimizando el área de construcción, se minimiza el peso del mismo, así mismo el costo, lo que es uno de los objetivos del diseño.

La interpretación de los datos se realizó de la manera siguiente:

- Se analizó si tuvieron las bases Matemáticas para realizar la actividad.
- Se compararon los resultados que se obtuvieron entre los cinco equipos de trabajo.
- Se analizaron los datos obtenidos con el resultado exacto.
- Se observó el razonamiento que el alumno tuvo para la realización de la actividad aplicando MEA.
- Se tomó en cuenta qué recursos utilizaron los diferentes equipos para realizar la actividad, como son libros, libreta de apuntes, calculadora entre otros.
- Se revisó cómo expusieron sus resultados, es decir, qué cálculos realizaron y qué material utilizaron para exponer.

RESULTADOS

Los alumnos en equipos desarrollaron la actividad, auxiliándose de su libreta de apuntes, se observó que requerían de libros para una mejor realización de la actividad por lo que para la realización de la MEA se optó por realizar la actividad en la biblioteca de la Institución.

A continuación se presenta los resultados obtenidos, primeramente resumido en tabla con su constructo e indicador correspondiente y posteriormente descrito por equipo de trabajo:

Tabla 1. Resultados del instrumento de observación

Indicador	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4	Equipo 5
1	Sí	Sí	Sí	No	No
2	Papel	Proyector	Proyector	Papel	Proyector
3	Excelente	Excelente	Excelente	Excelente	Medio
4	Sí	Sí	Sí	Sí	No
5	4	3	5	3	3
6	Excelente	Medio	Excelente	Excelente	Medio
7	libro, apuntes	libro, apuntes	libro, apuntes	Apuntes	libro, apuntes, internet
8	Excelente	Medio	Medio	Excelente	Medio
9	Excelente	Excelente	Medio	Excelente	Deficiente

10	Excelente	Medio	Deficiente	Medio	Deficiente
11	Excelente	Medio	Deficiente	Medio	Medio
12	Sí	Sí	Sí	Sí	solo usaron derivadas (deficiente)
13	Bien	Bien	Bien	Bien	Incorrectamente
14	Bien	Bien	incorrectamente	Bien	Incorrectamente

Se presentan los números que representan cada uno de los indicadores representados en la tabla 1 con su respectivo constructo:

Constructo: Actividad reveladora del pensamiento.

1. Indicador: cooperación. Los alumnos del equipo se incorporaron a la actividad de forma positiva.
2. Indicador: comunicación. Cómo expusieron su solución.
3. Indicador: comunicación. Compartieron información y analizaron conclusiones para obtener mejores resultados.
4. Indicador: responsabilidad. Desarrollaron la actividad en el tiempo estipulado.
5. Indicador: responsabilidad. Cada uno de los integrantes del equipo participaron activamente, escuchando las sugerencias de sus compañeros y trabajando cooperativamente durante toda la actividad.
6. Indicador: trabajo en equipo. El trabajo es presentado de una manera ordenada, clara y organizada que es fácil de entender.

Constructo: Razonamiento.

7. Indicador: Creatividad. Qué tipo de material utilizaron para realizar la actividad.
8. Indicador: Creatividad. Compararon con situaciones similares o modificables a otras.
9. Indicador: Creatividad. Usaron una estrategia eficiente y efectiva para resolver el problema.
10. Indicador: Inteligencia. Usaron razonamiento matemático complejo y refinado para resolver el problema.
11. Indicador: Inteligencia. El estudiante puede con precisión contestar casi todas las preguntas planteadas sobre el tema por sus compañeros de clase.

Constructo: Aplicaciones de la derivada, para éste punto el indicador se llama de la misma manera.

12. Presentaron las bases matemáticas para el desarrollo de la actividad.
13. Al realizar las derivadas, las resolvieron correctamente.
14. Relacionaron de forma congruente las ecuaciones que necesitaban para la resolución del problema.

Equipo 1

Este equipo se auxilió de libros y libreta de apuntes para realizar la actividad, comparando con situaciones similares y utilizando una estrategia eficiente y efectiva para resolver el problema llevando a cabo así el indicador de la creatividad. Este equipo de trabajo utilizó un razonamiento adecuado puesto que se apoyó en las herramientas de matemáticas que necesitaba de forma correcta y pudieron además contestar las preguntas que surgieron al presentar sus conclusiones.

Por lo que se refiere al indicador de aplicación de las derivadas, utilizaron de forma correcta las bases matemáticas, plantearon y resolvieron de forma correcta las derivadas, así mismo, relacionaron de forma congruente las ecuaciones que necesitaban para la resolución de la actividad reveladora del pensamiento.

El equipo describió el volumen del tanque de almacenamiento como: $V = (L)(a)(h)$, obteniendo como resultado una base de 10 ft. y una altura de 5 ft, llegando a maximizar la capacidad del tanque, con un área mínima de material.

Equipo 2

Este equipo utilizó libros y libreta de apuntes para auxiliarse en la resolución de la actividad reveladora del pensamiento, sin embargo no compararon con situaciones similares a otras y esto influyó en los resultados que obtuvieron. De igual forma no usaron un razonamiento matemático complejo y por lo tanto no pudieron contestar todas las preguntas que les plantearon sus compañeros.

Este equipo obtuvo como resultados una base de 6.46 ft. y una altura de 12.9 ft., por lo que el volumen que obtienen del tanque es de 538.3 ft³. Este equipo mencionaba que tendría una mayor capacidad el tanque de almacenamiento, sin embargo, sus compañeros de clase les hicieron ver que tenían que cumplir con el requisito marcado. El error que obtuvieron fue al plantear las ecuaciones que necesitaban y al interpretar los datos, ya que obtuvieron cantidades negativas y las tomaron en cuenta, pues en el tanque no existen distancias negativas.

Equipo 3

El equipo 3 obtuvo como resultados de las dimensiones del tanque una base de 1000 ft. y una altura de 0.00005 ft., de donde sí se obtiene el volumen de 500 ft³. que se requiere, pero que si hubieran comparado con situaciones similares se darían cuenta de lo ilógico que es el resultado que obtuvieron. Se observó que este equipo no comparó con situaciones similares al problema plantado en la actividad reveladora del pensamiento, ya que si lo hubieran hecho se hubieran dado cuenta que los resultados que obtuvieron no eran los óptimos.

Equipo 4

Para resolver el problema se basaron solamente en la libreta de apuntes, sin embargo, sí compararon con situaciones similares al problema planteado y por lo tanto aunque tuvieron dificultades para resolver el problema llegaron a la solución óptima. Por lo que en cuanto al indicador de creatividad se desarrollaron de forma adecuada ya que usaron una estrategia eficiente y efectiva para resolver el problema.

En cuanto al indicador de aplicaciones de las derivadas se puede decir que lo llevaron a cabo de forma correcta, ya que plantearon ecuaciones acordes al problema, resolvieron correctamente las derivadas y relacionaron de forma congruente las ecuaciones que necesitaban para la resolución del problema.

La observación que realizó la investigadora fue que dos de las integrantes del equipo no se incorporaron de forma adecuada a la actividad planteada, se mostró apatía. Sin embargo llegaron a la solución óptima obteniendo una base de 10 ft. y una altura de 5 ft., dando como resultado el volumen esperado de 500 ft³., minimizando el área superficial de tanque y maximizando en volumen esperado.

Equipo 5

El indicador de las aplicaciones de la derivada se vio afectado pues, aunque utilizaron derivadas, no plantearon ecuaciones acordes al problema, no resolvieron bien las derivadas y no relacionaron de forma congruente las ecuaciones que necesitaban.

Este equipo de trabajo quedó formado dos alumnos irregulares. Por lo que se observa que esto influyó en gran manera para el desarrollo de la actividad reveladora del pensamiento. Además de que el equipo restante no se aplica de manera correcta en sus estudios. Su resultado obtenido no tuvo bases de Cálculo, solamente obtuvieron su resultado por tanteo, mencionado que las dimensiones era 7 de base cuadrada y 10 ft de altura, obteniendo un volumen aproximado de 490 ft³.

En la tabla 2, se resumen los resultados numéricos obtenidos por equipo.

Tabla 2. Resultados obtenidos

Número de equipo	Base cuadrada (ft ²)	Altura (ft)
Equipo 1	10	5
Equipo 2	6.46	12.9
Equipo 3	1000	0.00005
Equipo 4	10	5
Equipo 5	7	10

Dos de los equipos no tienen de todo desarrollada la facultad cognitiva, puesto que en la resolución del problema estuvieron asertivos en una parte de él, además en la parte comunicativa que es la relacionada con las preguntas que les realizaron sus compañeros tuvieron dificultad para la toma de decisiones. El quinto equipo de trabajo está deficiente en general de éste indicador.

Se determinó que todos los equipos de trabajo realizaron derivadas de forma correcta, solamente el equipo 5 no las resolvió bien. Por lo que se puede observar que la mayor parte de los alumnos tuvo sólidas las bases para el desarrollo de la actividad.

En cuanto a la autoevaluación, Glinz (2005) menciona que tiene como fin el evaluar tanto los aciertos como los errores para corregirlos y lograr los objetivos comunes, Aguilar (2009) opina lo mismo en cuanto a que el trabajo en equipo requiere de autoevaluación para mejorar el trabajo colaborativo y la responsabilidad individual del alumno, así como adquirir habilidades y valores necesarios para enfrentarse a la vida profesional.

Es notorio que la actividad reveladora del pensamiento fue del agrado del grupo en cuanto a aprendizaje se refiere, ya que 21 alumnos de un total de 25 mencionaron que el realizar éste tipo de actividad les ayudó a incentivar su aprendizaje y comprender mejor el tema de aplicaciones de derivadas.

CONCLUSIONES

La solución de la actividad se resume en que el Ingeniero en cuestión necesita construir un tanque de almacenamiento con capacidad de 500 ft³., sin tapa superior, con dimensiones de 10 ft². de base por 5 ft de profundidad. Este problema tiene una respuesta única si lo que se considera es que se maximice la capacidad y se minimice el material utilizado, sin embargo, existen varias dimensiones que pueden dar la capacidad deseada. Por lo que permite diversidad de acercamientos al resultado utilizando diferentes estrategias. No obstante, se observó que la mayoría de los equipos utilizó las derivadas para determinar el resultado del problema, por lo que con la actividad reveladora del pensamiento el alumno recuerda pensamientos matemáticos e ideas con las que ya cuenta.

Con la actividad reveladora del pensamiento el alumno realiza la aplicación de los temas vistos en clase, no solamente como un desarrollo matemático que tiene que aprender, sino como

una aplicación para su vida laboral a la cual se enfrentará. De ésta manera, el estudiante se da cuenta la gran aplicación que las Matemáticas pueden tener en su profesión. Así, las MEA son una herramienta importante para el razonamiento del alumno, ya que al llevar a cabo la actividad se constató el trabajo que llevaron a cabo los alumnos.

Aunque investigadores como Yu y Chang (2008) mencionan que en su país (Taiwán) la MEA tiene el limitante en cuanto a que existe una conexión débil con plan de estudios. En el caso de la actividad reveladora del pensamiento llevada a cabo en el grupo de alumnos en estudio, el planteamiento de la MEA se realizó apoyándose en el temario oficial al plantear un problema donde se utilizaba el tema de aplicaciones de la derivada utilizando máximos y mínimos.

Se concluye con la presente investigación realizada cómo el alumno fue capaz de descubrir su propio conocimiento y construirlo a partir de los anteriormente adquiridos. Además, de observar cómo el estudiante fue desarrollando su razonamiento Matemático al realizar la actividad reveladora del pensamiento.

REFERENCIAS

- Aguilar, D. (2009). *Uso de las Técnicas Didácticas: Aprendizaje Colaborativo, Aprendizaje Basado en Problemas y Aprendizaje Orientado a Proyectos como favorecedoras en las habilidades sociales: Aprender a expresar afecto y aprender a interactuar con los demás*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Virtual del Tecnológico de Monterrey. Recuperado el 13 de septiembre del 2011 de <http://biblioteca.itesm.mx>
- Diefes-Dux, H., Follman, D., Imbrie, P.K., Zawojewski, J., Capobianco, B. y Hjalmarson, B. (2004). *Model Eliciting Activities: An In-class Approach to Improving Interest and Persistence of Women in Engineering*. Proceedings of the 2004 American Society for Engineering Education Annual Conference: American Society for Engineering. Recuperado el 5 de septiembre del 2011 de <http://scholar.google.es/scholar?q=Using+Model-Eliciting+Activities+for+Primary+Mathematics+Classrooms&hl=es&btnG=Buscar&lr=>
- Domínguez, C. A. (2009). Actividades Reveladoras del Pensamiento: Más que una Forma de Aprendizaje Activo. *Memorias del X Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Veracruz, México. Recuperado el 20 de febrero del 2011 de http://www.comie.org.mx/congreso/memoria/v10/pdf/area_tematica_05/ponencias/1776-F.pdf
- Glinz, P. (2005). Un acercamiento al trabajo colaborativo. [Versión electrónica]. *Revista Iberoamericana de Educación*, 32 (2). 1-14 (ISSN: 1681-5653) obtenido el 15 de septiembre del 2015 de <http://www.itesm.mx/va/diie/congresoTD/docs/820glinz.pdf>
- Hamilton, E., Lesh, R., Lester, F. and Brilleslyper, M. (2008). Model-Eliciting Activities (MEAs) as a bridge between Engineering Education Research and Mathematics Education Research. *Advances in Engineering Education*. (1), 1-25.
- Hernández, R., Collado, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. (4ª ed.). Distrito Federal, México: McGraw-Hill Interamericana.

- Hernández, F. (2011). Una alternativa para desarrollar competencias matemáticas en alumnos en nivel medio superior para un curso de matemáticas. Recuperado el 18 de septiembre del 2015 de <http://es.slideshare.net/fernandodeptoformales/actividades-reveladoras-del-pensamientofotos2-10222709>
- Iversen, S.M., Larson, J. (2006) *Simple Thinking using Complex Math vs. Complex Thinking using Simple Math – A study using Model Eliciting mathematical thinking Activities to compare students' abilities in standardized tests to their modellingabilities*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. Vol. 38 (3) 281-292. Recuperado el 14 de septiembre del 2015 de <http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm063a7.pdf>
- Thomas, G. (2005). *Calculo una variable*. (11ª. Ed). ISBN: 970-26-0643-8, Distrito Federal: México: Pearson Educación.
- Yu, S., y Chang, Ch. (2008) *What Did Taiwan Mathematics Teachers Think of Model-Eliciting Activities And Modeling?* Recuperado el 5 de septiembre del 2011 de <http://120.107.180.177/1832/9802/98-2-04pa.pdf>