

MODELO MATEMÁTICO PARA EL BALANCEO DE UN MECANISMO DE TRILLA DE MAÍZ

Gómez Mercado Abdiel⁽¹⁾, Ramírez Vargas Ignacio⁽²⁾, Reséndiz Rosas Celerino⁽³⁾, Hernández
Hernández Ambrocio⁽⁴⁾

RESUMEN

El presente trabajo muestra la construcción de un modelo matemático para un mecanismo de trilla de maíz, que consiste en un eje rotatorio con pequeñas aspas en su periferia. Para corregir el desbalance en la máquina existen métodos de balanceo de los cuales la masa que se tiene que agregar o quitar del sistema se hace a prueba y error, con el modelo que se presenta se ubicará la posición y la cantidad de masa exacta para corregir el desbalance del mecanismo. El mecanismo a analizar es el mecanismo de la desgranadora diseñada para la materia de diseño mecánico en el semestre agosto-diciembre 2013 por lo cual está a nuestro alcance. Se plantea una metodología para la investigación la cual consiste en lograr la obtención satisfactoria de este modelo, así como el análisis de vibración de la máquina.

Palabras clave: modelo, desbalance, masa, vibración.

INTRODUCCIÓN

Las vibraciones siempre han sido un inconveniente en las máquinas, ya que estas pueden afectar su funcionamiento y para ello se hace una serie de análisis para tratar de evitar este pequeño pero gran problema. Mas sin embargo esta desventaja puede muchas veces aprovechada para ciertas situaciones, siempre y cuando no sea de peligro, es decir que no rebase los parámetros de falla para la máquina o para instalaciones en la cuales trabaja dicha máquina.

Una gran cantidad de equipos y maquinaria, que requieren para su funcionamiento movimientos rotatorios presentan una vibración; prácticamente inevitable, pero controlable, y es debida al desbalanceo de la masa de los componentes del sistema. Esto puede deberse a la falta de homogeneidad de los materiales usados, así como los defectos de manufactura normalmente inevitables dada la naturaleza propia de los procesos. La comprensión del fenómeno de

desbalanceo ayuda a la reducción y control de esta situación que normalmente es indeseable, a menos que se induzcan vibraciones intencionalmente para mejorar ciertos procesos, pero aun en estos casos se debe tener un control del movimiento vibratorio, para un correcto diseño mecánico que permita una vida adecuada del equipo o máquina.

Un rotor jamás se podrá balancear en su totalidad debido a que su distribución de masa no es por igual. Pero estas vibraciones si se pueden disminuir considerablemente. Primero se hay que explorar para el control de las vibraciones, esto implica modificar el sistema para que de este modo produzca menos vibración. Esto se puede lograr, por lo general, utilizando tanto un balanceo interno o un incremento en la precisión de los elementos de máquinas. El uso de tolerancias mínimas y un mejor cavado superficial de las partes de la máquina, las cuales tienen movimiento relativo una respecto de la otra, hacen que la máquina sea menos susceptible a la vibración.

Una vibración se produce cuando el sistema en cuestión es desplazado desde una posición de equilibrio estable, el sistema tiende a retornar a dicha posición, bajo la acción de fuerzas de restitución elástica o gravitacional, moviéndose de un lado a otro hasta alcanzar su posición de equilibrio. El intervalo de tiempo necesario para que el sistema efectúe un ciclo completo de movimiento se llama periodo de vibración, el número de ciclos por unidad de tiempo define la frecuencia y el desplazamiento máximo del sistema desde su posición de equilibrio se denomina amplitud de vibración.

La función principal que tendrá este modelo matemático es darnos puntos específicos: coordenadas creadas a partir de un punto de referencia del mecanismo, además de la cantidad exacta de masa necesaria para el correcto balanceo del mecanismo.

Lo nuevo de esta investigación es el estudio de un eje rotatorio para poder realizar un modelo matemático que permita ubicar lugares específicos de adicción de pequeñas masas para un pequeño desbalanceo del mecanismo de trilla, de este modo aprovechar las vibraciones presentes en la máquina como un aliado para un mejor aprovechamiento de ciertas impurezas presentes al momento de desgranado.

Normalmente las desgranadoras eléctricas cuentan con un ventilador que además de una sola criba son las que retiran estas impurezas, pero muchas veces estas son utilizadas para alimentar el ganado, y con el uso del ventilador estas son arrastradas y no permiten su recolección, de este modo con un sistemas de puras cribas se podría recolectar dichas impurezas y poder sacar provecho de estas.

A veces las vibraciones provoca desgaste excesivo de cojinetes, formación de grietas aflojamiento de sujetadores, fallas estructurales y mecánicas, mantenimiento frecuente y costoso de máquinas entre otros. La exposición ocupacional de humanos produce dolor, incomodidad y eficiencia reducida, en ocasiones puede eliminarse la vibración con análisis teórico, mas sin embargo los costos de manufactura integrados en la eliminación de vibración pueden ser demasiado elevados. Los resultados que se pretenden generar serán lo más explícitos ya que solo se arrojará, la magnitud de la masa que se necesita adicionar o retirar en el eje además de los puntos específicos o coordenadas en donde se deberán quitar o adicionar estas pequeñas masas.

JUSTIFICACIÓN

Los modelos matemáticos son muy importantes para un análisis más rápido y detallado de algunas situaciones específicas en este caso el desbalance rotatorio que se desea aprovechar para lograr el objetivo planteado, además de que facilitan el análisis y se obtiene más rápido el resultado.

La idea de tener un modelo matemático para un mecanismo de trilla de maíz puede ser un antecedente para modelar otros tipos de ejes rotatorios de máquinas que trabajen con el

mismo principio que la desgranadora y a si ir haciendo del desbalanceo una desventaja muy fácil de corregir y evitar los problemas de vibración que se presentan si un rotor esta desbalanceado.

Además de construir el modelo teórico se harán algunas pruebas en el laboratorio de ingeniería mecánica del Instituto Tecnológico de Pachuca, si se requiere. También se realizará un programa en el software MATLAB para así obtener una mayor precisión y un fácil manejo de este modelo en donde se mostrarán graficas de las coordenadas donde se agregará o quitará la masa que está desbalanceando al mecanismo en cuestión. Este procedimiento permite elegir el punto óptimo sin tener que tocar el mecanismo hasta el momento del correcto balanceo, evitando así el trabajar a prueba y error. Además, es posible realizar cambios para generalizar el modelo con el fin de que esté al alcance de quienes deseen estudiar este modelo para otras máquinas con ejes rotatorios.

La importancia de tener un modelo matemático para aprovechar las vibraciones de las máquinas que cuentan con un eje rotatorio, en este caso el mecanismo de trillas de una desgranadora de maíz, reside en el ahorro de energía que absorbe el ventilador, para que toda la potencia sea transmitida sólo al eje. El modelo matemático permite minimizar tiempos de balanceo y ofrece una ventaja sobre otros métodos para realizar el trabajo a menor costo, ya que el costo de la mano de obra se reducirá, dado que el procedimiento de balanceo será menos complejo.

ANALISIS ESTATICO Y DINAMICO DEL SISTEMA

Los dibujos de diagrama de cuerpo libre del eje rotario del mecanismo, se requieren para calcular las fuerzas estáticas presentes en apoyos generadas por la fuerza en la polea y el peso del eje.

Se calcularán las reacciones presentes en los apoyos del mecanismo causadas por la fuerza en la polea y el peso del eje (Figura 1). Haciendo suma de fuerzas estáticas igual con cero, dejándolas en función de la longitud (l) y de la fuerza de la polea (F_p) así

como del peso del eje (mg). Para que posteriormente solamente se sustituyan valores y encontrar el valor numérico de las reacciones.

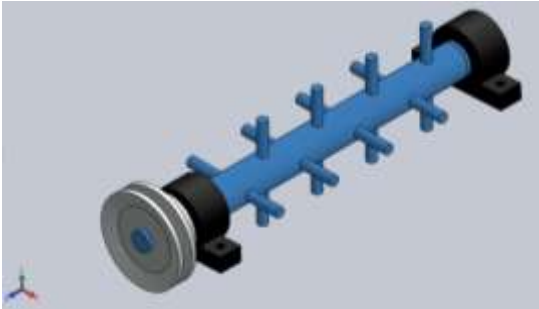


Figura 1. Eje rotatorio del mecanismo de trilla

La figura 2 muestra las fuerzas presentes en el eje debido a los cojinetes que son causadas por el peso y la fuerza en la polea debido a la tensión de la banda.

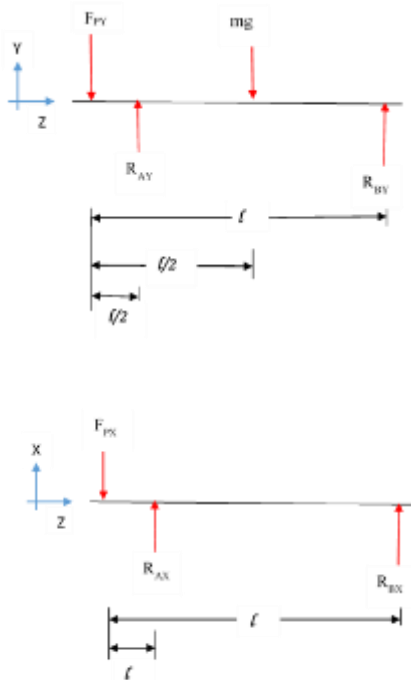


Figura 2 diagrama de cuerpo libre del eje en el plano YZ y XZ

Este diagrama de cuerpo libre nos servirá para el análisis estático del eje rotatorio. Principalmente para observar cómo actúan las fuerzas en los rodamientos, debido a la tensión generada por la banda en la polea y el propio peso del eje. En el análisis estático principalmente se encuentran las

reacciones que generan las fuerzas presentes en el sistema, además de que también se encuentra un término que en el análisis dinámico se puede simplificar, obteniendo así una ecuación de movimiento más sencilla.

PLANO YZ

$$\sum M_A = 0 \quad + \quad \curvearrowright$$

$$F_{py} \left(\frac{l}{8} \right) - mg \left(\frac{7}{16} l \right) + R_{By} \left(\frac{7}{8} l \right) = 0$$

$$R_{By} = \frac{-F_{py} \left(\frac{l}{8} \right) + mg \left(\frac{7}{16} l \right)}{\left(\frac{7}{8} l \right)}$$

$$\sum M_B = 0 \quad + \quad \curvearrowright$$

$$F_{py}(l) - R_{Ay} \left(\frac{7}{8} l \right) + mg \left(\frac{7}{16} l \right) = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{F_{py}(l) + mg \left(\frac{7}{16} l \right)}{\left(\frac{7}{8} l \right)}$$

PLANO XZ

$$\sum M_A = 0 \quad + \quad \curvearrowright$$

$$F_{px} \left(\frac{l}{8} \right) + R_{By} \left(\frac{7}{8} l \right) = 0$$

$$R_{Bx} = \frac{F_{px} \left(\frac{l}{8} \right)}{\left(\frac{7}{8} l \right)} = \frac{1}{7} (F_{px})$$

$$\sum M_B = 0 \quad + \quad \curvearrowright$$

$$F_{px}(l) + R_{Ay} \left(\frac{7}{8} l \right) = 0$$

$$R_{Ax} = \frac{F_{px}(l)}{\left(\frac{7}{8} l \right)} = \frac{8}{7} (F_{px})$$

$$R_A = \sqrt{\left(\frac{8}{7} (F_{px}) \right)^2 + \left(\frac{F_{py}(l) + mg \left(\frac{7}{16} l \right)}{\left(\frac{7}{8} l \right)} \right)^2} = \sqrt{10899124.8 + 17573}$$

$$R_B = \sqrt{\left(\frac{1}{7} (F_{px}) \right)^2 + \left(\frac{-F_{py} \left(\frac{l}{8} \right) + mg \left(\frac{7}{16} l \right)}{\left(\frac{7}{8} l \right)} \right)^2} = \sqrt{17033.98 + 18720}$$

Con el diagrama de cuerpo libre de la polea se encontraran el valor de las tensiones T_1 y T_2 de acuerdo a la figura 3 iniciaremos con la potencia entregada por el motor hacia el eje.

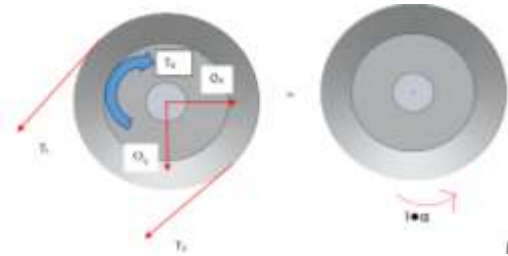


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre de la polea.

Partiendo de

$$P = T\omega$$

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{(2HP)}{1700 \text{ rpm}} = \left(\frac{1492 \text{ W}}{\frac{178 \text{ rad}}{s}} \right) = \frac{1.492 \text{ N} \cdot \text{m/s}}{\frac{178 \text{ rad}}{s}} = 8.38 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\Sigma M_o = 0 \quad + \quad \curvearrowright$$

$$T_1(r) - T_2(r) - T_0 = 0$$

$$T_1 - T_2 = T_0/r$$

$$T_1 - 0.8T_1 = \frac{8.38}{0.041275} = 0.2T_1$$

$$T_1 = 1015.1 \text{ N}$$

$$T_2 = 0.8(1015.1) = 812.11 \text{ N}$$

ANALISIS DE VIBRACION DEL SISTEMA

Para ver el comportamiento de la máquina, principalmente se abordaran términos como amplitud máxima de vibración, frecuencia natural y la ecuación de movimiento. Que nos darán un panorama amplio de lo que sucede con la maquina debido a vibración.

El sistema es impulsado por un motor eléctrico, la vibración se dice que es forzada y la función que asimila el movimiento de un motor es $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$, además de que la constante C muestra el amortiguamiento, para nuestro caso no hay amortiguamiento por lo tanto ese término se hace cero. Por lo cual la ecuación general de movimiento para

vibraciones forzadas queda de la siguiente manera.

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

O bien

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t)$$

$$\Sigma M_o = 0 \quad + \quad \curvearrowright$$

$$T_1(r) - T_2(r) = 0$$

$$k_1(r\theta_s)(r) - k_2(r\theta_s)(r) = 0$$

$$\Sigma M_o = I \cdot \alpha \quad + \quad \curvearrowright$$

$$k_1(r\theta_s - r\theta)(r) + k_2(r\theta_s - r\theta)(r) - T_0 \sin \omega t = I \cdot \alpha$$

$$k_1 r \theta_s(r) - k_1 r \theta(r) + k_2 r \theta_s(r) - k_2 r \theta(r) - T_0 \sin \omega t = I \cdot \alpha$$

$$-k_1 r \theta(r) + k_2 r \theta(r) - \frac{T_0}{r} \sin \omega t = I \cdot \frac{\ddot{\theta}}{r}$$

$$\frac{I}{r} \cdot \ddot{\theta} - (k_1 r - k_2 r)(\theta) = \frac{T_0}{r} \sin \omega t$$

En donde:

$\frac{I}{r}$ = Es la masa equivalente del sistema.

$(k_1 r - k_2 r)$ = es la constante de rigidez

$\frac{T_0}{r} \sin \omega t$ = Es nuestra excitación provocada por el motor eléctrico

Y de acuerdo a lo anterior sustituimos la masa equivalente y la constante k en la ecuación de frecuencia natural.

Obtenemos la frecuencia natural a partir de:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{(k_1 r - k_2 r)r}{I}} = \sqrt{311.87} = 17.65 \text{ rad/s}$$

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

En donde la solución de X está dada por:

$$X_c(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$$

$$X_p(t) = X \cos \omega t$$

La ecuación homogénea será resuelta por medio de coeficientes indeterminados

Mientras que la particular se resolverá calculando X, que es la amplitud máxima.

Esta dada por:

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\delta_{est}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Entonces la solución de total de la ecuación de movimiento será:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

Para dar solución a la ecuación de movimiento se dan las siguientes condiciones iniciales:

$$x(t=0) = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$$

Se obtiene:

$$C_1 = x_0 + \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

$$C_2 = \frac{x_0}{\omega_n}$$

Se sustituyen en la ecuación:

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \cos \omega_n t + \left(\frac{x_0}{\omega_n}\right) \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

Y finalmente derivando una y dos veces para sustituir en la ecuación de movimiento del sistema:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = -\omega_n \left(x_0 + \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t) = -\omega_n^2 \left(x_0 + \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \cos \omega_n t + \omega_n (x_0) \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

Solución particular del sistema

Como la solución particular se suma a la solución homogénea por lo tanto tenemos.

$$X_p(t) = X \cos \omega t$$

Derivando una y dos veces

$$\dot{X}_p(t) = -\omega X \sin \omega t$$

$$\ddot{X}_p(t) = -\omega^2 X \cos \omega t$$

Sumando a la ecuación homogénea se tiene

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \cos \omega_n t + \left(\frac{x_0}{\omega_n}\right) \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

Como es una excitación armónica x_0 tomara el valor de cero entonces nos da:

$$C_1 = x_0 + \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{203 \text{ N}}{7.3 \frac{\text{N}}{\text{m}} - \frac{3.96 \text{ Kg} (1700^2) \text{ rad}}{\text{s}^2}} = -1.7738$$

$$C_2 = \frac{x_0}{\omega_n} = \frac{0}{17.65} = 0$$

Ahora se sustituyeron los valores en la amplitud máxima se tiene que:

$$X = \frac{203 \text{ N}}{7.3 \frac{\text{N}}{\text{m}} - \frac{3.96 \text{ Kg} (1700^2) \text{ rad}}{\text{s}^2}} = -1.7738 \times 10^{-5} \text{ m}$$

El signo negativo nos dice que la maquina se encuentra un poco desfasa es decir que no

opera de acuerdo a las operaciones de diseño y nos lleva a concluir que como los valores dados son del diseño, quiere decir que la maquina fue mal diseñada, pero el valor es muy pequeño así que se analizara que ecuaciones de balanceo utilizaremos para iniciar con el modelado.

ANALISIS DE DESBALANCE DEL SISTEMA.

Las fuerzas generadas por la masa M son:

Estas fuerzas con sentido y dirección radialmente hacia afuera.

La ecuación general del balanceo la suma vectorial de las fuerzas de inercia del sistema es igual a cero.

$$\sum F = \sum M \omega^2 = \sum \left(\frac{W}{g} r \omega^2\right) = \sum \left(\frac{W}{g} r \omega^2\right) = \frac{\omega^2}{g} \sum (Wr) = 0$$

Se debe tener en cuenta también los momentos de las fuerzas de inercia, para tener balance de momentos de las fuerzas de inercia, deben ser cero los momentos de las fuerzas de inercia alrededor de un eje escogido arbitrariamente normal al plano axial.

Es decir:

$$\sum Fa = \sum \frac{W}{g} r \omega^2 a = \frac{\omega^2}{g} \sum Wra = 0$$

En donde a es el brazo de momentos de cualquier fuerza de inercia dada.

Una pequeña masa m_1 es adicionada en un radio r produce un balance estático expresado como:

$$m_1 r = (m + m_1) u$$

Despejando a u

$$u = \frac{m_1 r}{m + m_1}$$

Donde u es la cantidad de desbalance estático.

Para encontrar una masa en un plano YZ o XZ cualquier número de masas no balanceadas en una localización axial puede ser resuelto con una masa equivalente simple m'_x o m'_y localizada en una resultante Z_x o Z_y .

Por ejemplo las tres masas no balanceadas en la figura produce un producto de inercia está dada por.

$$P_{yz} = (m_{y1}z_1 - m_{y2}z_2 - m_{y3}z_3)R$$

La masa equivalente en el plano YZ está dada por.

$$m'_y = m_{y1} + m_{y2} + m_{y3}$$

El resultado de localización es calculado por.

$$z_y = \frac{m_{y1}z_1 + m_{y2}z_2 + m_{y3}z_3}{m'_y}$$

En este caso se utilizará el plano axial donde es aplicada la velocidad de operación y la acción de las fuerzas. Se analizarán para cada uno de los golpeadores esto con el fin de encontrar las masas a lo largo de todo el eje (Figura 4), y su ubicación angular de las masas en un plano axial.

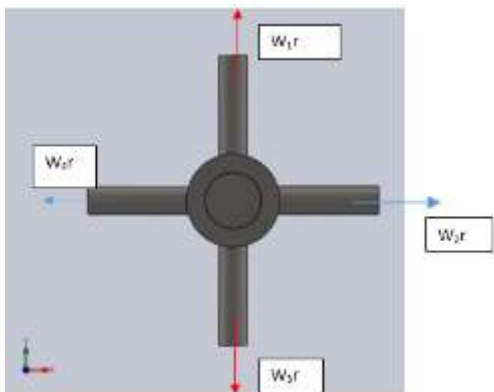


Figura 4 Vista axial del plano XY del eje para el análisis de masas.

MODELADO DEL SISTEMA

Con las ecuaciones de desbalance y vibración aplicando las condiciones iniciales se evaluará cada uno de los puntos en donde irán ubicadas las masas para el balanceo. Con las diferenciales de las fuerzas inerciales a lo largo del eje.

$$\frac{dx}{dt} = f(t)$$

O bien

$$\frac{dx}{dt} = f(t, y, w, \dots)$$

Donde f es una función que nos otorgará el análisis de desbalance y posteriormente la

resolveremos con la ecuación diferencial, para este caso la dejaremos en función que es la cantidad de desbalance y estará en función de una sola variable que será la amplitud, que está a su vez en función del tiempo más sin embrago ya resuelta anteriormente por lo cual, será nuestro inicio para el modelo

Se muestra el eje en un plano axial donde principalmente se hará el balanceo en dos planos como se viene manejando para obtener un modelo preciso a continuación se aplican las ecuaciones de balanceo y además de ubicar la masa excéntrica para iniciar el balanceo

De acuerdo a la figura 5 las fuerzas inerciales son radialmente hacia afuera por lo cual con las ecuaciones:

$$\sum F = \sum (Mr\omega^2) = \sum \left(\frac{W}{g} r\omega^2\right) = \frac{\omega^2}{g} \sum (Wr) = 0$$

$$\sum F = \sum (Mr\omega^2) = \frac{\omega^2}{g} \sum (Wr) = \frac{\omega^2}{g} \{W_1r + W_2r - W_3r - W_4r\}$$

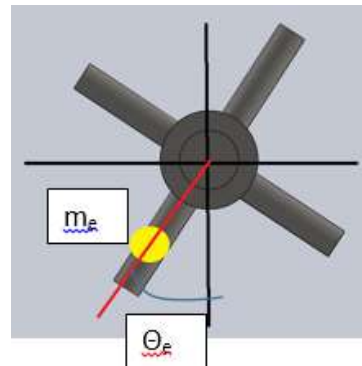


Figura 5 Ubicación de masa excéntrica y su magnitud con la ecuación

$$m_e = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$$

$$\theta_e = \tan^{-1}\left(\frac{m_y}{m_x}\right)$$

RESULTADOS

Lo mostrado anteriormente muestra hasta cierto punto un análisis de la máquina en lo que es vibración y la amplitud máxima de vibración que nos permite interpretar como el eje está vibrando y cuál es su magnitud a si también se muestran como las masas inerciales que pudieran provocar el desbalance del eje están actuando sobre el eje en las pequeñas aspa que tiene el eje en su periferia, para ello las masas que se requieran adicionar serán situadas en dichas

aspas para no afectar el eje directamente. Pretendiendo que ya con el modelo obtenido puedan tabularse estas masas encontradas y descartar las que pudieran ser perjudiciales para el eje, no tomaremos en cuenta las masas que se requieran extraer.

G, ZILL DENNIS (2001), Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (8ª Ed.), México: Thomson.

CONCLUSIONES

El avance que se tiene hasta el momento en el desarrollo del modelo matemático permite utilizar las ecuaciones obtenidas para analizar algunos parámetros que pudieran perjudicar a la máquina. Por ejemplo, en el caso de que la frecuencia natural esté por debajo de su velocidad de operación, se infiere que la máquina está desbalanceada y la amplitud máxima presenta un signo negativo.

En cuanto a la ubicación angular de las masas, se puede obtener una tabla que facilitará conocer la ubicación y magnitud de las masas que se necesiten adicionar, evitando hacerlo a prueba y error, tal y como se realiza en la mayoría de los laboratorios de alineación y balanceo.

Lo anterior representa un ahorro de tiempo y facilita las labores del balanceo del eje del mecanismo de trilla. Además, se espera que sea el principio de un modelo para balancear ejes rotatorios de toda clase de máquinas.

BIBLIOGRAFIA

Rao, Singiresu .S (2012) *Vibraciones Mecánicas* (5ª Ed). México. Pearson educación

Martin, George Henry (1982) kinematics and dynamycs of machines (2ª Ed) USA: Mc Graw HILL.

Ockvirck. Dinámica de las maquinas. México. Limusa. capítulo 12 balanceo de maquinaria

Vance, Jonh, Rotordynamics of turbomachinery. Wylie. Chapter 5 Rotor balancing in turbomachinery.

Balanchandran, B. y E. B. Magrab, (2006) *Vibraciones*. México, Cengage Learning