

HABILIDADES PROFESIONALES PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR

Dr. C. Juan Enrique García La Rosa

Universidad de Ciencias Pedagógicas "Frank País García". Santiago de Cuba

juaneg@ucp.sc.rimed.cu

RESUMEN

Este trabajo responde a la necesidad de que los profesionales de la educación que se forman en la carrera de Matemática – Física se preparen para aprender a aprender y aprender a enseñar a resolver problemas geométricos de la Matemática escolar, lo que se corresponde con las transformaciones que se vienen introduciendo en los Institutos Superiores Pedagógicos, en cuanto a la incorporación de los estudiantes, desde el segundo año de la carrera, al componente laboral al frente de un grupo docente. Para ello, en el trabajo se presenta un sistema de habilidades profesionales dirigido a satisfacer esas exigencias.

Palabras claves: habilidades profesionales, aprender a aprender, aprender a resolver problemas, aprender a enseñar, resolver problemas, problemas geométricos.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la escuela cubana, en general y, en particular, en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática, se está dando un proceso de transformación y perfeccionamiento encaminado a ubicar el planteamiento y la resolución de problemas en el enfoque metodológico general de esta asignatura como medio para estimular las acciones de aprendizaje de los alumnos, sus actitudes, valores, sentimientos y compromisos individuales y sociales, lo que exige la necesidad de que el profesor despliegue un trabajo docente – metodológico de mayor calidad, profesionalismo y maestría pedagógica. Para ello, los profesores que se forman en las carreras de Ciencias Exactas y Profesores Generales de Secundaria Básica deben caracterizarse por el dominio de los enfoques metodológicos relacionados con la enseñanza – aprendizaje de la resolución de problemas para saber diseñar actividades que estimulen la actividad de aprendizaje de los alumnos a través del proceso de planteamiento y resolución de problemas. Estos requisitos que deben poseer estos profesores se tienen que tener en cuenta en su formación en el transcurso de las mencionadas carreras en los Institutos Superiores Pedagógicos, por lo que el proceso de planteamiento y resolución de problemas debe ocupar un lugar especial en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la disciplina Matemática, en general y, en particular, su sistema de habilidades deberá estar dirigido en dos direcciones:

- A que el estudiante aprenda a resolver problemas.
- A que el estudiante aprenda a enseñar a resolver problemas.

En el proceso de enseñanza – aprendizaje de la disciplina Matemática de las carreras de Ciencias Exactas y Profesores Generales de Secundaria Básica se hacen esfuerzos y se realizan investigaciones en las que prevalece el trabajo en la primera dirección y aunque se habla de la necesidad de trabajar en la segunda dirección aun en ella no se ha profundizado suficientemente, dejándosele esta misión sólo a la Metodología de la enseñanza de la Matemática.

Debido a ello, existen insuficiencias en los estudiantes de estas carreras para aprender a aprender y aprender a enseñar a resolver problemas geométricos de la Matemática escolar.

DESARROLLO

Para solucionar estas insuficiencias se propone el siguiente sistema de habilidades profesionales conformado por cuatro habilidades profesionales generalizadas, a saber:

- Resolver problemas geométricos.
- Explicar estrategias de trabajo utilizadas en el proceso de resolución de los problemas geométricos.
- Evaluar estrategias de trabajo utilizadas en el proceso de resolución de los problemas geométricos.
- Diseñar actividades para enseñar a resolver problemas geométricos.

Se entiende por estrategias de trabajo para resolver problemas la planificación consciente de las acciones que pueden seguirse para ello, las que son flexibles y son el producto de una reflexión consciente tanto individual como colectiva.

A continuación se explican y describen las operaciones que caracterizan a cada una de estas habilidades.

Resolver problemas geométricos.

Operaciones:

1. **Orientarse en el problema.** Para ello, se identifica el tipo de problema geométrico que se va a resolver, las condiciones y exigencias presentes en el mismo; se investiga si se resolvieron problemas con condiciones o exigencias análogas o si el problema puede ser reducido a otros problemas ya resueltos o si puede descomponerse en subproblemas más sencillos; se reformula si es necesario el problema para hacerlo más comprensible; se representan las condiciones y/o exigencias del problema en una figura geométrica de análisis; se precisan los conceptos, teoremas o relaciones presentes en el mismo.
2. **Buscar vías para solucionar el problema.** Para ello, se formulan e interpretan los teoremas y definiciones, se interpretan las relaciones geométricas, para extraer de todos ellos nuevas informaciones o deducir nuevas consecuencias y nexos, precisando los más trascendentales para la resolución del problema; se realizan construcciones auxiliares en la figura geométrica de análisis en el caso necesario; se descompone el problema en subproblemas más sencillos; se aplican métodos de reducción: inductivos y no inductivos, así como métodos deductivos; se seleccionan y aplican procedimientos heurísticos de solución; se valoran vías conocidas o vías producidas por la especulación, se emiten hipótesis sobre posible o posibles vías de solución y se valora la posibilidad de su ejecución; se determina si el problema se deriva de otro más general para valorar si la vía de solución utilizada en aquel es posible particularizarla en éste, o si el problema es una generalización de otros problemas particulares para valorar si con las vías o estrategias de solución en ellos aplicadas se puede llegar a una vía o estrategia general que sea posible aplicarla a la solución del mismo; se precisan las acciones que se van a ejecutar una vez encontrada la posible vía o estrategia de solución para de esta forma ordenarlas y elaborar un plan de solución.
3. **Experimentar las vías para solucionar el problema.** Para ello, se lleva a cabo el plan de solución para comprobar y fundamentar cada paso del mismo; se valora si éste ha sido correctamente elaborado, si le faltan pasos, si le sobran pasos, si los pasos están lógicamente ordenados, si es necesario perfeccionarlo; se revisa, reconsidera, perfecciona o rechaza la estrategia de trabajo seguida en la solución del problema, culminando este proceso cuando se llegue a lo exigido en el problema.

Como se puede observar, con esta operación se pretende que el estudiante vaya ejecutando la estrategia buscada y al mismo tiempo la vaya controlando y valorando pues, se considera que en muchas ocasiones él cree tener la vía de solución correcta y cuando la materializa se da cuenta que debe perfeccionarla, enriquecerla o rechazarla y buscar otra. Esto muchas veces entorpece el proceso de resolución del problema ya que el estudiante no está preparado para llevar a cabo ese control y esa valoración.

4. **Examinar el proceso de resolución del problema.** Para ello, se verifica si el resultado obtenido se corresponde o no con las condiciones y las exigencias del problema y se explica por qué; se reflexiona sobre las dificultades y limitaciones que se presentaron al resolver el problema y en cómo se pueden evitar en la resolución de futuros problemas; se reflexiona sobre los aspectos positivos que permitieron llegar al resultado deseado; se reflexiona sobre la estrategia de trabajo seguida y se valora su posible extrapolación a la resolución de problemas futuros con condiciones o exigencias análogas; se encuentran ideas rectoras que guíen el proceso de resolución de problemas en el futuro; se analiza la existencia de otras vías de solución seleccionando las más racionales; se determinan las causas que no permitieron seguir adelante con alguna estrategia de trabajo que para otros resultó exitosa.

Explicar estrategia de trabajo utilizada en el proceso de resolución del problema geométrico.

Operaciones:

1. **Reflexionar sobre las acciones ejecutadas en el proceso de solución.** Para ello, se recurre a los procesos del pensamiento para determinar las acciones que se utilizaron en la orientación en el problema,

en la búsqueda y experimentación de la estrategia de trabajo utilizada y en el examen del proceso de solución del problema.

2. **Ordenar lógicamente las acciones.** Para ello, se establece un orden lógico en cuanto a la derivación de una acción de otra o al completamiento de una acción con otra.
3. **Argumentar cómo y con qué objetivo concibió y ejecutó las acciones.** Para ello, se exponen o se declaran los argumentos convincentes que den razón de las situaciones o aspectos que condujeron a concebir las acciones, qué razonamientos conllevaron a ello y sobre qué base se determinó el fin a la que estaban destinadas.
4. **Precisar las consecuencias que se derivaron de la ejecución de las acciones en el proceso de solución.** Para ello, se descubren, encuentran, explicitan cuáles fueron los efectos que se produjeron al ejecutar las acciones, refiriéndose tanto a los positivos como a los negativos y resaltando los que impulsaron el proceso de solución del problema.
5. **Exponer de forma oral la aplicación de la estrategia en el proceso de solución.** Para ello, se expresa de forma coherente, ordenada, precisa, concreta, detallada todo el sistema de acciones que se concibió y ejecutó, así como todas las reflexiones, análisis, valoraciones y resultados a los que se llegaron en el proceso de resolución del problema.

Evaluar estrategias de trabajo utilizadas en el proceso de resolución del problema geométrico.

Operaciones:

1. **Analizar logicidad en la concepción y el orden de las acciones ejecutadas, así como los argumentos de cómo y con qué objetivo las concibió y ejecutó.** Para ello, se analiza si las acciones que se ejecutaron están en un orden lógico, es decir, si una se deriva de la otra o una complementa a la otra, si los argumentos son lo suficientemente convincentes y si se declararon realmente todas las razones por las que se concibieron y ejecutaron esas acciones.
2. **Revisar si son lógicas y correctas las consecuencias derivadas de la ejecución de las acciones en el proceso de solución.** Para ello, se verifica, comprueba, valora si realmente los efectos provocados al aplicar las acciones fueron inferidos lógicamente o si hay falta o insuficiente relación de las acciones con dichos efectos.
3. **Valorar la efectividad, objetividad y racionalidad de las acciones,** entendiendo por efectividad la obtención de un resultado positivo cuando se aplica una acción y que sirve de impulso para seguir adelante con la resolución del problema; por objetividad la adecuación y correspondencia de la acción con el resultado que se pretende obtener; por racionalidad la suficiencia de las acciones concebidas para resolver el problema, es decir, tener en cuenta que con las acciones concebidas se resolvió el problema, que no hubo acciones innecesarias o que faltaron acciones.
4. **Plantear preguntas para la reflexión, la polémica o discusión sobre la estrategia utilizada.** Para ello, se plantean interrogantes para reflexionar, polemizar o discutir sobre diferentes puntos de vista en cuanto a la estrategia utilizada en la resolución del problema, a las acciones concebidas y ejecutadas, al plan elaborado, a los razonamientos y valoraciones realizados, a las dificultades detectadas en la aplicación de la estrategia, a los argumentos dados, o para comprobar que el estudiante sabe conscientemente lo que hizo.
5. **Valorar respuestas a las preguntas planteadas en cuanto a logicidad, concreción y objetividad,** entendiendo por logicidad de la respuesta la explicación, argumentación, fundamentación lógica de los criterios, posiciones, puntos de vista del estudiante; por concreción el poder de síntesis en la respuesta dada y por objetividad la concentración en la cuestión que se pregunta, es decir, no divagar en otras cuestiones que no tengan nada que ver con la pregunta planteada.
6. **Emitir juicio de valor donde se corresponda lo cualitativo con lo cuantitativo,** lo que significa dar una puntuación, en el caso de que el estudiante evalúe a otros, o darse una puntuación, en el caso que se autoevalúe, en correspondencia con la calidad de las explicaciones, valoraciones, respuestas a las preguntas planteadas relacionadas con la estrategia de trabajo utilizada en la resolución del problema.
7. **Argumentar el juicio de valor emitido,** lo que significa expresar conscientemente las dificultades, limitaciones y los aspectos positivos que se manifestaron en el proceso de solución del problema que justifiquen la puntuación dada.

Diseñar actividades para enseñar a resolver problemas geométricos.

Este diseño se hará sobre la base de las estrategias de trabajo utilizadas en el proceso de resolución de los problemas geométricos y de la experiencia que vayan adquiriendo los estudiantes en la ejecución de su componente laboral responsable.

Operaciones:

1. **Precisar, teniendo en cuenta las estrategias de trabajo utilizadas en el proceso de resolución de los problemas y el tipo de problema que se va a enseñar, las acciones esenciales a cuya ejecución debe conducirse al discente para que aprenda a resolver el problema.** Para ello, se reflexiona cómo se resolvió el problema para determinar las acciones que se ejecutaron para orientarse en el problema, para buscar y experimentar la vía de solución y para examinar el proceso de solución del mismo y precisar, de acuerdo a las explicaciones y las evaluaciones que se hicieron de las estrategias utilizadas en la resolución del mismo, las acciones esenciales.
2. **Planificar, a partir de las acciones esenciales precisadas, las diversas actividades que deben orientarse al discente para que ejecuten dichas acciones.** Para ello, se seleccionan los procedimientos heurísticos de solución que se van a utilizar y a partir de ello se concibe el sistema de tareas o de preguntas que propicien que el estudiante ejecute las acciones que le permitan resolver el problema.
3. **Pronosticar las posibles actividades que se espera que realicen los discentes a partir de las actividades planificadas que deben orientarse para la ejecución de las acciones esenciales que lo conduzcan a resolver el problema.** Para ello, se analizan las actividades planificadas y se determinan todas las posibles actividades que pueden desarrollar los discentes cuando se le orienta alguna tarea o se le plantea alguna pregunta.
4. **Comprobar que las actividades que se planificaron orientarse a los discentes conducen a éstos de manera eficiente a la ejecución de las acciones esenciales para resolver el problema.** Para ello, se verifica que las actividades pronosticadas a partir del sistema de tareas y/o preguntas que se le orientan al discente se van a corresponder con las acciones que éste debe ejecutar para orientarse en el problema, buscar y experimentar la vía de solución y examinar el proceso de solución del problema.

Variante metodológica para el desarrollo del sistema de habilidades profesionales de la disciplina Geometría.

La variante se elabora teniendo en cuenta: los presupuestos teóricos de los enfoques de la didáctica de una enseñanza y un aprendizaje desarrollador y de la enseñanza basada en la resolución de problemas. La misma consta de cuatro: etapa de diseño de las asignaturas; etapa de diagnóstico del estado actual y potencial de los estudiantes; etapa de planificación y ejecución del proceso de desarrollo de las habilidades en las asignaturas de la disciplina y etapa de evaluación de dicho proceso.

I ETAPA: Diseño de las asignaturas.

Para ello se debe:

- 1.1 Determinar los problemas geométricos que van a ser objetos de enseñanza y de aprendizaje en la asignatura.
- 1.2 Precisar, teniendo en cuenta los problemas geométricos determinados, los objetivos formativos de las asignaturas que se derivan de los objetivos formativos de la disciplina.
- 1.3 Precisar, a partir de los objetivos formativos de las asignaturas, el sistema de conocimientos de las mismas.
- 1.4 Determinar, de acuerdo a los objetivos, al sistema de conocimientos, a los problemas geométricos de las asignaturas y a las operaciones que deben ejecutar los estudiantes para el desarrollo de las habilidades profesionales generalizadas, los conocimientos y habilidades previas que servirán de base para ello.

II ETAPA: Diagnóstico del estado actual y potencial de los estudiantes.

Elaborar y aplicar el diagnóstico del estado actual y potencial del estudiante utilizando para ello las siguientes formas:

- Diagnóstico de exploración individual. El mismo se divide en dos fases:

Fase 1: Prueba exploratoria de reproducción de los conocimientos y habilidades antecedentes. Ésta consta de dos momentos: el escrito y el oral. En el momento escrito el estudiante resuelve o trata de resolver las tareas planteadas de carácter reproductivo. Evidentemente este momento no es suficiente para constatar el nivel de dominio de los conocimientos y el nivel de formación de las habilidades, puesto que puede haber tareas que el estudiante resuelva mecánicamente y otras que no resuelva aun poseyendo los contenidos necesarios por cuestiones de estado de ánimo, motivación, interés, no comprensión de la tarea, etcétera. Por ello, es necesario el momento oral, donde el profesor creando un ambiente de confianza, respeto y de ayuda anima al estudiante a que explique cómo procedió en las tareas que resolvió y por qué motivo o causa no resolvió otras, alentándolo a ejecutarlas si es necesario con ayuda heurística; en este momento el profesor tendrá muchos más elementos para descubrir mejor el estado tanto cognitivo como afectivo del estudiante, puede adentrarse mejor en las dificultades, limitaciones y potencialidades del mismo. Se aclara, que primero es dejar que el

estudiante resuelva o intente resolver por escrito las tareas y ya cuando el profesor lo decida se pasa al momento oral.

Fase 2: Prueba exploratoria de producción de los conocimientos y habilidades antecedentes, la que consta de dos momentos: el de resolución de problemas de forma individual en el que al estudiante se le presentan varios problemas para que con los conocimientos y habilidades previos los resuelva o intente resolverlos por escrito; y el momento de discusión de los problemas, que es el intercambio entre el profesor y el estudiante donde este último explica al primero cómo resolvió o intentó resolver los problemas, el profesor realiza preguntas para comprobar cómo el estudiante reflexiona sobre el proceso de solución de los problemas e investigar las causas por las cuales no resolvió un determinado problema. Ello permitirá que el profesor se adentre mucho más en las dificultades, limitaciones y potencialidades que tiene el estudiante para enfrentarse al proceso de solución de problemas. Al igual que en la fase anterior debe dejarse al estudiante que individualmente por un tiempo determinado se enfrente a la resolución de los problemas y cuando el profesor lo estime conveniente se pasa al momento de la discusión.

En estas dos fases del diagnóstico de exploración individual el profesor debe estar muy atento al trabajo individual de sus estudiantes, de aquellos que por su alto o mediano rendimiento terminan en un tiempo más o menos corto para decidir el paso rápido al próximo momento y de aquellos que por su bajo o muy bajo rendimiento realizan algunas tareas y no continúan trabajando para decidir a tiempo el paso al momento oral o de discusión.

Es muy conveniente que en esta forma del diagnóstico intervenga el colectivo de profesores de la disciplina Geometría para hacerlo más ágil y menos agotador tanto para los profesores como para los estudiantes; además, porque todos los profesores deben sentirse comprometidos con la necesidad de la elevación de la calidad del profesional que se formará. Con esto se quiere defender la posición de que el diagnóstico no debe ser responsabilidad de un profesor aislado del colectivo de disciplina, sino del colectivo en su conjunto.

- Diagnóstico de exploración colectiva. El mismo se realizará luego de efectuado y procesado el diagnóstico de exploración individual y se implementará a través del planteamiento de tareas tanto de reproducción como de producción de los contenidos antecedentes a equipos de trabajo, que ya pueden estar equilibrados gracias a los resultados de la forma anterior de diagnóstico. Éste consta de tres momentos: el momento de realización de las tareas planteadas a cada equipo, donde los miembros se ocupan en conjunto de la resolución de los ejercicios y problemas; el momento de discusión de las tareas realizadas, donde se establece el intercambio de preguntas entre el profesor y el equipo para detectar las dificultades, limitaciones y potencialidades de los estudiantes para trabajar en colectivo, aclarando que las tareas sean diferentes para cada equipo, evitando así la copia de las respuestas de un equipo por otro; y el momento de discusión colectiva, donde se establece el intercambio entre los equipos con el objetivo de constatar el nivel de crítica, de análisis, de valoración, de evaluación que realiza un equipo de las tareas realizadas por otros y que es de vital importancia para el desarrollo de las habilidades profesionales en las asignaturas.

En el intercambio equipo – profesor, el profesor realiza preguntas a todos los miembros del equipo para constatar el nivel de participación de cada uno de ellos en la ejecución de las tareas, el nivel de organización entre sus miembros en la distribución de las tareas, el nivel de ayuda que se establece entre ellos, así como manifestaciones de individualismo o de acomodamiento de algunos de los miembros del equipo. En el intercambio equipo – equipo el profesor orienta la exposición oral de las tareas realizadas por un equipo para que los otros equipos las valoren, analicen, evalúen, critiquen. Esto se hará con cada equipo, lo que permitirá detectar en qué dirección se tendrá que trabajar para elevar el nivel de oponencia del colectivo de estudiantes, para perfeccionar sus formas de realizar los análisis, valoraciones, críticas, evaluaciones, para perfeccionar las formas en que el colectivo de estudiantes defiende sus posiciones, puntos de vista, criterios, etcétera.

Estas formas de diagnóstico serán la expresión de la primera de las etapas metodológicas para el desarrollo del sistema de habilidades profesionales de la disciplina, la etapa de exploración, en la que el papel del colectivo de profesores de la disciplina Geometría es esencial y protagónico. En esta etapa se delimitan todos los aspectos tanto positivos como negativos sobre los cuales se debe trabajar con mayor énfasis para el desarrollo de las habilidades en la asignatura. Aunque la misma debe estar presente en todo el proceso de formación y desarrollo del sistema de habilidades de la disciplina, en este proceso de diagnóstico ella cobra mayor fuerza.

III ETAPA: Planificación y ejecución del proceso de desarrollo del sistema de habilidades profesionales en las asignaturas.

Para ello, se debe:

3.1 Seleccionar y/o elaborar un sistema de problemas para la asignatura teniendo en cuenta sus objetivos, contenidos, los problemas geométricos que van a ser objeto de resolución y los resultados del diagnóstico. Los mismos deberán tener las siguientes características:

- Deben ser globalizadores, es decir, deben abarcar todo el contenido y el campo de problemas que se va a asimilar en la asignatura.

- Deben ser problemas a través de los cuales el estudiante, mediante su proceso de solución o intento de solución de manera individual o colectiva, tome consciencia de los contenidos previos que necesita recordar y reactivar para resolver los mismos, que experimente resistencia en el proceso de resolución de estos y pueda determinar de esa forma sus dificultades, limitaciones y potencialidades en sus conocimientos y habilidades para enfrentarse a la resolución de problemas.
- Deben seleccionarse y/o elaborarse de forma tal que, a medida que los estudiantes vayan asimilando el contenido de las clases, los sistemas de clases y de los temas de las asignaturas, experimenten el avance en el proceso de resolución de dichos problemas o el éxito en la resolución de algunos de ellos, pero que también vuelvan a experimentar resistencia en la resolución de otros porque detectan que los contenidos que poseen y han adquirido aun no son suficientes para el éxito, contribuyéndose así a que el estudiante cree su propia situación problémica, se motive por el nuevo contenido, se plantee el problema docente que debe resolver en lo adelante y se oriente hacia los objetivos.
- Deben tenerse en cuenta problemas que se puedan resolver con los contenidos previos que el estudiante posee como vía para la reactivación de estos, problemas que él pueda ir resolviendo a medida que vaya asimilando el contenido de una clase, un sistema de clases y un tema, así como otros que sólo los resuelva después de haber asimilado todo contenido de la asignatura.

3.2 Planificar al inicio de las asignaturas clases de presentación del sistema de problemas seleccionado y/o elaborado.

Estas se planificarán y ejecutarán con el objetivo de que los estudiantes sobre la base del enfrentamiento al proceso de resolución de estos problemas, ya sea de forma individual y/o colectiva, tomen conciencia sobre qué contenidos previos, presentes en dicho proceso, deben recordar y reactivar, determinen sus dificultades, limitaciones y potencialidades en lo referente a esos contenidos y a la resolución de problemas, tengan una visión global del contenido nuevo o desconocido al que se enfrentarán, puedan emitir hipótesis o especular sobre posibles vías de solución aunque no las puedan ejecutar o que para su ejecución necesitan de la ampliación, profundización, perfeccionamiento de los conocimientos y habilidades que poseen. En estas clases se deberán tener presentes dos momentos: el de enfrentamiento independiente, individual o por equipos, a la resolución o intento de resolución de esos ejercicios y problemas y el de discusión de los mismos. En este último, se debe propiciar que los estudiantes expongan sus criterios, valoraciones, puntos de vista con relación al proceso de resolución de los mismos, expliquen las posibles vías o estrategias de trabajo utilizadas, especuladas o hipotetizadas para que sean evaluadas y valoradas en el seno de todo el colectivo de estudiantes.

En estas clases el profesor debe servir de facilitador y orientador de las literaturas, bibliografías necesarias en las que los estudiantes puedan consultar sobre los conocimientos y habilidades previos que deben reactivar o en los cuales presenten dificultades en el curso del proceso de resolución de determinados problemas. En las mismas se contribuye a que el estudiante se motive por el contenido de la asignatura que va a recibir y se oriente hacia los objetivos de la misma.

Todo lo explicado se va a corresponder con la segunda etapa metodológica de formación de las habilidades, la etapa de toma de conciencia donde se incluye la reactivación de los contenidos previos, la primera aproximación al nuevo contenido que va a ser objeto de asimilación, la motivación hacia ese contenido y la orientación hacia los objetivos. Esta etapa no es exclusiva de este tipo de clases pues, al igual que la etapa metodológica anterior, debe estar presente en todo el proceso de formación y desarrollo del sistema de habilidades de la disciplina, aunque en este tipo de clases se hace mucho más predominante.

3.3 Precisar en cada uno de los temas:

- Los objetivos y contenidos que se derivan de los objetivos y de los contenidos de las asignaturas.
- Los problemas del sistema de problemas que permitan, a través de la búsqueda de las vías de solución de los mismos, guiar el proceso de búsqueda y construcción de los nuevos contenidos de los temas, teniendo en cuenta las dificultades, limitaciones y potencialidades detectadas en las clases de presentación del sistema de problemas y los resultados del diagnóstico.

3.4 Planificar y ejecutar en los temas:

- Clases teórico – prácticas, en las que sobre la base de determinadas dificultades y limitaciones encontradas en el proceso de resolución del sistema de problemas se creen las situaciones problémicas por los propios estudiantes y se precisen los problemas docentes que creen el clima favorable para que estos acometan el proceso de búsqueda y construcción del nuevo contenido, en el cual pueden manifestarse las siguientes variantes:
 - los estudiantes con los contenidos previos que poseen no pueden construir de forma independiente determinado contenido. En este caso, se sugiere el método de búsqueda parcial a través de la resolución de tareas de poca complejidad, en calidad de ejercicios y problemas sencillos, mediante los cuales el profesor guíe el pensamiento y el accionar de los estudiantes hacia la búsqueda de ese contenido o el empleo de la consulta o búsqueda bibliográfica por equipos o individualmente para hacer valoraciones, análisis de situaciones, generalizaciones, resúmenes y llegar a conclusiones.

- Los estudiantes con los contenidos previos que poseen pueden construir de forma independiente el nuevo contenido. En este caso, este proceso se produce a través de la resolución de problemas, ya sea de forma individual o por equipos en dependencia del nivel de exigencia de los problemas y de los resultados obtenidos en el diagnóstico.

En una misma clase teórico – práctica se utilizan ambas variantes atendiendo a las diferencias individuales de los estudiantes y a los resultados obtenidos del diagnóstico; además, porque en estas clases un concepto, un teorema guardan estrecha relación con otros conceptos y teoremas, por lo que si para determinados conceptos o teoremas se utiliza la primera variante, la segunda debe ser utilizada para los conceptos y teoremas que se deriven de estos. Por ejemplo, en la asignatura Geometría I se definen los conceptos de cuadrilátero y cuadrilátero convexo utilizando el método de búsqueda parcial o la consulta o búsqueda bibliográfica y mediante la resolución de problemas el estudiante, independientemente, puede definir los conceptos de paralelogramo, trapecio, rectángulo, cuadrado y rombo y también buscar, deducir, demostrar todas las propiedades relacionadas con éstos.

En estas clases se conjugan dos momentos: el teórico y el práctico. El teórico es el momento de búsqueda y construcción del nuevo contenido y el práctico, que aunque no está desligado del teórico requiere además, de una ejercitación variada y de la ejemplificación a través de la cual el estudiante fije los conceptos, teoremas y conocimientos esenciales estudiados. En las mismas el profesor, mediante el intercambio, la discusión con los estudiantes del proceso de solución de los ejercicios y problemas, va orientando o mostrando las operaciones que se deben ejecutar para resolver problemas, para explicar y evaluar estrategias de trabajo seguidas en el proceso de solución de los mismos y para diseñar actividades para enseñar a resolver problemas.

Todos los elementos expuestos se corresponden con la tercera etapa metodológica en la formación y desarrollo del sistema de habilidades profesionales de la disciplina, la de preparación cognitivo – instrumental, ya que no sólo se prepara y orienta al estudiante en el conocimiento, sino también en la habilidad, en las operaciones que debe ejecutar. Aunque esta etapa no es exclusiva para estos tipos de clases, ya que está presente en todo el proceso de formación y desarrollo de habilidades, en estas es donde la misma se manifiesta con mayor fuerza.

En cada clase teórico – práctica se debe orientar como trabajo independiente un sistema de ejercicios con el objetivo de que el estudiante continúe, mediante la ejercitación, fijando los contenidos recibidos y sobre la base de estos recurrir a los problemas del sistema de problemas e intentar resolverlos para que experimente si ya con el contenido recibido los puede resolver total o parcialmente, hasta dónde puede avanzar en el proceso de resolución de los mismos, en qué momento se frena ese proceso y determine cuáles son las causas por las que no puede continuar. De esta forma vuelve a tomar conciencia de lo que le falta aun por aprender, lo que debe ser aprovechado en la próxima clase teórico - práctica como una nueva situación problemática a la que el estudiante llega por sí sólo y vuelva a plantearse y precisar el problema docente que guiará el proceso de búsqueda y construcción del nuevo contenido.

- **Clases de resolución de problemas.** Estas clases tienen como propósito la formación y desarrollo en el estudiante de la habilidad profesional generalizada: resolver problemas geométricos. En las mismas se tienen en cuenta las etapas metodológicas de entrenamiento y de desarrollo. La etapa de entrenamiento se manifiesta en el despliegue de las operaciones para resolver problemas, de forma individual o colectiva, bajo la guía, orientación, ayuda, confrontación, intercambio, consulta con el profesor, la que se mantendrá hasta que el profesor en convenio con los estudiantes decida que estos están preparados para pasar a la otra etapa. La etapa de desarrollo consiste en la resolución de los problemas, de forma individual o colectiva, sin ayuda, sin orientación, sin consulta con el profesor hasta que se logre la verdadera independencia en cada individuo. En la etapa de entrenamiento los estudiantes de bajo o muy bajo rendimiento o algunos de mediano rendimiento deben apoyarse si es preciso en un sistema de indicaciones heurísticas que el profesor les proporciona por escrito, con la ayuda de las cuales estos se guían para resolver los problemas hasta que llegue el momento en que se independicen de ellas y pasen a la etapa de desarrollo. Debemos aclarar que en este tipo de clases no se descarta la posibilidad de que el profesor, ante determinado problema que ha creado serias dificultades en la mayoría de los estudiantes, intervenga dando aclaraciones generales o utilizando la conversación heurística, siempre que en ello tenga en cuenta el despliegue de las operaciones que se deben ejecutar.
- **Clases de discusión del proceso de resolución de problemas.** Las mismas están destinadas a la formación de las habilidades profesionales generalizadas: explicar y evaluar las estrategias de trabajo utilizadas en el proceso de resolución de problemas. En estas al igual que en las clases de resolución de problemas se deben tener en cuenta las etapas metodológicas de entrenamiento y de desarrollo. En el caso de la habilidad de explicar estrategias de trabajo estas etapas tienen las mismas características que en las clases de resolución de problemas. En el caso de la habilidad de evaluar estrategias de trabajo la forma individual se utiliza para que el estudiante aprenda a autoevaluarse y la forma grupal para que un grupo de estudiantes aprenda a evaluar las estrategias utilizadas por otros. De manera similar que en las clases de resolución de problemas cuando el profesor lo estime necesario y conveniente puede intervenir

haciendo aclaraciones generales o utilizando la conversación heurística siempre que muestre el despliegue de las operaciones para el desarrollo de dichas habilidades.

Las clases de resolución y discusión de problemas deben planificarse de manera alternada ya que de esta forma en la clase de discusión de problemas el estudiante reflexiona sobre las dificultades y limitaciones que se le presentaron y señalaron para tratar de corregirlas, erradicarlas en las próximas clases de resolución y discusión de problemas, lo que significa que en las clases de discusión se propicia que los estudiantes autocontrolen el desarrollo de sus habilidades y que el profesor controle el nivel de desarrollo de éstas en los estudiantes. Todo esto se corresponde con la etapa metodológica de control y retroalimentación en la formación y desarrollo del sistema de habilidades. La misma está presente en todo momento, pero en estas clases ella cobra gran fuerza. Con esta etapa se contribuye que el estudiante tome conciencia de la necesidad de esforzarse por alcanzar un nivel óptimo de desarrollo de sus habilidades puesto que ya no es el profesor el único que lo evalúa, sino que él mismo se evalúa y también es evaluado por sus propios compañeros de clase, es decir, su compromiso no es con una sola persona sino con todo un colectivo; reconozca dónde reforzar su estudio, sus acciones, lo que significa que sea el protagonista de su propio aprendizaje. En el caso del profesor, esta etapa le permite darle seguimiento al diagnóstico inicial, hacerlo sistemático, continuo, ir perfeccionando sus métodos de trabajo, sus procedimientos y su papel de guía del proceso de enseñanza - aprendizaje para lograr el resultado deseado en sus estudiantes.

- **Clases de profesionalización.** Las mismas tienen como propósito el desarrollo de la habilidad profesional generalizada: diseñar actividades para enseñar a resolver problemas. En estas, al igual que en las clases de discusión de problemas, se tendrán en cuenta las etapas de entrenamiento, de desarrollo y de control y retroalimentación. Las etapas de entrenamiento y de desarrollo se ejecutarán de forma individual y grupal. La forma grupal tendrá como objetivo que el estudiante se vaya entrenando en el trabajo metodológico en colectivo que se desarrolla en la escuela ya que va a estar insertado en la misma desde el primer semestre del primer año de la carrera. Éstas clases constarán de dos momentos: el momento de elaboración individual o por equipos del diseño de las actividades para enseñar a resolver determinados problemas y el momento de discusión de ese diseño en el que los estudiantes y el profesor hacen valoraciones, emiten criterios, señalan los aspectos positivos y negativos acerca del mismo y proponen recomendaciones para mejorarlo, a través de lo cual se manifiesta la etapa de control y retroalimentación. Estos momentos deben constituir para los estudiantes una preparación metodológica seria, fructífera y útil para las actividades que desarrollan y van a desarrollar en el componente laboral responsable.

IV ETAPA: Evaluación del proceso de desarrollo del sistema de habilidades profesionales.

Esta etapa permite ir controlando sistemáticamente el avance del estudiante hacia el nivel de salida o estado deseado en el desarrollo del sistema de habilidades profesionales de la disciplina a partir del nivel de entrada o estado real. Para ello, se deben utilizar las evaluaciones sistemáticas, parciales y finales tanto orales, escritas como la combinando de éstas, las autoevaluaciones que realicen los estudiantes de sus dificultades y potencialidades para el desarrollo de las habilidades y las evaluaciones que realizan los estudiantes al trabajo realizado por otros. Esta evaluación tiene un carácter sistemático y continuo el cual permite detectar a tiempo las dificultades que presenten los estudiantes y trazar un plan correctivo para su erradicación, así como constatar las potencialidades en los mismos que le permitan enfrentarse a situaciones nuevas y de mayor exigencia.

Con la elaboración de esta variante metodológica se pretende que el profesor se convierta en un promotor del desarrollo de la independencia cognoscitiva y del protagonismo de sus estudiantes en la búsqueda y construcción del contenido, en el descubrimiento y toma de conciencia de sus propias dificultades, limitaciones y potencialidades, debe promover un ambiente de confianza, de respeto, de ayuda en el que el estudiante emita sus valoraciones, sus reflexiones, sus dudas, sus propias opiniones, sin temor a ser "atacado", haga preguntas sin ningún tipo de temor. También, se pretende que el estudiante se convierta en un buscador y constructor activo de sus propios conocimientos y habilidades, en un autocontrolador y autoevaluador activo de sus acciones, como un controlador y evaluador de las acciones de los otros estudiantes de clase; que el estudiante sienta seguridad para exponer y expresar sus criterios, valoraciones, opiniones, dudas, para criticar, sin temor, las acciones suyas y de sus compañeros.

Ejemplificación de los aspectos principales de la variante metodológica, a través del tema dos de la asignatura Geometría IV.

En este epígrafe se ejemplifican y se precisan las orientaciones didáctico – metodológicas de los aspectos principales de las etapas I y II de la variante metodológica propuesta a través del tema dos de la asignatura Geometría IV, la cual se imparte en el segundo año de la carrera, segundo semestre. En esta asignatura se trabajan los conocimientos relacionados con la teoría sobre Elementos del Álgebra Vectorial y Geometría Analítica del plano y del espacio, luego de haberse asimilado los contenidos relacionados con la teoría sobre Geometría Sintética del plano y del espacio en las asignaturas antecedentes.

Problemas geométricos cuyo proceso de resolución será objeto de enseñanza y aprendizaje en esta asignatura:

Definición de conceptos. Demostración de teoremas. Deducción de teoremas. Problemas de cálculo. Problemas de demostración. Problemas de determinación. Problemas vinculados a otras ciencias y a la práctica social.

Como objetivos formativos de la asignatura Geometría IV se precisan los siguientes:

- Resolver, a un nivel productivo, problemas geométricos de definición de conceptos, demostración y deducción de teoremas, de cálculo, de demostración, de determinación, vinculados a otras ciencias y a la práctica social utilizando los conceptos, teoremas y procedimientos relacionados con las teorías: Elementos del Álgebra Vectorial y Geometría Analítica de la recta en el plano y el espacio y del plano, que contribuya al desarrollo del pensamiento lógico – deductivo, creativo con fantasía y geométrico – espacial del estudiante.
- Explicar, a un nivel productivo, estrategias de trabajo utilizadas en el proceso de resolución de problemas geométricos de definición de conceptos, demostración y deducción de teoremas, de cálculo, de demostración, de determinación, vinculados a otras ciencias y a la práctica social en los que se utilizan los conceptos, teoremas y procedimientos relacionados con las teorías: Elementos del Álgebra Vectorial y Geometría Analítica de la recta en el plano y el espacio y del plano, que contribuya al dominio, en el estudiante, del vocabulario técnico de la ciencia Matemática y de la lengua materna, a tener confianza en sí mismo, a tener conocimiento de su cognición y de su propia ejecución, así como a la expresión de sus argumentos, valoraciones, reflexiones sobre su accionar para resolver los problemas.
- Evaluar, a un nivel productivo, estrategias de trabajo utilizadas en el proceso de resolución de problemas geométricos de definición de conceptos, demostración y deducción de teoremas, de cálculo, de demostración, de determinación, vinculados a otras ciencias y a la práctica social en los que se utilizan los conceptos, teoremas y procedimientos relacionados con las teorías: Elementos del Álgebra Vectorial y Geometría Analítica de la recta en el plano y el espacio y del plano, que contribuya a la defensa, por el estudiante, de sus puntos de vista, opiniones, reflexiones, valoraciones, críticas y autocríticas, al análisis y valoración de manera positiva de las críticas hacia su accionar en la resolución de los problemas, de su capacidad para convencer a sus compañeros y convencerse a sí mismo, a partir de argumentos sólidos, de las dificultades y potencialidades para resolver problemas y de la puntuación obtenida al ser evaluado o que emite al evaluar a los demás.
- Diseñar, a un nivel productivo, actividades para enseñar a resolver problemas geométricos de definición de conceptos, demostración y deducción de teoremas, de cálculo, de demostración, de determinación, vinculados a otras ciencias y a la práctica social relacionados con los conceptos, teoremas y procedimientos de los contenidos de la Geometría Analítica de la recta en el plano de la asignatura Matemática en el preuniversitario, que contribuya al desarrollo de la capacidad del estudiante para obtener conocimientos empíricos y teóricos de la dirección del proceso de resolución de problemas a través de la ejecución de su componente laboral responsable, a incrementar su aptitud y actitud hacia la labor de la enseñanza de la resolución de problemas de la Matemática escolar y su responsabilidad y preocupación por el perfeccionamiento de la misma en pos de contribuir al desarrollo del pensamiento lógico del adolescente.

Sistema de habilidades:

- Resolver problemas geométricos.
- Explicar estrategias de trabajo utilizadas en el proceso de resolución de los problemas geométricos.
- Evaluar estrategias de trabajo utilizadas en el proceso de resolución de los problemas geométricos.
- Diseñar actividades para enseñar a resolver problemas geométricos.

Esta asignatura consta de 60 horas lectivas distribuidas en 20 horas para el tema uno, 38 horas para el tema dos y dos horas para evaluación parcial.

Conocimientos y habilidades previas que deben poseer los estudiantes para enfrentarse a la asimilación del contenido de la asignatura

En el caso de esta asignatura ya el estudiante desde la enseñanza media, en el primer año de la carrera y en el primer semestre del segundo año se ha enfrentado a la resolución de problemas geométricos y de una manera u otra ha explicado y evaluado estrategias de trabajo utilizadas en el proceso de solución de los mismos, por lo que, en el caso de que el profesor que imparte esta asignatura no haya impartido la que le antecede, será importante la entrega pedagógica para el seguimiento del diagnóstico realizado en el primer año y en el primer semestre de segundo año y, en el caso de que éste venga transitando con los estudiantes,

le seguirá dando continuidad al trabajo que viene desarrollando con dicho diagnóstico en cuanto a las dificultades y potencialidades que éstos presentan en la formación y desarrollo del sistema de habilidades profesionales de la disciplina.

En cuanto a los contenidos antecedentes que deben poseer los estudiantes para la formación y desarrollo del sistema de habilidades de la disciplina en esta asignatura, donde se comienza el estudio de la Geometría Analítica, tenemos los siguientes: contenidos sobre la Geometría Sintética del plano y del espacio que han asimilado durante su tránsito por la enseñanza media, por el primer año y primer semestre del segundo año de la carrera; contenidos sobre las funciones lineales que recibieron en la enseñanza media y en el primer año de la carrera en la asignatura de Álgebra II; contenidos sobre resolución de sistemas de ecuaciones lineales recibidos en la enseñanza media y en la asignatura Álgebra III; contenidos sobre las definiciones y propiedades de la dependencia e independencia lineales de vectores, la definición de espacio vectorial y de matriz cambio de base recibidos en la asignatura Álgebra III; contenidos sobre la Geometría Analítica de la recta en el plano asimilados en el grado 11 del preuniversitario.

Teniendo en cuenta la continuidad que se hace del diagnóstico desde el primer año de la carrera y de que hay contenidos que los estudiantes han recibido anteriormente tanto en las asignaturas Geometría I, II, III como en las asignaturas Álgebra II y III, se van a conocer de antemano las dificultades y potencialidades que presentan los estudiantes con relación a los mismos. Debido a esto, para completar la etapa exploratoria, en nuestro caso, es necesario constatar el nivel de asimilación de los contenidos relacionados con la Geometría Analítica de la recta en el plano, recibidos en el grado 11 del preuniversitario. Por tanto, para la elaboración del diagnóstico se propone que se tengan en cuenta los siguientes conocimientos y habilidades:

Conocimientos :

Pendiente de una recta en el plano. Punto medio de un segmento. Distancia entre dos puntos. Ecuación cartesiana de la recta en el plano. Coordenadas de un vector dados su origen y extremo. Módulo de un vector. Suma, diferencia de vectores. Multiplicación de un vector por un número real. Igualdad de vectores. Producto escalar de vectores. Posiciones relativas entre dos rectas en el plano. Ecuación paramétrica de la recta. Distancia de un punto a una recta.

Habilidades :

Calcular pendiente de una recta dados dos puntos o el ángulo de inclinación de ésta con respecto al semieje OX positivo. Determinar posición relativa de dos rectas en el plano. Escribir ecuación cartesiana de la recta. Representar puntos y rectas en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en el plano. Calcular con vectores (sumar, restar, multiplicar un vector por un número real y producto escalar). Representar gráficamente la suma, diferencia y multiplicación de un vector por un número real. Escribir ecuación paramétrica de la recta. Transformar la ecuación cartesiana de la recta en su ecuación paramétrica y viceversa. Calcular ángulo entre vectores y entre rectas. Hallar punto de intersección entre rectas. Calcular áreas y perímetros de figuras planas. Demostrar propiedades geométricas de figuras planas. Demostrar la clasificación o tipología de figuras planas. Determinar la igualdad de vectores.

Con estos conocimientos y habilidades se pretende la actualización, por parte del profesor, del estado actual y potencial de los estudiantes con relación a los mismos, lo que deberá tener en cuenta en la etapa II para el desarrollo del sistema de habilidades profesionales de la disciplina en cuanto a la selección y/o elaboración del sistema de problemas de la asignatura.

Pasando a ese segundo momento se selecciona y elabora el siguiente sistema de problemas para la asignatura Geometría IV.

Sistema de problemas

1. En el paralelogramo $ABCD$, $\vec{AB}(2;3)$ y $\vec{BC}(-6;1)$. Halla el ángulo formado por sus diagonales.
2. Los vértices de un triángulo coinciden con los puntos de intersección de las rectas r_1 , r_2 y r_3 dadas las dos primeras por sus ecuaciones cartesianas y la tercera por su ecuación paramétrica.

$$r_1 : y = 4x - 7; \quad r_2 : x - 3y + 1 = 0; \quad r_3 : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

- a) Calcula su área y perímetro.
 - b) Halla las coordenadas del ortocentro y el baricentro.
 - c) Escribe la ecuación paramétrica de la recta que pasa por un punto del lado contenido en la recta r_1 , que lo divide en la razón 3:5, y es paralela al lado contenido en la recta r_2 .
3. Demuestra que el cuadrilátero que se obtiene al unir los puntos medios del cuadrilátero convexo $ABCD$ con $A(-1;-2)$, $B(6;-6)$, $C(5;2)$ y $D(-2;6)$ es un rectángulo.

4. En un cuadrilátero $ABCD$, $\vec{AB}(2;6;-2)$; $\vec{BC}(-5;-3;1)$; $\vec{DC}(1;6;-2)$ y $\vec{AD}(-6;-3;1)$. Halla el ángulo formado por sus diagonales.
5. Sean $A(-3;1;1)$, $B(-2;3;-1)$, $C(-2;-7;2)$ y $D(-3;5;4)$ los vértices de un cuadrilátero convexo en el espacio.
- Representalo en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares.
 - Demuestre que es un paralelogramo.
 - Calcula su área y perímetro.
 - Escribe la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto que divide a la diagonal \overline{AC} en la razón 2:3 y es perpendicular al lado \overline{AB} .
6. Se tiene un prisma oblicuo $ABCDEFGH$, cuya base es el paralelogramo $ABCD$. Se conoce que $\vec{AB}(2;1;-7)$; $\vec{AD}(2;3;1)$ y $\vec{AE}(5;3;-3)$.
- Calcula el área total y el volumen del prisma.
 - Halla la amplitud del ángulo que se forma entre la cara $ABFE$ y la base $ABCD$ del prisma.
7. De la base triangular ABC de una pirámide $SABC$ se conoce que $A(1;-3;2)$ y es perpendicular a la cara SAC , que está en el plano de ecuación general $3x-2y+4z-5=0$. El vértice $S(5;-3;6)$ y la arista \overline{SB} está contenida en la recta de ecuación canónica $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-5}$.

- Halla la longitud de la altura de la pirámide.
 - ¿Qué amplitud tiene el ángulo que forma la arista \overline{SB} con el plano de la pirámide?
8. Representar el prisma de base triangular delimitado por los planos $x+2y-4=0$; $x-4y-4=0$; $z-5=0$ y el plano coordenado YZ . Calcular su volumen y área total.

9. Se dan las rectas:

$$r_1 : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases} \quad \text{y las matrices}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

Deducir las condiciones necesarias y suficientes para que las rectas:

- Se corten.
- Sean alabeadas.
- Sean paralelas coincidentes.
- Sean paralelas coincidentes.

10. Demuestre el siguiente teorema:

Si α y β son dos planos paralelos de ecuaciones $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, respectivamente, entonces, la distancia $d(\alpha, \beta)$ entre ambos planos se determina por la fórmula:

$$d(\alpha, \beta) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

11. Una estación de radar detecta un objetivo enemigo en los puntos $P_1(24;5;7)$ y $P_2(21;3;6,5)$. El objetivo enemigo se mueve en un derrotero rectilíneo. Un cohete defensivo de las FAR debe salir del punto $P_0(8;-1;1)$ y alcanzar el objetivo en una trayectoria rectilínea. La dirección del cohete está determinada por el vector $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. ¿En qué punto el cohete alcanza el objetivo?

12. Una unidad de las FAR parte del punto $A(2500;3600)$ y emprende una marcha por terrenos accidentados. Inicialmente se desplaza 2,5 kilómetros en dirección noroeste y posteriormente avanza 10 kilómetros en dirección norte. ¿Qué coordenadas tiene la nueva posición de la unidad?

13. La posición inicial del punto $M(x; y; z)$ en un movimiento rectilíneo uniforme es $M_0(20;-18;-32)$; la dirección del movimiento es opuesta a la del vector $\vec{s} = (3;-4;-12)$ y la velocidad $v = 26$. Hallar las ecuaciones del movimiento del punto M y hallar el punto con el que coincide en el tiempo $t = 3$.

14. La posición inicial del punto $M(x; y; z)$ en un movimiento rectilíneo uniforme, en dirección del vector $\vec{s} = (-1; 2; -2)$, es $M_0(11; -21; 20)$; la velocidad es $v = 12$. Determinar el tiempo que necesita el punto para recorrer un segmento de su trayectoria comprendido entre los planos paralelos: $2x + 3y + 5z - 41 = 0$ y $2x + 3y + 5z + 31 = 0$.

Con los problemas uno, dos, tres y doce se pretende que los estudiantes reactiven los contenidos sobre la Geometría Analítica del plano relativos a: las operaciones con vectores (suma, diferencia y producto escalar), sobre el opuesto y el módulo de un vector, el ángulo entre dos vectores, la distancia entre dos puntos, el punto de intersección entre dos rectas, la distancia de un punto a una recta, la perpendicularidad y paralelismo de rectas y vectores, las ecuaciones cartesianas y paramétricas de la recta, la representación de puntos en un sistema de coordenadas rectangulares en el plano y las coordenadas del punto medio de un segmento, que recibieron en el octavo grado de la enseñanza media. En el problema dos las limitaciones de los estudiantes estarán dadas en la determinación de las coordenadas de un punto que divide a un segmento en una razón dada. Con estos problemas también se pretende que el estudiante tome conciencia de sus limitaciones y potencialidades con respecto a estos contenidos. Con los restantes problemas se pretende que el estudiante, a partir de la reactivación de los contenidos presentes en los tres problemas anteriores, sea capaz de especular o emitir hipótesis sobre posibles vías para solucionar estos problemas, reflexionar sobre las limitaciones para resolverlos de acuerdo a esas vías, sobre el desconocimiento de los contenidos que necesita para ello e incluso intuir, por ejemplo, las fórmulas para el cálculo de la distancia entre dos puntos, el módulo de un vector, el ángulo entre dos vectores, las coordenadas de los vectores que resultan de la suma y diferencia de vectores, el producto escalar de dos vectores, las coordenadas del opuesto de un vector, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre vectores, etcétera. La veracidad de los aspectos intuitivos será objeto de discusión en las clases de presentación del sistema de problemas con el propósito de crear, en el estudiante, la necesidad de demostrarla.

Teniendo en cuenta el sistema de problemas elaborado se propone la planificación y ejecución de dos clases de presentación del mismo, una clase para el enfrentamiento, por equipos, a la resolución o intento de resolución de los problemas y otra para la discusión de la solución o intento de solución de los mismos. Al inicio de la primera clase se propone que el profesor oriente todo el trabajo que se ha de desplegar con la resolución o intento de resolución de los problemas del sistema dirigido a:

- Recordar y reactivar los contenidos previos que sobre la Geometría Analítica del plano se estudiaron en el grado 11.
- Determinar las dificultades y limitaciones que se presenten al resolver o intentar resolver los problemas.
- Investigar diferentes vías de solución.
- Especular, hipotetizar o intuir vías de solución a los problemas.
- Discutir las diferentes vías o posibles vías de solución de los problemas.
- Discutir sobre vías, procedimientos, fórmulas, métodos intuitivos por los estudiantes.
- Arribar a conclusiones sobre los contenidos previos que deben ser estudiados con profundidad y sobre los contenidos nuevos que serán objeto de asimilación en la asignatura (esto contribuye al aseguramiento del nivel de partida, a la motivación y a la orientación hacia los objetivos y contenidos de la asignatura).

Para ayudar a la reactivación de los contenidos previos el profesor debe orientar los estudiantes a la consulta del libro de texto de grado 11 u otra bibliografía afín en el desarrollo de estas clases con el propósito de que el estudiante de manera independiente o colectiva estudie estos contenidos, intercambie con el profesor u otros compañeros de clase sus dudas, reflexiones u opiniones acerca de los mismos y realice un resumen de los aspectos que estime importantes según sus necesidades cognitivas. Al finalizar estas clases deben quedar bien delimitados los contenidos previos que deben dominar los estudiantes y los contenidos nuevos que serán objeto de asimilación en la asignatura, debe quedar bien orientada la bibliografía en la que pueden buscar y estudiar de manera independiente los contenidos previos y nuevos.

Como la variante metodológica se implementó en el tema dos de la asignatura Geometría IV, cuyo contenido se refiere a la Geometría Analítica de la recta en el plano y el espacio y del plano, se tuvo que dedicar cuatro horas lectivas para las clases de presentación del sistema de problemas, por lo que del sistema de problemas de la asignatura, elaborado anteriormente, se seleccionaron los problemas tres, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece y catorce. Sobre el contenido de este tema hicimos referencia cuando precisamos el contenido de la asignatura. Para el tema que tiene un total de 40 horas, se propusieron: cuatro horas dedicadas a las clases de presentación del sistema de problemas, ocho horas a las clases teórico – prácticas, 10 horas a las clases de resolución de problemas, nueve horas a las clases de discusión de problemas y nueve horas a las clases de profesionalización. Como se puede observar, con la tipología de clases que se propone aumenta el número de horas dedicadas a las actividades prácticas con relación al programa actual y disminuye el número de horas dedicadas a las actividades teóricas, lo que no quiere decir que se descuide éste último aspecto, ya que en las actividades teóricas el estudiante recibe lo esencial en el conocimiento, es decir, los conceptos, teoremas y procedimientos esenciales; los conceptos, teoremas y procedimientos derivados los adquiere mediante la realización de las actividades prácticas o a través del estudio independiente.

Orientaciones didáctico – metodológicas

Desde el tema uno el estudiante conoce lo que es una base del espacio vectorial, una base ortogonal y ortonormal, por lo que al culminar dicho tema se sugiere que se oriente como trabajo independiente la búsqueda, en la bibliografía recomendada, de la definición de sistema de coordenadas cartesianas en el espacio, la definición de radio vector de un punto, la definición de coordenadas cartesianas rectangulares en el espacio, así como la representación de puntos en un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio, ya que los conocimientos y habilidades adquiridos le permiten asimilar estos contenidos de manera independiente. También se sugiere que se le oriente la resolución de ejercicios sobre la representación de puntos en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en el espacio, sobre la determinación de las proyecciones de un punto sobre los planos coordenados y sobre la determinación de las coordenadas de puntos en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares bajo determinadas condiciones geométricas. Este trabajo independiente se controlará en la primera clase teórico – práctica utilizando la técnica de ponencia – oponencia, por lo que el profesor explicará y orientará como ésta se desarrollará. Sobre la base de lo estudiado se les orienta, además, intentar la resolución de los problemas del sistema de problemas donde se apliquen esos conocimientos. Todo ello, contribuirá a que el estudiante se convierta en sujeto de su propio aprendizaje y en un buscador activo de los conocimientos.

La clase teórico – práctica número uno se comenzará con el análisis, discusión u control del trabajo independiente asignado en la clase de presentación del sistema de problemas con el objetivo de precisar en aquellos aspectos donde aún pueda quedar dudas o en los que el estudiante confrontó dificultades, de lograr el intercambio de opiniones, criterios, valoraciones y de continuar con el desarrollo del sistema de habilidades profesionales de la disciplina al tener los estudiantes que explicar y evaluar el proceso de resolución de los ejercicios y problemas asignados. Luego, retomando el problema cinco y reanalizando las diferentes vías de solución encontradas se centra la atención en la fórmula que, por analogía a lo estudiado en la Geometría Analítica del plano, fue intuida para el cálculo de la distancia entre dos puntos y para la determinación de las coordenadas del punto medio de un segmento en el espacio, cuya veracidad no está demostrada, por lo que se plantea el problema geométrico de demostración del siguiente teorema:

- Sean $R = \left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k} \right)$ un sistema de coordenadas cartesianas del espacio, $P_1(x_1; y_1; z_1)$ y

$P_2(x_2; y_2; z_2)$ dos puntos asociados a ese sistema. Se cumple que:

$$\square d(P_1; P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \dots(1)$$

$$\square M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \quad \dots(2), \text{ donde } M \text{ es el punto medio del segmento } \overline{P_1P_2}.$$

La resolución de este problema geométrico se sugiere que se realice por equipos de trabajo para que se propicie un ambiente de intercambio de ideas, opiniones, valoraciones y vías de solución entre los estudiantes. De los conocimientos que tiene el estudiante del tema uno sobre la determinación de las coordenadas de un vector conocidos sus extremos y sobre la fórmula para el cálculo del módulo de un vector, si al segmento $\overline{P_1P_2}$

se le asocia el vector $\vec{P_1P_2}$ ó $\vec{P_2P_1}$ y se le aplica la fórmula para el cálculo del módulo, el problema quedará resuelto y se obtendrá la fórmula (1). De los conocimientos del tema uno referidos a la caracterización de la

colinealidad entre vectores el estudiante puede inferir que $\vec{P_1M} = \frac{1}{2}\vec{P_1P_2}$ ó $\vec{MP_2} = \frac{1}{2}\vec{P_1P_2}$ y obtener la

fórmula (2). Luego, se pasa a la discusión de los problemas planteados donde se explica y evalúa el proceso de solución de los mismos. Seguidamente, retomando los problemas dos, inciso c y el problema cinco, inciso d, se plantea el problema geométrico de deducción del teorema sobre la determinación de las coordenadas de un punto que divide a un segmento en una razón dada, a través del planteamiento del siguiente problema, que se realizará por equipos de trabajo:

- Sean $R = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio, $P_1(x_1; y_1; z_1)$ y $P_2(x_2; y_2; z_2)$ los extremos del segmento $\overline{P_1P_2}$. Deduzca una fórmula para la determinación de las coordenadas de un punto $N(x; y; z)$ que divide a dicho segmento en una razón λ , $\lambda \in \mathfrak{R}$. Formule el teorema que resulta de esta deducción.

De los conocimientos que del tema uno tienen los estudiantes sobre la caracterización de la colinealidad entre vectores y procediendo de manera análoga a como se hizo en el problema anterior, se puede inferir que

$\vec{P_1M} = \lambda \vec{P_1P_2}$ ó $\vec{MP_2} = \lambda \vec{P_1P_2}$ y aplicando las operaciones con vectores llegar a la fórmula deseada y formular el teorema correspondiente. Seguidamente se procede a la discusión del problema y se analiza que la

fórmula para la determinación de las coordenadas del punto medio de un segmento se obtiene de la fórmula deducida haciendo, $\lambda = \frac{1}{2}$. Luego, mediante la valoración de estos resultados, mediante la conversación

heurística se propicia que el estudiante llegue a la conclusión de que las fórmulas para la determinación de la distancia entre dos puntos, de las coordenadas del punto medio de un segmento y de las coordenadas de un punto que divide a un segmento en una razón dada en el plano se pueden deducir de las fórmulas estudiadas en esta clase. En la misma se proponen ejercicios para fijar los teoremas y procedimientos estudiados, seleccionados de las bibliografías orientadas o elaborados por el profesor. Como trabajo independiente de esta clase se orientan otros ejercicios para que el estudiante continúe fijando el contenido estudiado, así como el reanálisis de los problemas del sistema de problemas para valorar cuáles de ellos pueden ser resueltos total o parcialmente con los nuevos contenidos adquiridos; además, se propone la búsqueda bibliográfica de la definición del concepto general de ecuación de una figura, de la esencia del método de coordenadas y el estudio de ejemplos del planteamiento analítico de figuras, ya que los conocimientos y habilidades previos que poseen los estudiantes se lo permiten. Estos últimos aspectos serán objeto de análisis, discusión y control al comienzo de la clase teórico – práctica número dos, en la que se propone abordar el contenido referido a las ecuaciones generales y paramétricas del plano y a las relaciones de posición entre dos planos. En la misma retomando los problema seis, inciso b) y siete, en los que los estudiantes encontraron limitaciones para determinar las ecuaciones de un plano y para reconocer qué condiciones se deben cumplir en las relaciones de posición entre dos planos se motiva y se orienta hacia los objetivos y contenidos de esta clase. Luego, del análisis, discusión y control del trabajo independiente y fundamentalmente sobre la base de la definición del concepto general de ecuación de una figura, de la esencia del método de las coordenadas, de los ejemplos que sobre el planteamiento analítico de figuras estudiaron los estudiantes, así como teniendo en cuenta la noción, que sobre ecuación general y paramétrica del plano, éstos tienen cuando se enfrentaron al intento de resolución de los problemas dos y tres del sistema de problemas, se propone la resolución y discusión de los siguientes problemas geométricos de deducción de las ecuaciones general y paramétrica del plano, a partir de dos de los métodos geométricos del planteamiento del plano, los que pueden resolverse mediante el trabajo en equipos o el trabajo individual según las características de los estudiantes.

Problema 1: Sean R un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio, M_0 cierto punto del espacio, \vec{a} y \vec{b} dos vectores no colineales y α el plano que pasa por el punto M_0 y es paralelo a los vectores dados. Obtener la ecuación paramétrica del plano α en el sistema de coordenadas R .

Problema 2: Sean R un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio, M_0 cierto punto del espacio, \vec{n} un vector no nulo y α un plano que pasa por M_0 y es perpendicular al vector dado. Obtener la ecuación general del plano α en el sistema de coordenadas R .

Sobre la base de la resolución y discusión de estos problemas se precisan las condiciones necesarias y suficientes para la obtención de cada una de las ecuaciones que permitan la formulación de los teoremas correspondientes por parte de los estudiantes.

Continuando con el análisis de las limitaciones para resolver el problema siete se presta atención hacia la relación de posición entre dos planos. En un diálogo con los estudiantes se recuerda de la Geometría Sintética del espacio las diferentes relaciones de posición entre dos planos y sobre la base de estos aspectos se plantea la resolución y discusión del siguiente problema geométrico de deducción de las condiciones que caracterizan la relación de posición entre dos planos:

Problema 3: Sean los planos $\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Deduce las condiciones que se deben establecer entre los coeficientes A_1, B_1, C_1, D_1 de la ecuación del plano α y los coeficientes A_2, B_2, C_2, D_2 de la ecuación del plano β para que:

- α y β sean paralelos no coincidentes.
- α y β sean paralelos coincidentes.
- α y β se corten según una recta.
- α y β sean perpendiculares.

Este problema el estudiante lo resuelve aplicando tanto los contenidos recibidos en el tema uno sobre colinealidad y perpendicularidad entre vectores como los contenidos recibidos en Álgebra sobre el teorema de Kronecker – Capelli relacionado con las soluciones de sistemas de ecuaciones.

Mediante la explicación y evaluación del proceso de solución de este problema se precisan las condiciones necesarias y suficientes de la relación de posición entre dos planos que permitan que el estudiante formule los teoremas correspondientes. Luego, se ejemplifican los procedimientos y conocimientos estudiados y se propone una variada ejercitación para la fijación de los mismos. Como trabajo independiente se proponen otros ejercicios de fijación, se orienta continuar con el intento de resolución de los problemas del sistema de problemas para experimentar el avance en la solución de los mismos con la aplicación de los contenidos

nuevos que se adquirieron en esta clase; además, se orienta el estudio de los casos particulares de la ecuación del plano, la representación de planos en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, la deducción de las fórmulas para el cálculo de la distancia de un punto a un plano y del ángulo entre dos planos y la resolución de ejercicios para la fijación estos contenidos, lo que se analizará, discutirá y controlará en la clase teórico – práctica número tres. En esta última se propone abordar el contenido referido a las ecuaciones canónica o simétrica, paramétrica y general de la recta en el espacio, las posiciones relativas entre rectas en el espacio y entre rectas y planos. En la misma luego de la revisión, discusión y control del trabajo independiente se retoman los problemas cinco, siete y nueve con el fin de que el estudiante explique cuáles son las limitaciones que presentó en el intento de resolución de los mismos y de esta forma orientar hacia los objetivos y contenidos de la clase comenzándose la misma con la resolución y discusión del siguiente problema geométrico de deducción del teorema sobre la ecuación paramétrica de la recta en el espacio.

Problema 1: Sean R un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio, M_0 cierto punto de una recta r y \vec{a} un vector no nulo paralelo a esa recta. Deducir la ecuación paramétrica de la recta r .

De la discusión de este problema también se deduce la ecuación canónica o simétrica de la recta en el espacio y se formulan los teoremas correspondientes; además se reflexiona sobre la obtención de las ecuaciones cartesiana y paramétrica de la recta en el plano a partir de las ecuaciones de la recta en el espacio.

La ecuación general de la recta en el espacio se propone abordar a través de la resolución y discusión del siguiente ejercicio de demostración:

Problema 2: Sea $R = \left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k} \right)$ un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio y sean α_1 y α_2

dos planos de ecuaciones $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, respectivamente, tal que

el rango $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$. Demuestra que el sistema: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ - representa una recta

en el espacio.

Para abordar lo referente a las posiciones relativas entre dos rectas en el espacio se propone la resolución y discusión del siguiente problema de deducción de teoremas:

Problema 3: Sean r_1 y r_2 dos rectas en el espacio; la recta r_1 pasa por el punto M_1 y tiene vector director \vec{a}_1 y la recta r_2 pasa por el punto M_2 y tiene vector director \vec{a}_2 . Deduce las relaciones que se pueden establecer entre

los vectores \vec{a}_1, \vec{a}_2 y $\vec{M}_1\vec{M}_2$ para que las rectas r_1 y r_2 :

- Se corten.
- Sean alabeadas.
- Sean paralelas coincidentes.
- Sean paralelas no coincidentes.

De la resolución y discusión de este problema se formulan los teoremas correspondientes a las posiciones relativas de dos rectas en el espacio. Para la fijación de los contenidos estudiados en la clase se realizan ejemplificaciones y se propone una variada ejercitación. Como trabajo independiente de esta clase se orienta la búsqueda bibliográfica sobre la caracterización de la relación de posición entre rectas y planos, la distancia de un punto a una recta en el espacio, el ángulo entre rectas y entre rectas y planos, la representación de rectas en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares a partir de sus ecuaciones generales, la determinación y representación de los planos proyectantes de una recta en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, así como reactivar todos los contenidos relacionados con la Geometría Analítica de la recta en el plano, para ser discutidos y analizados en la clase teórico – práctica número cuatro.

En esta última clase teórico – práctica se propone la discusión, el análisis y control del trabajo independiente asignado en la clase anterior, se resolverán ejercicios para fijar los contenidos abordados en el mismo y se aclararán las dudas que aún puedan existir sobre el contenido tratado en el tema. Como trabajo independiente de la clase se orienta el estudio independiente de los contenidos abordados en el tema, así como la propuesta de una variedad de ejercicios preparatorios para que los estudiantes continúen fijando, a través de estos, dichos contenidos y así se preparen para enfrentarse a las clases de resolución, discusión de problemas y a las de profesionalización.

En la primera clase de resolución de problemas toda la atención se centrará en la culminación de la resolución del sistema de problemas propuesto para la asignatura y, en particular, de los problemas relacionados con el tema que se aborda, los que se analizarán en la primera clase de discusión de problemas. En las clases de resolución de problemas la orientación del trabajo independiente se centrará fundamentalmente en la preparación de los estudiantes para la explicación y evaluación de las estrategias de trabajo utilizadas en el proceso de solución de los problemas propuestos en las mismas, que se realizará en las clases de discusión de problemas que les suceden a éstas. La orientación del trabajo independiente en las clases de discusión de

problemas se centrará fundamentalmente en la propuesta de actividades tanto teórico como prácticas de carácter diferenciado de acuerdo a las insuficiencias y potencialidades detectadas en los estudiantes en el proceso de resolución de los problemas. En estas clases de este tema se propondrán problemas de deducción y demostración de teoremas, de cálculo, de demostración, de determinación y problemas vinculados a otras ciencias y a la práctica social.

En las clases de profesionalización se orientará el diseño de actividades para resolver problemas de la Matemática escolar sobre demostración y deducción de teoremas, problemas de cálculo, demostración, determinación, vinculados a otras ciencias y a la práctica social, que se han resuelto y discutido en las clases anteriores.

CONCLUSIONES

En este trabajo se han expuesto algunos de los aportes teóricos y prácticos principales que fueron producto de una investigación científica ardua con la que se pretende que el profesional de la carrera Matemática – Física esté en mejores condiciones de enfrentarse al proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática escolar.

BIBLIOGRAFÍA

1. Almeida Carazo, Bernardino A. y José T. Borges Echevarría: Didáctica de la resolución de problemas en la escuela media. Editorial Academia. Revista Promet. La Habana. 1999.
2. Campistrous Pérez, Luis: Aprender a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1996.
3. Campistrous Pérez, Luis y Celia Rizo Cabrera: Algunas técnicas para resolver problemas aritméticos. Pedagogía 99. La Habana. 1999.
4. Delgado, J: La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos para lograr su eficacia: La estructuración del conocimiento y el desarrollo de habilidades. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. ISPJAE. Ciudad de La Habana. 1999.
5. Fridman M. L: Metodología para enseñar a los estudiantes del nivel superior a resolver problemas matemáticos. México. 1993.
6. Fridman M. L y Turetski, E: Cómo aprender a resolver problemas. Editorial Ilustración. Moscú. 1989.
7. García La Rosa, Juan Enrique: Un sistema de habilidades profesionales para la disciplina Geometría de la carrera Matemática – Computación en los Institutos Superiores Pedagógicos en función de la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas geométricos de la Matemática escolar. Tesis doctoral. Santiago de Cuba. 2002.
8. Schoënfeld, A: Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas. En Separata del libro “La enseñanza de la Matemática a debate”, pp. 13 – 46. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid. 1985.
9. _____: Ideas y tendencias en la resolución de problemas. En Separata del libro “La enseñanza de la Matemática a debate”, pp. 7 – 12. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid. 1985.
10. _____: La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. Revista Currículo y Cognición. 1992.