

# MODELO MATEMÁTICO PARA LA CARACTERIZACIÓN DE SECADO DE MANOS CON TOALLAS DE PAPEL RECICLADO

Gómez Mercado Abdiel<sup>(1)</sup>, Hernández Fernando<sup>(2)</sup>, Neri Amador Julio César<sup>(3)</sup>

## RESUMEN

El desarrollo del presente estudio presenta información sustentada para un modelado matemático para la caracterización de secado de manos con toallas de papel reciclado mencionando este y sus ventajas. Este estudio contempla explicar y definir tamaño y tipo de papel, fabricación, y las ventajas de reciclado del mismo, entre otros conceptos para caracterizar el papel ideal para el secado de manos. Se estudiaron y aplicaron métodos de transferencia de calor que intervienen en el fenómeno o en estudio, para obtener datos como una absorción acuosa cutánea, humedad en las manos, entre otras. Los resultados obtenidos serán de gran utilidad a los fabricantes de toallas de papel reciclado para preservar las propiedades del producto que lo hagan funcional y adecuado.

## INTRODUCCIÓN.

El papel es una delgada hoja elaborada con pasta de fibras vegetales, que son molidas, blanqueadas, diluidas en agua, secadas y endurecidas posteriormente.

La mayoría de la población sabe que la madera está relacionada con el proceso de producción de papel, pero seguramente pocos conocen los pasos que implica ese proceso y la incidencia que tiene el mismo en la deforestación, uno de los problemas ecológicos más importantes a nivel global. En consecuencia, resulta vital estimular el reciclado de papel para dañar de menor forma posible los ecosistemas existentes.

Una realidad inevitable es el fuerte crecimiento de la demanda de papel debido al crecimiento de la población, motorizada por el aumento de la actividad comercial e industrial. Gran cantidad de alimentos y todo tipo de productos se almacenan en envases de cartón, los impresos de toda clase se desarrollan en papel y las oficinas producen

a diario enormes cantidades de documentación en papel.

Los datos de consumo son realmente alarmantes, y reafirman la necesidad de potenciar el reciclado de papel como una opción cada vez más importante.

La urbanización e higiene en ciudades ha optado por la utilización de un tipo de papel que es la toalla para secarse las manos utilizados en lugares públicos, oficinas, escuelas, he instituciones para lograr esa necesidad las personas utilizan este tipo de papel y es necesario idear el proceso de reciclado ya que el secado de manos con toallas de papel es uno de los más utilizados y quizá hasta ahora el método más higiénico para realizar esta función.

El papel de desecho puede ser triturado y reciclado varias veces. Sin embargo, en cada ciclo, del 15% al 20% de las fibras se vuelven demasiado pequeñas para ser usadas. La industria papelera recicla sus propios residuos y los que recolecta de otras empresas, como los fabricantes de envases y embalajes y las imprentas.

## JUSTIFICACIÓN

Cada año, en México se consumen 5 millones de toneladas de papel. La importancia de esta investigación radica en este aspecto. México es uno de los grandes consumidores de papel reciclado, el problema es que lo obtiene de otros países; ya que no se tiene la cultura de la recolección del papel. En nuestro país no nos enfocamos en recolectar el papel que ya ha sido usado para aprovecharlo en su totalidad, lo que se hace es obtener el papel del extranjero para luego reciclarlo.

El reciclaje ha ido cobrando cada vez más importancia dentro del proceso de fabricación del papel y ahora representa una industria importante por sí misma.

Regularmente, las personas visitan o conviven en lugares públicos, es decir para nuestro caso la mayoría de sanitarios públicos son utilizados frecuentemente con personas de distintas áreas sociales, estos baños deben de ofrecer un buen servicio y por lo general ofrecen toallas de papel para secarse las manos y después la desechan en un contenedor que por lo regular se llena con este tipo de papel lo cual es ventajoso para la optimización del proceso de reciclado. Los baños públicos deben de ofrecer un buen servicio a la comunidad así que son de los establecimientos de los cuales desechan más papel que cumple la función de secar las manos de los usuarios y, por lo tanto son de los establecimientos que contaminan más ya que ese tipo de papel hasta la fecha no es reciclado para que cumpla la misma función.

Según se desprende de diversos estudios, las toallas de mano de papel son una opción más higiénica que los secadores de aire caliente. Además, más del 60% de los usuarios de lavabos prefiere toallas de papel a otros sistemas para secarse las manos.

A modo de resumen, algunas razones para reciclar papel son el ahorro de: 17 árboles adultos, 2,5 metros cúbicos de desperdicios, 27.000 litros de agua, 1440 litros de aceite, 4100 kilovatios-hora de energía y 27 kilogramos de contaminantes. Estos datos se obtuvieron por cada tonelada de papel reciclado, en comparación con la producción de papel virgen.

## MODELO MATEMÁTICO

Considerando la absorción de agua del papel, el tamaño de la mano, la evaporación y la absorción de la piel se realizara el modelo matemático que dará como resultado el tamaño óptimo del papel para el secado de las manos.

Las propiedades del papel se pueden agrupar en propiedades mecánicas o de resistencia y propiedades visuales o de presentación.

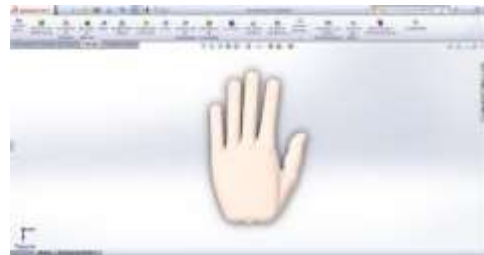
**Propiedades mecánicas o de resistencia:** rigidez, resistencia y capacidad de absorción de agua son características que convierten al

papel en un material apropiado para diversos usos, como por ejemplo, para proteger objetos que necesitan ser transportadas de un lugar a otro. Otras propiedades mecánicas son la resistencia al rasgado, la resistencia superficial y la resistencia a la absorción de agua.

**Propiedades visuales o de presentación:** blancura, brillo y opacidad son características que convierten al papel en un medio adecuado para escribir. Otras propiedades importantes son el gramaje- que indica el peso en gramos por metro cuadrado de papel-, la estabilidad dimensional -que es la capacidad del papel de mantener sus dimensiones originales al variar las condiciones ambientales o al verse sometido a esfuerzos-, y la humedad, que es el contenido de agua como porcentaje del peso total del papel.

### Modelado de la mano.

Con estas magnitudes se procedió a realizar el modelado de cada miembro de la extremidad.



Sin embargo en el lavado de las manos intervienen también arte del antebrazo por eso es que lo incluiremos en el modelado como en la siguiente figura:



El modelado nos da como resultado la siguiente tabla de propiedades:



En donde el dato de interés es el área superficial:

$$A = 896.37 \text{ cm}^2 = 0.089637 \text{ m}^2.$$

Al concluir con el proceso de lavado de manos en la piel queda una capa de agua de alrededor de 0.25 mm.=0.025 cm.

La temperatura promedio del agua en las estaciones primavera-verano es de 15°C. Las propiedades del agua a 15°C= 288 K.

Propiedades del Agua Saturada a 15° C			
$h_{fg}$	$P_v$	$R_v$	$R_\alpha$
2466 KJ/Kg	1.705 KPa	0.4615 (KPa m <sup>3</sup> )/(Kg °K)	0.287(KPa m <sup>3</sup> )/(Kg °K)

La temperatura promedio del aire de los alrededores en las estaciones primavera-verano es de 27.5°C = 300.5 K.

Propiedades del Agua Saturada a 27.5° C			
$h_{fg}$	$P_v$	$R_v$	$R_\alpha$
2436.5 KJ/Kg	3.7075 KPa	0.4615 (KPa m <sup>3</sup> )/(Kg °K)	0.287(KPa m <sup>3</sup> )/(Kg °K)

Existen condiciones de flujo bajo de masa, de modo que es aplicable la analogía que existe

Partiendo del espesor de capa de agua podemos calcular un volumen de agua que deberá ser absorbido por la toalla de papel.

$$V = A * h$$

$$V = 896.37 \text{ cm}^2 * 0.025 \text{ cm} = 22.4092 \text{ cm}^3$$

La masa de agua que se absorberá son 22.41 g.

Para el caso particular de la evaporación del agua de las manos utilizaremos la expresión:

$$\dot{m}_v = h_{masa} A_s (\rho_{v,s} - \rho_{s,\infty})$$

Dónde  $\dot{m}_v$  es la razón de vaporización,  $h_{masa}$  es el calor latente de vaporización del agua,  $A_s$  área de la interface y  $\rho_{v,s} - \rho_{s,\infty}$  es la diferencia de concentración de masa.

### Evaporación del agua en la superficie de la mano en la ciudad de Pachuca

Condiciones climáticas en la ciudad de Pachuca.

Presión Atmosférica: 101.3 KPa

$\Phi$ : 61% HR en la estaciones primavera-verano.

entre la transferencia de calor y la de masa, puesto que la fracción de masa de vapor en el aire es baja (alrededor de 2% para el aire saturado a 300 K). A las condiciones especificadas, tanto el aire como el vapor de agua son gases ideales (el error relacionado con esta hipótesis es menor de 1%).

Con los datos y las consideraciones anteriores obtenemos las propiedades, tanto de la superficie como de los alrededores para determinar la perdida de agua por evaporación.

Si se considera al vapor de agua y al aire como gases ideales y se observa que la presión atmosférica total es la suma de las presiones del vapor y del aire seco, se determina que las densidades del vapor de agua, del aire seco y de su mezcla, en la interface agua-aire y lejos de la superficie son:

En la superficie:

$$\rho_{v,s} = \frac{p_{v,s}}{R_v T_s} = \frac{1.705 \text{ KPa}}{(0.4615 \frac{\text{KPa} \cdot \text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{K}})(288 \text{ K})} = 0.012828037 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_{a,s} = \frac{p_a - p_{v,s}}{R_a T_s} = \frac{101.3 \text{ KPa} - 1.705 \text{ KPa}}{(0.287 \frac{\text{KPa} \cdot \text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{K}})(288 \text{ K})} = 1.204933701 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_s = \rho_{v,s} + \rho_{a,s} = 0.012828037 + 1.204933701 = 1.217761738 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Lejos de la superficie:

El aire de la superficie está saturado y, por lo tanto, la presión de vapor en esa superficie es simplemente la presión de saturación del agua a la temperatura superficial. La presión de vapor de aire lejos de la superficie del agua es:

$$p_{v,\infty} = (61\%)(3.7075 \text{ KPa}) = 2.261575 \text{ KPa}$$

$$\rho_{v,\infty} = \frac{p_{v,\infty}}{R_v T_s} = \frac{2.261575 \text{ KPa}}{(0.4615 \frac{\text{KPa} \cdot \text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{K}})(288 \text{ K})} = 0.016307779 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_{a,\infty} = \frac{p_a - p_{v,\infty}}{R_a T_s} = \frac{101.3 \text{ KPa} - 2.261575 \text{ KPa}}{(0.287 \frac{\text{KPa} \cdot \text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{K}})(288 \text{ K})} = 1.148358137 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_\infty = \rho_{v,\infty} + \rho_{a,\infty} = 0.016307779 + 1.148358137 = 1.164665916 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

El área de la superficie que está en contacto con el ambiente es de 0.089637 m<sup>2</sup> y tiene un perímetro de 0.954m, por lo tanto, la longitud característica es:

$$L_c = \frac{A_s}{Per} = \frac{0.089637 \text{ m}^2}{0.954 \text{ m}} = 0.093959119 \text{ m}$$

Entonces si utilizamos las densidades en lugar de las temperaturas ya que la mezcla no es homogénea, el número de Grashof es:

$$Gr = \frac{g(\rho_\infty - \rho_s)L_c^3}{\rho_\infty \nu^2} = \frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (1.164665916 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 1.217761738 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}) (0.093959119 \text{ m})^3}{1.164665916 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} (1.539 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}})^2} = -765683.3578$$

Determinamos la difusividad de la masa del vapor de agua en el aire a la temperatura promedio de la superficie y lejos de ella.

$$D_{AB} = 1.87 \times 10^{-10} \frac{294.5^{2.75}}{1 \text{ atm}} = 2.43794 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Tomamos en cuenta las propiedades del aire a una temperatura promedio entre 15° C y 27.5° C, las cuales son:

$$k = 0.025695 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \quad \nu = 1.539 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\alpha = 2.11 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Y obtenemos el número de Schmidt.

$$Sc = \frac{\nu}{D_{AB}} = \frac{1.539 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{2.43794 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 0.627347086$$

Y con esto se determina que el número de Sherwood y el coeficiente de transferencia de masa son:

$$Sh = 0.15(Gr Sc)^{1/3} = 0.15((-765683.3578) \cdot (0.627347086))^{1/3} = -11.77189798$$

$$h_{mass} = h_{mass} = \frac{Sh D_{AB} (-11.77189798) (2.43794 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}})}{L_c (0.093959119 \text{ m})} = -0.003054427 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Entonces la razón de transferencia de masa es:

$$\dot{m}_x = h_{mass} A_s (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty})$$

$$\dot{m}_x = (-0.003054427 \frac{\text{m}}{\text{s}}) (0.089637 \text{ m}^2) (0.012828037 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 0.016307779 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})$$

$$\dot{m}_x = 0.00000952717 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 0.000952717 \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

$$\text{Agua evaporada} = 0.000952717 \frac{\text{g}}{\text{s}} \cdot 120 \text{ s} = 0.114326 \text{ g}$$

Variando las propiedades de los alrededores podemos obtener un resultado de la razón de transferencia de masa para las condiciones de las estaciones otoño invierno, cuando el % de HR es de 63.5%, dato promedio aproximado de la tabla para las condiciones climatológicas de Pachuca.

Las propiedades del agua a 15°C= 288 K.

Propiedades del Agua Saturada a 15° C			
$h_{fg}$	$P_v$	$R_v$	$R_a$
2466 KJ/Kg	1.705 KPa	0.4615 (KPa m <sup>3</sup> )/(Kg °K)	0.287(KPa m <sup>3</sup> )/(Kg °K)

La temperatura promedio del aire de los alrededores en las estaciones primavera-verano es de aproximadamente 20°C = 293 K.

Propiedades del Agua Saturada a 20° C			
$h_{fg}$	$P_v$	$R_v$	$R_a$
2454 KJ/Kg	2.339 KPa	0.4615 (KPa m <sup>3</sup> )/(Kg °K)	0.287(KPa m <sup>3</sup> )/(Kg °K)

Tomamos en cuenta las propiedades del aire a una temperatura promedio entre 15° C y 20° C, las cuales son:

$$k = 0.02514 \frac{W}{m \cdot K}$$

$$\alpha = 2.074 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

$$v = 1.493 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

Calculamos la presión atmosférica para este caso.

En la superficie:

$$\rho_{v,s} = \frac{P_{v,s}}{R_v T_s} = \frac{1.705 \text{ KPa}}{(0.4615 \frac{KPa \cdot m^3}{Kg \cdot K})(280 \cdot K)} = 0.012828037 \frac{Kg}{m^3}$$

$$\rho_{a,s} = \frac{P_a - P_{v,s}}{R_a T_s} = \frac{101.3 \text{ KPa} - 1.705 \text{ KPa}}{(0.287 \frac{KPa \cdot m^3}{Kg \cdot K})(280 \cdot K)} = 1.204933701 \frac{Kg}{m^3}$$

$$\rho_s = \rho_{v,s} + \rho_{a,s} = 0.012828037 + 1.204933701 = 1.217761738 \frac{Kg}{m^3}$$

Lejos de la superficie:

$$P_{v,\infty} = (63.5\%)(1.7075 \text{ KPa}) = 2.261575 \text{ KPa}$$

$$\rho_{v,\infty} = \frac{P_{v,\infty}}{R_v T_s} = \frac{2.261575 \text{ KPa}}{(0.4615 \frac{KPa \cdot m^3}{Kg \cdot K})(293 \cdot K)} = 0.010984104 \frac{Kg}{m^3}$$

$$\rho_{a,\infty} = \frac{P_a - P_{v,\infty}}{R_a T_s} = \frac{101.3 \text{ KPa} - 2.261575 \text{ KPa}}{(0.287 \frac{KPa \cdot m^3}{Kg \cdot K})(293 \cdot K)} = 1.186984755 \frac{Kg}{m^3}$$

$$\rho_\infty = \rho_{v,\infty} + \rho_{a,\infty} = 0.016307779 + 1.186984755 = 1.197968858 \frac{Kg}{m^3}$$

Se tiene la misma longitud característica:

$$L_c = \frac{A_s}{Per} = \frac{0.089637 \text{ m}^2}{0.954 \text{ m}} = 0.093959119 \text{ m}$$

Se determina el número de Grashof:

$$Gr = \frac{g(\rho_\infty - \rho_s)L_c^3}{\rho_\infty v^2} = \frac{9.81 \frac{m}{s^2} (1.197968858 \frac{Kg}{m^3} - 1.217761738 \frac{Kg}{m^3}) (0.093959119 \text{ m})^3}{2.332427684 \frac{Kg}{m^3} (1.493 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s})^2}$$

$$Gr = 299107.076$$

La difusividad de la masa para el promedio de temperaturas:

$$D_{AB} = 1.87 \times 10^{-10} \frac{290.5^{1.2772}}{1 \text{ atm}} = 2.374 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

Y se obtiene el número de Schmidt:

$$Sc = \frac{v}{D_{AB}} = \frac{1.493 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}}{2.374 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}} = 0.62889683$$

El número de Sherwood y el coeficiente de transferencia de masa son:

$$Sh = 0.15(Gr Sc)^{1/3} = 0.15((299107.076) \cdot (0.62889683))^{1/3}$$

$$Sh = 8.59481880$$

$$h_{mass} = h_{mass} = \frac{Sh D_{AB}}{L_c} = \frac{8.59481880 (2.374 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s})}{0.093959119 \text{ m}} = 0.00217154 \frac{m}{s}$$

La razón de transferencia de masa es:

$$\dot{m}_v = (0.00217154 \frac{m}{s}) (0.089637 \text{ m}^2) (0.012828037 \frac{Kg}{m^3} - 0.010984104 \frac{Kg}{m^3})$$

$$\dot{m}_v = 0.00000035892 \frac{Kg}{s} = 0.00035892 \frac{g}{s}$$

$$\text{Agua Evaporada} = 0.00035892 \frac{g}{s} \cdot 120 \text{ s}$$

$$= 0.0430704 \text{ g}$$

## RESULTADOS

De este artículo el dato de importancia es: Se ha hallado una absorción acuosa cutánea de aproximadamente 2-4 microlit/cm2/hora.

$$\text{Absorción acuosa cutánea} = 0.000003 \frac{lt}{cm^2 hr} = 0.00005 \frac{g}{cm^2 s}$$

$$\text{Agua Absorbida} = \text{absorción acuosa cutánea} \cdot A_s \cdot t$$

$$\text{Agua Absorbida} = 0.00005 \frac{g}{cm^2 s} \cdot 896.37 \text{ cm}^2 \cdot 60 \text{ s} = 2.68911 \text{ g}$$

Aplicación del modelo para la caracterización del secado de las manos:

Ahora determinamos la cantidad de papel necesaria para el secado de las manos a

partir del agua que queda en la superficie de las manos después de la absorción y evaporación.

$$\text{Agua por Secar} = \text{Agua al termino de lavar} - \text{Agua Absorbida} - \text{Agua Evaporada}$$

$$\text{Agua por secar} = 22.41g - 2.68911g - 0.114326g = 19.6065g$$

A partir de la cantidad de agua por secar determinamos la cantidad de papel para secarla.

En el resultado obtenido tenemos un área de 430.42 la cual se ve rebasada en la presentación de este papel, pues presenta un área por hoja de: 1176 cm<sup>2</sup>.

Se propone como medidas para este papel las siguientes sin alterar ninguna de sus otras propiedades.

Ancho de hoja	21 cm
Largo de hoja	21 cm

Área de la hoja de papel: 441 cm<sup>2</sup>, necesario para el secado de una mano por lo que deberá ser a doble hoja para el secado de ambas manos.

VARIABLE	UNIDADES	OBJETIVO
Peso base	g/m <sup>2</sup>	87.60
Ancho de hoja	mm	280
Largo de la hoja	mm	420
Diámetro del rollo	mm	155
Resistencia en húmedo Longitudinal	gf/3"	8156
Resistencia en húmedo Transversal	gf/3"	2049.8

## CONCLUSIONES

Con el desarrollo del modelo matemático obtenemos al final una superficie de papel necesaria para el secado de manos. Se seleccionó el papel más absorbente para esta aplicación.

Las propiedades utilizadas para este modelo son variables dependiendo de la ubicación geográfica donde se aplique el modelo. Para este caso particular utilizamos las propiedades de la ciudad de Pachuca, las cuales fueron extraídas de la tabla que se encuentra anexa a este documento. Por lo tanto los resultados del reporte son exclusivos para la ciudad de Pachuca.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Cengel, Yunus A., Ghajar, Afshin J. (2011) Transferencia de calor y masa.(4<sup>ed.</sup>) Universidad de Nevada. Mc Graw Hill.
2. Stephan, Karl (1992) Heat transfer in Condensation and Boiling. Springer.
3. Carmen, San José Arango.(2014). Peculiaridades en la absorción percutánea de los elementos componentes de las aguas minero-medicinales. Seme Medicina Estética.SEME. Disponible en: [http://www.seme.org/area\\_pro/textos\\_articulo.php?id=11](http://www.seme.org/area_pro/textos_articulo.php?id=11).
4. Instituto Mexicano del Seguro Social, (2000) Industria del papel - toallas para manos, de papel de 3 paneles,interdobladas -especificaciones y métodos de prueba. México,instituto mexicano del seguro social.
5. Subsecretaría de Normatividad, Inversión Extranjera y Prácticas Comerciales Internacionales,(2008) Aviso de consulta pública de los proyectos de normas Mexicanas, México. Disponible en: [http://dof.gob.mx/nota\\_detalle\\_popup.php?codigo=5033113](http://dof.gob.mx/nota_detalle_popup.php?codigo=5033113)
6. Torras papel (2010) Formación Fabricación del papel. Llull,331, 08019 Barcelona lecta group. Disponible en: [www.torraspapel.com](http://www.torraspapel.com)
7. Tork (2009) Toallas de papel son más higiénicas que el aire caliente Universidad de Westminster Londres. Disponible en: <http://www.tork.es/Why>

[Tork/Higiene/Las-toallas-de-papel-son-mas-higienicas-que-el-aire-caliente/](#)